

Tomáš Tichý*

Výkonnost replikace digitálních opcí při neúplném modelu

Abstract

Digital options are financial derivatives allowing the trader to decompose the payoff of more complicated derivatives. The payoff of these contracts is all or nothing. Therefore, contracts of this type are suitable especially to hedge exotic derivatives with any discontinuity in the payoff function. The paper provides the two most common ways to replicate the payoff of these contracts – static and dynamic replication. Both methods are compared in discrete environment and subsequently studied for the case of incomplete model. To be more exact, we suppose (i) stochastic volatility of underlying asset returns and (ii) the negative skewness plus positive excess kurtosis of underlying returns.

1. Úvod

Jednou z hlavních úloh finančních institucí je přebírání rizika od subjektů, které jej nejsou ochotny akceptovat. Děje se tak například prostřednictvím nabídky různých finančních derivátů. Je však zcela zřejmé, že i finanční instituce musejí přebírané riziko určitým způsobem řídit.

Jedním z aktiv, které umožňuje dekompozici mnoha složitých finančních derivátů s nespojitou výplatou jsou digitální opce, viz Andresen *et al* (2002), Carr a Chou (1997) nebo Carr *et al* (1998). Základním předpokladem úspěšného řízení rizika složitějších derivátů je tedy možnost dostatečně přesně replikovat výplatu digitálních opcí. Replikací je obecně myšleno vytvoření takového portfolia, které bude mít stejné charakteristiky (hodnota, výplata, riziko) jako cílená struktura.

Za předpokladu dokonalého trhu i modelu by replikace neměla představovat problém. Na reálných finančních trzích však dochází k výskytu různých nedokonalostí, které replikaci více či méně komplikují. Jedná se například o nespojitost obchodování s konečným počtem aktiv, která nejsou nekonečně dělitelná, existenci transakčních nákladů, nedostatečné informace ohledně

* Ing. Tomáš Tichý, Ph.D.

katedra financí,

Ekonomická fakulta VŠB – TU Ostrava,

Sokolská 33, 701 21 Ostrava

¹ Významná část tohoto příspěvku vznikla v rámci projektu Grantové Agentury České Republiky, GAČR: 402/05/P085. Některé algoritmy vznikly v rámci projektu GAČR: 402/04/1357.

podkladového procesu včetně neznámé (stochastické) volatility, která způsobuje neúplnost modelu, výskyt skoků apod.

Cílem tohoto článku je ověřit výkonnost jednoduché dynamické a statické replikace digitálních opcí při diskrétním obchodování a (i) stochastické volatilitě nebo (ii) odlišném (neznámém) charakteru podkladového procesu. V obou případech bude jediným známým modelem, tedy tím, který je možné aplikovat při replikaci, BS model (Black a Scholes, 1973). Skutečný vývoj podkladového procesu bude v prvním případě modelován dle HW modelu (Hull a White, 1987) a ve druhém případě dle VG modelu (Madan *et al.*, 1998). To způsobí neúplnost replikačního modelu.

Postup je následující: Nejdříve je uvedeno základní členění digitálních opcí včetně principu jejich ocenění v rámci BS modelu. Následně je stručně popsána dynamická replikace, opět v rámci BS modelu, a statická dekompozice. Posléze jsou definovány jednotlivé zde aplikované procesy. Konkrétně se jedná o Brownův geometrický pohyb, Variance gama proces a HW model (proces stochastické volatility). Za účelem srovnání obou metod je v 5. a 6. kapitole realizováno 10 000 náhodných scénářů vývoje ceny podkladového aktiva. Tyto náhodné cesty jsou vždy rozčleněny tak, že získáme 5 různých typů cest – s cenou měnící se jednou za 1h, 6h, 24h a 120h, přičemž je předpokládán 24 hodinový obchodní den. Životnost studované opce je 25 dnů.

2. Digitální opce a jejich ocenění

Opce je obecně myšlen finanční derivát nelineárního typu, který umožňuje ve stanoveném čase straně s dlouhou pozicí (vlastník opce) její využití, což může být spojeno s různými, předem stanovenými podmínkami ovlivňujícími výplatní funkci (zaplacení realizační ceny, dosažení stanovené meze cenou podkladového aktiva apod.). Jestliže je opce uplatnitelná po celou dobu své životnosti, jedná se o opci amerického typu. Opce evropského typu pak je uplatnitelná jen v době zralosti (při konci své životnosti). Obecně, opce, jejíž vlastník disponuje právem koupit podkladové aktivum, se označuje jako *call* (tj. kupní) opce. Je-li s opcí spojeno právo prodeje podkladového aktiva, jedná se o *put* (prodejní) opci. Opce, jejichž výplatní funkce je složitější, jsou označovány jako opce exotické. Závisí-li výplata na vývoji ceny podkladového aktiva v průběhu životnosti opce, a ne jen ceně aktuální, hovoříme o PD opcích (*path-dependent*).

Základní typy digitálních opcí

Držitel digitální call opce obdrží výplatu v případě, že spotová cena S podkladového aktiva dosáhne ceny realizační K . Výplatu může představovat dohodnutá částka Q , vybrané aktivum nebo může být určena jiným způsobem. Opce lze dohodnout tak, že k výplatě dojde, pokud S dosáhne K kdykoliv během časového úseku τ (jednalo by se v podstatě o PD opci typu knock-in), nebo jen pokud tato skutečnost nastane v době zralosti opce (tj. bariéra je aktivní jen

v okamžiku \mathcal{T}). Důležitou charakteristikou je skutečnost, že výplata nezávisí na částce, o kterou hodnota S přesáhne \mathcal{K} . Výplata je buď vše, anebo nic.

Nejjednodušším příkladem digitální opce je **cash-or-nothing** call. Držiteli této opce bude vyplacena dohodnutá částka Q , pokud v čase \mathcal{T} přesáhne hodnota S realizační cenu \mathcal{K} . Ať už bude cena podkladového aktiva v době realizace jakkoliv vyšší než \mathcal{K} , bude ve všech případech výplata odpovídat stejné částce Q .

Výplatu call opce $\Psi_{call}^{dig-cash}$ pak můžeme zapsat:

$$\Psi_{call}^{dig-cash}(S_{\mathcal{T}}, \mathcal{K}; Q) = \begin{cases} Q & \text{jestliže } S_{\mathcal{T}} \geq \mathcal{K} \\ 0 & \text{jestliže } S_{\mathcal{T}} < \mathcal{K} \end{cases} \quad (1)$$

Je zřejmé, že vzroste-li cena podkladového aktiva nad stanovenou realizační cenu v čase $t_1 = 0.74$ a udrží se zde až po $t_2 = 0.92$ a následně klesne, bude výplata všech opcí jejichž doba zralosti $\mathcal{T} \in \langle t_1; t_2 \rangle$ stejná ve výši Q . Oproti tomu opce s $\mathcal{T} \geq t_2$ budou mít nulovou výplatu. Pokud by se jednalo o opci bariérového typu knock-in, bude platit rovnost výplaty pro všechny opce s $\mathcal{T} \geq t_1 = 0.74$.

Jiným případem digitální opce je **asset-or-nothing**, jejíž výplata není pevná částka Q , ale hodnota aktiva v době realizace opce. Složitějším příkladem binárních opcí jsou tzv. **gap** opce, tj. opce, které mají ve své výplatě mezeru, někdy spojované s předchozím případem. Vztah mezi $\mathcal{V}_{call}^{dig-asset}$ a $\mathcal{V}_{call}^{dig-cash}$ je rovněž možné zapsat následující paritou,

$$\mathcal{V}_{call}^{dig-asset}(\tau; S, \mathcal{K}; S) = \mathcal{K} \cdot \mathcal{V}_{call}^{dig-cash}(\tau; S, \mathcal{K}; Q = 1) + \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; S, \mathcal{K}) \quad (2)$$

Ocenění digitálních opcí

Digitální opce typu cash-or-nothing má výplatu rovnu předem stanovené částce Q . Proto bude její počáteční hodnota určena současnou hodnotou této částky váženou pravděpodobností, že dojde k uplatnění opce. Při rizikově neutrálním ocenění se bude jednat o rizikově neutrální pravděpodobnost dosažení realizační ceny \mathcal{K} a diskontování k počátku bude probíhat bezrizikovou sazbou r . Představuje-li $N(d_-)$ pravděpodobnost, že dojde k uplatnění opce, tj. že $S_{\mathcal{T}}$ dosáhne minimálně stanovené výše \mathcal{K} , tak lze pro cenu opce psát,

$$\mathcal{V}_{call}^{dig-cash} = Q \cdot e^{-r\tau} \cdot N(d_-) \quad (3)$$

Cenu put opce $\mathcal{V}_{put}^{dig-cash}$ lze získat obdobně. V rámci BS modelu představuje $N(d_-)$ pravděpodobnost, že náhodné číslo z $\mathcal{N}(0;1)$ bude menší než d_- , kde

$$d_- = \frac{\ln(S/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}. \quad (4)$$

Hodnota call opce $\mathcal{V}_{call}^{dig-asset}$ v čase t bude závislá na hodnotě aktiva očekávané v čase \mathcal{T} . V podstatě se tedy vychází z hodnoty příslušného kontraktu futures se splatností v čase \mathcal{T} . A tedy,

$$\mathcal{V}_{call}^{dig-asset} = S \cdot e^{-q \cdot \tau} \cdot N(d_+). \quad (5)$$

3. Replikace digitálních opcí

Z hlediska počtu revízi replikačního portfolia v čase lze rozlišit dynamickou a statickou replikaci. Dynamická replikace je založena na sestavení replikačního portfolia $\mathcal{H}(\mathcal{B}, S)$ ze dvou aktiv, aktiva bezrizikového (bezriziková obligace, běžný účet apod.) a rizikového (zpravidla podkladového). Po celou dobu životnosti (replikace) je nutné upravovat množství obou aktiv v portfoliu tak, aby vždy bylo možné očekávat, že se replikační portfolio bude v následujícím časovém úseku chovat stejně jako replikované aktivum.

V rámci **BS modelu** lze replikační portfolio $\mathcal{H}(\mathcal{B}, S)$ sestavit takto

$$\mathcal{H}_t = x_t \cdot \mathcal{B}_t + \Delta_t \cdot S_t, \quad \text{p} \quad \Delta = \frac{\partial f}{\partial S}, \quad x_0 \cdot \mathcal{B}_0 = f_0 - \Delta_0 \cdot S_0 \quad (6)$$

a

(7)

Problém metody se projeví v blízkosti realizační ceny. Zde není jasné, zda opce bude uplatněna či ne a rozmístění replikačního kapitálu mezi obě aktiva se může výrazně měnit i v nekonečně krátkých úsecích.

Jak je zřejmé z definice digitálních opcí, výplatou je buď „vše“, anebo „nic“. Výplata je nespojitá pro $S_{\mathcal{T}} = K$ a jeví se jako vhodné aproximovat její hodnotu pomocí **statické pozice** v jiných aktivech. Tedy tak, aby nebyla nutná neustálá úprava množství aktiv v portfoliu.

Uvažujme digitální call opci $f = \mathcal{V}_{call}^{dig-cash}(\tau; S, \mathcal{K}; Q)$, přičemž $Q = 1$. Této výplaty lze dosáhnout při sestavení spreadu z běžných opcí, jejichž realizační cena se liší o Q . Uvažujme portfolio

$$\mathcal{H}_{\{X-1; -X\}}^{vanilla\ call} = \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; S, \mathcal{K} - 1) - \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; S, \mathcal{K}). \quad (8)$$

Toto portfolio bude replikovat výplatu $\Psi_{call}^{dig-cash}(\tau; S, \mathcal{K}; Q)$ pro všechny hodnoty z intervalu $S_{\mathcal{T}} \in (0; \mathcal{K} - 1) \vee (\mathcal{K}; \infty)$. Pro doplňující rozmezí bude výplata \mathcal{H} vyšší než f , tj.

$$\Pr(\mathcal{H}_{\mathcal{T}} \geq f_{\mathcal{T}}) = 1.$$

Jedná se proto o superreplikační portfolio a jeho výchozí hodnota musí být vyšší. Alternativně,

$$\Pr(\mathcal{H}_{\mathcal{T}} \leq f_{\mathcal{T}}) = 1, \quad \mathcal{H}_{\{\mathcal{K}; -(\mathcal{K}+1)\}}^{vanilla\ call} = \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; S, \mathcal{K}) - \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; S, \mathcal{K} + 1). \quad (9)$$

Toto portfolio je subreplikující, jeho výchozí hodnota je nižší a úspěšný interval je $S_{\mathcal{T}} \in (0; \mathcal{K}) \vee (\mathcal{K} + 1; \infty)$.

Komplexnější přehled opčních replikačních metod uvádí například Tichý (2004).

4. Stochastické procesy a jejich modelování

Základní složkou, která je využívána při modelování finančních procesů, je tzv. Wienerův proces w_{dt} . Ten lze zpravidla zapsat jako $w_{dt} = \tilde{\varepsilon}_1 \cdot \sqrt{dt}$, kde $\tilde{\varepsilon}_1$ je náhodný prvek z normovaného normálního rozložení, tj. $\tilde{\varepsilon}_1 \in \mathcal{N}[0; 1]$ a dt představuje nekonečně malý časový úsek. Klasickým modelem, využívaným při modelování vývoje ceny finančních aktiv je Brownův geometrický pohyb. Vychází se z předpokladu, že dynamiku ceny aktiva lze zachytit pomocí následující stochastické diferenciální rovnice:

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot w_{dt}, \quad (10)$$

kde S je cena finančního aktiva, dS je její přírůstek za časový interval dt , μ je spojitý výnos ceny a σ je jeho volatilita, přičemž μ i σ jsou považovány za deterministické parametry. Vztah popisující vývoj ceny aktiva v čase lze získat řešením rovnice (10). A tedy aplikací Itôovy lemy získáme

$$S_{t+dt} = S_t \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \sigma \cdot w_{dt}\right] \quad (11)$$

Parametr σ představuje volatilitu výnosu podkladového aktiva, která je v čase špatně měřitelná a predikovatelná. V mnoha případech je proto

odůvodněné předpokládat její stochastickou podobu. Zatímco však například ceny akcií mohou růst takřka do nekonečna, pro volatilitu toto neplatí. Zároveň lze vypořádat tendenci návratu k dlouhodobé rovnováze. Z čehož vyplývá, že je vhodné modelovat vývoj volatilitu v čase dle některého z mean-reversion procesů. Vhodným modelem je například HW model (Hull a White, 1987):

$$d\sigma = a \cdot \sigma \cdot (b - \sigma) \cdot dt + s \cdot \sigma \cdot \ddot{w}_{dt}. \quad (12)$$

Zde a určuje rychlost návratu volatilitu σ k dlouhodobé rovnováze b , s je volatilita volatilitu a $\ddot{w}_{dt} = \tilde{\varepsilon}_2 \cdot \sqrt{dt}$, přičemž $\tilde{\varepsilon}_2 \in \mathcal{N}[0;1]$ a $\text{cov}(\tilde{\varepsilon}_1; \tilde{\varepsilon}_2) = 0$.

Za účelem ověření budoucího vývoje ceny aktiva lze provést jeho simulaci na základě aplikace metody Monte Carlo. Uvažujme proces dle vztahu (11). Označme Δt jako diskrétní změnu času a n jako n -tý generovaný scénář budoucího vývoje z celkového počtu N náhodných cest. Pak

$$S_{t+\Delta t}^{(n)} = S_t^{(n)} \cdot \exp(\Delta S_{\Delta t}^{(n)}) = S_t \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \sigma \cdot \tilde{\varepsilon}_1^{(n)} \cdot \sqrt{dt}\right], \quad n = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Doplňme, že pro získání relevantního odhadu musí být N dostatečně velké. Obdobným způsobem lze získat i vývoj stochastické volatilitu. Konkrétně tedy dle Eulerovy aproximace:

$$\sigma_{t+\Delta t}^{(n)} = \sigma_t + \sigma_{\Delta t}^{(n)} = a \cdot \sigma_t \cdot (b - \sigma_t) \cdot \Delta t + s \cdot \sigma_t \cdot \tilde{\varepsilon}_2^{(n)} \cdot \sqrt{\Delta t}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Modelování šikmosti a špičatosti

Výše uvedený Brownův geometrický pohyb (11) vychází z předpokladu, že výnosy cen finančních aktiv obecně vykazují charakteristiku normálního rozložení pravděpodobnosti. Avšak mnohé klasické empirické práce (viz například Fama (1965)) tento předpoklad vyvrátily. Naopak upozornily na existenci dodatečné špičatosti a šikmosti. Následkem finančních krizí 80. a 90. let a v důsledku postupující globalizace došlo k dalšímu nárůstu „nenormálnosti“ výnosů. Skupinu několika modelů, které umožňují modelovat jak šikmost, tak špičatost, lze zařadit mezi tzv. Lévyho procesy. Tyto procesy jsou zpravidla definovány jako procesy složené, a v mnoha případech jsou založeny na skocích, které se vyskytují s nekonečnou intenzitou.

Jedním z neznámějších modelů, spadajících do této skupiny, je VG proces (Variance Gamma process, Madan a Seneta (1990) a Madan *et al* (1998)). VG proces s parametry $\{\theta, \vartheta, \nu\}$ je definován jako Brownův geometrický pohyb řízený

gama procesem $g(t)$, tj. namísto klasického času t zde vystupuje určitý umělý gama čas.² Ten lze chápat ve vztahu k frekvenci či intenzitě obchodování.

² VG proces lze alternativně definovat jako rozdíl mezi dvěma gama procesy.

Přitom $\tilde{g}(t) \in \mathcal{G}[\frac{t}{\nu}; \nu]$ a náhodná složka $\tilde{w}_{g(t)} \in \mathcal{N}[\theta \cdot g(t); \mathcal{G}^2 \cdot g(t)]$.

Potom lze VG proces s parametry $\{\theta, \mathcal{G}, \nu\}$ definovat takto:

$$\mathcal{V}\mathcal{G}(t) = \theta \cdot g(t) + \mathcal{G} \cdot \sqrt{g(t)} \cdot \tilde{\varepsilon}_3. \quad (15)$$

Zde θ představuje drift procesu (a primárně řídí šikmost), \mathcal{G} určuje volatilitu, $\tilde{\varepsilon}_3 \in \mathcal{N}[0;1]$ a $g(t)$ je gama proces s parametry $\mathcal{G}[\frac{t}{\nu}; \mathcal{K}]$, kde t je skutečný čas a ν primárně řídí špičatost procesu. Za účelem simulování náhodného vývoje je tedy třeba vygenerovat dvourozměrný vektor náhodných čísel, $\{\tilde{g}; \tilde{\varepsilon}\}$, kde $\{\tilde{g} \in \mathcal{G}[\frac{t}{\nu}; \nu]; \tilde{\varepsilon} \in \mathcal{N}[0;1]\}$, přičemž $\text{cov}(\tilde{g}; \tilde{\varepsilon}_3) = 0$.

Za účelem zjištění ceny pak

$$S_{t+\Delta t}^{(n)} = S_t^{(n)} \cdot \exp(\Delta S_{\Delta t}^{(n)}) = S_t \cdot \exp[(\mu - \omega) \cdot dt + \mathcal{V}\mathcal{G}_{\Delta t}], \quad n = 1, \dots, N, \quad (16)$$

kde $\omega = -\frac{1}{\nu} \cdot \ln\left(1 - \theta \cdot \nu - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{G}^2 \cdot \nu\right)$ zajišťuje, že $E[S_{t+\Delta t}] = E[S_t \cdot \exp(\mu \cdot \Delta t)]$.

5. Ověření dynamické replikace

V této i následující části budeme uvažovat jednotkovou **digitální call opci** s těmito parametry:

$$f = \mathcal{V}^{dig/cash}_{call} (\tau = 0.1; S_0 = \mathcal{K} = 100; \mu = r = 0.1; \sigma = 0.15; Q = 1).$$

Připomeňme, že výplata opce není odvozena od vzdálenosti ceny podkladového aktiva a realizační ceny, ale je v případě uplatnění konstantní pro všechna \mathcal{S} . Předpokládejme finanční subjekt (dále *Subjekt*), jehož cílem je replikovat výplatu vystavené digitální opce f co nejefektivněji, tj. s minimálním potencionálním rozdílem mezi výplatou opce f a hodnotou replikačního portfolia.

Varianta 1 - Úplný model

Předpokládejme nejdříve, že se cena podkladového aktiva vyvíjí ve shodě s BS modelem dle Brownova geometrického procesu (13). Zvolený finanční derivát tedy replikujeme pomocí dynamického obchodování s podkladovým aktivem na základě vztahu pro cenu opce (3) a parametr delta (6), přitom $\mathcal{H}_0 = f_0 = 0.5685$ a $\Delta_0 = 0.0818$. Vývoj ceny podkladového aktiva pro jednotlivé scénáře získáme dle simulace Monte Carlo:

$$S_{t+\Delta t}^{(n)} = S_t^{(n)} \cdot \exp(\Delta S_{\Delta t}^{(n)}) = S_t \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \sigma \cdot \tilde{\varepsilon}_1^{(n)} \cdot \sqrt{\Delta t}\right], \quad n = 1, \dots, N.$$

Zde N představuje n -tou cestu náhodného vývoje, $n = 1, \dots, N$, $N = 10\,000$.

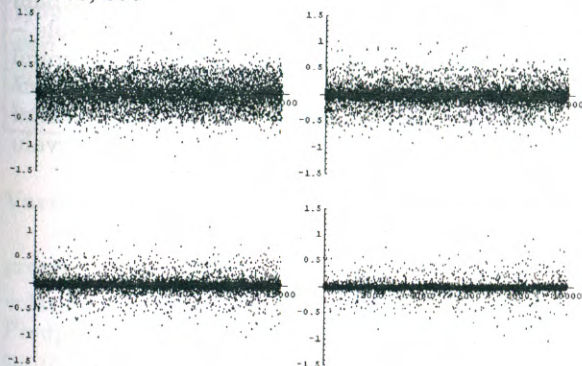
Označme M jako množství intervalů, $M = \tau / \Delta t$. Dále předpokládejme, že váhy aktiv v replikačním portfoliu budou upravovány ve čtyřech různých intervalech. Konkrétně se jedná o interval týdenní, denní, 6-hodinový a hodinový. Proto postupně $M = 5, 25, 100, 600$.

Zjištěné hodnoty studovaných parametrů pro jednotlivé intervaly rebalancování jsou zřejmé z Tab. 1 a Obr. 1. Dle grafické prezentace jsou jednotlivé body rozmístěny souměrně, zcela zřejmě okolo nuly. Se zkracujícím se intervalem dochází k snižování rozptylu. Stále jsou však patrný extrémní výsledky.

Tyto závěry jsou potvrzeny dle konkrétních hodnot v Tab. 1. Střední hodnota i medián jsou velmi blízké nule, šikmost je nepatrná, špičatost pak nepřímou úměrnou intervalu rebalancování. Zatímco směrodatná odchylka chyby významně klesá s intervalem rebalancování, krajní hodnoty chyby zůstávají téměř nezměněny a pohybují se okolo jedné. Dále je třeba připomenout, že jedna je zároveň maximální výplata opce.

V Tab. 1 jsou rovněž uvedeny kvantily pro $\alpha = 5\%, 10\%, 90\%, 95\%$. Například při úpravě vah v portfoliu čtyřikrát denně bude chyba s 10% pravděpodobností rovna nebo nižší než -0.085 , což odpovídá 15% z výchozí ceny. V případě obchodování každou hodinu to je sice asi 6% z výchozí ceny, ale vzhledem k extrémní špičatosti zůstává pravděpodobnost krajních výsledků velmi výrazná. Ty jsou přibližně stejné jako při méně častém rebalancování.

Obrázek 1: Replikační chyba dynamické replikace digitální ATM call opce, $M = 5, 25, 100, 600$



Tabulka 1: Charakteristiky replikační chyby dynamické replikace digitální ATM call opce

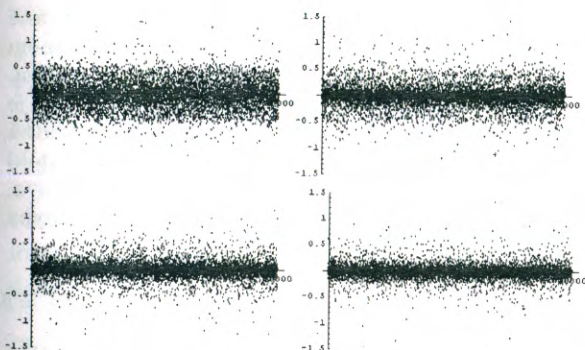
<i>M</i>	<i>min</i>	<i>Max</i>	šířkost	špičatost	Pr() = 0.05	Pr() = 0.1
týden	-1.187	1.255	0.040	3.408	-0.420	-0.327
den	-0.949	1.008	0.056	6.739	-0.305	-0.183
6hodin	-0.996	1.141	-0.090	14.296	-0.165	-0.085
hodina	-1.039	0.985	-0.179	35.708	-0.071	-0.035
<i>M</i>	σ	σ^2	medián	Pr($\Pi > f$)	Pr() = 0.95	Pr() = 0.9
týden	0.243	0.059	-0.003	0.504	0.411	0.318
den	0.173	0.030	-0.001	0.505	0.301	0.179
6hodin	0.126	0.016	0.000	0.504	0.175	0.090
hodina	0.080	0.006	0.000	0.506	0.069	0.034

Varianta 2 – Stochastická volatilita

Jako druhý případ předpokládáme opět dynamickou replikaci dle BS modelu (viz Varianta 1). Skutečný vývoj ceny podkladového aktiva však bude modelován dle formulací (13) a (14) – tj. volatilita σ není konstantní deterministicky určený parametr, nýbrž je stochastická. Předpokládáme, že aktuální volatilita je na úrovni dlouhodobého průměru, tj. $\sigma_0 = b = 14.5\%$ p.a., rychlost $a = 16\%$ p.a. a volatilita volatility $s = 1$. Tržní ceny jsou v souladu s tímto modelem, výchozí cena pak přibližně odpovídá BS modelu.

Výsledky jsou opět zřejmé z Obr. 2 a Tab. 2. Důležité je zejména srovnání s Variantou 1. Je zřejmé, že střední hodnota i medián jsou opět blízké nule – strategii lze tedy považovat za nearbitrážní. Nepatrně vyšší však jsou krajní hodnoty replikační chyby pro všechny intervaly. Rozptyl a špičatost jsou méně citlivé na zkracující se interval rebalancování. Zatímco tedy rozptyl pro týdenní interval je obdobný při úplném i neúplném modelu, při hodinovém intervalu znamená stochastická volatilita vyšší pravděpodobnost chyby replikace.

Obrázek 2: Replikační chyba dynamické replikace digitální ATM call opce, $M = 5, 25, 100, 600$



Tabulka 2: Charakteristiky replikační chyby dynamické replikace digitální ATM call opce

M	<i>min</i>	<i>Max</i>	šikmost	špičatost	$\text{Pr}() = 0.05$	$\text{Pr}() = 0.1$
týden	-1.15291	1.65711	0.124	3.769	-0.439	-0.348
den	-1.55101	1.42682	0.164	6.975	-0.360	-0.228
6hodin	-1.22939	1.13906	-0.048	10.125	-0.251	-0.152
hodina	-1.338	1.337	0.005	13.926	-0.184	-0.117
M	σ	σ^2	mean	medián	$\text{Pr}() = 0.95$	$\text{Pr}() = 0.9$
týden	0.258	0.067	-0.006	-0.006	0.426	0.334
den	0.203	0.041	-0.003	-0.004	0.349	0.216
6hodin	0.162	0.026	0.000	-0.002	0.254	0.154
hodina	0.127	0.016	-0.001	-0.001	0.181	0.116

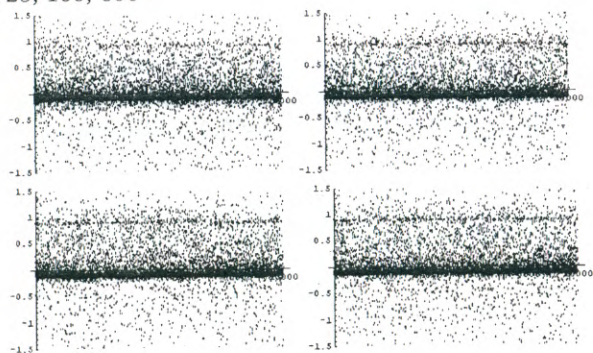
Varianta 3 – VG proces

Jako další alternativu aplikujeme na vývoj ceny podkladového aktiva VG proces s parametry $\{\theta, \varrho, \nu\} = \{-0.1436, 0.12136, 0.3\}$, což implikuje volatilitu procesu necelých 15%, šikmost -0.8 a absolutní špičatost 4.14. Předpokládejme však, že tento model není *Subjektu* k dispozici. Při replikaci je tudíž opět nutné pracovat dle BS modelu. Dále je známa tržní cena replikované digitální opce $f = 0.75$. Tato cena je sice v souladu s VG modelem, ne tak však s BS modelem. Proto se *Subjekt* rozhodl v BS modelu kalibrovat volatilitu σ tak, aby $V_{call}^{dig/cash}(\cdot, \sigma = ?) = 0.75$. Výsledkem je $\sigma = 0.045$. Další postup je

obdobný jako u Varianty 1. S tím rozdílem, že namísto Brownova geometrického pohybu je za účelem zjištění cesty ceny podkladového aktiva aplikován VG proces dle (16).

Výsledky jsou zachyceny na Obr. 3 a v Tab. 3. Pro všechny studované intervaly jsou výsledky vcelku obdobné. Je zcela zřejmé, že ve studovaném případě není metoda schopna postihnout vývoj ceny podkladového aktiva. Nedochází zde sice ke vzniku příležitosti arbitráže – střední hodnota chyby je velmi blízká nule – avšak potenciaální chyba je široce rozptýlena (směrodatná odchylka je více desítek procent) s krajními hodnotami v řádu několika (desítek) jednotek. Medián je patrně záporný, na úrovni 15 % z výchozí ceny aktiva. Vzhledem k tomu, že maximální výplata opce je 1, způsobuje takto vysoká chyba nepoužitelnost metody.

Obrázek 3: Replikační chyba dynamické replikace digitální ATM call opce, $M = 5, 25, 100, 600$



Tabulka 3: Charakteristiky replikační chyby dynamické replikace digitální ATM call opce

M	min	Max	šířkost	špičatost	$Pr() = 0.05$	$Pr() = 0.1$
týden	-12.007	4.691	-3.312	48.296	-0.679	-0.202
den	-20.601	8.832	-5.241	121.807	-0.659	-0.161
6hodin	-36.845	8.464	-15.400	541.493	-0.655	-0.162
hodina	-13.145	10.067	-2.944	60.355	-0.592	-0.160
M	σ	σ^2	mean	medián	$Pr() = 0.95$	$Pr() = 0.9$
týden	0.613	0.376	-0.003	-0.067	0.896	0.572
den	0.700	0.490	-0.010	-0.085	0.898	0.634
6hodin	0.846	0.716	-0.011	-0.087	0.908	0.675
hodina	0.631	0.398	0.010	-0.088	0.905	0.694

6. Ověření statické replikace

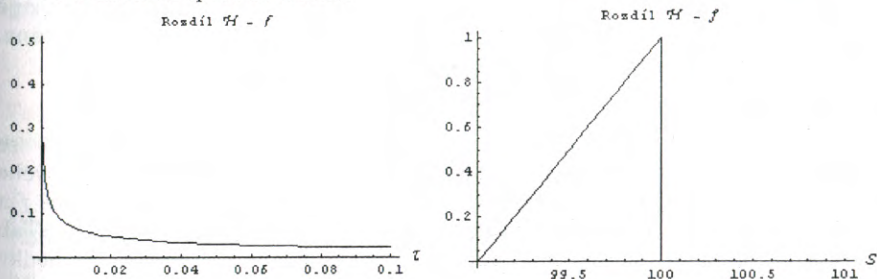
Uvažujme opět jednotkovou digitální opci se standardně nastavenými parametry, tj.

$$f = \mathcal{V}_{call}^{dig/cash}(\tau = 0.1; S_0 = K = 100; \mu = r = 0.05; \sigma = 0.15; Q = 1).$$

Tuto opci replikujeme pomocí statické pozice ve vanilla call spreadu $\mathcal{V}S = \left\{ \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(0.1; 100, 99) - \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(0.1; 100, 100) \right\}$. Jedná se tedy o superreplikující portfolio. Následující dva grafy (Obr. 4) znázorňují rozdíl hodnot v průběhu životnosti (dle BS modelu přesně, jinak přibližně) a v době zralosti (pro všechny modely). Právý graf zcela jasně popisuje teoretickou chybu pro daný interval, $S_T \in [99, 100]$. Z levého grafu je zřejmé, že se rozdíl se zkracující se dobou do zralosti zvyšuje.

Obrázek 4: Rozdíl hodnot replikačního portfolio \mathcal{H} a replikované digitální call opce f

Chyba pro různé doby do zralosti při $X = S$ (levá strana); chyba pro různá S v době zralosti (pravá strana).



Aplikace strategie je následující. V čase nula je k dispozici výtěžek (tržní cena) z vystavené digitální opce. Dále je zaujmuta dlouhá pozice v replikačním portfolio \mathcal{H} , přičemž rozdíl je pokryt bezrizikovou výpůjčkou. Portfolio zůstane po celou dobu netknuto. V konečném čase \mathcal{T} je na základě hodnoty S_T určena replikační chyba,

$$\text{Chyba replikace } \tau = -f_T + \mathcal{H}_T - (f_0 - \mathcal{H}_0) \cdot \exp(r \cdot \tau)$$

$$= -1 \cdot \mathbb{1}_{S_T \geq K} + (S_T - K - 1)^+ - (S_T - K)^+ - (f_0 - \mathcal{H}_0) \cdot \exp(r \cdot \tau).$$

Nyní je možné vyhodnotit chybu replikace pro konečnou cenu podkladového aktiva, získanou na základě realizování 10 000 náhodných cest pro stejná M , jako při dynamické replikaci. Nastavením pseudogenerátoru náhodných čísel programu Mathematica dle funkce „SeedRandom[x_]“ získáme stejné cesty, aby mohl být výsledek srovnatelný.

Varianta 1 – Úplný model

Dle předpokladů úplného modelu (tj. opce jsou oceněny dle stejného modelu, dle kterého je generován náhodný vývoj ceny podkladového aktiva) je výchozí rozdíl hodnot následující:

$$(f_0 - \mathcal{H}_0) = (0.57 - 3.03 + 2.42) = -0.04.$$

Je zřejmé, že tento rozdíl bude určovat chybu replikace, jestliže $S_T \notin [99, 100]$. Více konkrétně,

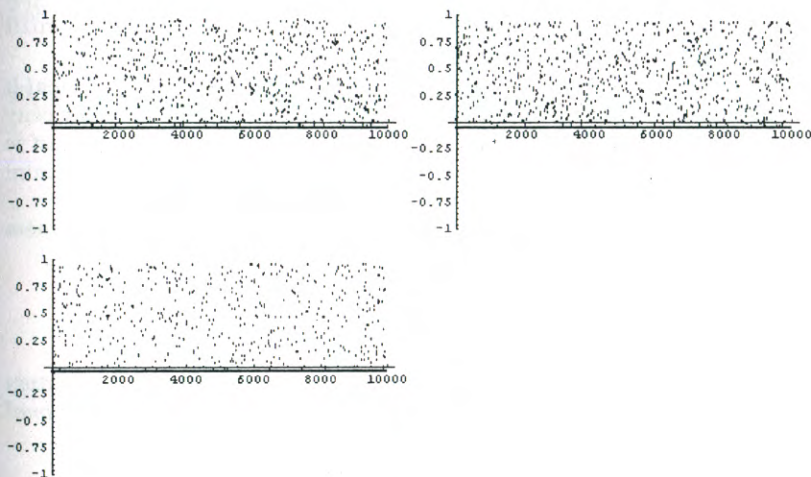
$$\text{Chyba replikace }_{\tau}(S_T \notin [99, 100]) = (f_0 - \mathcal{H}_0) \cdot \exp(r \cdot \tau) \approx 0.041.$$

Grafické znázornění chyby replikace je zřejmé z Obr. 5. Vzhledem k tomu, že výkonnost statické replikace není závislá na intervalu rebalancování, je výsledek stejný pro všechna M . Poznamenejme dále, že přibližně v 5 % případů bude $S_T \in [99, 100]$, přičemž 5 % odpovídá 500 simulovaných cest, a výrazně ovlivňuje parametry šikmost a špičatost. Oproti tomu ve více než 95 % případů budou hodnoty portfolia a opce totožné, což znamená, že chyba bude vycházet z počátečního rozdílu hodnot. Střední hodnota je velmi blízká nule, což potvrzuje nemožnost arbitráže – neplatilo-li by to, jedna z pozic by byla upřednostňována. Hodnoty vybraných parametrů jsou zachyceny v Tab. 4.

Varianta 2 a 3 – Stochastická volatilita a VG proces

Varianty 2 a 3 jsou aplikovány obdobným způsobem, přičemž se předpokládá, že tržní ceny jsou v souladu se skutečným modelem podkladového aktiva. Na jejich základě je zjištěn výchozí rozdíl hodnot replikované opce f a replikačního portfolia H . Ten následně určuje minimální chybu i medián, viz Tab 4. Ani jedna strategie neumožňuje arbitráž – střední hodnota je nulová. Výsledky za předpokladu stochastické volatilitě jsou v zásadě shodné s BS modelem. VG model přináší nepatrně lepší výsledky.

Obrázek 5: Replikační chyba statické replikace digitální call opce, BS, SV a VG model



Tabulka 4: Replikační chyba statické replikace digitální call opce, BS, SV a VG model

Model	min	Max	σ	mean	medián	šikmost	špičatost
BS model	-0.041	0.959	0.161	0.000	-0.041	4.212	20.275
SV model	-0.043	0.956	0.164	0.000	-0.043	4.070	19.097
VG model	-0.028	0.971	0.135	-0.001	-0.028	5.330	31.473

7. Závěr

Digitální opce představují zajímavý a často užívaný prostředek statické replikace mnoha komplikovaných derivátů. Avšak v případě, že tyto finanční aktiva nejsou dostupné, je nutné přikročit k jejich umělému vytvoření – replikaci. Předmětem článku proto bylo studium a zejména srovnání dvou nejrozšířenějších metod opční replikace, metody statické a dynamické.

Srovnáme-li výkonnost statické a dynamické strategie digitálních opcí při úplném modelu, je důležité především **omezení krajních hodnot** replikační chyby, zejména minimálních, a nižší směrodatná odchylka. Vzhledem k superreplikující podobě je nižší medián, šikmost a špičatost indikují větší vzdálenost od normálního charakteru rozložení chyby. Při vykonávání dynamické strategie lze dosáhnout negativní chyby s touto pravděpodobností – $\Pr(\mathcal{H}_T < f_T) = 50\%$. Oproti tomu u zde zvolené statické superstrategie platí,

že $\Pr(\mathcal{H}_T < f_T) = 0$. Toho lze dosáhnout při nákladech odpovídajících rozdílu mezi portfolii, $\mathcal{H}_0 - f_0$. V případě, že by byly k dispozici opce s bližšími realizačními cenami než uvažovaných $\Delta X = 1$, bylo by možné dále snížit přípustné rozpětí replikační chyby i superreplikační náklady.

Pozitiva statické strategie se zvyšují při neúplném modelu – tj. není-li možné opci ocenit a následně replikovat v souladu se skutečným vývojem ceny podkladového aktiva. Vzhledem k tomu, že statická replikace digitálních opcí je „model-free“, není potřeba znát podkladový proces – postačuje, když jsou aktuální tržní ceny aktiv v souladu se skutečným vývojem.

Jak bylo ukázáno, zatímco výkonnost dynamické metody při neúplném modelu klesla, výkonnost statické replikace zůstala téměř nezměněna.

Literatura:

- ANDERSEN, L. B.G., ANDREASEN, J., ELIEZER, D. (2002): Static Replication of Barrier Options: Some General Results. *The Journal of Computational Finance*. Vol. 5, No. 4, Summer 2002.
- ANDREASEN, J., CARR, P. (2002): Put Call Reversal. *Working paper*, 2002.
- BENNINGA, S., WIENER, Z. (1998): Dynamic Hedging Strategies. *Mathematica in Education and Research*, Vol. 7, No. 1, 1998.
- BLACK, F., SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81 (May-June 1973), 637-659, 1973.
- CARR, P., ELLIS, K., GUPTA, V. (1998): Static hedging of Exotic Options. *Journal of Finance*, 53, 1998.
- CARR, P., CHOU, A. (1997): Breaking Barriers. *Risk*, 10, 139-144, 1997.
- FAMA, E. F. (1965): The Behaviour of Stock Market Prices. *Journal of Business* 38, 34-105, 1965.
- HULL, J. C. (2002): *Options, Futures, & other Derivatives*. Prentice Hall. 2002.
- HULL, J. C., WHITE, A. (1987): The pricing of options on assets with stochastic volatility. *Journal of Finance* 42, 281-300. 1987.
- KARATZAS, I., SHREVE, S. (1998): *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, 1998.
- MACBETH, J. D., MERVILLE, L. J. (1979): An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model. *Journal of Finance* 34 (5), 1173-1186, 1979.
- MADAN, D. B., SENETA, E. (1990): The VG model for Share Market Returns, *Journal of Business* 63 (4), 511-524, 1990.

- MADAN, D. B., CARR, P., CHANG, E. C. (1998): The variance gamma process and option pricing, *European Finance Review* 2, 79–105, 1998.
- TICHÝ, T. (2004): Aplikace replikačních metod při ocenění a zajištění bariérových opcí. *Finance a Úvěr – Czech Journal of Economics and Finance* 54 (7-8), 305-324, 2004.
- TICHÝ, T. (2004): Přehled základních přístupů k replikaci výplatní funkce finančních derivátů. In *Dluhošová D.* (editor): *Nové přístupy a finanční nástroje ve finančním rozhodování*, VŠB-TU Ostrava, 2004.