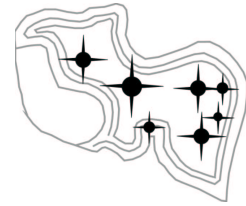
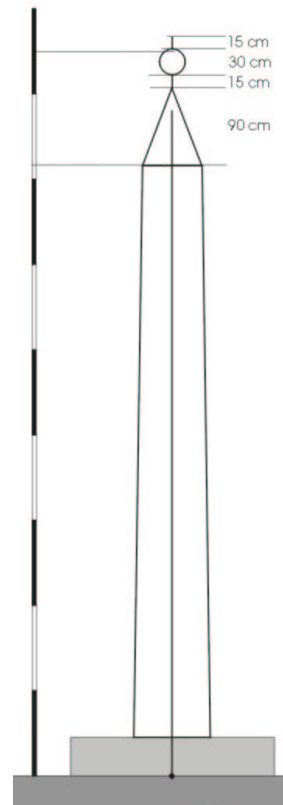
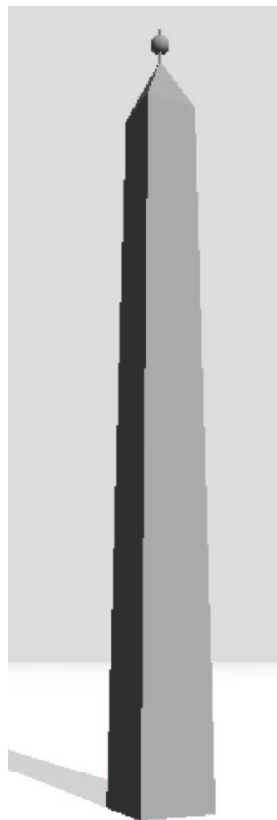


Initiativkreis Horizontastronomie im Ruhrgebiet e.V.

Geschäftsstelle: Sternwarte, Stadtgarten 6, 45657 Recklinghausen
Tel. und Fax (02361) 23134, E-Mail: info@sternwarte-recklinghausen.de



Gestaltung einer Gnomonspitze



Von

Daniel Brown

Inhaltsverzeichnis:

- 1 – Historische Vorbilder**
- 2 – Fehlweisung der Schattenlänge**
- 3 – Reichweite von Schatten**
- 4 – Optimierung einer Gnomonspitze**

1 – Historische Vorbilder

Die Sonne erlaubt es, anhand ihrer Position am Himmel, die jeweilige Tageszeit zu ermitteln. Dies ist schon früh mittels geschickter Konstruktionen in eine Uhr umgesetzt worden. Die ältesten Sonnenuhren stammen aus Ägypten, und einige ursprüngliche Ideen zu bestimmten Typen aus Babylonien. Im allgemeinen dienen sie dazu, die Zeit anhand des Sonnenstandes zu bestimmen. Dazu wurde eine senkrecht stehende Steinsäule, auch Obelisk oder Gnomon genannt, verwendet, dessen Schattenlänge oder Schattenposition die Zeiteinteilung vorgab. Meist waren diese Sonnenuhren nicht allzu groß und dienten dem Besitzer als überschaubare Uhr um z.B. Öffnungszeiten zu regeln, wie zu Zeiten der Römer bei der Horizontalsonnenuhr in Wiesbaden.

Je größer eine Sonnenuhr wurde, umso größer mußte auch der schattenwerfende Gnomon sein. Die größten Gnomone mit Maßen zwischen 20 m bis 40 m und einem Gewicht von 100 t bis 1 100 t stammen aus Ägypten (s. Abbildung 1 und 2). Dort wurden sie nicht als Sonnenuhr genutzt, sondern stellten eine Abwandlung eines Sonnenkultsymbols (Benben-Stein) dar oder ein zu Stein gewordener Sonnenstrahl. Als die Römer das ägyptische Reich unterwarfen, wurden einige dieser Obelisken nach Rom gebracht, wo sie bald zu einem wahren Obeliskenwald anwuchsen. Einige wurden als Wendemarken im Circus Maximus genutzt. Der erste eingeführte Obelisk wurde als Schattenwerfer der Sonnenuhr des Kaisers Augustus' auf dem Marsfeld aufgestellt.

Dieser 21 m hohe Obelisk wurde ursprünglich vom Pharao Psammetioch II. (594 – 588 v. Chr.) in Heliopolis errichtet und von Kaiser Augustus in Rom mit einer Höhe von ca. 30 m wieder aufgestellt (13 v. Chr.). Wieder entdeckt wurde der umgefallene Obelisk 1502 durch Lanciani und vollends ausgegraben im Jahre 1748 von J. Stuart



Abbildung 1: Der älteste stehende Obelisk von Sesostri' I. in Heliopolis.



Abbildung 2: Der größte aufgestellte Obelisk des Thutmosis' III auf dem Laternenplatz in Rom.

und T. De Marchis. Seit 1792 steht er nun auf der Piazza Montecitorio vor dem italienischen Parlament.

Die Funktion des Gnomons als Sonnenuhr zu Zeiten von Augustus wird in Plinius (Naturalis historia 366, 72f) beschrieben. Sie diente "... zur Erfassung der Schatten der Sonne ...", und setzte Kaiser Augustus ein Denkmal, da das Mausoleum und die Ara Pacis an den Daten der Empfängnis und der Geburt Kaiser Augustus ausgerichtet wurden. Zudem stellte die Sonnenuhr des Augustus' sicherlich die Unterwerfung des ägyptischen Volkes dar. Ob sie nun eine vollständige Sonnenuhr mit Stundenlinien war oder lediglich auf ihren Meridian (s. Abbildung 3 und 4) begrenzt ist nicht geklärt. Durch die immense Größe des Gnomons war auch eine Funktion als Kalender gegeben, da dieser eine Bestimmung des Datums auf den Tag genau erlaubte. Das zeigt der von Buchner freigelegte Meridian mit seinen bronzenen Datumslinien.

Um eine solch hohe Präzision zu erreichen, wurde ein fundiertes astronomisches und mathematisches Wissen benötigt. So mussten die Linien, ob nun Stundenlinien oder nur der Meridian, Zentimeter genau konstruiert werden. Für normale, kleine Sonnenuhren mag das sicherlich mit sehr anschaulichen Fadenkonstruktionen, zur Simulation des Sonnenlaufes, möglich gewesen sein. Allerdings sind diese Konstruktionen in Maßstäben von 30 m nicht mehr zu realisieren. Dann können die Linien nur verkleinert oder Maßstabsgetreu vor Ort konstruiert werden. Ein sehr einfaches Verfahren erläutert Vitruv (Vitruv, De Architectonis, IX, 8) anhand eines Analemma (Abbildung 5), welches den Lauf der Sonne auf den Meridian projiziert. Allerdings ist die Linienkonstruktion nur ein Teil der Bestimmung von Zeit oder Datum: Auch das Ablesen muss mit einer ähnlichen Präzision erfolgen. Der Schatten der Sonne weist an seinem Rande einen Halbschattenbereich auf, der umso größer wird, je weiter entfernt der Schatten entsteht. Bei dem Obelisken auf dem Marsfeld muss der Halbschattenbereich ca. 30 cm groß gewesen sein. Der wahre Ort der Ablesung ist in der Nähe der Mitte dieses Halbschattens, was allerdings abhängig von

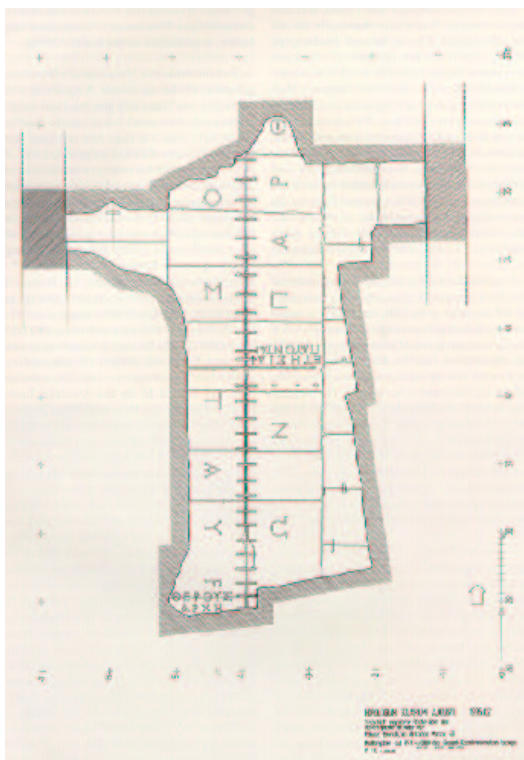


Abbildung 3: Das Liniennetz des Meridians bei der Sonnenuhr des Augustus' (flavisches Niveau).



Abbildung 4: Die Ausgrabung des Meridians 1980/81.

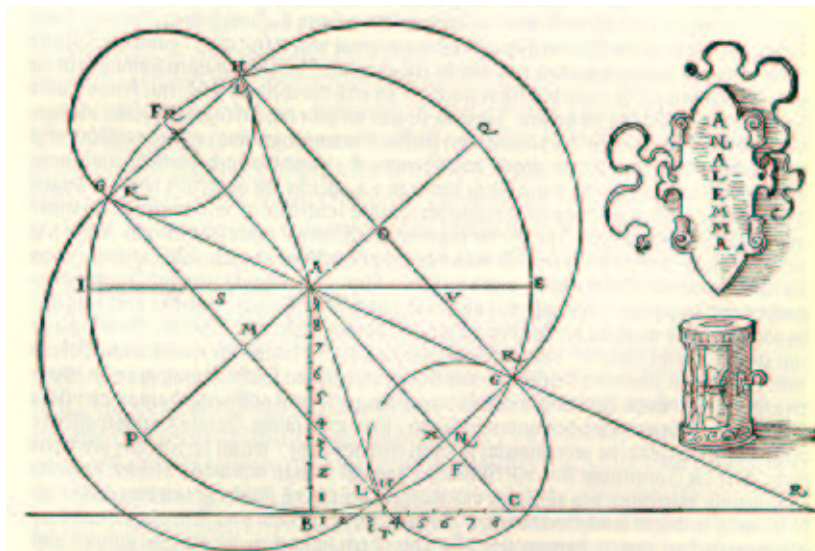


Abbildung 5: Analemma des Vitruv.

der Länge des Schattens ist. Um diesen Effekt der variierenden Fehlweisungen zu umgehen, wurde dem Obelisken vom Mathematicus Facundus Novus eine Kugel auf dessen Spitze aufgesetzt. (Die ägyptischen Obelisken besaßen eine einfache Spitze.) Weshalb die Kugel bevorzugt wurde, beschreibt Plinius: "... Dieser (Facundus Novus) fügte der Spitze eine vergoldete Kugel hinzu, durch deren Scheitel der Schatten auf sich selbst gesammelt werden sollte, da die Spitze sich sonst unregelmäßig bewegen würde, eine Erkenntnis, die er, wie es heißt, vom Kopf des Menschen gewonnen habe...". Damit zeigt sich, dass nicht nur die Konstruktion der Linien von höchster Wichtigkeit war, sondern auch die Gestaltung der Gnomonspitze. Zwar stellt eine Kugel vom künstlerischen Aspekt auch die Erdkugel dar und versinnbildlicht in dem Bauwerk zu Ehren des Augustus, wie ihm die Erde, als Schatten der Kugel, zu Füßen liegt (Buchner, Die Sonnenuhr des Augustus), aber auch sein geometrischer Nutzen bei der Optimierung der Abbildung des Schattens wurde bereits zu Zeiten des Kaiser Augustus von den Römern genutzt.

Das Problem der Schattenablesung kannte man auch zu späteren Zeiten. Im alten China wurden ebenfalls Gnomone genutzt (Abbildung 6 und 7), um den Stand der Sonne zu bestimmen. Da dies mit hoher Präzision durchgeführt werden sollten, wurden hier ebenfalls Methoden entwickelt, den unscharfen Schatten zu schärfen.



Abbildung 6: Turm des Gnomons bei Dengfeng.

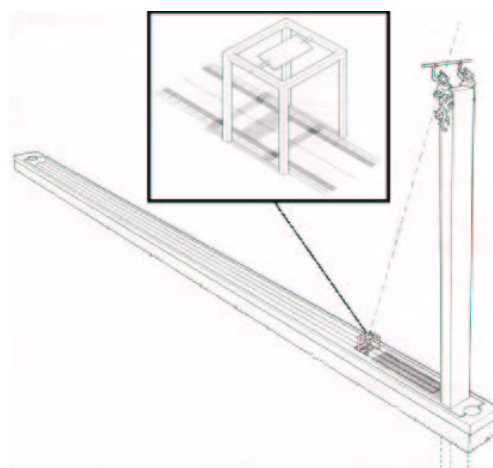


Abbildung 7: Meridian mit Messskala und 9.8 m hohem Gnomon von Dengfeng, sowie ein 49 x 98 mm großen "Schattendefinierer".

Dafür wurde nicht die Gestalt der Spitze geändert, sondern der Schatten einer am Gnomon befestigten Stange mittels Lochblende, die knapp über dem Boden angebracht war, auf den Boden des Meridians abgebildet (Abbildung 7). Durch Verlagerung der Blende konnte das Abbild der Sonne in zwei gleiche Teile geteilt werden und der Ort des Schattens der Stange auf dem Meridian Zentimeter genau bestimmt werden. Reste einer solchen Anlage sind in Dengfeng zu finden und die Methoden werden in "The Hall of Heavenly Records" (J. Needham, S.70ff) beschrieben. Auch hier wird klar, dass das Ablesen des Schattens keine Trivialität ist. Es bedarf vieler Hilfsmittel entweder am Boden oder auf der Spitze, die jedoch von einfacher aber genialer Art sein können, um die genaue Positionen des Schattens zu bestimmen.

2 – Fehlweisung der Schattenlänge

Der Schatten eines Gegenstandes mit der Sonne als Flächenlichtquelle, zeigt Bereiche von Kern- und Halbschatten. Dabei entspricht die Größe des Winkels, unter dem das Halbschattengebiet vom Rand des Schattenwerfers aus erscheint, 0.5° , d.h. dem Winkeldurchmesser der Sonne. Falls der Schatten auf eine Fläche senkrecht zur Sonnenrichtung fällt, befindet sich die Schattengrenze, den der Mittelpunkt der Sonne als Punktlichtquelle erzeugen würde (geometrischer Schatten), in der Mitte des Halbschattenbereiches. Der Abstand geometrischer Schatten zum Kernschattenbereich (r_2) nimmt die Form $r_2 = e \tan(\gamma)$ an. Dabei ist $\gamma = 0.25^\circ$ der Radius der Sonne (Abbildung 8).

Wird die Fläche aber um den Winkel α geneigt, so wird die Position der Schattengrenze verändert. Der Rand des Schattenwerfers ist in diesem Beispiel gerade, damit der erste Strahl die Projektionsfläche trifft, wenn die Hälfte der Sonne (Durchmesser $2R' = 0.5^\circ$) $\gamma = 0.25^\circ$ unterhalb des Randes ist (Fall A). Mit dieser Vereinfachung kann man nun den Versatz des geometrischen Schattens bzgl. dem Ende des Kernschattens eines stumpfen Gnomons (r_2) berechnen.

Laut Sinussatz gilt im Dreieck ABC (ΔABC ; Abbildung 9):

$$\frac{r_2}{\sin(\gamma)} = \frac{e}{\sin(180 - \gamma - \alpha)} = \frac{e}{\sin(\gamma + \alpha)},$$

wobei $e = \overline{CB} = \sqrt{H^2 + f^2}$ ist.

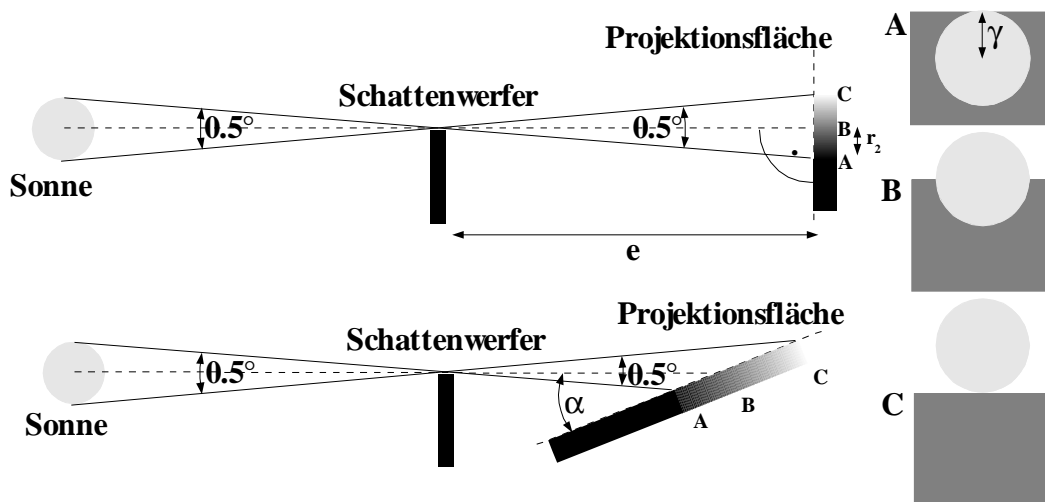


Abbildung 8: Entstehung von Halbschattengebieten für verschiedene Neigungen.

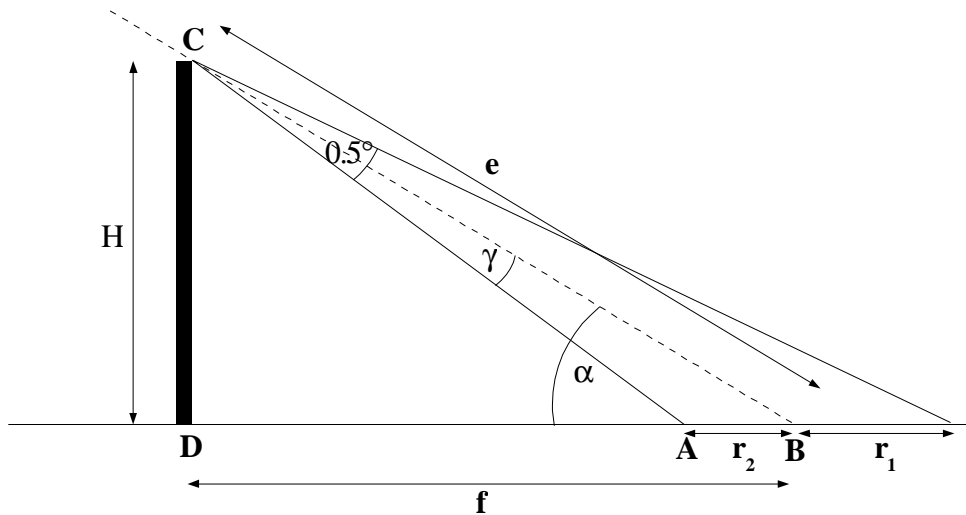


Abbildung 9: Skizze zur Herleitung der Fehlweisung für einen stumpfen Obelisken.
 Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ ergibt sich
 daraus:

$$r_2 = \frac{\sin(\gamma) \sqrt{H^2 + f^2}}{\sin(\alpha) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \sin(\gamma)}$$

Der Winkel α taucht auch im ΔACD als $\sin(\alpha) = \frac{H}{e}$ und $\cos(\alpha) = \frac{f}{e}$ auf.

Zudem ist in unserem speziellen Fall der flachen (stumpfen) Spitze $\gamma = \frac{0.5}{2} = 0.25$.

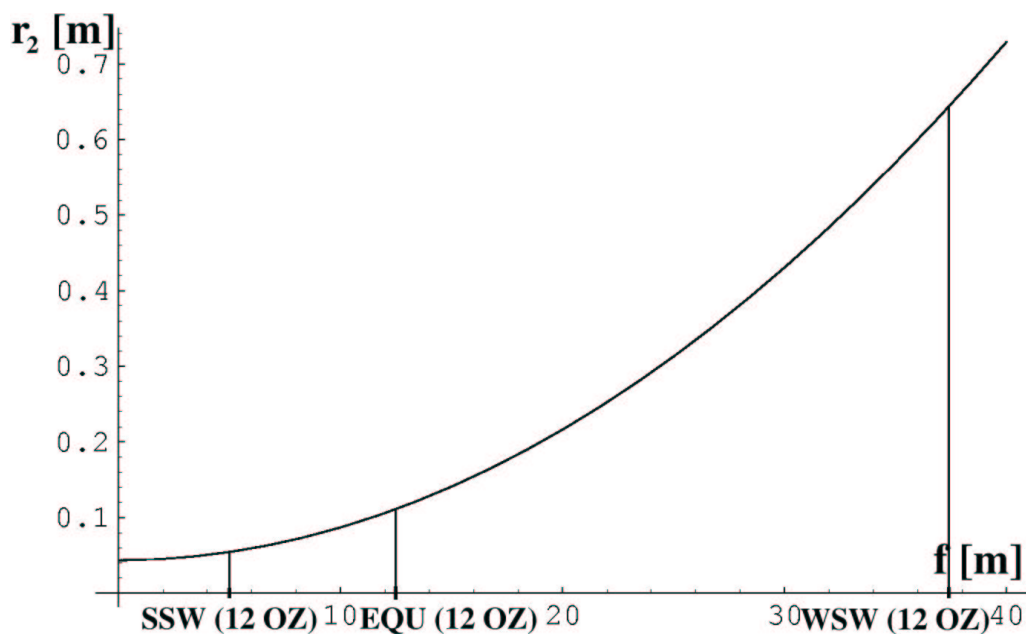


Abbildung 10: Die Fehlweisung für einen 10 m hohen stumpfen Obelisken. Markiert sind die Positionen der Sommersonnenwende (SSW), Tag-und-Nachtgleiche (EQU) und der Wintersonnenwende (WSW) für den Meridian und für ein geographische Breite $\varphi = 51.5^\circ$.

Damit kann man den Ausdruck für r_2 weiter vereinfachen:

$$r_2 = \frac{\sin(\gamma)\sqrt{H^2+f^2}}{\sin(\gamma)(\sin(\alpha)\cot(\gamma)+\cos(\alpha))} = \frac{\sin(\gamma)\sqrt{H^2+f^2}}{\sin(\gamma)\frac{H\cot(\gamma)+f}{\sqrt{H^2+f^2}}}$$

$$\Leftrightarrow r_2 = \frac{H^2+f^2}{H\cot(\gamma)+f} = \frac{H^2+f^2}{H\cot(0.25)+f}$$

Dieser Ausdruck für die Fehlweisung des Schattens zeigt, dass je länger der Schatten wird, umso größer wird auch die Fehlweisung r_2 . Zudem geht r_2 im Fall von $f=0$ in die Form der zuerst diskutierten senkrechten Projektion über.

Als Beispiel wurde ein 10 m hoher Obelisk verwendet und die Fehlweisung berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 10 gezeigt. Ein sinnvoller Bereich ist, bedingt durch die maximale Höhe der Sonne am Ort des Obeliskens (α_{max}), sowie dadurch, dass der Schatten nicht durch den Gnomon verlaufen kann

$$\alpha_0 = \arctan\left(\frac{H}{r_2}\right)$$

Allerdings sind die Spitzen der Obeliskens nicht stumpf, sondern zeichnen sich durch ein Pyramidion aus, d.h. eine kleine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Damit gewährleistet ist, dass der Schatten der Spitze stets den Boden trifft, darf die Höhe des Pyramidions eine Mindesthöhe nicht unterschreiten. Geht man wieder von einer maximalen Sonnenhöhe α_{max} aus, folgt aus der Abbildung 11 eine Mindesthöhe h_{min}

$$\text{von: } h_{min} = \frac{\tan(\alpha_{max})b}{\sqrt{2}}$$

Durch die Pyramidionform wirkt die Spitze von vorne gesehen wie ein Dreieck, und die ersten Strahlen der Sonne treffen in den Halbschattenbereich, noch bevor die Mitte der Sonne die vorher diskutierten 0.25° von der Spitze entfernt ist. In diesem Fall befindet sich die Spitze des Kernschattenbereiches dort, von wo aus der Rand der Sonne gerade den Rand des Dreiecks in der Spitze berührt (Abbildung 12). Damit kann eine neue Winkelentfernung von der Spitze berechnet werden.

Alle "gestrichenen Größen" sind dabei Winkelgrößen, weshalb sphärische Trigonometrie für die weitere Rechnung verwendet werden sollte. Allerdings sind die Winkel so gering, daß man anhand ebener Trigonometrie rechnen kann. Die

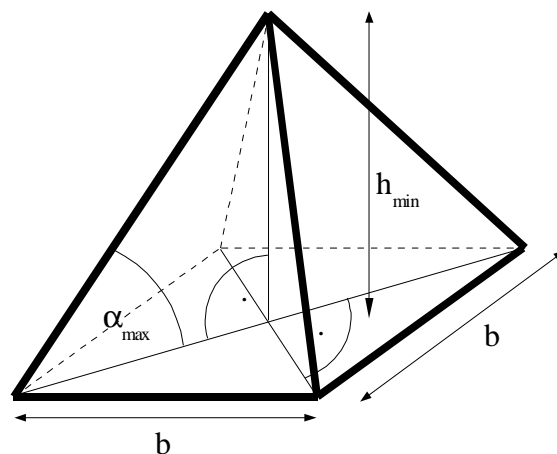


Abbildung 11: Skizze zur Berechnung der minimalen Pyramidionhöhe.

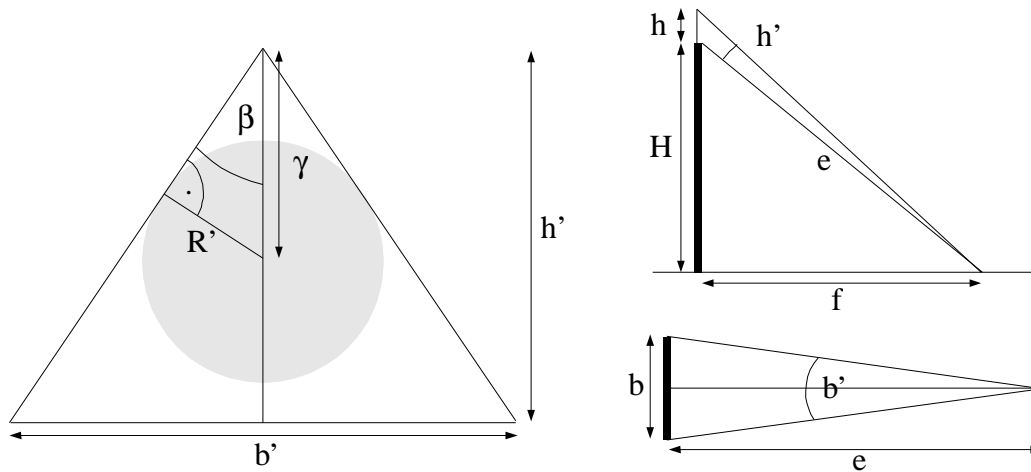


Abbildung 12: Skizze zur Bestimmung des veränderten Winkels γ .
gestrichelten Größen müssen erst für die entsprechende Stelle am Boden aus den bekannten linearen Größen berechnet werden. Dabei ist die Entfernung e wie im Falle der stumpfen Spitze definiert:

$$h' = \arctan\left(\frac{H+h}{f}\right) - \arctan\left(\frac{H}{f}\right) = \arctan\left(\frac{fh}{f^2 + H(H+h)}\right) ,$$

$$b' = 2 \arctan\left(\frac{b}{2e}\right) = 2 \arctan\left(\frac{b}{2\sqrt{H^2 + f^2}}\right) .$$

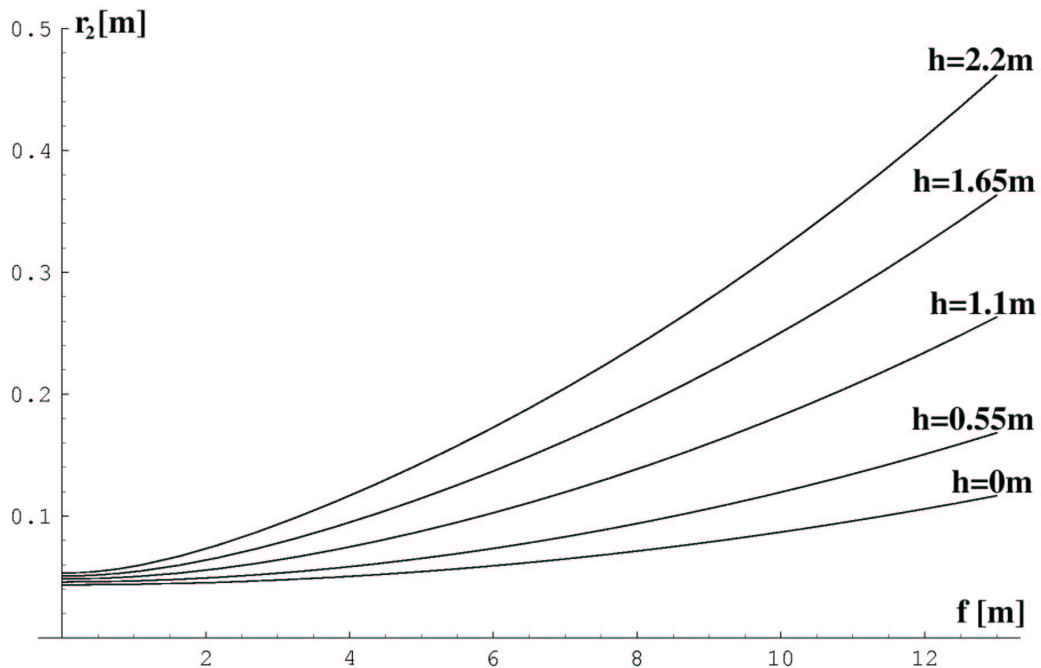


Abbildung 13: Verlauf der Fehlweisung für verschieden hohe Pyramiden auf einem 10 m hohen Obelisken.

Mit diesen Werten folgt für γ :

$$\gamma = \frac{R'}{\sin(\beta)} = R' \frac{2\sqrt{\frac{b'^2}{4} + h'^2}}{b'} = R' \sqrt{1 + \left(\frac{2h'}{b'}\right)^2} .$$

Nun muss noch die Fehlweisung r_2 berechnet werden. Dies geschieht mit der schon hergeleiteten Formel für die stumpfe Spitze, nur mit einer um das Pyramidion vergrößerten Höhe H:

$$r_2 = \frac{(H+h)^2 + f^2}{(H+h)\cot(\gamma) + f} \quad \gamma = R' \sqrt{1 + \left(\frac{\arctan\left(\frac{f}{f^2 + H(H+h)}\right)}{\arctan\left(\frac{b}{2\sqrt{h^2 + f^2}}\right)} \right)^2} \quad \eta$$

Für den Fall von sehr großen f bzw. h, wird auch r_2 groß. Bei $f=0$ geht r_2 wie erwartet in die Form der senkrechten Projektion über: $r_2 = (H+h)\tan(\gamma)$, jetzt aber mit dem Abstand H+h. (Daher resultieren auch die ungleichen y-Achsenabschnitte in Abbildung 13.)

Aus der allgemeineren Form der Fehlweisung geht auch diejenige für den Fall der stumpfen Spitze hervor. Dabei ist die Pyramidionhöhe $h=0$ m, womit folgt:

$$h' = \arctan(0) = 0 \rightarrow \gamma = R' .$$

Da R' gerade 0.25° ist, haben wir hier den Spezialfall der stumpfen Spitze.

Der Verlauf von r_2 ist in Abbildung 13 gezeigt. Er wurde für einen 10 m hohen Obelisk mit verschiedenen Pyramidionhöhen berechnet; die diskutierte Zunahme von r_2 wird sichtbar.

Die bisherigen Rechnungen galten nur der Spitze des Gnomons. Die gesamte Form des entstehenden Schattens der Obeliskenspitze sollte eine dreieckige Spitze ergeben. Jedoch erhalten wir mit der Sonne als Flächenstrahler ein spitzes Kernschattengebiet

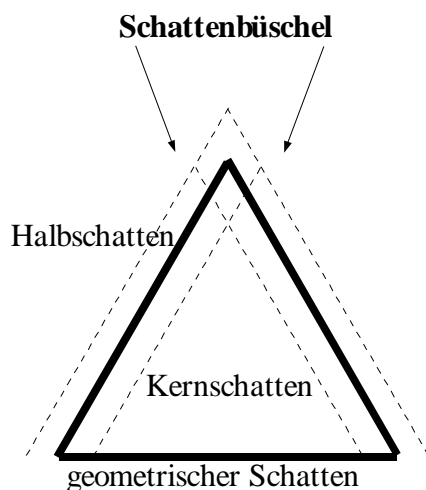


Abbildung 14: Entstehung des Schattenbüschels bei einem Pyramidion.

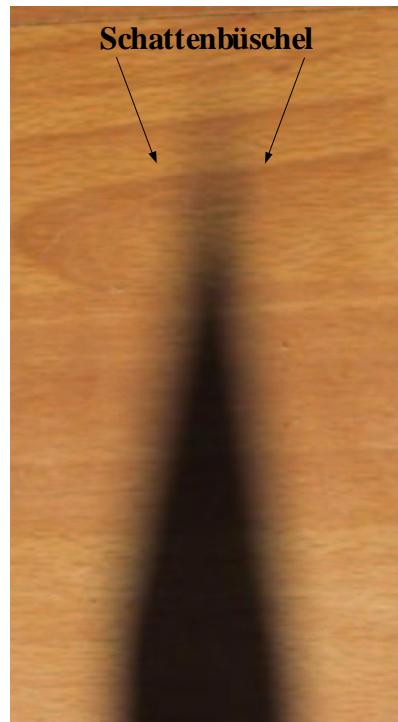


Abbildung 15: Beobachtung eines Schattenbüschels im Falle eines 0.5 m hohen Obeliskens mit Pyramidion.

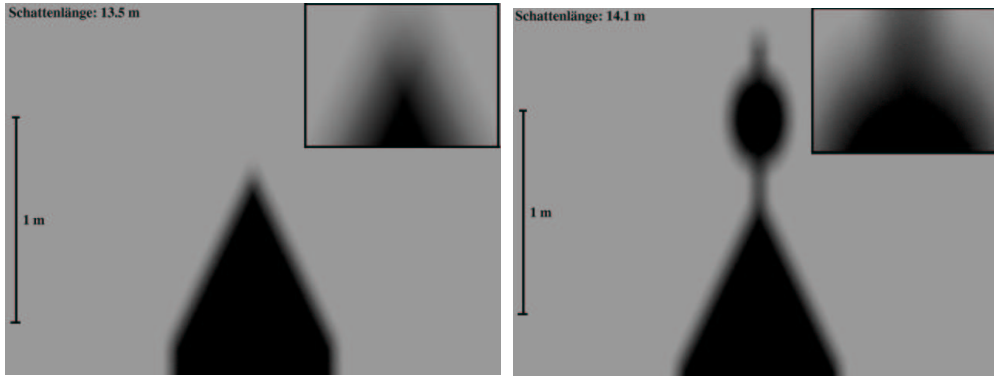


Abbildung 16: Berechnung des Schattens eines 10 m hohen Obeliskens mit 1.1 m hohen Pyramidion zu Mittag. Blickwinkel entspricht dem eines 1.8 m großen Beobachters.

Abbildung 17: Berechnung des Schattens eines Obeliskens wie in Abbildung 16 mit einer 0.4 m großen Kugel.

mit sich überlappenden Halbschattengebieten (Abbildung 14). Dieses Phänomen führt zu einer eigentümlichen Bildung eines Schattenbüschels an der Spitze, die das Ablesen der Position der Spitze erschwert (Abbildung 15).

Diese Probleme müssen dem Mathematicus Novius Facundus bekannt gewesen sein, als er sich mit der Idee, eine Kugel auf die Spitze zu setzen, beschäftigte.

Beim Ablesen des als Ellipse verformten Schattens einer Kugel benutzt man den Scheitel der Ellipse. Zwar ist die Ablesegenauigkeit entlang der Stundenlinien nicht mehr so groß wie im Fall der Spitze in Abbildung 16, aber der Scheitel kann anhand des "Restschattens" des Stabes noch erahnt werden. Allerdings ist die Länge des Schattens nun wesentlich genauer ablesbar. Wie in Abbildung 17 zu sehen ist, weist die Kugel keine Halbschattenartefakte auf, außer einer "Ausbeulung" am Ort der Stange, die aber bei genügend dünner Stange minimiert werden kann.

Der Schatten, wie er einem Beobachter auf der Fläche erscheinen würde, ist mit einem "Raytracer"-Programm berechnet worden, ausgehend von einem 10 m hohen Obeliskens. Die Pyramidionspitze ist wieder 1.1 m hoch und die Kugel hat einen Durchmesser von 40 cm.

Es stellt sich nun die Frage, wie variabel die dennoch auftretende Fehlweisung bei einer Kugel ist im Vergleich zu der einer Spitze. Für die Berechnung nutzen wir zuerst die vom oben genannten Mathematicus beschriebene "Sammelung des Kernschattens in sich selbst" aus. Damit ist gemeint, dass sich der Kernschattenbereich einer Kugel kegelartig verjüngt. Dadurch erhält der Kernschatten

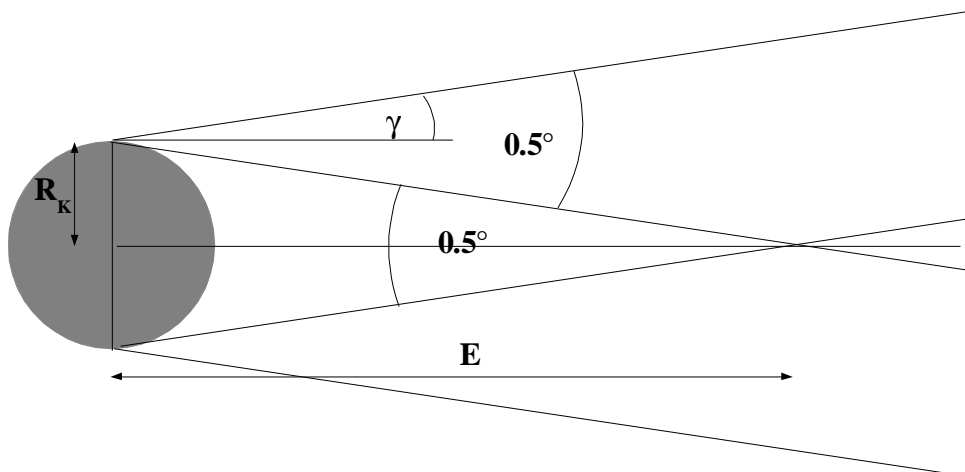


Abbildung 18: Skizze zur Struktur des Schattenverlaufes einer Kugel mit Halb- und Kernschatten.

einer Kugel mit Radius R_K eine endliche Weite E , wohingegen der Halbschattenbereich ins Unendliche reicht. Die Reichweite E beträgt

$$E = \frac{R_K}{\tan(0.25)} \quad (\text{Abbildung 18}). \text{ Somit kann die Berechnung des Versatzes \u00e4hnlich}$$

wie in den F\u00e4llen zuvor erfolgen. Aber das relevante Dreieck l\u00e4uft nun nicht mehr vom Boden zur Obeliskenspitze, sondern zum Konvergenzpunkt des Kernschattens. Au\u00dferdem ist die Fehlweisung diesmal r_1 , also vom Obelisken weg gerichtet. Das f\u00fchrt wieder zu einem Verh\u00e4ltnis gem\u00e4\u00df Sinussatz im ΔABC :

$$\frac{r_1}{\sin(0.25)} = \frac{E - e}{\sin(180 - \alpha - 0.25^\circ)} = \frac{E - e}{\sin(\alpha + 0.25^\circ)}$$

Damit folgt aus der Definition f\u00fcr e und E , sowie des Additionstheorems

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) :$$

$$r_1 = \left(R_K \cot(0.25) - \sqrt{H^2 + f^2} \right) \frac{\sin(0.25)}{\sin(\alpha)\cos(0.25) + \cos(\alpha)\sin(0.25)}$$

Mit dem Einsetzen der Sinus- und Cosinusfunktionen und entsprechender Zusammenfassung folgt eine kompliziertere Beziehung als im Fall der stumpfen Spitze:

$$r_1 = \frac{R_K \cot(0.25) \sqrt{H^2 + f^2} - H^2 - f^2}{H \cot(0.25) + f}$$

F\u00fcr den Fall des 10 m hohen Obelisken sind die Fehlweisungen r_1 f\u00fcr verschiedene Kugeldurchmesser berechnet worden (Abbildung 20). Hierbei ist auff\u00e4llig, dass die Fehlweisungen nur bis zu einer bestimmten Entfernung definiert sind. Das folgt aus der endlichen Reichweite E des Kugelkernschattens. So ist bei $f = \sqrt{E^2 - H^2}$ die Fehlweisung der Kugel $r_1=0$, was im Diagramm gut abzulesen ist. Am Fu\u00dfpunkt des Obelisken nehmen die Fehlweisungen bedingt durch die Gr\u00f6\u00dfe der Kugeldurchmesser zu. Au\u00dferdem ist die Funktion der Fehlweisung nicht monoton fallend, sondern steigt zun\u00e4chst an. Das f\u00fchrt zu einem flacheren Verlauf der Funktion in einem Schattenbereich in Obeliskenn\u00e4he. Diese Eigenart geht aus der speziellen Geometrie des Kugelschattens hervor. Der Kernschatten der Kugel auf einer senkrecht zur Sonne ausgerichteten Fl\u00e4che wird mit wachsender Entfernung von der Kugel immer kleiner

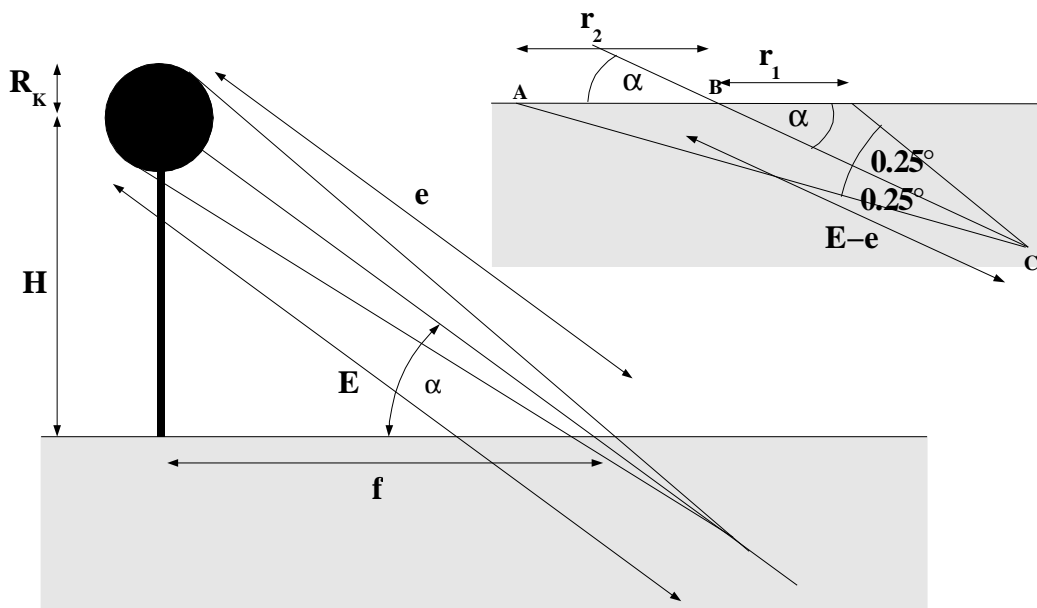


Abbildung 19: Skizze zur Berechnung der Fehlweisung im Falle einer Kugel.

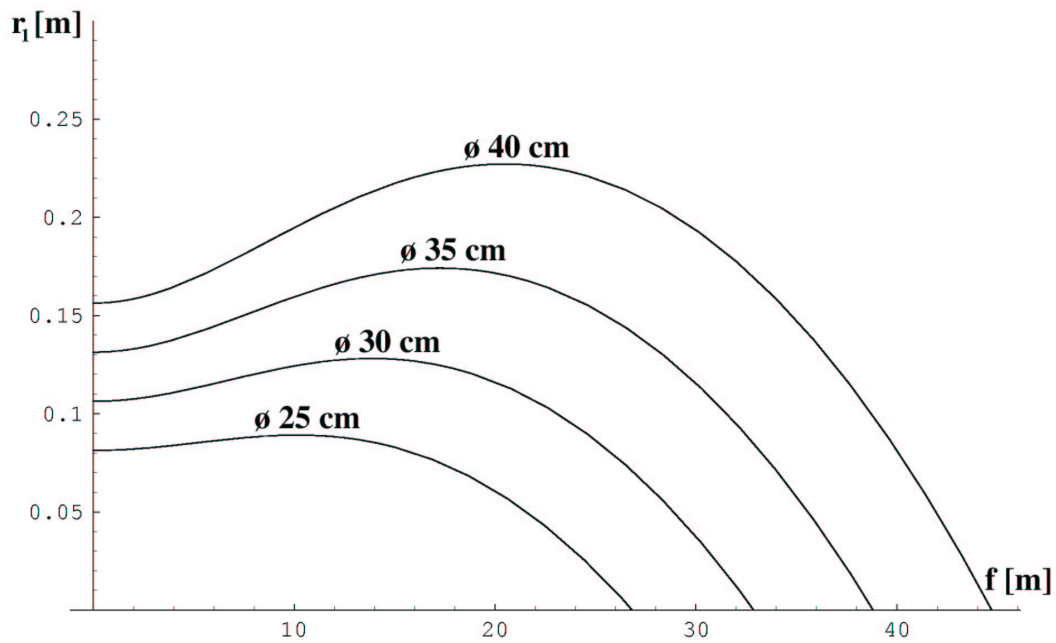


Abbildung 20: Verlauf der Fehlweisung für verschieden große Kugeln auf einem 10 m hohen Obelisken.

(d_{quer}). Allerdings ist die Fläche im Fall der Obeliskenkugel um den Winkel α geneigt. Dabei ist die Neigung umso größer, je größer die Entfernung ist. Eine geneigte Schattenfläche führt aber zu einer Verlängerung des Kugelkernschattens in Längsrichtung ($d_{längs}$). Damit haben wir zwei Prozesse: das Kleiner und Länger werden des Kernschattens bei wachsender Entfernung. Beide Prozesse heben sich zum Teil auf, wodurch der Verlauf der Fehlweisung flacher wird. Am Beispiel des 10 m Obelisken und einer 30 cm durchmessenden Kugel sind sie in Abbildung 21 gezeigt. Diese Tatsache wird dem Novius Facundus wohl zuerst aufgefallen sein.

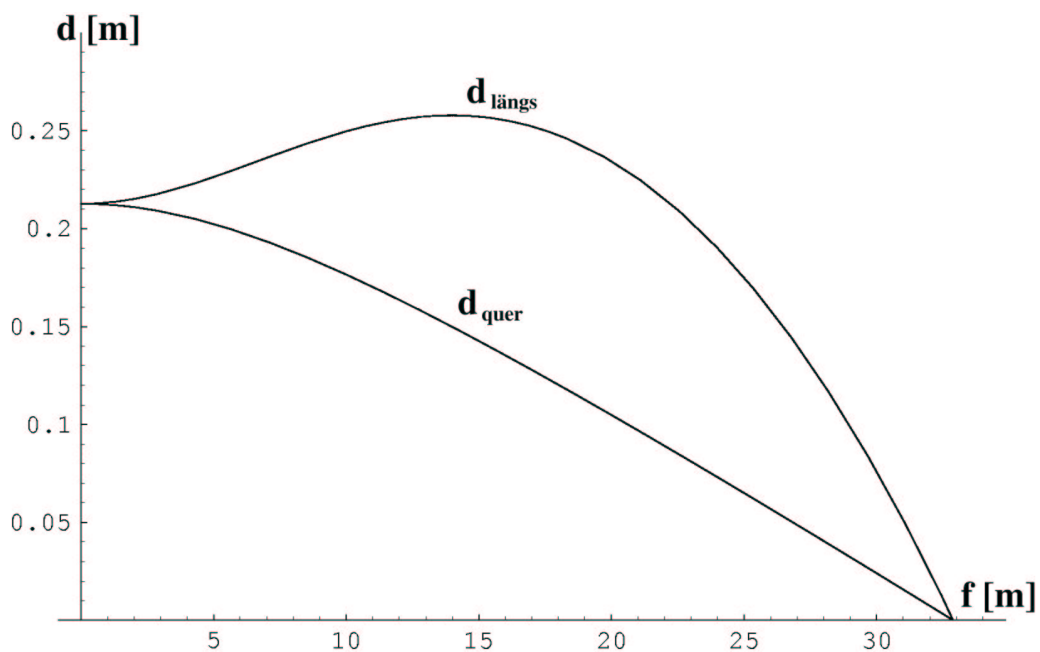


Abbildung 21: Verlauf des Längs- und Querdurchmessers einer Kugel in 10 m Höhe.

3 – Reichweite von Schatten

Wie schon im vorhergehenden Kapitel erläutert, besitzt der kegelförmige Schatten einer Kugel geometrisch gesehen eine endliche Weite E . Wird diese bei der Projektion überschritten, erhält man keinen dunklen Kernschattenbereich, sondern nur das Halbdunkel eines großen Halbschattenbereiches. Ein Beobachter kann den Scheitel des Schattens nicht mehr ohne Hilfsmittel, wie z.B. den im ersten Kapitel beschriebenen chinesischen Schattenschärfer, ablesen. Dann kann nur noch der Mittelpunkt des Halbschattengebietes bestimmt werden. Dieses Vorgehen ist allerdings schwierig, da der Halbschattenbereich nunmehr eine große Ellipse von schwer zu erkennenden Rand darstellt. Bedingt durch die Wahrnehmung des Auges kann man aber noch außerhalb der geometrischen Reichweite E des Kernschattens einen Schattenschwerpunkt bis zur Entfernung ϵ wahrnehmen. Dies ist ein subjektiv empfundenen Ort, an dem der Schatten merklich dunkler ist als im restlichen Halbschattengebiet. Damit lässt sich der Mittelpunkt des Halbschattengebietes leichter bestimmen.

Diese Tatsache kann am Tag mittels Kugel, Lot und Maßband bestätigt werden. So konnte ich einen Schattenschwerpunkt eines 4 cm durchmessenden Körpers noch bis zu einem Abstand von ca. $\epsilon=5.5$ m erkennen. Für einen solchen Körper ist die geometrische Reichweite $E=4.6$ m oder die subjektive Reichweite $\epsilon=120\% \cdot E$. Um diese Beobachtung weiter zu untermauern, wurde ein Versuchsaufbau entwickelt und eine Messreihe mit mehreren Kandidaten gestartet, die "ihr empfundenes ϵ " bestimmen sollten. Damit der Versuch reproduzierbar ist, wurde er nicht mit der realen Sonne unter realen, aber variablen, Streulichtbedingungen vollzogen, sondern unter Dunkelheit mit einem Minimum an Streulicht und wenig Zeit zur Dunkeladaptation der Kandidaten. Der Versuchsaufbau bestand aus einer diffusen Weißlichtlampe mit Irisblende der Öffnung B (Abbildung 22). Die Kugel wurde durch eine lichtundurchlässige Kreisfläche des Durchmessers D an einer Glasscheibe simuliert, mit einem Abstand d zur Lichtquelle. Den Kandidaten stand eine kleine

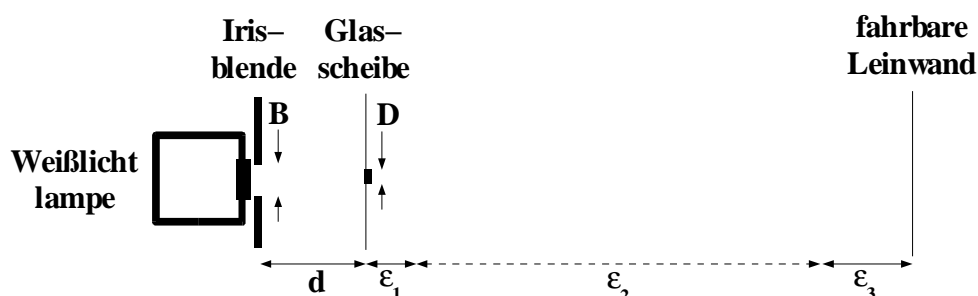


Abbildung 22: Versuchsaufbau zur Ermittlung der subjektiven Reichweite des Kernschattens.

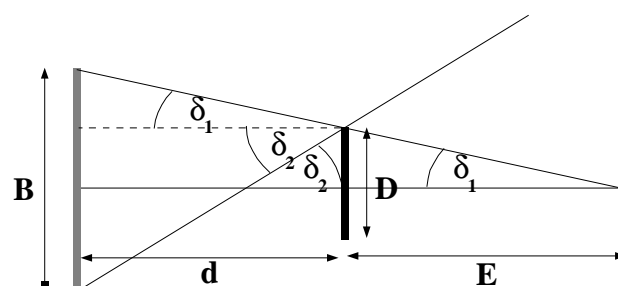


Abbildung 23: Skizze zur Berechnung der Position und Größe der Blenden für den Versuchsaufbau aus Abbildung 22.

fahrbare Leinwand (Abstand zur Glasscheibe $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 7 \text{ cm} + \varepsilon_2 + 23.5 \text{ cm}$) zur Verfügung, die aber nicht so groß war, als dass der gesamte Halbschattenbereich abgebildet wurde.

Aus Abbildung 23 geht der Strahlenverlauf für den Kugellersatz hervor. Damit dieser Aufbau der Situation am Tage gleicht, müssen sowohl der Winkel δ_1 des kegelförmigen konvergierenden Kernschattens als auch der Winkel δ_2 der kegelförmig divergierende Halbschattens einem Winkel von 0.25° entsprechen. Dass $\delta_1 = \delta_2$ gilt, geht aus der immensen Größe des Sonnenradius' gegenüber der Kugel hervor. Beide Winkel können in den beiden Dreiecken aus Blendenöffnung und Oberseite der Kreisscheibe wiedergefunden werden. Es gilt:

$$\delta_1 = \arctan\left(\frac{B-D}{2d}\right) \quad , \quad \delta_2 = \arctan\left(\frac{B+D}{2d}\right) \quad .$$

Daraus ist ersichtlich, daß $\delta_1 \approx \delta_2$ wenn $B+D \approx B-D$ bzw. $B \gg D$ ist. Da dies schwer zu realisieren ist, weil dann auch der Abstand $d = \frac{B-D}{2 \tan(\delta_1)}$ sehr groß wird, wurde für den zur Verfügung stehenden Raum angepasste Werte von $B=2.55 \text{ cm}$, $D=2.2 \text{ cm}$ und $d=40 \text{ cm}$ gewählt.

Damit wurde $\delta_1 = 0.25^\circ$ für den Kernschatten garantiert, bei einer Entfernung von $E=2.52 \text{ m}$. Für den Halbschatten gilt $\delta_2 = 3.4^\circ$, womit, bezogen auf die Situation am Tage, schlechtere Bedingungen zur Bestimmung des Schattenschwerpunktes herrschen, da der Halbschatten sich auf ein größeres Areal verteilt. Daher dürfte die ermittelte Entfernung ε weniger als die am Tage betragen, aber da die Streulichtverhältnisse des Versuches besser sind als am Tage, sollten die Bedingungen näherungsweise denen des Tages angepasst sein.

Die sieben Kandidaten machten, bis auf einen, drei Versuche, um einen für sie gerade noch erkennbaren Schattenschwerpunkt im Abstand ε zu bestimmen. Dafür verfolgten sie verschiedene Strategien: Zum einen vergrößerten sie den Abstand bis zur Grenze der Wahrnehmung, zum anderen verkleinerten sie den Abstand bis ein Schwerpunkt zu erkennen war. Die drei bestimmten Abstände ε_2 wurden dann gemessen. Für jeden Kandidat wurde ein Mittelwert gebildet, korrigiert um die festgehaltenen Abstände ε_1 und ε_3 . Die Werte sind in Tabelle wiedergegeben. Das P in der letzten Spalte stellt die prozentuale "subjektive Verlängerung" der geometrischen Reichweite dar.

Insgesamt folgt $\varepsilon = (363 \pm 34) \text{ cm} = 144\% \cdot E$, wobei der Fehler die Streuung der Messwerte widerspiegelt, da es nicht den Mittelwert als Meßwert zu bestimmen gilt. Zwar ist die Streuung beträchtlich, doch liegt sie mit $3.3 \cdot \sigma$ signifikant jenseits des Bereiches der geometrischen Schattenlänge E.

Da dieser Versuch eher als Hinweis für eine subjektive Schattenwahrnehmung als eine genaue Ermittlung dieser zu verstehen ist, wurde nicht auf die tatsächliche Korrelation zwischen den Messgrößen eingegangen. Dies könnte aber noch mittels verschiedener Konstellationen von B, D und d nachgeholt werden. Es kann ausgeschlossen werden, dass dieser Versuch unter zu idealisierten Bedingungen durchgeführt wurde und deshalb die Werte nicht repräsentativ sind. So sind z.B. meine Abschätzungen am Tage unter realistischen Bedingungen vergleichbar mit der in diesem Versuch ermittelten erweiterten subjektiven Schattenwahrnehmung.

Somit ist bei der Wahl einer Körpers als Schattenwerfer nicht nur auf seine geometrische Reichweite E zu achten. Eine Kugel z.B. erlaubt eine bis zu 140%

vergrößerte Reichweite. Der Schatten einer solchen Kugel ist zwar dann nur sehr verschwommen wahrnehmbar, jedoch lässt sich noch ein Zentrum des Schattens vor allem durch seine Dunkelheit ausmachen.

Kandidat	$\epsilon_{2,1}$ [cm]	$\epsilon_{2,2}$ [cm]	$\epsilon_{2,3}$ [cm]	ϵ [cm]	P [%]
A	279.4	282.5	282.7	312.0	124
B	302.2	288.0	305.4	329.0	131
C	313.2	336.0	343.3	361.3	143
D	359.5	347.9	...	384.2	153
E	351.0	341.0	335.0	372.8	148
F	347.5	328.0	331.0	366.0	145
G	368.0	397.0	398.0	418.2	166

Das Beispiel der vergrößerten Reichweite eines Kernschattengebietes ist nur eines von vielen Beispielen für das Abweichen der menschlichen Wahrnehmung von der geometrisch berechneten Situation. Die meisten dieser Erscheinungen gehen zurück auf das besondere Verhalten des Auges bei der Wahrnehmung von Helligkeitsunterschieden. Wie bereits Mach beschrieb (M. Minnaert, Light and Color, §92), überbetont das Auge die Krümmung der Intensität eines Helligkeitsverlaufes, wie in Abbildung 24 gezeigt. Damit entstehen Bereiche, die dunkler als der Kernschatten sind oder heller als das Tageslicht. Im Falle unserer Diskussion vom vorhergehenden Kapitel, ist somit fraglich, ob ein Kernschatten erst wahrgenommen wird, wenn an diesem Ort die Sonne vollständig verdunkelt ist, oder ob dieses bereits bei einem nur kleinen sichtbaren Bereich der Sonne geschieht.

Da diese Phänomene bis heute noch nicht vollständig verstanden wurden, und nur ein Experiment Klarheit über die Situation verschaffen kann, wie im Fall der Kernschattenreichweite, sind alle Berechnungen und Analysen nur auf die geometrischen Verhältnisse bezogen.

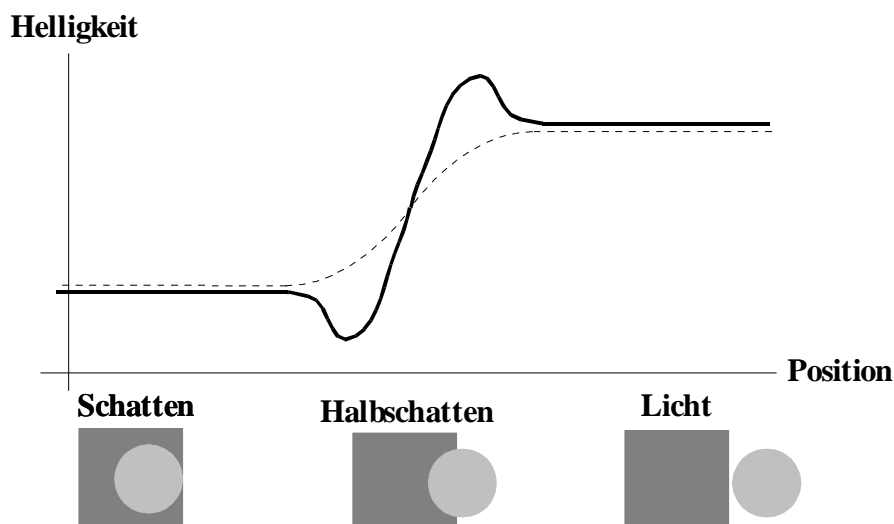


Abbildung 24: Verlauf der Helligkeit für einen realen Schatten. Die gestrichelte Linie entspricht der Erwartung und die durchgezogene der Beobachtung mit dem Auge.

4 –Optimierung einer Gnomonspitze

Anhand der in den letzten Kapiteln geschilderten Bedingungen kann nun die Spitze eines Gnomons für einen gewissen Standort und seinen gestalterischen Randbedingungen optimiert werden.

Als Standort ist die Halde Hoheward gewählt worden mit einer geographischen Breite von $\varphi=51.5^\circ$. Der zur Verfügung stehende Raum von 62 m Durchmesser, seine optimale Ausnutzung und die Wahrung von ästhetischen Proportionen erlaubt es, Stunden- und Datumslinien für einen Obelisken von 8.5 m Höhe auszuführen, wie Burkard Steinrücken ermittelt hat (Abbildung 26). Der Obelisk sollte sich dabei an seine historischen Vorgänger, wie z.B. den Obelisken der Sonnenuhr von Augustus (Abbildung 25), orientieren. Nun kann für diese Bedingungen der Vergleich zwischen Pyramidion- und Kugelspitze vollzogen werden.

Wie in Kapitel 2 beschrieben, hängt die minimale Höhe h_{min} von der maximalen Sonnenhöhe α_{max} am Standort ab. Geht man von einer Neigung der Ekliptik von 23.5° aus, ergibt sich ein $\alpha_{max}=90^\circ-\varphi+23.5^\circ=62^\circ$. Aus den Proportionen des Obelisken des Augustus', skaliert auf einen Gnomon von 8.5 m Höhe, ergibt sich eine Basisbreite des Obelisken von 0.9 m und des Pyramidions von $b=0.7$ m. Damit darf das Pyramidion eine minimale Höhe von 0.9 m nicht unterschreiten, um einen freien Schattenwurf der Spitze zu gewährleisten.

Für die Wahl "Kugel" ergeben sich zwei mögliche Durchmesser: Zum Einen kann man der Argumentation von Buchner (Buchner, Die Sonnenuhr des Augustus, S14) folgen und den Kugeldurchmesser auf die Hälfte der Basislänge des noch aufgetragenen Pyramidions setzen, also $2R_K=0.4$ m; Zum Anderen kann man den so für den Obelisken des Augustus' geschätzten Durchmesser der Kugel auf den 8.5 m

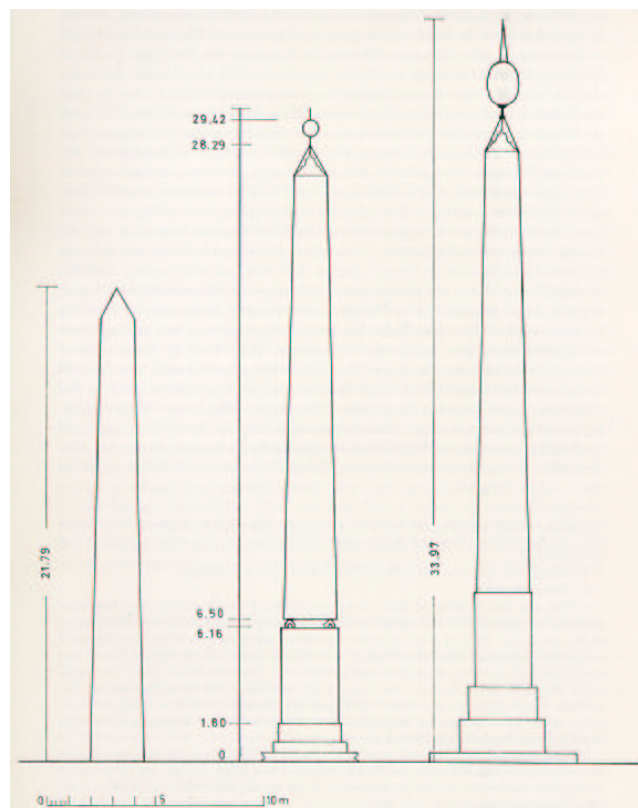


Abbildung 25: Die drei Aufstellungen des Obelisken der Sonnenuhr des Augustus. Links: Aufstellung in Heliopolis. Mitte: Antike Aufstellung. Rechts: Aufstellung von 1792.

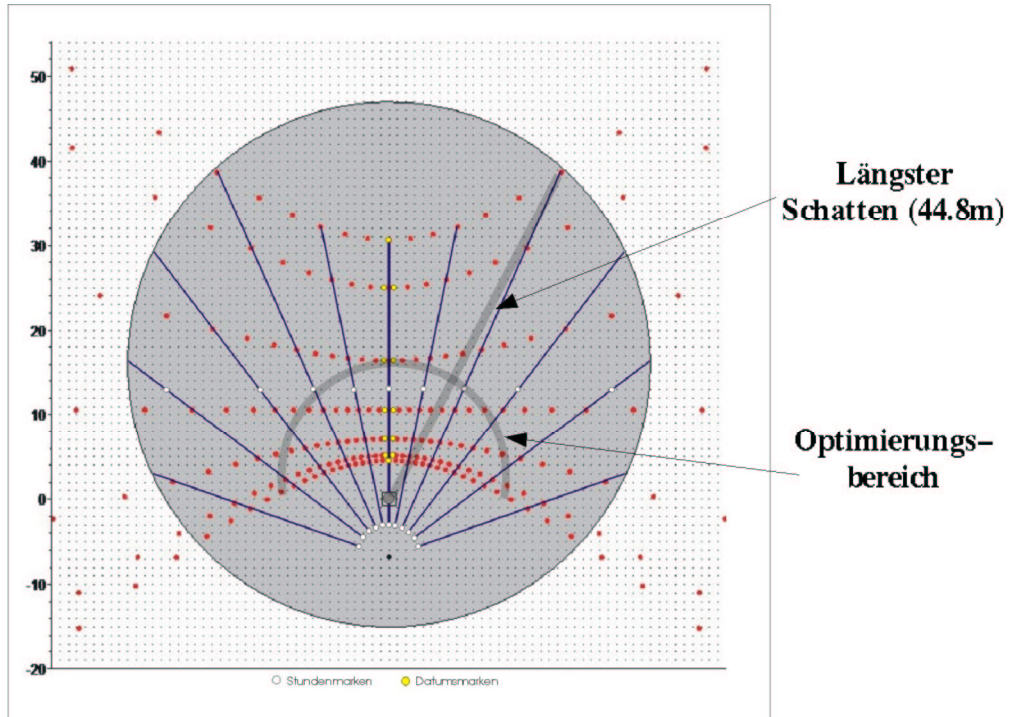


Abbildung 26: Optimierungsergebnis der Liniengestaltung an eine ungefähre Kreisfläche von 62m Radius und einem Obelisken der effektiven Höhe von 8.5m von B. Steinrücken.

hohen Obelisken skalieren und erhält $2R_K=0.22$ m. Geht man von der größten möglichen Schattenlänge am 21./22. Dezember, der Wintersonnenwende (WSW), um 14 Uhr Ortszeit aus, ergibt sich eine Schattenlänge in Metern von

$\epsilon = \sqrt{44.8^2 + 8.5^2} = 45.6$ (Abbildung 26). Gemäß der subjektiven Reichweite einer Kugel, darf der Durchmesser nicht kleiner als 0.28 m sein, damit stets ein Schattenschwerpunkt der Kugel zu erkennen ist. Daraus folgt als "ästhetischer" Kompromiss ein Durchmesser von 0.3 m.

Um nun den Versatz vom geometrischen Schatten zum tatsächlichen zu ermitteln,

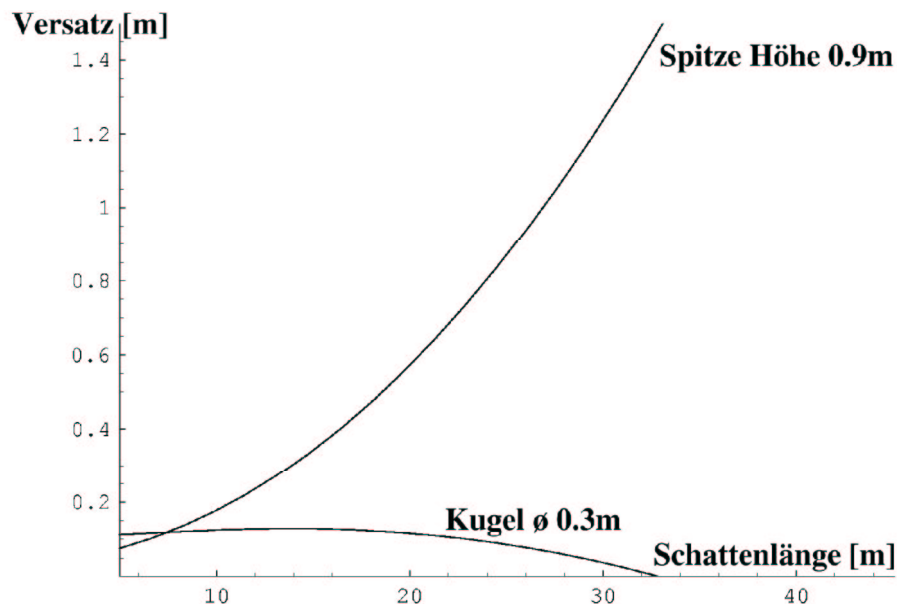


Abbildung 27: Vergleich der Verläufe im Falle eines Obelisken mit 0.9 hohemPyramidion oder 0.3 durchmessenden Kugel, für den Fall des Gnomons für die Sonnenuhr auf der Halde Hoheward.

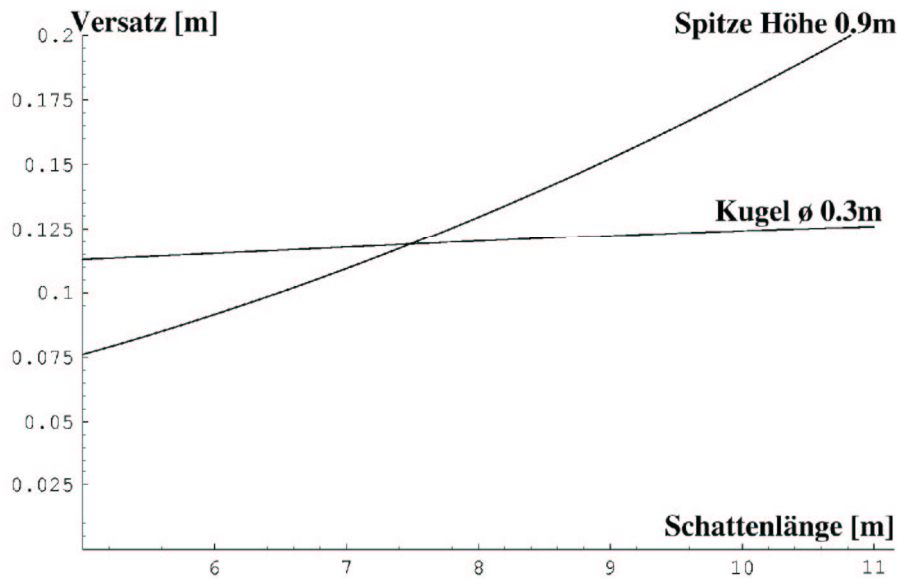


Abbildung 28: Vergrößerung des Bereich aus Abbildung 27, der zur Optimierung verwendet wird.

wird wie im Kapitel 2 vorgegangen. Dabei ist ein besonderes Augenmerk auf den Bereich von 7 m bis 13 m zu richten. Dieser Bereich stellt für unseren Standort die Schattenlängen für den Zeitraum von 10–14 Uhr Ortszeit am 20./21. März, dem Equinoxium (EQU), und um 7:30–16:30 Uhr Ortszeit am 21. Juni, der Sommersonnenwende (SSW), dar. Für diese Zeit sollte der zu erwartende Schatten aufgrund der Sonnenhöhe so scharf sein, dass sich erst für diesen Bereich eine Optimierung lohnt. Der Vergleich der Ergebnisse ist in Abbildung 27 und 28 gezeigt. In den Abbildungen ist die geometrische Reichweite der Kugel zu erkennen sowie der immer größer werdende Versatz des Schattens für das Pyramidion. Im Bereich der Optimierung erkennt man deutlich den Unterschied der Variation der Versätze. Dabei schwankt der Versatz im Falle der Pyramidionspitze um 0.13 m und für die Kugel nur um 0.013 m. Allerdings ist sie in keinem der beiden Fälle gleich Null. Jedoch ist es möglich, einen konstanten Versatz auszugleichen, indem man die Stunden- und Datumslinien für einen etwas größeren Gnomon berechnet. Dies wird im Folgenden noch erläutert werden. Ein solcher Ausgleich ist nur dann möglich, wenn der Versatz schwach veränderlich ist, wie im Fall der $2R_K=0.3\text{m}$ Kugel.

Somit folgt als erstes Ergebnis der Optimierung der Obeliskenspitze, dass aufgrund der schwachen Variation des Schattenversatzes, die Kugel als "Obeliskenspitze" zu wählen ist.

Nun müssen die Dimensionen des Obelisken festgelegt werden, um die Stunden- und Datumslinien korrekt zu berechnen. Dafür muss zunächst die effektive Höhe H_{eff} bestimmt werden, die **nicht** der Obeliskenhöhe H entspricht, da noch die Kugel oben angebracht wurde die den Schatten am Boden um r_1 verlängert. Um dem verlängerten Schatten gerecht zu werden, wird die Höhe des Obelisken **nur** zur Linienberechnung verlängert. Dazu verschiebt man den Strahl des theoretisch geworfenen Schatten des Kugelmittelpunktes (CB) parallel soweit nach oben, bis er an den Scheitel des Kugelschattens (B') heranreicht. Die neue Höhe des verschobenen Kugelmittelpunktes auf der Obeliskensachse (C') stellt die effektive Höhe des Obelisken dar (Abbildung 29).

Das ΔDBC und $\Delta DB'C'$ sind kongruent, womit für H_{eff} folgt:

$$\frac{H}{f} = \frac{H_{\text{eff}}}{f + r_1} .$$

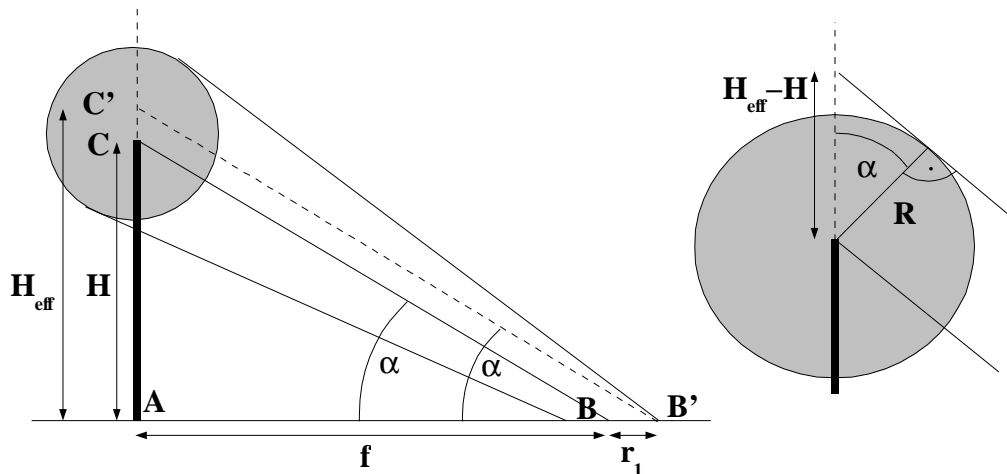


Abbildung 29: Skizze zur Herleitung der effektiven Höhe.

Da r_1 stets positiv ist, ergibt sich immer eine größere effektive Höhe H_{eff} als die des Obeliskens H . Sie kann sogar die Obeliskenhöhe inklusive des Kugelradius überschreiten, da sich die effektive Höhe aus einer Projektion auf die Obeliskachsen vom verlängerten Schatten über den Kugelrand ergibt. Dabei kann, wie in Abbildung

29 gezeigt ist, eine maximale Differenz von $H_{eff} - H = \frac{R_K}{\cos \alpha}$ möglich sein.

Da die Gestaltung der Linien und ihr Platzbedarf vorgegeben sind und von der effektiven Höhe H_{eff} abhängen, muss die tatsächliche Höhe H bestimmt werden, bei der $H_{eff} = 8.5$ m ist. Dies geschieht, indem die mittlere Variation im Bereich der Schattenlängen von 5 m – 13 m errechnet und das H_{eff} für diesen Versatz abgeleitet wird. Das optimale H wird dann iterativ errechnet. In unserem Fall der 0.3 m durchmessenden Kugel ergibt sich eine Höhe des Kugelmittelpunktes von $H = 8.357$ m. Damit liegt die effektive Höhe 7 mm unter dem Kugelscheitel. Um dem historischen Vorbild treu zu bleiben, wird die Kugel mittig auf einen Stab der Länge des doppelten Durchmessers der Kugel angebracht. Die so hergeleiteten Größen ergeben die gesamten Maße des Obeliskens (Abbildung 30):

Basisbreite Obelisk:	0.9 m
Höhe Obelisk(–enstumpf):	7.157 m
Basisbreite Pyramidion:	0.7 m
Höhe Pyramidion:	0.9 m
Kugeldurchmesser:	0.3 m
Stablänge:	0.6 m
Gesamthöhe Obelisk:	8.657 m
Effektive Höhe:	8.5 m

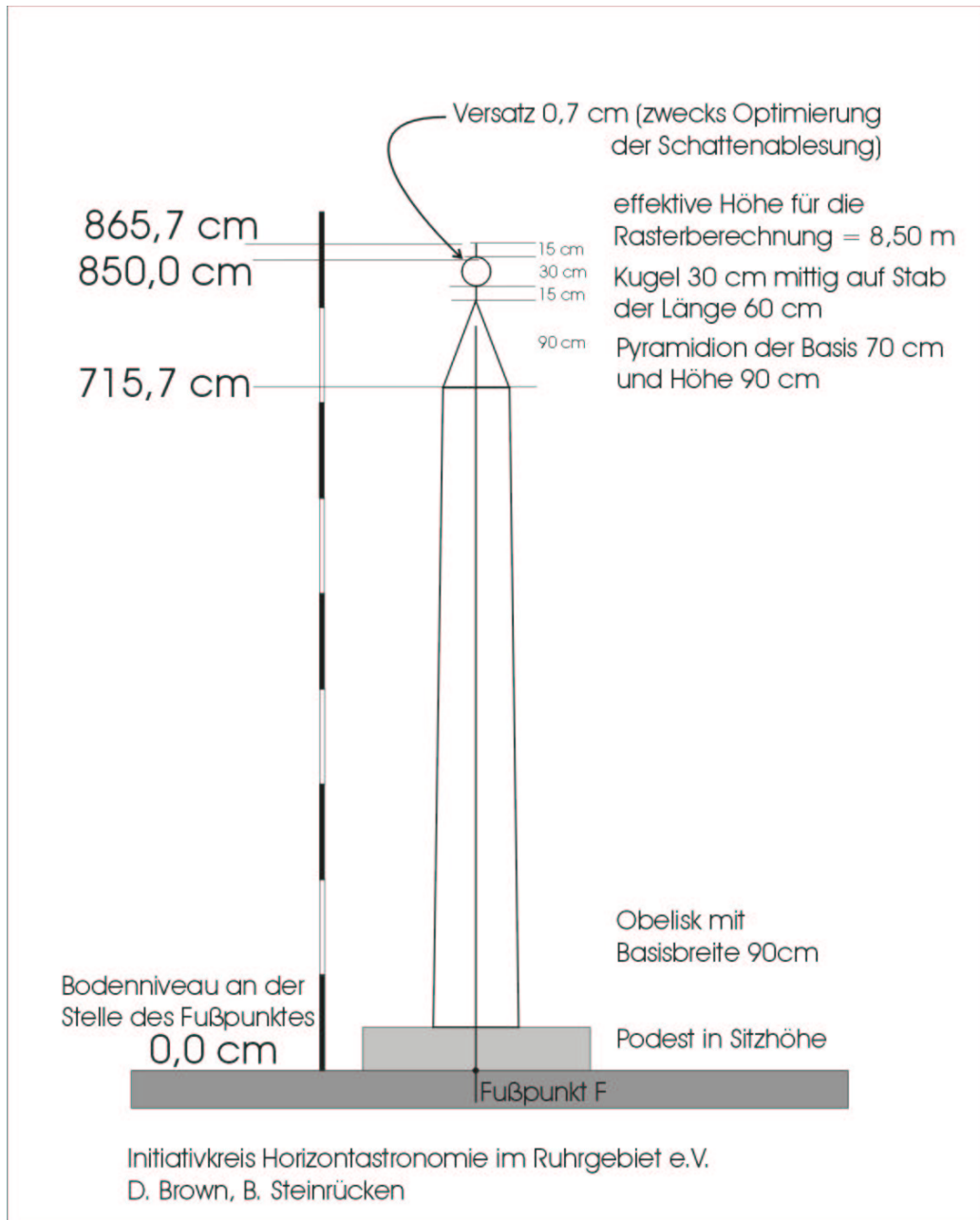


Abbildung 30: Ermittelte Maße für den Gnomon der Sonnenuhr auf der Halde Hoheward.