

## REACTIVE POWER IN THE LONG ELECTRICAL LINES

**Berzan V., Rimschi V., Patsiuk V., Tîrsu M.**

*Institute of Power Engineering of the Academy of Sciences of Moldova*

**Abstract.** This paper presents a numerical method for the calculation of electric circuits with distributed parameters with losses that may vary over time. It is proposed to use the energy integral in order to estimate the accuracy of numerical solutions. The elaborated numerical scheme, named Albatross, is conservative with minimal dissipation and dispersion. These properties lead to the fact that the computational error does not accumulate, that gives the possibility to realize the transparent calculations of non stationary solutions without loss of accuracy at large time intervals corresponding to 300...500 electromagnetic wave runs along the line length right up to steady-state regime. The results of calculations for non-homogeneous circuits with distributed parameters are presented graphically. These results can be used as a model to develop new approximate methods for numerical solution of electrotechnical problems. The solutions of these problems have been obtained by means of operator method, complex amplitude method, Fourier method as well as by numerical method Albatross. The results of calculations for various modes in the half-wave transmission line are represented. The comparison between the physical and mathematical experiments in analyzing of different regimes in half-wave electrical transmission line is represented. The comparison of accuracy of the solutions obtained by proposed method, by Finite Difference Time Domain (FDTD) method and by Godunov's scheme for telegraph equations is carried out. It is illustrated, that FDTD method has some limited application for solving the telegraph equations in spite of the fact that it is of second order of accuracy.

**Keywords:** long transmission line, telegraph equations, non-stationary currents and voltages, distributed and lumped parameters.

### PUTEREA REACTIVĂ ÎN LINIILE ELECTRICE

**Berzan V., Rimschi V., Patsiuk V., Tîrsu M.**

*Institutul de Energetică al Academiei de Științe a Moldovei*

**Rezumat.** În lucrare se prezintă metoda numerică de calcul a circuitelor electrice cu pierderi, parametrii distribuiți și variabili în timp. Se propune de a utiliza integrala energiei în scopul de a estima precizia soluțiilor numerice. Schema numerică de calcul elaborată, care a fost denumită Albatros, prezintă o schemă conservativă cu disipare și dispersie minimă. Aceste proprietăți rezultă din faptul, că eroarea de calcul nu se acumulează, ceea ce oferă posibilitatea de a realiza calculele soluțiilor proceselor netaționare în circuite fără pierderea preciziei pentru intervale mari de timp, de exemplu, care corespund la 300 ... 500 de propagări ale undelor electromagnetice în linia lungă până la atingerea regimului staționar. Rezultatele calculelor în circuitele neomogene cu parametri distribuiți sunt prezentate în formă grafică. Aceste rezultate pot fi folosite ca o soluție de probă pentru elaborarea și verificarea preciziei a unor noi metode aproximative de obținere a soluțiilor numerice din domeniul fizicii matematice, inginerie și sistemelor electroenergetice. Soluțiile au fost obținute prin metoda operațională, metoda amplitudinilor complexe, metoda Fourier prin separarea variabilelor, precum și prin metoda numerică de calcul neîntrerupt Albatros. Compararea rezultatelor calculelor s-a executat pentru procesele din linia cu lungimea de semiundă. S-a comparat precizia soluțiilor obținute prin metoda analitică, prin metoda diferențelor finite în domeniul de timp (Finite Difference Time Domain - FDTD) și metoda Godunov pentru cazul ecuațiilor telegraștilor. S-a ilustrat că metoda FDTD are limitări pentru rezolvarea ecuațiilor telegraștilor, chiar dacă acestea au ordinul doi de precizie.

**Cuvinte-cheie:** linie lungă de transmisie, ecuațiile telegraștilor, curenți și tensiuni netaționare, parametri distribuiți și concentrați.

### РЕАКТИВНАЯ МОЩНОСТЬ В ДЛИННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

**Берзан В.П., Римский В.К., Пацюк В.И., Тыршу М.С.**

*Институт энергетики Академии наук Молдовы*

**Аннотация.** В работе представлен численный метод для расчета электрических цепей с распределенными параметрами с потерями, которые могут изменяться во времени. Предлагается использовать интеграл энергии для оценки точности численных решений. Разработана численная схема, названная Альбатрос, консервативная по свойствам, с минимальной диссипацией и дисперсией. Эти

свойства приводят к тому, что вычислительная ошибка не накапливается, что дает возможность реализовать расчеты нестационарных решений без потери точности при больших интервалах времени, соответствующих 300 ... 500 пробегам электромагнитной волны в длинной линии, вплоть до достижения установившегося состояния. Результаты расчетов для неоднородных цепей с распределенными параметрами представлены графически. Эти результаты могут быть использованы в качестве образцовых (поверочных) при разработке новых приближенных методов численного решения электротехнических и электроэнергетических задач. Решения рассмотренной задачи были получены с помощью операторного метода, метода комплексных амплитуд, метода Фурье при разделении переменных, а также численным методом Альбатрос. Представлены графически результаты расчетов различных режимов в полуволновой линии электропередачи. Сравнение и оценка точности решения задачи осуществлено сопоставлением решений полученных по предлагаемому методу, методом конечных разностей во временной области (FDTD) и по схеме Годунова для телеграфных уравнений. Установлено, что метод конечных разностей имеет некоторые ограничения по применению при решении телеграфных уравнений, несмотря на то, что он имеет второй порядок точности.

**Ключевые слова:** длинные линии передачи, телеграфные уравнения, нестационарные токи и напряжения, распределенные и сосредоточенные параметры.

## 1. Introducere

Sensul fizic al puterii reactive este determinat de schimbul de energie dintre câmpul electric și câmpul magnetic în circuitele de curent alternativ. Cel mai frecvent se consideră că atât câmpul electric, cât și câmpul magnetic sunt localizate în spațiu. Pentru această ipoteză, elementele în care are loc stocarea energiei electrice se prezintă condensatoarele electrice și bobinele de inductanță - reactoare și/sau transformatoare. Aceste elemente se consideră echipamente electrotehnice cu parametri concentrați pentru cazul curenților de curent alternativ de frecvență industrială. Adesea, se consideră, că mărimile ce determină parametrii condensatoarelor și bobinelor de inductanță au sens de mărimi geometrice. Ca exemplu, se poate indica la capacitatea pământului, care se măsoară și în centimetri.

Pentru electrotehnică, prezentarea în schemele echivalente a elementelor cu proprietăți de stocare a energiei în câmpul electric și câmpul magnetic este o practică frecvent utilizată. Introducerea noțiunii de circuit electric este utilă și rezultativă. Totuși, din punct de vedere a fizicii proceselor, circuitele electrice cu parametri concentrați sunt o aproximare [1], care devine evidentă la analiza proceselor tranzitorii și de înaltă frecvență. Utilizarea schemelor echivalente cu parametri concentrați este justificată la îndeplinirea condiției  $l \ll \lambda$ . Deci, dimensiunea  $l$  a echipamentului și/sau a circuitului este mult mai mică în comparație cu lungimea undei electromagnetice  $\lambda$ , determinată de frecvența curentului din circuit.

Rețelele electrice sunt un element al sistemelor electroenergetice cu semnificație pronunțată de circuite cu parametri distribuiți [2]. În liniile electrice de lungime mare se observă o variație a valorii decalajului de fază dintre curent și tensiune în diferite secțiuni ale liniei [3]. Din punct de vedere a electrotehnicii clasice pentru cazul circuitelor cu curenți de formă sinusoidală, în linia electrică are loc o redistribuire a puterii transmise prin linie. În unele secțiuni predomină componenta activă a puterii, iar în alte secțiuni componenta reactivă, fie cu caracter capacitiv, fie cu caracter inductiv [2,4].

În acest context apar neclarități privitor la tratarea noțiunilor de putere activă și reactivă în liniile parametric distribuite chiar și pentru cazul regimurilor sinusoidale. Problema este mult mai dificilă în cazul proceselor tranzitorii sau a regimurilor deformate. De exemplu, cu metoda amplitudinilor complexe (MAC) puterea aparentă a liniei se poate prezenta cu două componente ortogonale și se poate determina repartitia lor pe lungimea circuitului, fără a apela la schema echivalentă prezentată de circuite de tipul RLC [5]. În regimuri deformante pentru a asigura balanța energetică în circuit se mai introduc componente suplimentarea de putere - puterea deformantă [6], care direct nu reiese din esența fizică a proceselor energetice din circuit. Reieșind din această mică analiză a problemei, se poate sugera ideea, că chiar și

În cazul regimului sinusoidal în circuitele liniare pot apare dificultăți la definirea și explicarea esenței fizice a mărimilor utilizate pentru caracteristica proceselor energetice din aceste circuite în cazul exprimării lor ca putere. Din patru mărimi cum sunt puterea aparentă, puterea activă, puterea reactivă și puterea deformantă utilă se prezintă pentru consumator numai o singură componentă - puterea activă.

## 2. Formularea problemei investigației

Liniile electrice prezintă un element funcțional pentru transportul energiei produse la centralele electrice către consumatorii finali. Ca produs comercializat se prezintă puterea activă facturată totalmente și puterea reactivă care se facturează parțial în funcție de factorul de putere a receptoarelor de energiei electrice a consumatorului. În acest context puterea activă și puterea reactivă sunt determinate la intrarea și ieșirea liniei electrice de curent alternativ. Procesele din linie rămân fără examinare din punct de vedere a raporturilor dintre diferite componente a puterii electrice ce circulă prin rețea. Liniile de înaltă tensiune au semene evidente de circuite cu parametri distribuiți și urmare a acestui fapt apare problema privind modul de tratare a noțiunii de putere reactivă în aceste circuite.

De pe pozițiile fizicii matematice se poate depăși această dificultate, dacă considerăm, că ecuațiile inițiale ale circuitelor electrice liniare se referă la clasa ecuațiilor hiperbolice. Pentru aceste ecuații se poate utiliza integrala energiei sau teorema conservării energiei, inclusiv a energiei electromagnetice în circuitul cu parametri distribuiți [7-10]. În baza acestei ipoteze vom examina modalitatea de determinare a puterii reactive a liniei lungi monofilare cu parametri distribuiți în regim sinusoidal și pentru semnale periodice de curent și tensiune de formă arbitrară - regim nesinusoidal.

## 3. Puterea liniei electrice în regim sinusoidal

Transportul energiei electromagnetice prin linia lungă cu ajutorul curenților de conductivitate se descrie de ecuațiile telegrafistilor, care se pot trata ca derivate a teoremelor Kirhhgoff pentru un circuit închis, format de o porțiune a circuitului cu lungimea de  $dx$  [2]

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + Ri = 0; \quad C \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} + Gu = 0. \quad (1)$$

Pentru a obține unica soluție este necesar de completat sistemul de ecuații (1) cu condițiile inițiale și de limită. Fie că în momentul inițial al timpului  $t = 0$  linia se conectează la o sursă de tensiune sinusoidală, iar ca sarcină are o impedanță  $Z_s = R_s + jX_s$ :

$$u = U_0 e^{j\omega t} \text{ pentru } x = 0; \quad u = Z_s i \text{ pentru } x = l.$$

Prin transformarea în spațiu a funcțiilor complexe vom deduce următoarea relație integrală prin înmulțirea primei ecuații a sistemului (1) la funcția conjugată a curentului  $i^*$ , iar ecuația a doua o vom substitui cu ecuația conjugată și o vom înmulți la funcția de tensiune  $u$ . La sumarea acestor expresii transformate obținem următoarea relație

$$L \frac{\partial i}{\partial t} i^* + C \frac{\partial u}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} (u i^*) + R i i^* + G u u^* = 0$$

sau

$$L \frac{\partial i}{\partial t} i^* + C \frac{\partial u}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} (u i^*) + R |i|^2 + G |u|^2 = 0. \quad (2)$$

Vom mai scrie o relație conjugată a ecuației (2):

$$L \frac{\partial i^*}{\partial t} i + C \frac{\partial u}{\partial t} u^* + \frac{\partial}{\partial x} (u^* i) + R |i|^2 + G |u|^2 = 0. \quad (3)$$

Ecuațiile (2) și (3) le vom transforma prin sumarea și scăderea lor. După executarea unor proceduri de modificare a ecuațiilor obținem două expresii:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( L |i|^2 + C |u|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} [\operatorname{Re}(u i^*)] + R |i|^2 + G |u|^2 = 0; \quad (4)$$

$$L \left( \frac{\partial i}{\partial t} i^* - \frac{\partial i^*}{\partial t} i \right) + C \left( \frac{\partial u}{\partial t} u - \frac{\partial u}{\partial t} u^* \right) + 2j \frac{\partial}{\partial x} [\operatorname{Im}(u i^*)] = 0. \quad (5)$$

Lansăm ipoteza, că în regim staționar pentru  $t \rightarrow \infty$  soluția căutată, ca și tensiunea la intrarea liniei se poate prezenta prin funcții complexe de tipul  $u(x,t) = U(x)e^{j\omega t}$  și  $i(x,t) = I(x)e^{j\omega t}$ . Dacă valorile efective ale tensiunii și curentului le vom nota astfel  $U(x) = |U(x)|e^{j\varphi_u(x)}$ ;  $I(x) = |I(x)|e^{j\varphi_i(x)}$ , observăm că vor fi veridice relațiile  $|u(x,t)| = |U(x)|$  și  $|i(x,t)| = |I(x)|$ . Aceasta ne permite să considerăm că partea reală  $\operatorname{Re}(u i^*)$  a relației (4) și partea imaginară  $\operatorname{Im}(u i^*)$  a relației (5) se pot exprima prin puterea activă  $P$  și puterea reactivă  $Q$  în acel sens, cum aceste mărimi sunt definite în [4,5]:

$$u i^* = |U(x)| \cdot |I(x)| e^{j\varphi_u(x)} e^{-j\varphi_i(x)} = |U(x)| \cdot |I(x)| e^{j\varphi(x)}; \quad \varphi(x) = \varphi_u(x) - \varphi_i(x);$$

$$\operatorname{Re}(u i^*) = |U(x)| \cdot |I(x)| \cos \varphi(x) = P(x); \quad \operatorname{Im}(u i^*) = |U(x)| \cdot |I(x)| \sin \varphi(x) = Q(x).$$

Substituim în ecuațiile (4) și (5) tensiunea  $u(x,t) = U(x)e^{j\omega t}$  și curentul  $i(x,t) = I(x)e^{j\omega t}$ . Întegrăm expresiile obținute pe variabila  $x$  în intervalul  $0 \leq x \leq l$ . În rezultat se obține ecuația balanței puterii active și reactive în circuitul examinat:

$$\int_0^l \left( R |I(x)|^2 + G |U(x)|^2 \right) dx = P(0) - P(l) \quad (6)$$

și

$$\omega \int_0^l \left( L |I(x)|^2 - C |U(x)|^2 \right) dx = Q(0) - Q(l). \quad (7)$$

Componentele din stânga ale ecuațiilor (6) și (7) determină respectiv puterea activă și puterea reactivă a liniei. La analiza proceselor vom utiliza în continuare formulele metodei amplitudinilor complexe (MAC):

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}; \quad \delta = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}; \quad Z_S = R_S + j\left(\omega L_S - \frac{1}{\omega C_S}\right);$$

$$Z_{BX} = Z_0 \frac{Z_S + Z_0 \operatorname{th}(\delta l)}{Z_0 + Z_S \operatorname{th}(\delta l)}; \quad U_0 = Z_{BX} I_0; \quad U_1 = Z_S I_1; \quad U_1 = U_0 \operatorname{ch}(\delta l) - Z_0 I_0 \operatorname{sh}(\delta l);$$

$$S = UI^* = P + jQ = |U||I| \cos \varphi + j|U||I| \sin \varphi.$$

În aceste formule sunt notate variabilele:  $\omega = 2\pi f$  – frecvența unghiulară;  $Z_0$  – impedanța caracteristică a liniei;  $\delta, \alpha, \beta$  – coeficienții de propagare, atenuare și fază;  $Z_S, Z_{BX}$  – impedanța sarcinii circuitului și impedanța de intrarea a circuitului electric;  $U_0, I_0, U_1, I_1$  – valorile complexe ale tensiunii și curentului la intrarea și la capătul liniei cu lungimea  $l$ ;  $S$  – puterea aparentă;  $P$  – puterea activă și  $Q$  puterea reactivă.

Soluția căutată pentru orișice punct  $x$  a porțiunii  $[0, l]$  după MAC se prezintă de relațiile

$$U(x) = U_0 \operatorname{ch}(\delta x) - Z_0 I_0 \operatorname{sh}(\delta x); \quad Z_0 I(x) = -U_0 \operatorname{sh}(\delta x) + Z_0 I_0 \operatorname{ch}(\delta x). \quad (8)$$

În ecuațiile (6) и (7) vom substitui componentele respective luând în considerare ecuațiile (6-8). Expresiile obținute se vor integra după variabila  $x$  pentru a obține în formă evidentă formulele ce reprezintă integral legăturile dintre puterea sursei, puterea absorbită de sarcină și linia lungă:

$$2|Z_0|^2 [P(0) - P(l)] = \left(R + G|Z_0|^2\right) \frac{\operatorname{sh}(\alpha l)}{\alpha} \left[ (|U_0|^2 + |I_0 Z_0|^2) \operatorname{ch}(\alpha l) - 2 \operatorname{Re}(U_0 I_0^* Z_0^*) \operatorname{sh}(\alpha l) \right] +$$

$$+ \left(R - G|Z_0|^2\right) \frac{\sin(\beta l)}{\beta} \left[ (|I_0 Z_0|^2 - |U_0|^2) \cos(\beta l) + 2 \operatorname{Im}(U_0 I_0^* Z_0^*) \sin(\beta l) \right];$$

$$\frac{2|Z_0|^2}{\omega} [Q(0) - Q(l)] = \left(L - C|Z_0|^2\right) \frac{\operatorname{sh}(\alpha l)}{\alpha} \left[ (|U_0|^2 + |I_0 Z_0|^2) \operatorname{ch}(\alpha l) - 2 \operatorname{Re}(U_0 I_0^* Z_0^*) \operatorname{sh}(\alpha l) \right] +$$

$$+ \left(L + C|Z_0|^2\right) \frac{\sin(\beta l)}{\beta} \left[ (|I_0 Z_0|^2 - |U_0|^2) \cos(\beta l) + 2 \operatorname{Im}(U_0 I_0^* Z_0^*) \sin(\beta l) \right]. \quad (9)$$

Pentru linia fără deformarea semnalului și  $Z_0 = Z_B = \sqrt{L/C}$ ,  $\delta = (\gamma + j\omega)/a$ ,  $a = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\gamma = R/L = G/C$  relația (9) substanțial se simplifică:

$$P(0) - P(l) = \operatorname{sh}(\gamma \Delta) \left[ \left( Z_B |I_0|^2 + |U_0|^2 / Z_B \right) \operatorname{ch}(\gamma \Delta) - 2 \operatorname{Re}(U_0 I_0^*) \operatorname{sh}(\gamma \Delta) \right];$$

$$Q(0) - Q(l) = \sin(\omega \Delta) \left[ \left( Z_B |I_0|^2 - |U_0|^2 / Z_B \right) \cos(\omega \Delta) + 2 \operatorname{Im}(U_0 I_0^*) \sin(\omega \Delta) \right].$$

În varianta, când sarcina include numai componenta activă  $Z_S = R_S$ , se poate demonstra, că la capătul liniei puterea reactivă are valoarea zero și ecuația balanței puterilor în circuit se prezintă de următoarele relații:

$$P(0) - P(l) = \frac{U_0^2}{Z_B} \frac{(1 - e^{-2\gamma \Delta})(1 + z^2 e^{-2\gamma \Delta})}{1 + 2z_\gamma \cos(2\omega \Delta) + z_\gamma^2};$$

$$Q(0) = -\frac{U_0^2}{Z_B} \frac{z_\gamma \sin(2\omega\Delta)}{1 + 2z_\gamma \cos(2\omega\Delta) + z_\gamma^2}; \quad z_\gamma = ze^{-2\gamma\Delta}; \quad z = \frac{R_S - Z_B}{R_S + Z_B}.$$

Pentru cazul  $R_S = Z_B$  al liniei fără deformarea semnalului, obținem că și la intrarea liniei nu se consumă putere reactivă  $Q(0) = 0$ , iar în linia ideală cu sarcina racordată ( $\gamma = 0$ ) puterea injectată (generată) și puterea activă absorbită de sarcină coincid după valoare  $P(0) = P(l)$ .

Atribuirea sensului fizic rezultatelor obținute în urma transformărilor prezentate mai sus constituie o problemă discutabilă, dar ni se pare foarte esențial în studiul executat însuși procedura de obținere a ecuației balanței puterilor pentru regimul sinusoidal staționar ca consecință a transformărilor sistemului de ecuații (1). Relațiile obținute nu permit de a da o tratare a naturii puterii reactive și o prezentare fizică adecvată și argumentată, chiar pentru cazuri particulare ale regimurilor de funcționare ale liniilor lungi. Vom menționa, că în lucrarea [11], precum și în alte publicații se consideră fizic argumentată numai puterea instantanee  $p = iu$  și valoarea ei medie pe perioada  $T$  a oscilației sinusoidale, definită ca putere activă  $P$ . Componenta denumită putere reactivă  $Q$  și puterea aparentă  $S$  se consideră ca mărimi comode de calcul, care au capacitatea de a caracteriza într-un mod stabilit procesele energetice ale semnalelor sinusoidale (tensiune și curent). Reieșind din această constatare a situației privind problema examinată, vom purcede la studierea evoluției valorilor instantanee ale tensiunii și curentului în circuit, urmărind procesul de la momentul de comutație, deci de la starea nulă inițială până la atingerea regimului staționar în circuit (a oscilațiilor din circuitul liniar cu parametri distribuiți și concentrați). O astfel de abordare se prezintă argumentată și logică, deoarece orice proces staționar are ca predecesor un proces nestaționar pentru care a priori nu este posibil de argumentat corectitudinea de a separa componentele puterii reactive din puterea instantanee (una sau mai multe componente). Obținerea și argumentarea corectitudinii soluției problemei examinate a fost și este în atenția multor cercetători [12-14], dar corectitudinea rezultatelor rămâne discutabilă, chiar și în cazul examinării regimurilor ne sinusoidale periodice în circuitele liniare.

#### 4. Puterea liniei în regim ne sinusoidal

Pentru regimurile staționare sinusoidale componenta instantanee a puterii active se determină ca valoarea medie pentru perioada oscilației, de exemplu după formula [11]:

$$Q = \frac{1}{\omega T} \int_0^T u \left( \frac{di}{dt} \right) dt = -\frac{1}{\omega T} \int_0^T i \left( \frac{du}{dt} \right) dt. \quad (10)$$

Formule de genul (10) se pot utiliza numai pentru circuite cu parametri concentrați și nu pot fi utilizate la efectuarea calculului în circuitele cu parametri distribuiți și circuitele cu curenți și tensiuni ne sinusoidale. Pentru problema calculării puterii în regimuri ne sinusoidale și circuite cu parametri distribuiți vom apela la ecuațiile hiperbolice [7-10] cu scopul obținerii expresiei pentru integrala energiei în circuitele liniare, deoarece formula obținută este veridică pentru orice funcție, care este soluția sistemului de (1).

Pentru obținerea relației integralei energiei vom utiliza procedura standard, ce constă în înmulțirea primei ecuații a sistemului (1) la variabila  $i$ , iar a ecuației a doua la variabila  $u$ . Relațiile obținute astfel le vom suma

$$Li \frac{\partial i}{\partial t} + i \frac{\partial u}{\partial x} + Ri^2 + Cu \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial i}{\partial x} + Gu^2 = 0 \text{ sau } \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (Li^2 + Cu^2) + Ri^2 + Gu^2 + \frac{\partial}{\partial x} (iu) = 0$$

Integrarea ultimei expresii în domeniul  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , ținând cont de condițiile inițiale, ne permite să obținem relația:

$$\int_0^t \int_0^l (Ri^2 + Gu^2) dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^l (Li^2 + Cu^2) dx = \int_0^t [i(0, \tau)u(0, \tau) - i(l, \tau)u(l, \tau)] d\tau. \quad (11)$$

Partea din stânga a balanței energetice a circuitului prezintă suma componentei active, care ireversibil se transformă în căldură și a componentei reactive (reversibile) a energiei totale a circuitului ( $0 \leq x \leq l$ ), iar funcția din dreapta prezintă diferența dintre energia cedată de sursă și energia absorbită de sarcină. Toate componentele expresiei (11) se măsoară în Joule.

În caz că valorile instantanee ale curenților și tensiunilor sunt soluțiile sistemului inițial de ecuații (1), reiese că se respectă și legea conservării energiei (11). Deoarece pentru condiții inițiale și de limită nule egalitatea (11) este veridică numai pentru soluția trivială  $i \equiv u \equiv 0$ , iar din alternativa Fredholm reiese demonstrarea teoremei privind unica soluție a sistemului în caz că această soluție există.

La cunoașterea repartiției în spațiu și în timp ale tensiunilor și curenților în circuitul examinat obținem din expresia (11), că pierderile ireversibile a puterii active în linie pentru momentul de timp  $t$  se determină din următoarea relație

$$P(t) = \int_0^l (Ri^2 + Gu^2) dx, \quad (12)$$

iar valoarea totală a componentei reversibile a energiei acumulate în câmpul electric și magnetic al liniei pentru momentul de timp  $t > 0$  se calculează din

$$W(t) = W_M(t) + W_S(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (Li^2 + Cu^2) dx, \quad W_M(t) = \frac{1}{2} \int_0^l Li^2 dx, \quad W_S(t) = \frac{1}{2} \int_0^l Cu^2 dx. \quad (13)$$

Diferențierea expresiei (11) după variabila  $t$  ne permite să obținem următoarea relație

$$\int_0^l (Ri^2 + Gu^2) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l (Li^2 + Cu^2) dx = i(0, t)u(0, t) - i(l, t)u(l, t)$$

iar utilizând notările expresiilor (12), (13) obținem formula

$$P(t) + \frac{d}{dt} W(t) = i(0, t)u(0, t) - i(l, t)u(l, t).$$

Vom considera, că toate componentele acestei formule sunt funcții periodice și determinând valoarea lor medie pentru intervalul de timp  $[0, T]$ , obținem expresia

$$\frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt + \frac{1}{T} [W(T) - W(0)] = \frac{1}{T} \int_0^T i(0, t)u(0, t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T i(l, t)u(l, t) dt. \quad (14)$$

Deoarece este valabilă condiția  $W(T) = W(0)$ , ecuația pentru balanța puterii active a generatorului, sarcinii și a circuitului dintre sursă și sarcină (linia lungă) se va prezenta de relația

$$P_a = P(0) - P(l) = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt. \quad (15)$$

În particular, pentru regimul sinusoidal staționar  $T = 2\pi/\omega$  obținem

$$u(x,t) = U(x) \sin(\omega t + \varphi_u(x)), \quad i(x,t) = I(x) \sin(\omega t + \varphi_i(x)),$$

unde  $U(x)$  și  $I(x)$  – valorile efective ale tensiunii și curentului.

Calculul integralelor (14) conduce la următoarele relații:

$$P_a = \int_0^l [RI^2(x) + GU^2(x)] dx; \quad P(0) = I(0)U(0) \cos\varphi(0);$$

$$P(l) = I(l)U(l) \cos\varphi(l); \quad \varphi(x) = \varphi_u(x) - \varphi_i(x).$$

Urmare a acestui fapt relația (15) a balanței puterilor active în circuit se va prezenta de expresia

$$\int_0^l [RI^2(x) + GU^2(x)] dx = P(0) - P(l),$$

care coincide cu relația (6).

Dacă vom utiliza metodologia descrisă anterior pentru obținerea relațiilor de calcul a puterii reactive pentru cazul funcțiilor arbitrare periodice cu diferențierea ecuației (1) și înmulțirea la variabila  $i$ , precum și prin înmulțirea ecuației a doua la operatorul  $\partial u/\partial t$  cu sumarea acestor expresii obținem relațiile:

$$Li \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + i \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + Ri \frac{\partial i}{\partial t} + C \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial i}{\partial x} + Gu \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

sau

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (Ri^2 + Gu^2) + Li \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + C \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( i \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0.$$

Integrarea ultimei relații în domeniul  $0 \leq x \leq l$  se finalizează cu obținerea relației:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l (Ri^2 + Gu^2) dx + \int_0^l \left[ Li \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + C \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx = i(0,t) \frac{du(0,t)}{dt} - i(l,t) \frac{du(l,t)}{dt}.$$

Prin calcularea valorii medii pentru intervalul de timp  $[0, T]$  obținem că

$$\frac{1}{2T} [P(T) - P(0)] + \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l \left[ Li \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + C \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt = \frac{1}{T} \int_0^T i(0,t) \frac{du(0,t)}{dt} dt - \frac{1}{T} \int_0^T i(l,t) \frac{du(l,t)}{dt} dt,$$



deoarece  $P(T) = P(0)$ , iar ținând cont de (10) și în baza unor transformări a relației examinate se obține ecuația balanței puterilor reactive în circuitul liniei:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l \left[ Li \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + C \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt = -\omega [Q(0) - Q(l)]. \quad (16)$$

Relația (16) se poate transforma în următoarea expresie

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l \left[ Li \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + C \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt = \frac{1}{T} \int_0^l i \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_{t=0}^T dx - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l \left[ L \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)^2 - C \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt.$$

Pentru soluția periodică cu perioada  $T$  componenta  $i \partial i / \partial t \Big|_{t=0}^T$  este egală cu zero. Ca urmare a acestui fapt, reiese, că pentru sarcina activă a liniei  $u = R_s i$  și în corespundere cu (10) puterea reactivă la capătul liniei va avea valoarea zero:  $Q(l) = 0$ . Din (16) obținem relația, care este veridică pentru orice soluție periodică și care prezintă coraportul dintre puterile reactive ale sursei, sarcinii și liniei lungi din cadrul circuitului integrat

$$\frac{1}{\omega T} \int_0^T \int_0^l \left[ L \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)^2 - C \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt = Q(0) - Q(l). \quad (17)$$

Pentru regimul sinusoidal se obține formula

$$\omega \int_0^l \left[ LI^2(x) - CU^2(x) \right] dx = Q(0) - Q(l), \quad (18)$$

care coincide cu relația (7).

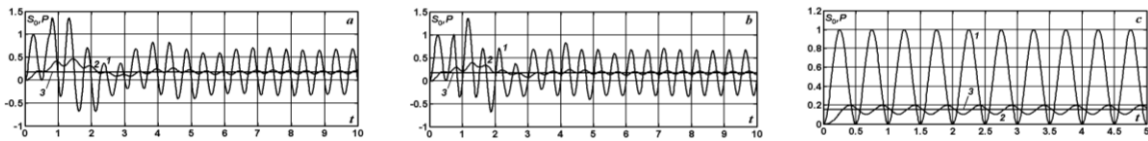
## 5. Analiza indicatorilor energetici ai liniei electrice

Vom efectua o analiză numerică a indicatorilor energetici ai liniei electrice cu tensiuni și curenți sinusoidali și de formă ne sinusoidală. Este util de prezentat parametrii circuitului în sistemul de unități relative  $L = C = Z_B = \lambda = a = T = f = 1$ . Ca obiect al cercetării selectăm linia fără deformarea semnalului pentru care se poate obține soluția precisă atât pentru regimul staționar, cât și tranzitoriu pentru tensiuni și curenți cu forma arbitrară [15]. Fie că, linia electrică omogenă cu parametrii  $l = 3 \lambda / 8$ ;  $R = G = 0.48$  se conectează la sursa de tensiune sinusoidală  $u = \sin(2\pi ft)$ , și care are ca sarcină o rezistență activă la capătul ei  $x = l$ , deci  $u = R_s i$ .

Liniile cu lungimea de undă  $\lambda / 8, 3 \lambda / 8, 5 \lambda / 8, \dots$  se caracterizează prin aceea, că valorile calculate cu metoda MAC ale pierderilor active în regim de mers în gol coincid cu valorile pierderilor în regim de scurtcircuit după modul. În regim de putere naturală cu sarcina  $R_s = 1$  puterea reactivă a liniei este egală cu zero. În acest regim se consideră că linia este echilibrată

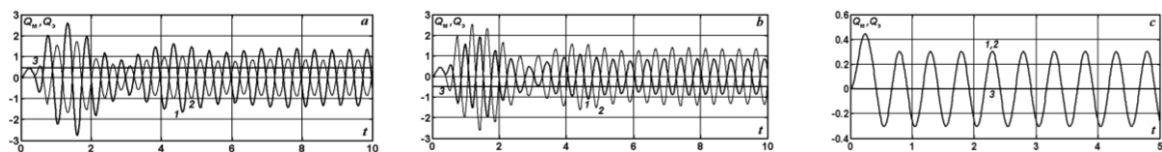
după puterea reactivă, deoarece valorile instantanee ale energiilor câmpului electric și câmpului magnetic coincid după valoare [13].

Regimul staționar are ca predecesor regimul tranzitoriu și din aceste considerente calcularea proceselor în circuit se prezintă util de efectuat în consecutivitatea lor naturală de derulare. În figura 1 sunt prezentate curbele de evoluție a puterii aparente instantanee a sursei  $S_0(t) = i(0,t)u(0,t)$  și a pierderilor  $P(t)$  în linie (curbele 1;2) de la momentul de comutație pentru sarcina liniei: mers în gol  $R_s = \infty$  (a), scurt circuit  $R_s = 0$  (b) și sarcină racordată  $R_s = 1$  (c). Constanta notată cu cifra 3, corespunde valorii calculate cu metoda MAC a diferenței puterilor active ale sursei și a sarcinii, care totalmente corespunde valorii medii în regim staționar calculată cu formula (15) pentru sarcinile examinate ale liniei, respectiv:  $P_a = 0.1726$  (a);  $0.1726$  (b);  $0.1512$  (c).



**Fig. 1** Caracterul evoluției în timp a puterii instantanee active a sarcinii și a pierderilor (putere activă) în linie (curbele 1;2) pentru  $R = G = 0.48$  și schimbarea valorii sarcinii  $R_s = \infty$  (a);  $0$  (b);  $1$  (c).

Cu scopul analizei numerice a derulării proceselor electromagnetice și schimbului de energie dintre componentele circuitului (sursă și linia cu parametri distribuiți) vom calcula valorile instantanee ale componentelor puterii reactive în inductanța și capacitatea distribuite ale liniei  $Q_M(t)$  și  $Q_S(t)$ , care se determină ca derivate a variabilei  $t$  a funcțiilor instantanee a energiilor  $W_M(t)$  și  $W_S(t)$  (curbele 1;2) acumulate în câmpul magnetic și în câmpul electric al liniei cu curent alternativ sinusoidal. Linia electrică este o porțiune de circuit cu parametri distribuiți. În figura 2 curba 3 corespunde valorii instantanee a puterii reactive la bornele sursei determinată cu metoda MAC și care absolut coincide cu valoarea calculată cu ajutorul formulei (18) pentru curenții și tensiunile de formă sinusoidală.

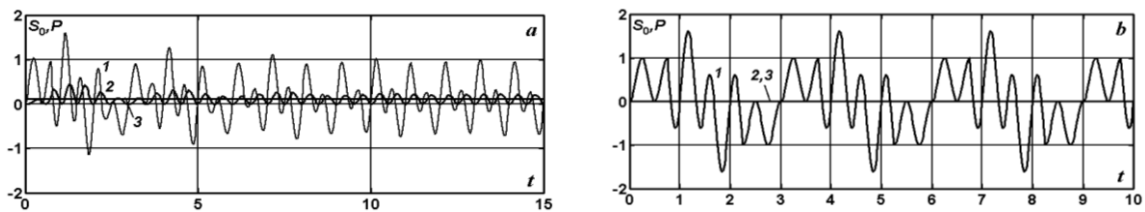


**Fig.2.** Evoluția în timp a puterii instantanee a câmpului magnetic și câmpului electric în linia cu parametri de disipare  $R = G = 0.48$  atribuirea sarcinii următoarelor valori discrete  $R_s = \infty$  (a);  $0$  (b);  $1$  (c).

magnetic și câmpului electric în linia fără deformarea semnalului cu sarcină activă racordată  $R_s = 1$ . Fenomenul are un caracter mai complex pentru cazul când amplitudinile și fazele puterilor instantanee nu coincid în timpul procesului tranzitoriu și în regim staționar. Estimarea puterii reactive pentru astfel de condiții în formă de valoare numerică este destul de aproximativă și la nivel calitativ caracterizează procesul de circulație a energiei electromagnetice în circuitul liniar cu parametri distribuiți. De exemplu, puterea reactivă la

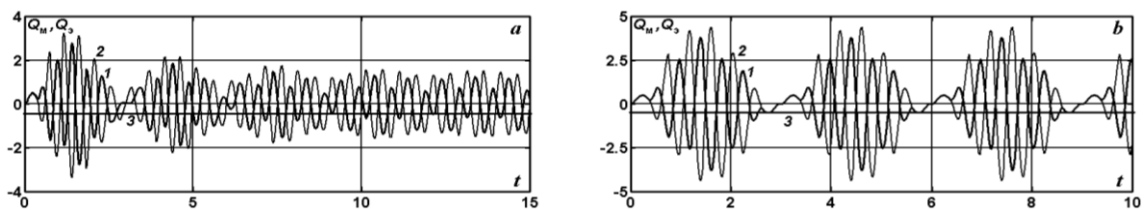
intrarea în linie în regim de mers în gol are valoarea  $Q_0 = 0.4693$  (curba 3 în fig. 2a) și  $Q_0 = -0.4693$  în regim de scurtcircuit (curba 3 în fig. 2b). Din acestea reiese, că în regim de mers în gol dominantă în linie este energia acumulată în câmpul electric al liniei, iar în regim de scurtcircuit energia acumulată în câmpul magnetic. Aceasta se confirmă și de caracterul evoluțiilor funcțiilor periodice, care și-au schimbat valorile de amplitudine în figurile respective.

În fig. 3 se prezintă evoluția în timp a puterii totale a sursei și a puterii active a liniei în regim de scurtcircuit (curbele 1;2) pentru rezistența longitudinală  $R$  și conductivitatea activă transversală  $G$  a liniei  $R = 0; G = 0.48$  (a);  $R = G = 0$  (b). Curba, notată cu numărul 3 corespunde valorii constante a puterii active în linie  $P_a = 0.1082$  (a), inclusiv  $P_a = 0.0$  (b).

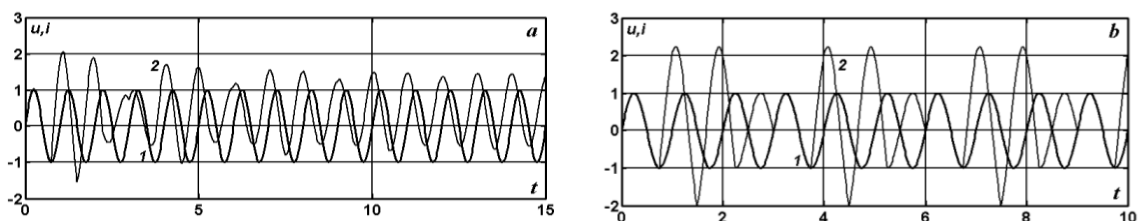


**Fig.3.** Evoluția în timp a puterii instantanee a sarcinii și a pierderilor de energie în linia electrică în regim de scurtcircuit (curbele 1;2) pentru valorile parametrilor câmpului magnetic și câmpului electric în linia cu parametrii de disipare  $R = 0; G = 0.48$  (a);  $0$  (b)

Valorile instantanee a puterilor ce caracterizează câmpul magnetic și electric al liniei în regim de scurtcircuit sunt prezentate în figura 4. Curbele notate cu 3, corespund respectiv următoarelor valori ale puterii reactive a liniei  $Q_0 = -0.4906$  (a);  $-0.5$  (b), calculate cu formula (18). Pentru problemele examinate soluțiile regimului staționar sunt prezentate de funcții periodice formate din porțiuni de sinusoidă (fig.5). Pentru acest tip de funcții metoda MAC nu se poate utiliza în principiu pentru obținerea soluțiilor căutate.



**Fig.4.** Valorile instantanee a puterii reactive a câmpului magnetic și a câmpului liniei în regim de scurtcircuit electric (curbele 1;2) pentru  $R = 0; G = 0.48$  (a);  $0$  (b)



**Fig.5.** Valorile instantanee a tensiunii și curentului (curbele 1;2) la intrarea în linie în scurtcircuit pentru  $R = 0; G = 0.48$  (a);  $0$  (b)

Vom menționa, că pierderile de putere activă în linie și în acest caz se pot caracteriza printr-o singură valoare medie pe perioadă, pe când diferența dintre valorile puterilor instantanee utilizate pentru caracteristica energetică a câmpurilor magnetic și electric ale liniei, care se calculează cu formula (18) și se prezintă în formă de o singură valoare numerică nu mai este posibil să elucideze informația la integral despre procesele de schimb de energie ale câmpurilor electromagnetice ale circuitului electric. Contrapunerea informației grafice prezentată în figura 2b și figura 4 permite de a depista o particularitate foarte esențială ce se referă la caracterul derulării proceselor în linie și care constă în aceea, că caracterul evoluției instantanee în timp a câmpului magnetic și a câmpului electric a liniei în regim de scurtcircuit diferă destul de esențial. Totodată, caracteristicile integrale prezentate ca putere reactivă (18) se deosebesc după valoare foarte neesențial. Diferența este depistată numai pentru a doua și/sau a treia cifră zecimală semnificativă a soluției numerice.

La aplicarea la intrarea liniei a tensiunii alternative cu forma de trapez cu pante abrupte de creștere și de descreștere (fig.6), valorile puterii reactive (fig.7)  $Q_0 = -0.626$  (a);  $-0.636$  (b) depășesc valorile respective prezentate în figura 7, dar diferența dintre valorile acestor mărimi este neesențială. La aplicarea semnalului periodic de formă triunghiulară cu aceeași valoare a amplitudinii puterea reactivă a liniei devine de două ori mai mică după valoare:  $Q_0 = -0.314$  (a);  $-0.318$  (b).

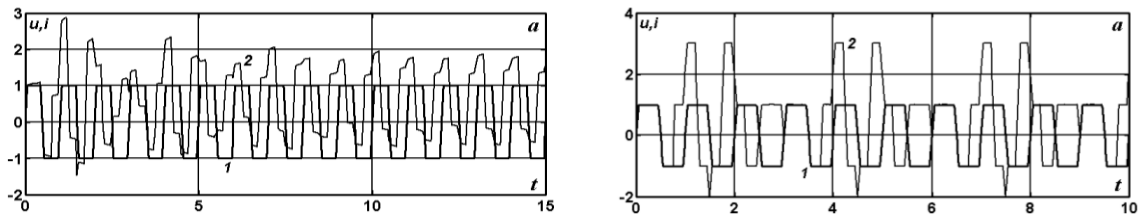


Fig.6. Valorile instantanee a tensiunii și curentului (curbele 1;2) la intrarea în linia în scurtcircuit cu parametrii  $R = 0$ ;  $G = 0.48$  (a);  $0$  (b) la aplicarea la intrarea ei a tensiunii cu forma de trapez

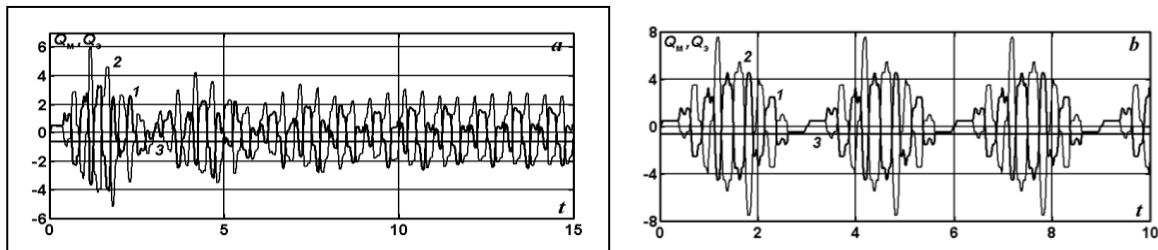


Fig.7. Valorile puterii instantanee a puterii reactive a câmpului magnetic și a câmpului electric (curbele 1;2) a liniei în regim de scurtcircuit cu parametrii  $R = 0$ ;  $G = 0.48$  (a);  $0$  (b)

## Concluzii

1. Cu metoda amplitudinilor complexe (MAC) s-au obținut relațiile generalizate în formă evidentă ce reprezintă integral legăturile dintre puterea sursei, puterea absorbită de sarcină și linia lungă. Din aceste relații se obțin expresiile pentru calcularea puterii active (pierderile) și reactive a liniei fără deformarea semnalelor în regim racordat și în linia fără pierderi.
2. Relațiile obținute nu permit de a da o tratare a naturii puterii reactive a liniei și o prezentare fizică adecvată și argumentată, chiar pentru cazuri particulare ale regimurilor de funcționare ale liniilor lungi.
3. Pentru cazul semnalelor de formă arbitrară, dar periodice, s-au obținut relațiile, care prezintă coraportul dintre puterile reactive ale sursei, sarcinii și liniei lungi din cadrul

- circuitului integră și care sunt veridice pentru orice soluție periodică privind puterea reactivă a liniei.
4. Se evidențiază coincidența absolută a valorilor puterilor instantanee a câmpului magnetic și câmpului electric în linia fără deformarea semnalului cu sarcină activă racordată  $R_s = 1$ .
  5. S-a depistat o diferență dintre valorile puterilor instantanee a câmpurilor magnetice și electrice ale liniei. Pentru aceste condiții prezentarea cantitativă în formă de o singură valoare numerică a puterii reactive nu poate servi la integral ca măsură a proceselor de schimb de energie dintre câmpurile electromagnetice ale circuitului electric cu parametri distribuți. Aceasta este o urmare a faptului, că caracterul evoluției instantanee în timp a câmpului magnetic și a câmpului electric a liniei în regim de scurtcircuit diferă destul de esențial.

## Bibliografie

- [1] Beber, E. Liniar transient analysis. *Volume I. Lumped-Parameter Two-Terminal Networks*. New York: John Wiley&Sons, INC. London: Chapman&Hall, Limited. Traducere în rusă. M.: Sovetskoe radio, 1958.-392 p.
- [2] Berzan V.P; Rimschi, V.X.; Tirsu, M.S.; Patsyuk, V.I.; Uzun, M.N. About some features of the power transfer mode on the long transmission line. *Euro-Asian Journal of sustainable energy development policy*, 2013, vol.4, nr. 1, January-June 2011, p.1-10.
- [3] Aleksandrov G.N.; Le Thani Bak. Umenishenie poteri moschnosti v dalinyh liniyah elektroperedachi s upraleaemyimi reaktorami. - *Electrichestvo*, 2007, Nr.3, ss. 8-15.(in Russian)
- [4] Bessonov L.A. Teoreticheskie osnovy electrotehniki. *Elektricheskie tsepi / Uchebnik dlea VTUZov*. – M.: Vysshaya shkola, 1984. – 559s (in Russian)
- [5] Krug K.A. Osnovy elektrotehiki. – L: ONTI, 1936. –888 s. (in Russian)
- [6] Kochkin V. Reaktivnaia moschnosti v elektricheskikh seteah. Tehnologhii upravleaemoi kompensatsii. <http://news.elteh.ru/arh/2007/45/08.php> (in Russian)
- [7] Godunov S.K. Uravnenia matematicheskoi fiziki. – M.: Nauka, 1971. – 416 s. (in Russian)
- [8] Godunov S.K., Zabrodin A.V.; Ivanov M.Ia. i dr. Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoi dinamiki. – M.: Nauka, 1976. – 400 s. (in Russian)
- [9] Samarsky A.A. Vvedenie v chislennye metody. – M.: Nauka, 1987. (in Russian)
- [10] Samarsky A.A., Gulin A.V. Ustoichivosti raznostnyh shem. – M.: Nauka, 1973. – 416 s. (in Russian)
- [11] Krogheris A.F.; Rashevits K.K.; Treimanis E.P. i dr. Moschnosti peremennogo toka. – Riga: Fiz.-energ.inst. Latv. AN, 1993. – 294 s. (in Russian)
- [12] Agunov, M.V.; Agunov A.V. Ob energheticheskikh sootnosheniah v elektricheskikh tsepeah s nesinusoidalnymi rejimami. – *Electrichestvo*, 2005, Nr.4, s. 53 – 56. (in Russian)
- [13] Aleksandrov, G. N. Priroda reaktivnoi moschmosti linii elektroperedachi. – *Trudy SPbGTU*, 2006, Nr.501. Elektroenergheticheskoe oborudovanie: nadejnosti i bezopasnosti, s.100 –109. (in Russian)
- [14] Demirchian K.S. Reaktivnaia moschmosti na sluchai nesinusoidalnyh funktsii. – *Izvestia Akademii nauk RF. Eneghetika*, 1992, Nr. 1, s. 3 – 18. (in Russian)

[15] Patsiuk V.I. Nesinusoidalnye napreajenia pri sinusoidalnom toke na vhode razomknutoi linii s potereami. – Problemy regionalnoi energhetiki, 2008, Nr. 3 (8), s. 47-60. (in Russian)

Lucrarea a fost prezentată la Forul Internațional FOREN 2014, 22-26 iunie 2014, Palatul Parlamentului, București, România

**Despre autori.**



**Berzan Vladimir.** Doctor-habilitat în științe tehnice. Aria intereselor științifice: diagnostica utilajului energetic, procese tranzitorii în rețele electrice neomogene, modelarea matematică, transport al energiei electrice la distanțe mari, surse de energie renovabile. Autorul a mai mult de 220 de publicări științifice, inclusiv 25 patente și 12 monografii. E-mail: berzan@ie.asm.md



**Pațuc Vladimir.** Doctor habilitat în științe fizico-matematice, docent al Universității de Stat din Moldova, colaborator științific superior al Academiei de Științe a Moldovei. Ariile intereselor științifice: fizica matematică, analiza numerică, mecanica mediilor compacte, electrotehnica teoretică, electronica de forță. Autor a mai mult de 140 de publicări științifice, inclusiv 9 monografii și o invenție.



**Tîrșu Mihai.** A absolvit Universitatea Tehnică din Moldova în 1994, specialitatea «Automatizarea și conducerea sistemelor tehnice». În 2003 a obținut titlul de doctor în științe tehnice. Cercetările de bază petrece în domeniul conducerii rețelelor de transport, diagnozei echipamentului de tensiune înaltă, electronicii de forță.