

Grado en Matemáticas

Título: Análisis de Estabilidad Arnoldi de las Ondas de Tollmien-Schlichting en fluidos viscosos

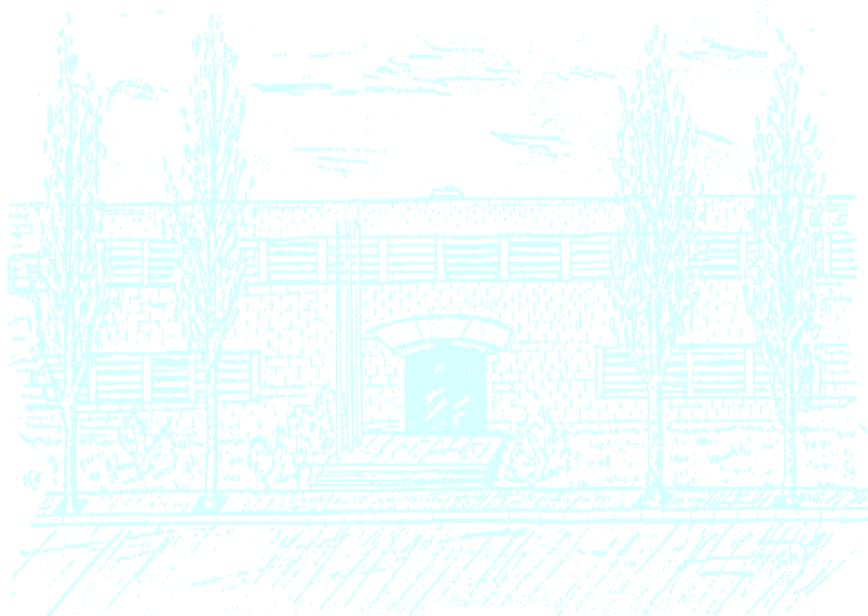
Autor: Raquel Montañez Fabrés

Director: Álvaro Meseguer Serrano

Departamento: Departamento de Física

Convocatoria: Junio 2017

:



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Trabajo de fin de grado

**Análisis de Estabilidad Arnoldi de las
Ondas de Tollmien-Schlichting en fluidos
viscosos**

Raquel Montañez Fabrés

Director: Álvaro Meseguer Serrano

Codirector: Fernando Mellibovsky Elstein

Dedicado a mi familia y mi pareja por su apoyo, y a los directores del trabajo y Roger Ayats López por su gran ayuda. Este proyecto no habría sido posible sin todos vosotros.

Resumen

Palabras clave: Flujo de Poiseuille, curva de estabilidad, ondas de Tollmien-Schlichting, bifurcación de Hopf, método de Arnoldi

MSC2000: 76D, 37N10, 37G15, 74S, 65F, 76M22

El desarrollo de inestabilidades en un flujo laminar es el primer paso en la transición a la turbulencia, proceso que hoy en día aun resulta difícil de comprender en su totalidad. La estabilidad hidrodinámica resulta un área completa de estudio en sí misma, y mediante el análisis de sistemas dinámicos, la teoría de bifurcación y los métodos numéricos es capaz proporcionar algunas respuestas a este problema.

En este trabajo se trabajará con el flujo de Poiseuille dos dimensional y su estabilidad. El objetivo concreto es determinar la curva de estabilidad de las ondas Tollmien-Schlichting, que aparecen con la inestabilidad del flujo laminar.

En el primer capítulo se explica la motivación de esta trabajo como una pequeña introducción al tema en cuestión. En el Capítulo 2 se presenta el flujo de Poiseuille y se estudia cuándo se produce la inestabilidad en el flujo básico laminar, que es la que da pie a la aparición de las ondas Tollmien-Schlichting, caracterizadas en el Capítulo 3. En el Capítulo 4 se estudia la estabilidad de estas últimas, objetivo del presente trabajo, y en el Capítulo 5 se corroboran los resultados obtenidos mediante el método de Arnoldi. Además el trabajo dispone de varios apéndices con explicaciones teóricas de los conceptos más relevantes.

Los resultados numéricos se han obtenido en Matlab, utilizando los códigos proporcionados por los tutores de este trabajo, Mellibovsky y Meseguer, y Roger Ayats. Con estos códigos se han obtenido la mayoría de gráficos, siendo otros de las referencias mencionadas en la bibliografía o internet.

Este trabajo pretende obtener resultados y el análisis de estos, pero no entra en el detalle de los códigos de Matlab proporcionados.

Índice general

Capítulo 1. Motivación: entendiendo la turbulencia de forma determinista	1
Capítulo 2. Fluidos y el flujo de Poiseuille	5
1. Conceptos básicos	5
2. Formulación del flujo de Poiseuille plano estacionario	7
3. Formulación en Ψ	9
4. Estabilidad lineal: Ecuación de Orr-Sommerfeld	11
Capítulo 3. Las ondas de Tollmien-Schlichting (TS)	15
1. Ondas TS: evidencia experimental	15
2. Evolución no lineal de las TS	16
3. Determinación estacionaria de las TS: Método de Newton-Krylov	17
Capítulo 4. Estabilidad de las ondas TS	21
1. Curva de estabilidad	21
2. Más allá de la bifurcación: onda modulada	27
Capítulo 5. Estabilidad de las TS mediante el método de Arnoldi	33
Capítulo 6. Conclusiones y cuestiones abiertas	35
Bibliografía	37
Apéndice A. Transformación de Squire	39
Apéndice B. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf	43
Apéndice C. Aplicación de Poincaré	47
Apéndice D. Métodos numéricos	49
1. Método de Arnoldi	49
2. Métodos de Krylov	51
3. Métodos de continuación	53
4. FFT	55

Capítulo 1

Motivación: entendiendo la turbulencia de forma determinista

La turbulencia, término usado para describir la irregularidad del movimiento de un fluido, está presente en nuestro día a día desde el inicio de los tiempos. Si observamos, por ejemplo, el humo saliente de un cigarro, en seguida veremos cómo este empieza a contraer formas espiraladas. Sin turbulencias, la contaminación urbana se mantendría flotando a nuestro alrededor, y los fenómenos meteorológicos siempre serían predecibles.

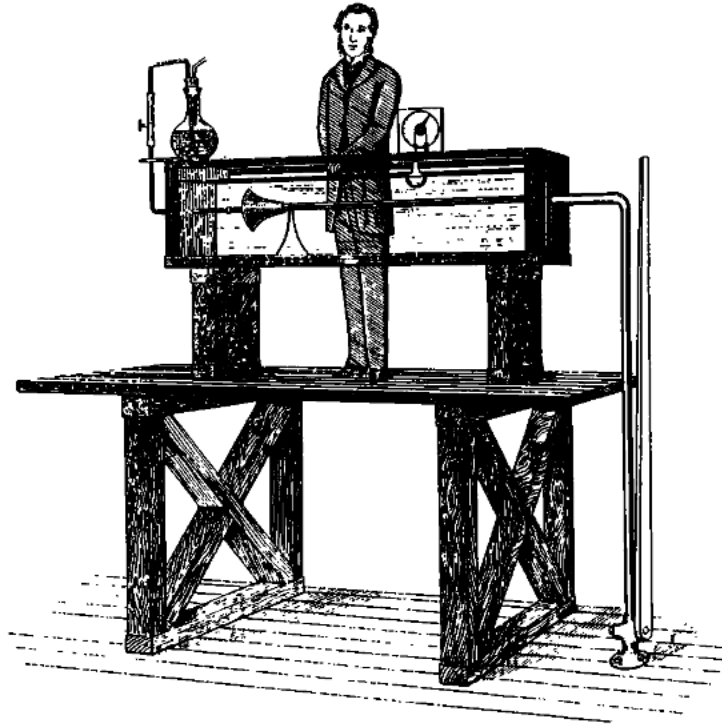
El proceso de transición a la turbulencia es aquel mediante el cual un fluido laminar (o regular) pasa a uno turbulento (irregular) a medida que un parámetro de control se modifica, normalmente el llamado número de Reynolds.

Entender esta transición para poder controlarla es un problema muy importante actualmente debido a sus numerosas aplicaciones. En campos tan diversos como la astrofísica, meteorología, geofísica o ingeniería este fenómeno está presente de una forma u otra. Un ejemplo concreto se daría en aerodinámica, ya que evitar la turbulencia supondría una reducción de la resistencia al viento, y por tanto una reducción en el coste del combustible. Aún así no siempre se busca alejar la turbulencia, sino que a veces se requiere el efecto contrario, como por ejemplo en aparatos de combustión supersónicos.

Incluso para sistemas de flujos muy simples, el entendimiento completo de esta transición resulta un reto para científicos de todas las disciplinas.

Su estudio se basa en las ecuaciones de Navier-Stokes, las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido viscoso. Estas fueron descubiertas en la primera mitad del siglo XIX por Navier y Stokes independientemente, y resultan ser ecuaciones muy complicadas para resolver analíticamente, tanto que incluso hoy en día no podemos afirmar unicidad para 3D. Tal como predijo von Neumann en 1949, el avance de la tecnología permite ahora poder hacer simulaciones de estas ecuaciones mediante métodos numéricos, lo cual ha supuesto un gran paso para el entendimiento del fenómeno turbulento en un sentido cuantitativo.

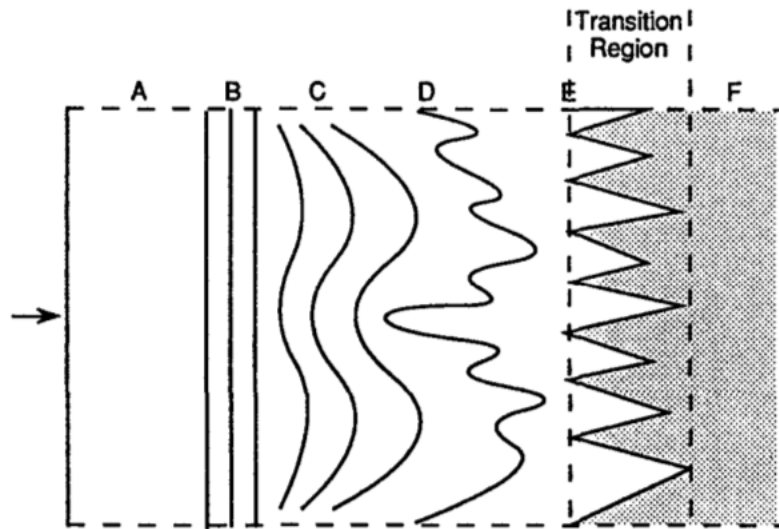
Cualitativamente, el salto se produjo en 1883 gracias a Osborne Reynolds y sus experimentos con tuberías de sección circular de distintos diámetros. Impuso el



1.1. Esquema del aparato utilizado por Reynolds en sus experimentos.

gradiente de presión constante en estas e hizo pasar agua por ellas (y posteriormente otros fluidos con distinta viscosidad), tal como se esquematiza en la Figura 1.1. En condiciones de laminaridad, la velocidad del agua en la tubería tiene un perfil parabólico, siendo esta máxima en el centro, y este régimen es conocido como flujo de Hagen-Poiseuille. Reynolds iba aumentando el caudal y midiendo la velocidad máxima del flujo hasta llegar a la turbulencia, detectando esta transición mediante el añadido de un colorante en la entrada de la tubería. Su gran aportación fue observar que la transición a la turbulencia venía controlada por una relación entre tres parámetros: radio de la tubería r , velocidad máxima del flujo U y viscosidad cinemática del fluido ν . Concretamente, no son estos valores individuales los que inciden en el paso a la turbulencia sino la cantidad adimensional rU/ν , más conocida como el número de Reynolds.

Anteriormente se pensaba que la turbulencia era un fenómeno aleatorio, pero actualmente se está avanzando en su entendimiento de forma determinista. Es decir, se estudian soluciones concretas que describen el paso de laminaridad a turbulencia, queriendo comprender todos sus estadios intermedios. En la Figura 1.2 se muestran de forma simplificada estos estadios intermedios para el caso de un flujo sobre una placa plana.



1.2. Esquema del proceso de transición a la turbulencia sobre una placa plana. En A se representa el flujo laminar, dando paso en F al flujo turbulento.

Diversos factores como la rugosidad o la transferencia de calor influyen en el proceso de transición, pero no juegan un papel determinante. Por ello en este trabajo nos centraremos únicamente en las ecuaciones de Navier-Stokes como medio para la descripción de este proceso.

Entender bien la turbulencia en tres dimensiones es muy complicado conceptualmente y costoso computacionalmente. Por ello trabajaremos en dos dimensiones, obteniendo también resultados muy relevantes. En concreto, se estudiará un primer mecanismo básico de transición en un flujo muy simple: el flujo de Poiseuille.

Este mecanismo consiste en la aparición de ondas viajeras de amplitud constante llamadas ondas de Tollmien-Schlichting, representadas por B en la Figura 1.2. Cabe destacar que estas ondas son unas ondas concretas, es decir, con cierta amplitud y velocidad, y por tanto nos alejamos de la idea de aleatoriedad en la transición.

Este es solo un primer acercamiento al problema complejo de la turbulencia, ya que el flujo de Poiseuille evoluciona a estados cada vez más complejos a partir de estas ondas viajeras, pero es de gran utilidad y necesario para el avance a la solución completa.

Capítulo 2

Fluidos y el flujo de Poiseuille

En este capítulo se presentará la formulación del flujo de Poiseuille en dos dimensiones, así como sus características. Previamente se darán algunas definiciones generales y resultados útiles de fluidos que aplicarán a nuestro problema concreto.

1. Conceptos básicos

Un fluido es una sustancia susceptible a deformaciones bajo la acción de fuerzas de cizalla. Una vez estas fuerzas han dejado de actuar el fluido mantiene esta deformación. El término engloba tanto a gases como a líquidos.

La manera de describir el flujo de un fluido es dando su velocidad euleriana

$$\mathbf{u} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)),$$

en este caso está expresada en coordenadas cartesianas, y la presión $p(x, y, z, t)$.

En este trabajo consideraremos fluidos incompresibles y newtonianos. A continuación se describen brevemente estos conceptos:

- Incompresibilidad: Un fluido es incompresible si una cantidad de materia fluida determinada mantiene su volumen cuando este se desplaza.
- Fluido newtoniano: Es aquel cuya viscosidad puede considerarse constante en el tiempo. Si consideramos el caso de un fluido tal que $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$, es equivalente a decir que al aplicarle una tensión de cizalla τ , el gradiente de la velocidad es directamente proporcional a la tensión aplicada, con constante de proporcionalidad μ , siendo esta la viscosidad dinámica del fluido. Es decir,

$$(1) \quad \tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

Veamos cómo se puede expresar matemáticamente la condición de incompresibilidad. Sea S una superficie cerrada que recoge un fluido. Este fluido entrará y saldrá de esta región V por algún lugar de S . Sea \mathbf{n} el vector normal unitario exterior.

Así, el flujo neto de volumen a través de esta superficie por unidad de tiempo debe ser nulo. Es decir,

$$\int_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Y aplicando el teorema de la divergencia obtenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = 0.$$

Dado que la igualdad anterior debe cumplirse $\forall V$ que contenga el fluido, se deduce la condición de incompresibilidad

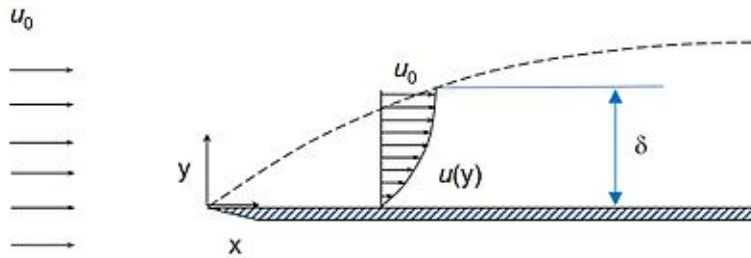
$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Dado un fluido newtoniano incompresible con densidad constante ρ , viscosidad cinemática constante $\nu = \mu/\rho$ y presión p , es conocido que su movimiento viene regido por las **ecuaciones de Navier-Stokes**:

$$(3) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes necesitamos añadir condiciones iniciales y de contorno. Como hemos dicho tratamos con fluidos viscosos, y esta característica nos ayudará a establecer las condiciones de contorno.

Trabajaremos con la condición no-slip. Esta asume que en una frontera sólida, el fluido tendrá velocidad relativa cero con esta. En la Figura 2.1 se muestra este concepto.



2.1. Efecto de la capa límite sobre la velocidad del fluido

En esta capa límite es donde el efecto de la viscosidad se vuelve más importante, ya que aquí el gradiente de la velocidad es mucho más grande que en la mayor parte del fluido. Así, la tensión viscosa (1) se vuelve significativa, aunque μ sea lo suficientemente pequeña como para no notar los efectos de la viscosidad en otras partes del fluido.

Sea L una escala característica de longitud del fluido, U una velocidad típica y ν su viscosidad cinemática. El **número de Reynolds** se define como:

$$Re = \frac{UL}{\nu}.$$

Este número es de gran importancia para determinar el comportamiento del fluido. Veamos por qué.

Observamos que las derivadas de las componentes de la velocidad son de orden U/L , y por tanto las segundas derivadas de orden U/L^2 . Con esto en mente podemos obtener el orden de magnitud aproximado de dos componentes de (3):

- Término inercial:

$$|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}| = O(U^2/L)$$

- Término viscoso:

$$|\nu \nabla^2 \mathbf{u}| = O(\nu U/L)$$

Por tanto,

$$\frac{|\text{Término inercial}|}{|\text{Término viscoso}|} = O(Re).$$

Esto indica que el número de Reynolds proporciona información sobre la magnitud relativa entre dos términos principales de (3). Así, si $Re \gg 1$ la inercia predomina mucho más que la viscosidad y podría considerarse un fluido no viscoso. Por el contrario, $Re \ll 1$ indica regímenes muy viscosos.

Teniendo en cuenta la definición de Re , podemos adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes (3):

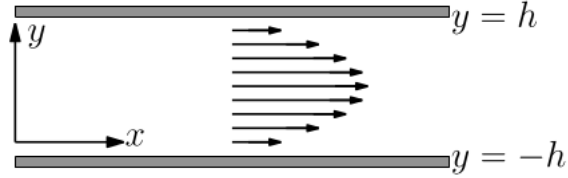
$$(4) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Una vez adimensionalizadas estas ecuaciones solo dependen del parámetro Re , y esto tiene la ventaja de permitirnos inferir datos a partir de modelos hechos a escala.

2. Formulación del flujo de Poiseuille plano estacionario

Supongamos un fluido entre dos planos infinitos quietos perpendiculares al eje y situados en $y = -h$ e $y = h$, tal como se observa en la Figura 2.2. Supongamos

además que este fluido se mueve a causa del movimiento de un pistón que mantiene el caudal constante ¹.



2.2. Flujo de Poiseuille. Gráfico de [8]

Resolveremos el problema con las siguientes suposiciones:

- $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$
- $\partial_x \mathbf{u} = 0$
- $\partial_z \mathbf{u} = 0$
- $\partial_t \mathbf{u} = 0$

Es decir, resolveremos el caso estacionario suponiendo que el fluido se mueve en dirección x a una velocidad u que solo depende de la altura y en la que se encuentre. Este problema es conocido como el **flujo de Poiseuille**.

Con estas premisas se cumple automáticamente la ecuación de incompresibilidad (2), y aplicando la primera ecuación de Navier Stokes (3) en cada una de las tres direcciones x, y, z obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu \frac{d^2 u}{dx^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \partial_y p \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \partial_z p. \end{cases}$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce que $p = p(x)$, y por tanto la primera ecuación se puede reescribir como

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dx^2} = C,$$

con C constante, obteniendo:

$$\frac{dp}{dx} = -k, k > 0 \Rightarrow p(x) = -kx + p_0.$$

Y por tanto:

¹Una variación de este problema asume que el movimiento se debe a la imposición del gradiente de presión constante, y asumiendo esto los resultados numéricos presentan variaciones.

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{1}{\rho} k \Rightarrow u = -\frac{k}{2\nu\rho} y^2 + Ay + B,$$

con A y B las constantes de integración. Para determinar estas constantes debemos usar las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u(-h) = 0 \\ u(h) = 0. \end{cases}$$

Estas condiciones se deben a la inmovilidad de los planos, y al hecho de que cuando el flujo viscoso entra en contacto con estos su velocidad coincide: condiciones no-slip.

Con esto obtenemos la solución al problema:

$$(5) \quad \begin{cases} p(x) = -kx + p_0 \\ u(y) = \frac{k}{2\nu\rho} (h^2 - y^2), \end{cases}$$

con $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$. Es decir, obtenemos un perfil de velocidad parabólico que alcanza el mínimo en contacto con los planos y el máximo a mitad de camino entre estos, en $y = 0$.

3. Formulación en Ψ

Para mayor comodidad estudiaremos el flujo de Poiseuille y su estabilidad mediante la función de corriente, en vez de directamente trabajar sobre la velocidad, ya que es como aparece en la literatura. Por otra parte, la justificación de una formulación en dos dimensiones para posteriormente el estudio de la estabilidad viene dada por el teorema de Squire (ver apéndice A). Este asegura que para Re menor a un cierto Re crítico las primeras ondas en inestabilizarse son necesariamente 2D.

Sea un flujo viscoso 2-dimensional con campo de velocidades $\mathbf{u} = (u(x, y), v(x, y))$, y sea $\Psi = \Psi(x, y)$ tal que $u = \partial_y \Psi$ y $v = -\partial_x \Psi$. Ψ se conoce como **función de corriente**, y de esta manera se cumple automáticamente la ecuación de incompresibilidad (2).

Si calculamos la vorticidad \mathbf{w} de este flujo obtenemos

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} = -\Delta \Psi \hat{\mathbf{k}}.$$

La vorticidad cuantifica la rotación de un fluido, y es la magnitud que emplearemos más adelante para la representación de este.

Por otra parte, usamos la identidad

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}^2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

para reescribir la ecuación (3) de Navier-Stokes como

$$\partial_t \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}^2) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}.$$

Aplicando el operador rotacional a ambos lados de la igualdad anterior y usando la expresión obtenida para el rotacional, llegamos a la expresión

$$(6) \quad \partial_t \Delta \Psi = \nu \Delta^2 \Psi + \partial_x \Psi \partial_y \Delta \Psi - \partial_y \Psi \partial_x \Delta \Psi,$$

que se corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes en Ψ para flujos dos dimensionales incompresibles. La expresión adimensionalizada la obtenemos tomando h como unidad de longitud ($y = hy'$, $x = hx'$) y h/u_{max} como unidad de tiempo ($t = t' \frac{h}{u_{max}}$, $\Psi = \Psi' hu_{max}$). Recordamos que tenemos $\mathbf{u} = \frac{k}{2\nu\rho}(h^2 - y^2)\hat{\mathbf{x}}$, y por tanto $u_{max} = \frac{kh^2}{2\nu\rho}$.

Adimensionalizando (6) y definiendo el número de Reynolds como $Re = \frac{hu_{max}}{\nu}$ se obtiene

$$(7) \quad \partial_t \Delta \Psi = \frac{1}{Re} \Delta^2 \Psi + \partial_x \Psi \partial_y \Delta \Psi - \partial_y \Psi \partial_x \Delta \Psi,$$

donde se ha prescindido del símbolo ' para indicar las nuevas variables para así simplificar la notación.

Supongamos una solución Ψ que cumpla $\partial_t \Psi = 0$ y $\partial_x \Psi = 0$. Así (7) se reduce a

$$0 = \frac{1}{Re} \Psi^{iv} \Rightarrow \Psi = Ay^3 + By^2 + Cy + D.$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en Ψ adimensionalizadas admiten soluciones con una constante aditiva arbitraria. Para simplificar el problema tomamos $D = 0$.

Para determinar las demás constantes necesitamos imponer 3 condiciones de contorno. Por las condiciones no-slip obtenemos las condiciones de Neumann:

$$\begin{cases} u(\pm 1) = 0 \\ u = \partial_y \psi \end{cases} \Rightarrow \frac{d\Psi}{dy}(\pm 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} C = -3A \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \Psi = Ay(y^2 - 3).$$

Por otro lado impondremos el valor del caudal Q entre los dos planos, donde

$$Q = \int_{-h}^h u dy = \frac{2kh^3}{3\nu\rho}.$$

Adimensionalizando el caudal como $Q = Q' hu_{max}$ y usando

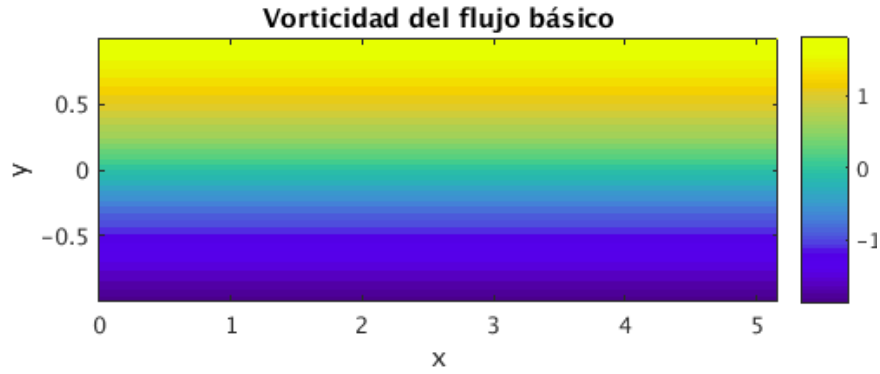
$$\bar{u} = \frac{1}{2h} Q = \frac{kh^2}{3\nu\rho} \Rightarrow u_{max} = \frac{3}{2} \bar{u},$$

se obtiene $Q' = \frac{4}{3}$. Además, $Q' = \Psi(1) - \Psi(-1)$ y de estas relaciones se obtiene el valor $A = -\frac{1}{3}$.

Es decir, la solución básica de Poiseuille que consideraremos como flujo base en el resto del trabajo es

$$\Psi_0 = y\left(1 - \frac{y^2}{3}\right).$$

En la Figura 2.3 se muestra la vorticidad de esta, $w = -\Delta\Psi_0 = 2y$.



2.3. Vorticidad w del flujo básico Ψ_0 .

Observamos que $\frac{d\Psi_0}{dy} = u(y) = 1 - y^2$, que corresponde a la parábola obtenida en (5) adimensionalizada.

4. Estabilidad lineal: Ecuación de Orr-Sommerfeld

Partiendo de esta solución básica hacemos el análisis de estabilidad lineal tomando $\Psi(x, y, t) = \Psi_0(y) + \epsilon\hat{\Psi}(x, y, t)$, para $\|\epsilon\| \ll 1$. Con este propósito, sustituimos esta Ψ en (7):

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta(\Psi_0(y) + \epsilon\hat{\Psi}) &= \frac{1}{Re} \Delta^2(\Psi_0(y) + \epsilon\hat{\Psi}) + \partial_x(\Psi_0(y) + \\ &+ \epsilon\hat{\Psi}) \partial_y \Delta(\Psi_0(y) + \epsilon\hat{\Psi}) - \partial_y(\Psi_0(y) + \epsilon\hat{\Psi}) \partial_x \Delta(\Psi_0(y) + \epsilon\hat{\Psi}). \end{aligned}$$

Desarrollando esta expresión y agrupando los términos de orden ϵ :

$$(8) \quad \partial_t \Delta \hat{\Psi} = \frac{1}{Re} \Delta^2 \hat{\Psi} + \partial_x \hat{\Psi} \partial_y \Delta \Psi_0 - \partial_y \Psi_0 \partial_x \Delta \hat{\Psi}.$$

Experimentos realizados durante décadas muestran que $\hat{\Psi}$ adquiere periodicidad en la dirección x en forma de ondas viajeras (ver Figura 3.1). Así, en flujos abiertos es práctica habitual considerar perturbaciones de la forma

$$\hat{\Psi} = e^{\lambda t} e^{ikx} \phi(y),$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{R}$. Por tanto la ecuación (8) queda reescrita como

$$(9) \quad \lambda(-k^2\phi + \phi'') = \frac{1}{Re}(k^4\phi + \phi^{iv} - 2k^2\phi'') - 2ik\phi - (1 - y^2)ik(-k^2\phi + \phi'').$$

Esta expresión se conoce como la **ecuación de Orr-Sommerfeld**, en honor al matemático William Orr (1906) y Arnold Sommerfeld (1908) que fueron quienes la obtuvieron de forma independiente.

Como condiciones de contorno usaremos de nuevo las condiciones no-slip en los dos planos paralelos:

$$\begin{cases} 0 = u(\pm 1) = \partial_y \Psi(\pm 1) \\ 0 = v(\pm 1) = \partial_x \Psi(\pm 1) = ik\hat{\Psi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi'(\pm 1) = 0 \\ \phi(\pm 1) = 0. \end{cases}$$

La ecuación de Orr-Sommerfeld se corresponde con problema de valores propios generalizado $A(Re, k)\phi_j = \lambda_j B(k)\phi_j$ con $\lambda_j(k, Re) := \sigma_j + i\omega_j$ un valor propio complejo. Así, el flujo básico será:

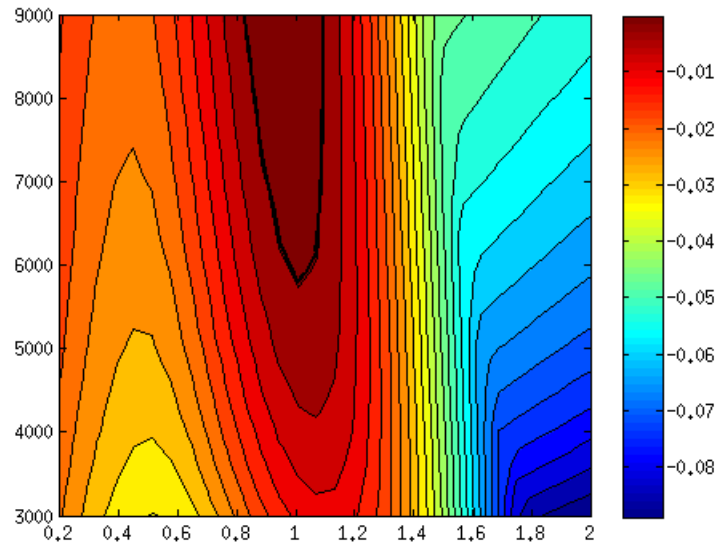
- **Estable:** Si $\sigma_j < 0 \forall j$.
- **Neutralmente estable:** Si $\sigma_j = 0$ para algun j y $\sigma_j < 0$ para el resto.
- **Inestable:** Si $\sigma_j > 0 \forall j$.

Numéricamente el problema se ha discretizado mediante un método espectral aproximando las funciones propias en serie de Legendre

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(y).$$

Mediante la sustitución de esto en la ecuación de Orr-Sommerfeld y haciendo uso de la función intrínseca **eig** en Matlab, basada en el algoritmo QR, se ha obtenido la solución al problema (ver Mellivobsky y Meseguer [7]).

En la Figura 2.4 se muestra la parte real del valor propio dominante obtenida para distintos parámetros (k, Re) . La zona de color marrón más oscuro representa una zona de inestabilidad ya que allí se alcanzan valores positivos. Lo que nos interesa es la curva de nivel 0, ya que representa la curva de inestabilidad, y en la figura viene marcada en negro. El mínimo de esta curva corresponde a los valores críticos $(k_c, Re_c) = (1.02056, 5772.22)$. Estos valores fueron encontrados por el matemático Steven Orszag en 1971 usando métodos de Chebychev [10], y anteriormente, en 1953, fueron aproximados por el físico Llewellyn Thomas mediante diferencias finitas.



2.4. Parte real del valor propio dominante dado un par (k, Re) . En negro se marca la curva de nivel 0.

Para estos valores críticos encontrados, el valor propio dominante resulta ser $-0.000000003084989 - 0.269429615345017i$. Si aumentamos un poco el Re a partir de aquí, ya aparecen valores propios con parte real positiva y por tanto aparece la inestabilidad.

Experimentalmente estos resultados fueron confirmados por Nishioka en 1975 [9], pero solo en un primer estado lineal de la evolución. Es decir, tenían que mantener la fluctuación un 0,05% por debajo de la velocidad máxima en la dirección del movimiento del fluido, u_{max} . Por ejemplo, observaron que para $Re = 5000$ existía una fluctuación máxima del 1% de u_{max} antes de que aparecieran turbulencias y el fluido se volviera inestable.

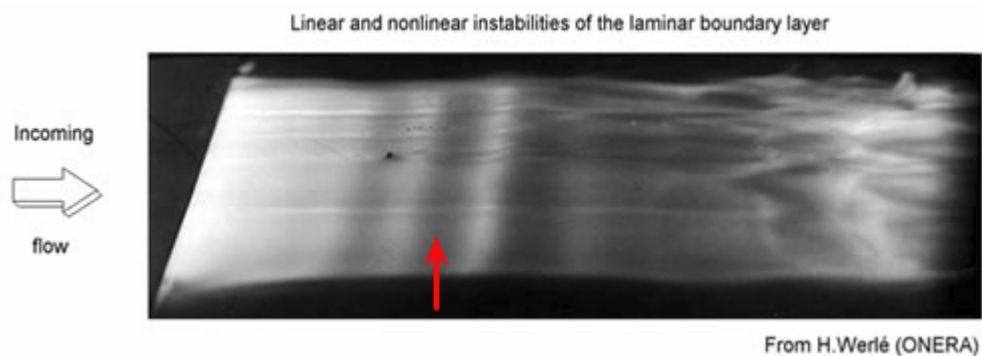
Capítulo 3

Las ondas de Tollmien-Schlichting (TS)

Mediante la ecuación de Orr-Sommerfeld se determina la inestabilidad lineal del flujo básico, pero una vez se inestabiliza, ¿en qué evoluciona? En este capítulo se presentan las ondas de Tollmien Schlichting, TS, como las ondas bidimensionales que aparecen en un primer momento de inestabilidad.

1. Ondas TS: evidencia experimental

Diversos estudios han mostrado que el flujo laminar pasa por una primera inestabilidad dos-dimensional antes de la turbulencia. A estas ondas se les denomina **Tollmien-Schlichting**, en honor a sus descubridores en la década de los 30 a principios del siglo pasado, y experimentalmente son complicadas de apreciar, ya que se inestabilizan muy rápidamente dando paso a turbulencia. En la Figura 3.1 se muestran estas ondas viajeras bidimensionales haciendo de conexión entre el flujo básico laminar y la turbulencia.



3.1. Estados de transición sobre una placa plana: de laminar a turbulento. En rojo se señalan las ondas T-S. Imagen extraída de [2].

Tollmien y Schlichting teorizaron sobre estas pero no fueron capaces de apreciarlas en los túneles de viento contemporáneos. Hasta 1943, con Schubauer y Skramstad, no se creó un túnel de viento capaz de amortiguar las vibraciones mecánicas y sonidos que podían afectar al estudio del fluido, consiguiendo así la primera evidencia experimental de estas ondas.

2. Evolución no lineal de las TS

Para determinar estas ondas necesitamos hacer un análisis más exhaustivo que el anterior sobre las ecuaciones de Navier-Stokes. Para ello volvemos a la ecuación para la vorticidad (7), y suponemos una solución del tipo $\Psi(x, y, t) = \Psi_0(y) + \hat{\Psi}(x, y, t)$, con $\Psi_0 = y(1 - \frac{y^2}{3})$ y $\hat{\Psi}(x, y, t)$ una perturbación finita, y sustituimos en la ecuación sin despreciar los términos no lineales. Así se obtiene

$$(10) \quad \partial_t \Delta \hat{\Psi} = \frac{1}{Re} \Delta^2 \hat{\Psi} - 2\partial_x \hat{\Psi} + \partial_x \hat{\Psi} \partial_y \Delta \hat{\Psi} - (1 - y^2) \partial_x \Delta \hat{\Psi} - \partial_y \hat{\Psi} \partial_x \Delta \hat{\Psi},$$

con condiciones de contorno homogéneas de Dirichlet y de Neumann en las paredes: $\hat{\psi}(x, \pm 1, t) = \partial_x \hat{\psi}(x, \pm 1, t) = \partial_y \hat{\psi}(x, \pm 1, t)$. Estas dos últimas condiciones corresponden a las condiciones no-slip, y la primera surge de la imposición del caudal constante, tal como se procedió anteriormente.

La ecuación (10) se puede reescribir diferenciando los términos lineales de los que no lo son como

$$(11) \quad \partial_t \Delta \hat{\Psi} = \mathbf{L}_{Re}(\hat{\Psi}) + \mathbf{N}(\hat{\Psi}),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{Re}(\hat{\Psi}) &= \frac{1}{Re} \Delta^2 \hat{\Psi} - 2\partial_x \hat{\Psi} - (1 - y^2) \partial_x \Delta \hat{\Psi} \\ \mathbf{N}(\hat{\Psi}) &= \partial_x \hat{\Psi} \partial_y \Delta \hat{\Psi} - \partial_y \hat{\Psi} \partial_x \Delta \hat{\Psi}. \end{aligned}$$

Para resolver el sistema numéricamente en un dominio $\Omega = \{(x, y) \in [0, \Lambda] \times [-1, 1]\}$ y encontrar las ondas viajeras bidimensionales, se aproxima la función mediante una expansión espectral de Fourier-Legendre

$$(12) \quad \hat{\Psi}_{LM}(x, y, t) = \sum_{l=-L}^L \sum_{m=0}^M a_{lm}(t) \Psi_{lm}(x, y),$$

donde $\Psi_{lm}(x, y) = e^{ilkx} \phi_m(y)$, $\phi_m(y) = (1 - y^2)^2 L_m(y)$ y $\mathbf{a} = \langle a_{lm} \rangle$ representa el vector de estado (amplitud), con $k = 2\pi/\Lambda$ el número de onda en la dirección del

fluido y $L_m(y)$ el m-ésimo polinomio de Legendre. Así, por como se define $\phi_m(y)$, se cumplen las condiciones de contorno en $\hat{\Psi}_{LM}$.

Se define el producto hermitiano interno entre dos campos periódicos en la dirección del fluido, $\eta_1(x, y)$ y $\eta_2(x, y)$, en el dominio Ω como

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \int_0^\Lambda \int_{-1}^1 \eta_1^* \eta_2 dy dx.$$

Con este se puede formular la forma débil de (11) mediante el método de Galerkin para obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes $a_{lm}(t)$

$$(13) \quad A_{pq}^{lm} \dot{a}_{lm} = B_{pq}^{lm} a_{lm} + N_{pq}(\mathbf{a}),$$

con

$$\begin{cases} A_{pq}^{lm} = \langle \Psi_{pq}, \Delta \hat{\Psi}_{l,m} \rangle \\ B_{pq}^{lm} = \langle \Psi_{pq}, \mathbf{L}_{Re}(\hat{\Psi}_{n,m}) \rangle \\ N_{pq}(\mathbf{a}) = \langle \Psi_{pq}, \mathbf{N}(\hat{\Psi}_{LM}) \rangle, \end{cases}$$

donde $(p, q) \in [0, L] \times [0, M]$. Así, el sistema (13) se resuelve numéricamente en el tiempo mediante el método de diferencias finitas hacia atrás, implícito y de cuarto orden. El paso de tiempo utilizado en todo el trabajo ha sido $\Delta t = 0.01$. Por otra parte, el número de modos de Fourier M y de Legendre L variará dependiendo del orden del parámetro Re en el que nos movamos. Como valores habituales en la literatura para Re no muy grandes encontramos $M = 50$ y $L = 15$.

3. Determinación estacionaria de las TS: Método de Newton-Krylov

Las ondas viajeras, como las TS, se caracterizan por su velocidad c y el número de onda fundamental k_0 . Así, la dependencia en el tiempo del vector de estado \mathbf{a} se simplifica a $a_{lm}(t) = a_{lm}^{TW} e^{-ik_0 ct}$, ya que las TS mantienen la amplitud constante. A través de la sustitución formal de esta expresión en (13) se obtiene un sistema no lineal de ecuaciones para c y $\mathbf{a}^{TW} = \{a_{lm}^{TW}\}$,

$$(14) \quad (B_{pq}^{lm} + ik_0 l c A_{pq}^{lm}) a_{lm}^{TW} + N_{pq}(\mathbf{a}^{TW}) = 0,$$

del tipo

$$F(\mathbf{a}^{TW}; k, Re) = 0,$$

para $\mathbf{a}^{TW} = \mathbf{a}^{TW}(k, Re)^1$.

Los sistemas (13) y (14) son los que utilizaremos en adelante para el cálculo de las ondas TS y el estudio de su estabilidad, Mellibovsky y Meseguer [7].

En la Figura 3.2 se muestran las ondas TS para distintos valores de los parámetros. El primer gráfico muestra esquemáticamente el lugar geométrico de las TS en el espacio $\|a\| - Re - k$. Aunque los valores numéricos indicados no concuerden con los que nosotros obtenemos, ya que se han calculado mediante la suposición del gradiente de presión constante, el gráfico es bastante útil para poder interpretar los dos siguientes como cortes en esta especie de paraboloides.

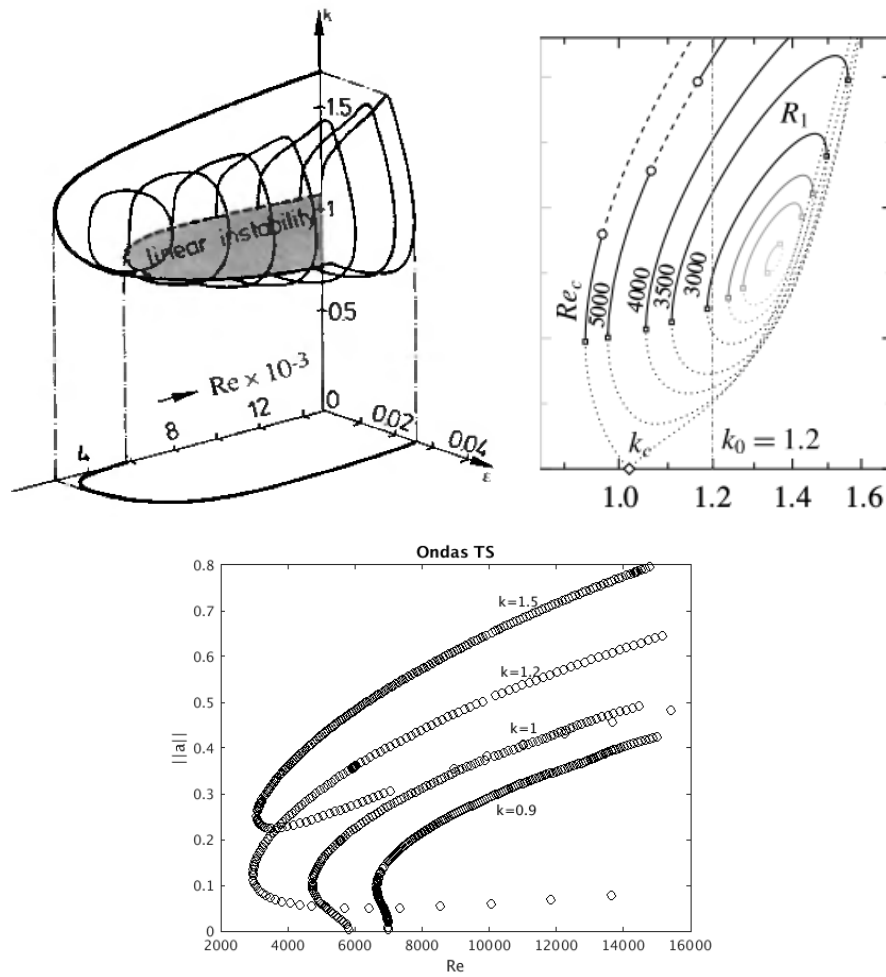
En el gráfico superior derecho observamos que las TS aparecen como soluciones desconectadas del flujo base para $Re < Re_c$, y fijado el Re existen en un rango determinado del parámetro k .

El gráfico inferior muestra algunas TS en el plano $Re - \|a\|$, y ha sido calculado mediante un algoritmo de continuación sobre el sistema (14) y un método de Newton-Krylov. Este método es mucho más rápido que la integración temporal y además permite encontrar tanto puntos de equilibrio estables como inestables. La idea es realizar un método de Newton pero calculando la dirección de descenso con un método de Krylov. Es decir, para resolver $F(\mathbf{a})=0$, dado un punto inicial a_0 , se tendrá que

$$\begin{aligned} DF_k \Delta a_k &= -F_k \\ a_{k+1} &= a_k + s \Delta a_k \end{aligned}$$

donde el primer sistema se resolverá mediante un método de Krylov (ver apéndice D.2) para obtener Δa_k , la dirección de Newton, habiendo aproximado la jacobiana DF . Una vez obtenida se usa un método de tipo *line search* para encontrar el máximo decrecimiento de $\|F\|$ en el segmento $[a_k, a_k + \Delta a_k]$ y encontrar así el paso s . Para esto se ha usado el código comercial `nsoli` de Kelley [5].

¹Por comodidad, en adelante nos referiremos a \mathbf{a}^{TW} simplemente como a



3.2. El gráfico superior izquierdo, de Manneville [3], esquematiza las TS existentes en $\epsilon - Re - k$, con $\epsilon = ||a||$. El gráfico superior derecho, de Mellibovsky y Meseguer [7], muestra las TS en el plano $k - ||a||$. El gráfico inferior muestra las TS en el plano $Re - ||a||$.

Capítulo 4

Estabilidad de las ondas TS

Es conocido que las TS tienen un punto de bifurcación del tipo saddle-node que hace de separación entre lo que llamamos rama inferior (siempre inestable) y rama superior (inicialmente estable), tal como se observa en la Figura 4.4. En este capítulo nos centraremos en la obtención de los puntos de cambio de inestabilidad de la rama superior, objetivo principal de este trabajo.

1. Curva de estabilidad

A continuación se encontrarán los valores de Re a partir de los cuales la rama superior de la TS, fijada una $k \in [0.8, 1.8]$, se vuelve inestable. El proceso se explicará con detalle desde la obtención de las TS hasta su estabilidad.

Los pasos que se han seguido son los siguientes:

- a) Partiendo de una solución a $Re = 5000$ para cierta k , mediante una continuación en Re se obtiene la solución correspondiente a $Re = 10000$
- b) Se estudian los valores de M y L necesarios aquí para asegurar una buena precisión en los resultados.
- c) Para estos valores y la solución encontrada en a) se realiza una continuación en el parámetro $k \in [0.8, 1.8]$.
- d) Con un método directo, como el QR, se calcula la estabilidad de estos puntos.
- e) Se fijan valores concretos de k sobre los cuales encontrar el Re crítico a partir del cual la solución es inestable.
- f) Para estos valores, si el punto calculado en d) es:
 - Estable \Rightarrow Se realiza una continuación en Re a partir de este punto para valores más altos de este parámetro.
 - Inestable \Rightarrow Se realiza una continuación en Re a partir de este punto para valores más bajos de este parámetro.
- g) Se calcula la estabilidad de los puntos anteriores mediante un método directo.
- h) El Re más bajo para cada k a partir del cual la solución es inestable es el valor buscado.

1.1. Obtención del primer punto y análisis de M y L . El proceso parte de una solución de la rama superior convergida a $Re = 5000$ para cierta k , en concreto para $k = 1.2$. Esta solución ha sido proporcionada por los tutores del trabajo, y se podría obtener mediante integración temporal del sistema (13), ya que resulta ser una solución estable. Mediante una continuación sobre el número de Reynolds a partir de esta, se ha obtenido la solución a $Re = 10000$.

Por otra parte, para determinar el número de modos de Fourier M y de Legendre L en b), se ha partido de los valores $M = 50$ y $L = 15$ y se ha hecho un análisis de las soluciones para $Re = 10000$ y $k = 1.5$ (ya que es un punto estable). En concreto, tomando como una solución más exacta la proporcionada por $M = 80$ y $L = 21$, en las Figuras 1.1 y 1.1 se muestran los resultados obtenidos para distintos valores de M y L y su error relativo e_r (en %) respecto a esta solución considerada correcta. Los valores que nos interesa comparar son $\|\mathbf{a}\|$ y c , que son los que identifican a la TS, y los valores propios de mayor parte real ya que serán los que determinen la estabilidad. En la tabla se muestra solo el valor propio de mayor parte real y distinto a 0, pero el análisis se ha hecho igual para los nueve siguientes. Así, se han determinado los valores $M = 50$ y $L = 19$, ya que no muestran variaciones mayores a un 1 % respecto a la mejor solución.

Las distintas soluciones obtenidas por variación de los parámetros M y L se han obtenido mediante un método de Newton Krylov sobre (14).

M	λ	error
50	-0.00200436961210308	0.002673451538779
60	-0.002000024107186	0.000506533947911
70	-0.001998945983848	0.000032538763929
80	-0.001999011027079	

M	$\ \mathbf{a}\$	error
50	0.646902560514669	3.084143169660436e-04
60	0.647231375849808	2.040101817302187e-05
70	0.647219377378172	8.402546537000788e-06
80	0.647210974831635	

M	c	error
50	0.533817123381035	1.020581411339538e-04
60	0.533918152338243	1.029183925971289e-06
70	0.533919049304619	1.322175500195755e-07
80	0.533919181522169	

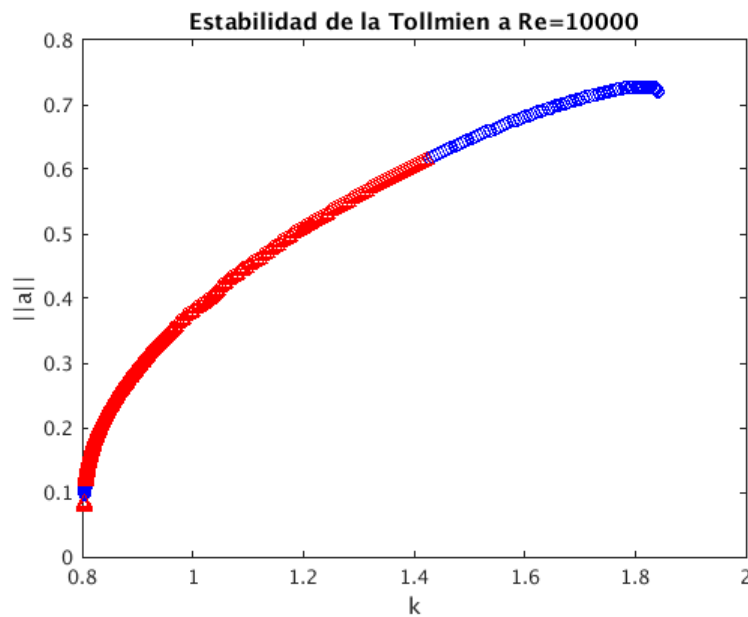
4.1. Comparativa de los valores obtenidos para $L=15$, $Re=10000$ y $k=1.5$

L	λ	error
11	-0.00192883393240651	10.4314436331326
15	-0.00200436961210308	6.92382088192459
17	-0.00205485522679699	4.57943884391999
19	-0.00213785869965245	0.725036911128979
21	-0.00215347216773945	

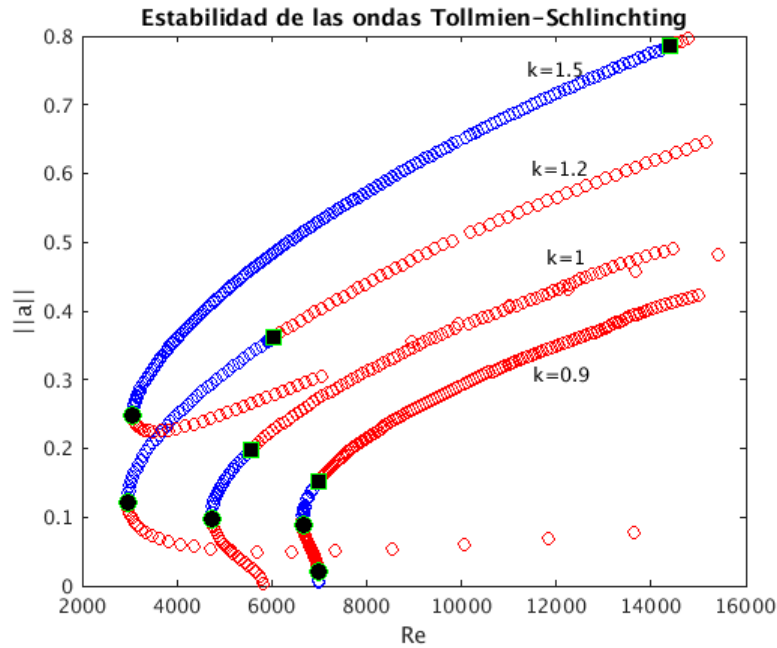
L	$\ a\ $	error
11	0.648029114170793	0.002135383694083
15	0.646902560514669	0.001008830037959
17	0.646192326607111	2.985961304011742e-04
19	0.646255617386416	3.618869097062882e-04
21	0.645893730476710	

L	c	error
11	0.533985380016196	3.331971669799927e-04
15	0.533817123381035	1.649405318184805e-04
17	0.533453041707500	1.991411417161526e-04
19	0.533477014516667	1.751683325497133e-04
21	0.533652182849216	

4.2. Comparativa de los valores obtenidos para $M=50$, $Re=10000$ y $k=1.5$



4.3. Continuación en k para $Re=10000$. En rojo las soluciones inestables, en azul las estables.

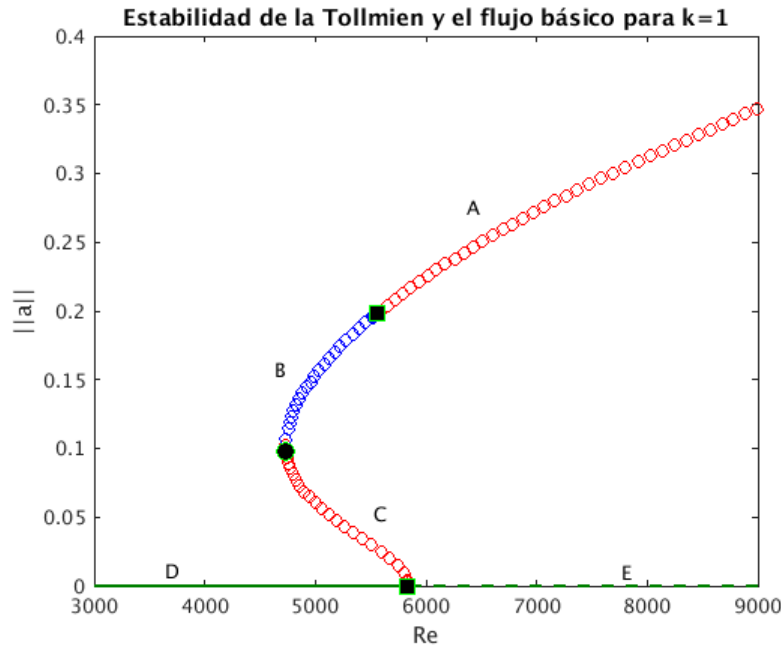


4.4. Continuación en Re para varios valores de k . En rojo las soluciones inestables, en azul las estables. El punto redondo negro indica una bifurcación de Hopf, y el cuadrado un saddle-node.

1.2. Continuación en k y estabilidad. De la misma manera que en el paso anterior, la continuación sobre el parámetro se ha realizado mediante una *continuación en pseudoarco*, definida en el apéndice D.3. En concreto, se ha obtenido la solución para $Re = 10000$ y valores de k comprendidos entre 0.8 y 1.8. Se ha calculado la estabilidad de estas soluciones mediante el cálculo de los valores propios a través de la función de Matlab `eig`, basada en el método QR, y los resultados se muestran en la Figura 4.3.

1.3. Continuación en Re y curva de estabilidad. Seleccionamos valores de $k = 0.8, 0.9, \dots, 1.8$ aproximados. Para estos, y siguiendo el criterio descrito en f), se realiza una continuación en Re y se calcula la estabilidad sobre esta para encontrar el punto de bifurcación. Estos valores indican cuando una TS, una onda viajera cuyos coeficientes a_{lm} mantienen el módulo constante, pasa a ser una onda modulada.

Cabe remarcar que en el cálculo de los valores propios para cualquier punto solución aparece un valor propio igual a 0. Este valor neutro se corresponde al de la dirección de la propia órbita de la TS. Mediante el teorema de Liouville se puede interpretar de la siguiente manera: un elemento de volumen V tangente a la propia órbita en un punto no se expande ni se contrae al cabo de un periodo, ya que forma parte de una solución periódica.



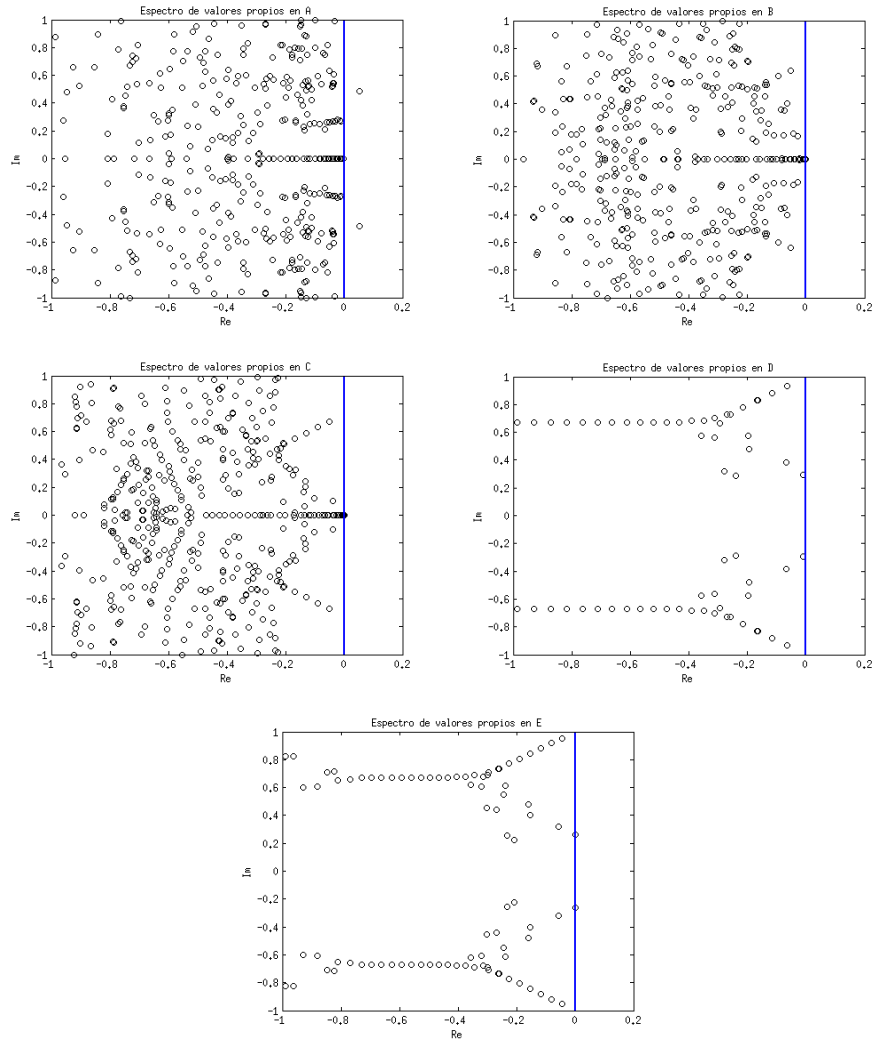
4.5. Estabilidad de la Tollmien para $k=1$, igual que en la Figura 4.4, y del flujo básico marcado en verde, donde la línea discontinua representa su inestabilidad.

En la Figura 4.4 se muestra a modo de ejemplo la continuación en Re en ambos sentidos para visualizar una curva más completa para ciertas k .

Como se puede observar, el paso de una solución estable a una inestable se produce mediante bifurcaciones de Hopf o saddle-node. Nuestro objetivo es determinar la curva de estabilidad de la rama superior de soluciones, y esta viene dada por los puntos marcados con cuadrados negros en la Figura 4.4, ya que a partir de estos si aumentamos el número de Reynolds la solución se mantendrá inestable.

Veamos con detalle la estabilidad para una k concreta partiendo del gráfico anterior. En la Figura 4.5 se muestra la continuación en Re mostrada anteriormente para $k = 1$, con varias zonas marcadas A-E que se corresponden con un espectro de valores propios distintos. En la Figura 4.6 se representa una parte de este espectro para los distintos casos.

Para $Re \simeq 5800$ se observa una bifurcación para el flujo básico ($\|a\| = 0$), que pasa de ser estable a inestable mediante la aparición de un par de valores propios conjugados con parte real positiva. Este valor coincide con el calculado anteriormente en la Figura 2.4, y representa una bifurcación de Hopf subcrítica, tal como se observa en analogía con la Figura B.3 del apéndice B, dando paso a su vez a una bifurcación del tipo saddle-node marcada con una redonda negra, que separa la rama superior de la TS de la inferior. Esta última bifurcación viene determinada por la aparición



4.6. Parte del espectro de valores propios en el plano complejo para las distintas zonas marcadas en la Figura 4.5.

del valor propio 0, que se corresponde como ya se ha mencionado al de la propia TS, órbita periódica de la aplicación de Poincaré.

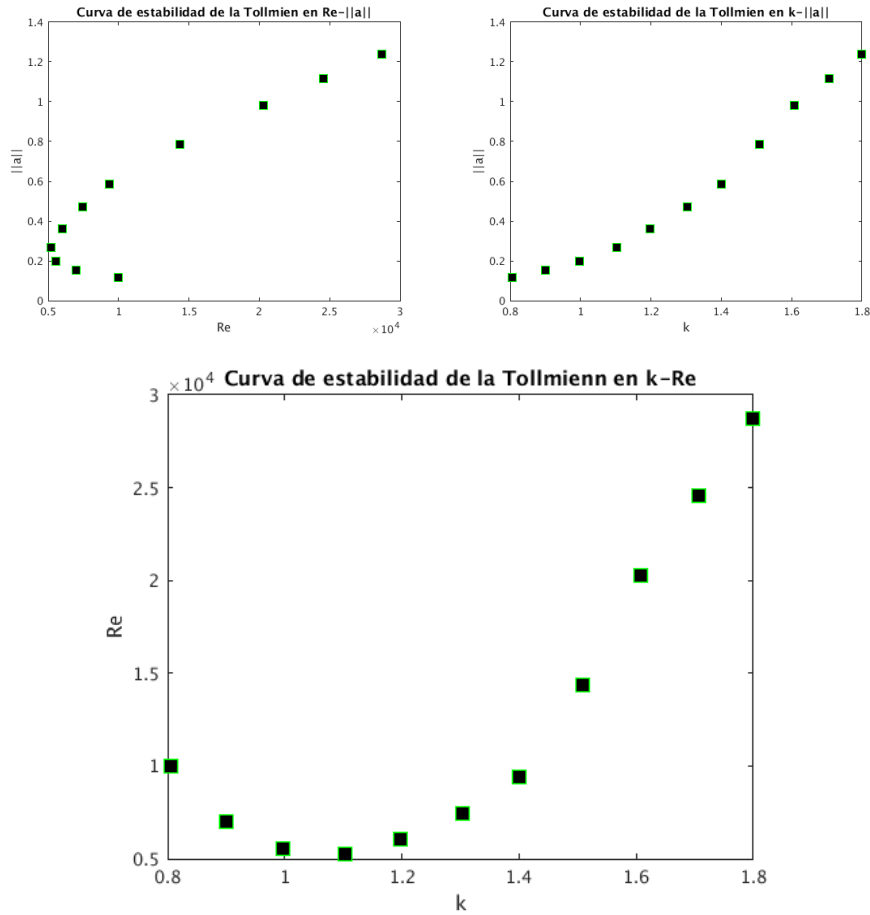
Por otra parte, la bifurcación que nos interesa, la que separa las zonas B y A, se corresponde con una bifurcación de Hopf supercrítica. Viene dada por dos valores propios conjugados con parte real positiva que dan paso a una nueva rama de soluciones que se corresponden con una onda modulada estable, como se establece en la siguiente sección.

A partir de estos últimos puntos de bifurcación obtenidos mediante la continuación en Re para distintas k se obtiene la curva de estabilidad mostrada en la Figura

4.7. Para el cálculo de estos puntos para k mayor a 1.5, como Re aquí es mayor a 15000 se ha vuelto a hacer un análisis para los valores de M y L , ya que los obtenidos anteriormente para $Re = 10000$ no obtienen la precisión deseada. Así, se ha concluido que $M = 70$ y $L = 19$ son los valores adecuados en esta franja.

2. Más allá de la bifurcación: onda modulada

En la Figura 4.7 se muestran los valores a partir de los cuales la TS deja de ser una solución estable. Estos puntos de bifurcación vienen marcados por la aparición de un par de valores propios conjugados $\lambda = \mu \pm i\omega$ con $\mu > 0$, y ω marca la frecuencia a partir de la cual oscila la onda modulada nacida en este punto.

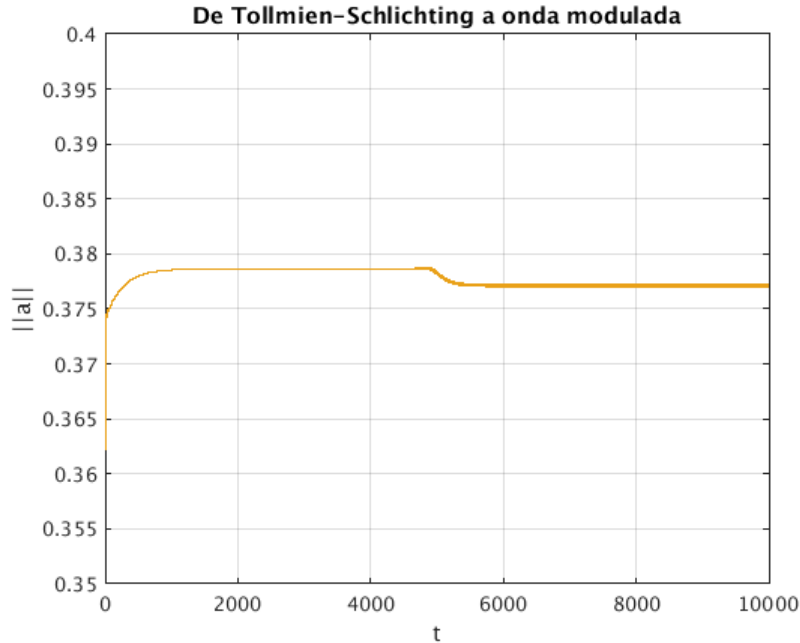


4.7. Curva de estabilidad de la Tollmien-Schlichting para la rama superior.

Veamos en concreto el caso $k = 1.2$. Para este valor teníamos el valor propio crítico $\lambda = 0.000012247690125 + 0.611870437361093i$, y su conjugado. Es decir, $\omega \simeq 0.61187$. Comprobemos si la frecuencia de la onda modulada coincide con este valor.

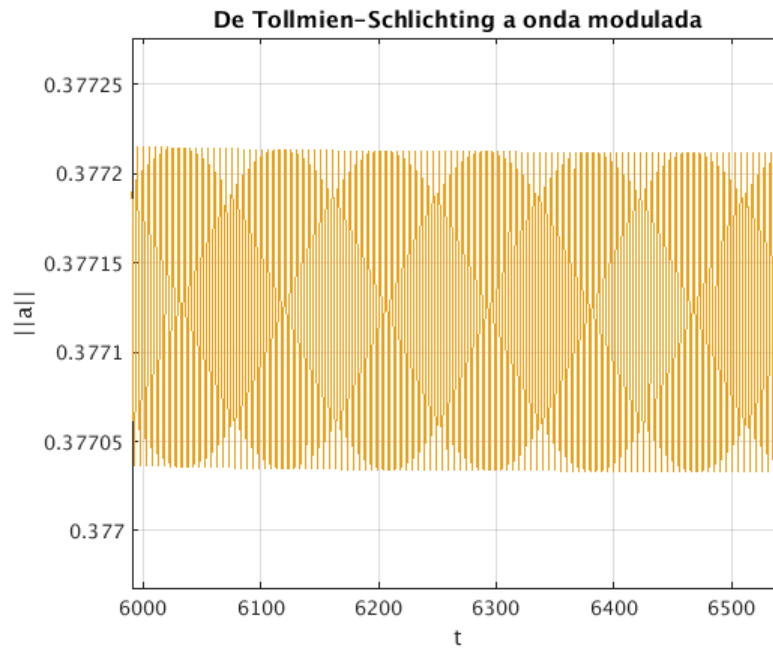
Mediante evolución temporal sobre (13) calculamos la solución del sistema partiendo de la solución encontrada para el punto de bifurcación, alejándonos un poco de esta (de $Re_c = 6030$ a $Re = 6430$) para asegurar inestabilidad en un tiempo no muy largo y dando una pequeña perturbación inicial. En la Figura 4.8 se muestran los resultados obtenidos después de 10000 unidades de tiempo, y en 4.9 se muestra el gráfico ampliado en la zona en que la onda modulada está convergida.

En la Figura 4.8 se observa cómo primero la solución converge a la TS inestable con $\|a\| \simeq 0.37865$, ya que a pesar de su inestabilidad hay una gran cantidad de valores propios muy negativos que atraen a la solución a esta. A partir de $t = 5000$ la solución se aleja y converge a la onda modulada, cuya amplitud oscila entre 0.37703 y 0.37723 aproximadamente. En la Figura 4.10 se observa cómo también a partir de $t = 5000$ la norma de los modos de Fourier oscila con una misma frecuencia.



4.8. Evolución temporal de la solución para $Re=6430$ y $k=1.2$.

A simple vista el periodo parece ser $T = 5$ (unidades de tiempo entre dos puntos con la misma amplitud consecutivos), y por tanto la frecuencia correspondiente sería $\omega = \frac{2\pi}{5} = 1.25664$, aproximadamente el doble del resultado que esperábamos encontrar, dado por la parte imaginaria del valor propio mencionado anteriormente. Esto es debido a la simetría de reflexión que posee esta onda modulada, tal como se aprecia en la Figura 4.11. Por tanto, en realidad el periodo es $T = 10$ y la frecuencia $\omega = 0.62832$.



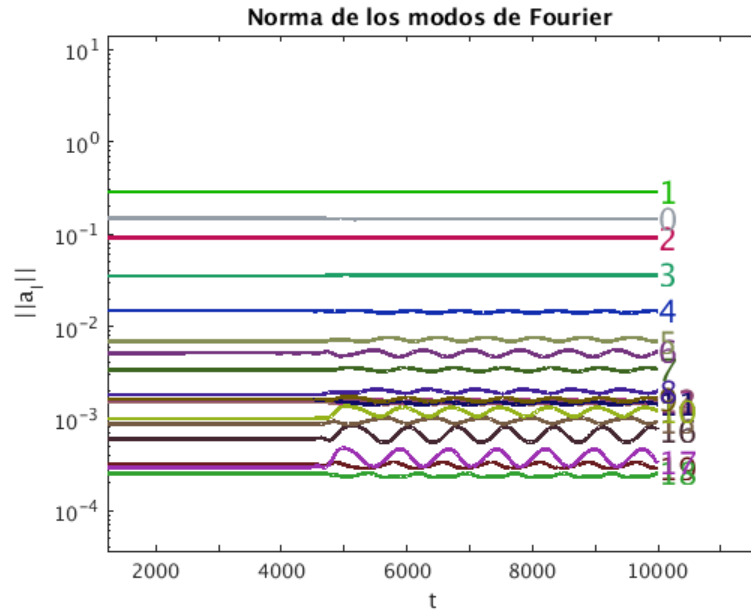
4.9. Evolución temporal de la solución para $Re=6430$ y $k=1.2$.
Imagen ampliada.

Mediante un algoritmo FFT (ver apéndice D.4) se puede calcular la transformada discreta de Fourier y así saber exactamente el valor de la frecuencia. En la Figura 4.12 se muestran los resultados obtenidos. Se puede observar la frecuencia fundamental de 1.25 y su segundo armónico. La frecuencia 0 aparece como resultado del FFT ya que este algoritmo toma la muestra inicial entera como periódica, y por tanto toma un modo como no oscilatorio.

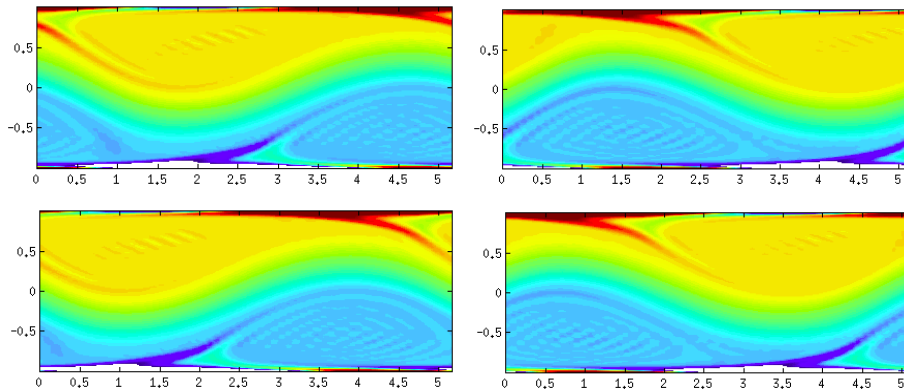
En la Figura 4.13 se muestra la onda modulada convergida para $Re = 6230$ y $Re = 6330$. Con esto se observa que contra más nos alejamos del punto de bifurcación, a $Re = 6030$, más pronunciada es la oscilación y mayor es su amplitud.

En concreto, volviendo a la Figura 4.5, se puede buscar la onda modulada mediante un algoritmo de continuación y dibujarla junto con la TS, tal como se muestra en la Figura 4.14. En este caso se observa un comportamiento muy similar entre la TS inestable y la onda modulada, aunque esta última siempre se mantiene por debajo en amplitud.

Además, dada la estabilidad inicial de esta onda modulada, en la Figura 4.15 se muestra dibujado el fenómeno de histéresis producido a partir de la bifurcación de Hopf subcrítica, marcada en verde claro. Este fenómeno es habitual en este tipo de bifurcaciones, y define el hecho de que una vez pasas la bifurcación en Re_0 , al intentar seguir la solución para $Re < Re_0$ cuando vuelves al flujo básico lo haces por detrás de este parámetro, es decir, no recuperas el punto de partida. Esto no

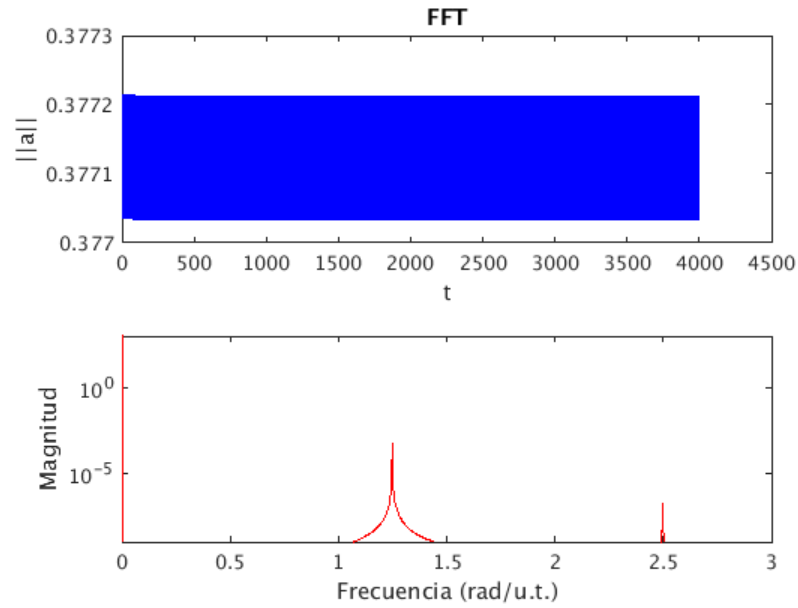


4.10. Norma de los modos de Fourier en la dirección del fluido para $k = 1.2$ y $Re = 6430$, con $\|a_l\| = \sqrt{\sum_{m=0}^M |a_{lm}|}$. El número al final de cada línea indica la l concreta de la que se trata.

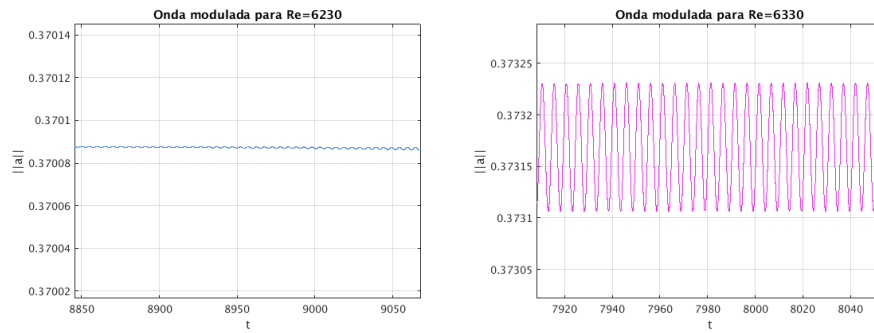


4.11. Onda modulada para $k=1$, $Re=6430$ y distintos instantes. En la esquina superior izquierda es para $t = 8560$, en la superior derecha para $t = 8565$, en la inferior izquierda para $t = 8570$ y en la inferior derecha para $t = 8575$.

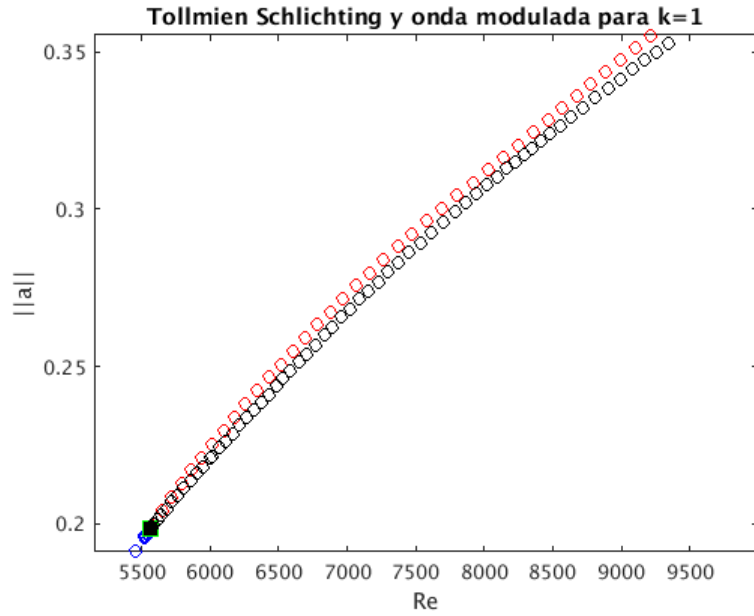
sucede para bifurcaciones de Hopf supercríticas, ya que con estas no hay problema para recuperar el punto inicial.



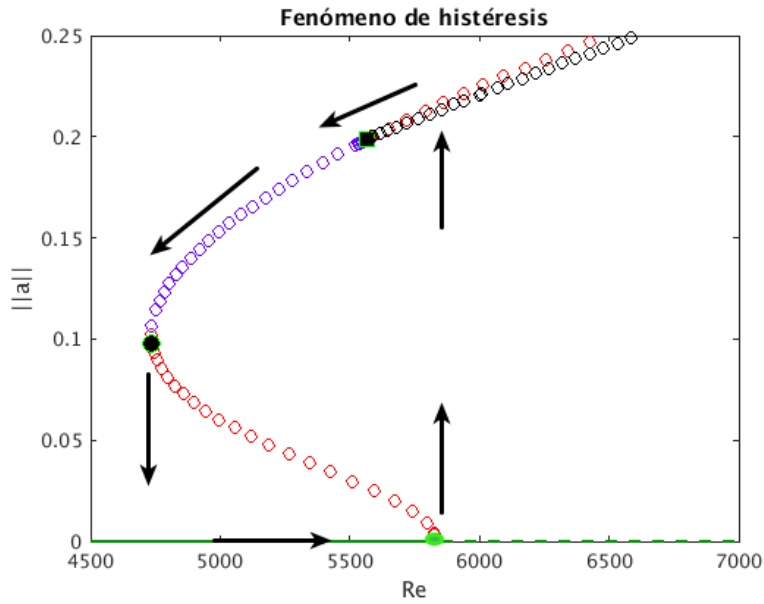
4.12. La imagen superior muestra la onda modulada sobre la cual se aplica el algoritmo FFT, obteniendo las frecuencias mostradas en la imagen inferior.



4.13. Evolución temporal de la onda modulada para $k=1.2$ y distintos Re .



4.14. TS y onda modulada (en negro) para $k=1$ a partir del punto de bifurcación de Hopf supercrítica.



4.15. Fenómeno de histéresis para $k=1$ dado por la bifurcación de Hopf subcrítica.

Capítulo 5

Estabilidad de las TS mediante el método de Arnoldi

En el capítulo anterior se ha mostrado una onda TS como una estructura rígida, una solución periódica cuyos coeficientes a_{lm} (12) tienen módulo constante. Esta onda se ha visto que da paso a una onda modulada mediante una bifurcación de Hopf, siendo esta onda una órbita periódica relativa.

Para estas órbitas el método natural de análisis es el de Poincaré (ver apéndice C), y los exponentes de Floquet proporcionan su estabilidad. Estos valores te los proporciona de manera natural el método de Arnoldi (ver apéndice D.1).

A través de este método solo se calculan los 10 valores propios de mayor módulo, a diferencia del método QR que los calcula todos, y el mayor de estos es el que interesa para determinar la estabilidad. Este método sobretodo es considerablemente más rápido que el directo para dominios muy largos y réplicas de las Tollmien, aunque no es nuestro caso.

Primero debe obtenerse una solución del sistema mediante un Newton dinámico, para luego calcular los valores propios en este punto. La idea de este algoritmo reside en la aplicación de Poincaré. Es decir, mediante Newton se busca un punto fijo de $P(a)$ (un a solución de $P(a) - a = 0$), siendo $P(a)$ la aplicación de Poincaré y a el vector de estado $L \times M$ dimensional. En realidad, en nuestro caso buscamos un ciclo límite peculiar, ya que la TS es una solución periódica de coeficientes constantes en módulo. Este hecho permite simplificar el problema, ya que haciendo evolucionar la solución un tiempo concreto es suficiente para determinar si es o no una TS, es decir, no es necesario esperar a que esta vuelva a cruzar con la sección transversal Σ (ver apéndice C). Por tanto, en realidad estamos resolviendo $\phi(T, a) - a = 0$, para cierta T con $\phi(t, a)$ el integrador temporal del sistema. En la práctica hemos calculado con $T = 5$.

Una vez encontrado el punto a_0 tal que $\phi(T, a_0) - a_0 = 0$, es decir, una vez convergida la TS, pasamos a estudiar su estabilidad mediante el método de Arnoldi (ver apéndice D.1). Para ello necesitamos calcular $DP(a_0)$, y esta matriz la aproximamos mediante evolución temporal, ya que sus coeficientes pueden expresarse como

$\frac{\phi(T, a_0 + \delta) - a_0}{\delta}$, con δ una perturbación. Se ha usada la función de Matlab `eigs` para la aplicación de este método.

Los valores propios obtenidos mediante el método de Arnoldi, conocidos como multiplicadores característicos, son de la forma $\mu = e^{\lambda t}$, con λ los valores propios del sistema (13), también conocidos como exponentes de Floquet. Dado un sistema $\dot{a} = f(a)$ con $f(a_0) = 0$, aplicando Taylor de primer orden se obtiene que el sistema que determina $\delta(t)$, con $a = a_0 + \delta(t)$, es de la forma

$$\dot{\delta}(t) = Df(a_0)\delta(t)$$

Por tanto, formalmente al solución del sistema se corresponde con la exponencial de la jacobiana. En una dimensión tendríamos que $\delta(t) = e^{\lambda t}\delta_0$. Y precisamente esto es lo que calculamos con la aplicación de Poincaré, la expansión o contracción de la perturbación en el tiempo. En [6] se puede encontrar una demostración rigurosa de este hecho. Por último, una vez calculados los μ se calculan los λ correspondientes para poder compararlos con los resultados obtenidos anteriormente.

k	Re	λ directo
0.8	6978	0.000116106967578 - 0.262073063766874i
0.9	6983	0.000049166117349 - 0.347710314166721i
1	5564	0.000025853220865 - 0.438542551885315i
1.1	5219	0.000013163379996 - 0.534767548490172i
1.2	6030	0.000010943145611 - 0.611868835158578i
1.3	7469	0.000007692161609 - 0.684527356759576i
1.4	9376	0.000005718771029 - 0.722707878695545i

k	Re	λ Arnoldi	error
0.8	6978	0.000116136845577 - 0.262073036373547i	0.000015467073185
0.9	6983	0.000049130354905 - 0.347710357501248i	0.000016158768898
1	5564	0.000025955338655 - 0.438542587820955i	0.000024685458283
1.1	5219	0.000012869181336 - 0.534768810396840i	0.000242301050234
1.2	6030	0.000003557237572 - 0.611850330125220i	0.003256344167612
1.3	7469	0.000002677357775 - 0.572092939071249i	16.425116787926026
1.4	9376	0.000001754727512 - 0.533929470370404i	26.120983861638063

5.1. Comparación de los primeros valores propios inestables para la rama superior de la TS, calculados mediante un método directo y el método de Arnoldi.

En la Figura 5.1 se muestra el valor propio que da paso a la inestabilidad, teniendo lugar en el mismo *Re* antes calculado y por tanto siendo un resultado satisfactorio, y el error relativo (en %) respecto a los calculados anteriormente mediante el método directo. No se han mostrado los cálculos para $k > 1.4$ ya que en este caso el *Re* excede de 10000 y los resultados obtenidos por el método de Arnoldi son poco precisos con los parámetros de tiempo y discretización utilizados. Tal como se observa, el error relativo cometido por Arnoldi en comparación a los cálculos del método directo va creciendo a medida que lo hace la k , siendo mayor de un 1% a partir de $k = 1.3$.

Capítulo 6

Conclusiones y cuestiones abiertas

En este trabajo se ha pretendido hacer un acercamiento a la comprensión de la cuestión aun abierta sobre bajo qué características se produce la transición a la turbulencia y los detalles de esta.

El flujo de Poiseuille, aun siendo uno de los problemas más simples en mecánica de fluidos, ya presenta complejidades en este proceso y atraviesa varios estados para pasar de flujo laminar a turbulento.

En concreto, en un primer estado de inestabilidad aparecen las llamadas ondas de Tollmien-Schlichting (ver Figura 3.1), las cuales han sido el principal objeto de estudio en estas páginas.

Estas ondas han sido caracterizadas de forma determinista a través de métodos numéricos operando sobre las ecuaciones de Navier-Stokes, y en concreto se ha determinado la curva de estabilidad neutral de estas (ver Figura 4.7).

Esta curva muestra los puntos a partir de los cuales las ondas TS se inestabilizan, dando paso a ondas moduladas, y se ha calculado mediante un método directo y comprobado con el método de Arnoldi.

El método de Arnoldi ha resultado ser satisfactorio para el cálculo de estos puntos (ver Figura 5.1) para valores de Re menores a 10000 unidades. Un siguiente objetivo sería revisar los parámetros que utiliza Arnoldi en sus cálculos, como el paso de tiempo o el tiempo de evolución, para asegurar la precisión en valores de Re mayores y obtener los resultados deseados.

Los buenos resultados de este método permiten utilizarlo para encontrar los valores propios dominantes mucho más rápido que mediante un método directo en dominios muy largos, en réplicas del dominio original. Arnoldi es muy útil ya que reduce considerablemente la memoria computacional frente a un método directo, ya que solo calcula el número de valores propios deseado, y su efectividad empieza a hacerse notable al trabajar con el dominio original replicado 3 veces.

Así, el siguiente paso sería utilizar este método para el estudio de varias réplicas, acercándonos más así a la longitud original de los dominios en experimentos físicos reales, que por ejemplo simulan el ala de un avión.

Por otra parte, la aparición de las ondas moduladas también supone la pregunta sobre su estabilidad, y lo más importante, sobre qué hay más allá de su inestabilidad.

Estas y otras cuestiones permiten el avance en este gran reto de la turbulencia, que a través de simulaciones numéricas estamos cada vez más cerca de comprender en su totalidad, y por tanto también de controlar.

Bibliografía

- [1] D. J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. Oxford University Press, USA, 1990. ISBN: 9780198596790.
- [2] P. G. Drazin. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780521009652.
- [3] C. Godreche y P. Manneville. *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*. Collection Alea-Saclay: Monographs and Texts in Statistical Physics. Cambridge University Press, 1998. ISBN: 9780521455039.
- [4] Ilse C. F. Ipsen y Carl D. Meyer. “The Idea Behind Krylov Methods”. En: *American Mathematical Monthly* 105 (1997), págs. 889-899.
- [5] C. T. Kelley. *Solving Nonlinear Equations with Newton’s Method*. Fundamentals of Algorithms. Society for Industrial y Applied Mathematics, 2003. ISBN: 9780898718898.
- [6] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 3.^a ed. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag New York, 2004. ISBN: 9780387219066.
- [7] Fernando Mellibovsky y Álvaro Meseguer. “A mechanism for streamwise localisation of nonlinear waves in shear flows”. En: *Journal of Fluid Mechanics* 779 (sep. de 2015). DOI: 10.1017/jfm.2015.440.
- [8] Fernando Mellibovsky y Álvaro Meseguer. “Open shear flow archetypal streamwise localization”. En: *Euromech EC565* (2014).
- [9] M. Nishioka, S. Iid A e Y. Ichikawa. “An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow”. En: *Journal of Fluid Mechanics* 72.4 (1975), págs. 731-751. DOI: 10.1017/S0022112075003254.
- [10] Steven A. Orszag. “Numerical Simulation of Incompressible Flows Within Simple Boundaries. I. Galerkin (Spectral) Representations”. En: *Studies in Applied Mathematics* 50.4 (1971), págs. 293-327. ISSN: 1467-9590. DOI: 10.1002/sapm1971504293.
- [11] P. J. Schmid y D. S. Henningson. *Stability and Transition in Shear Flows*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2000. ISBN: 9780387989853.
- [12] J.O. Smith. *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with Audio Applications*. 2.^a ed. BookSurge Publishing, 2007. ISBN: 9780974560748.
- [13] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Advanced book program. Avalon Publishing, 1994. ISBN: 9780738204536.
- [14] David S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2004. ISBN: 9780471461678.

Apéndice A

Transformación de Squire

En este trabajo se estudia un fluido en dos dimensiones como una simplificación del tridimensional. ¿Los resultados obtenidos serán válidos al pensar en un fluido real en 3D?

Consideremos las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionalizadas (4) para un fluido de velocidad U . En el capítulo 2 vemos que podemos tomar como solución básica $\mathbf{U}_0 = (U(y), 0, 0)$ con $U(y) = 1 - y^2$, a la cual le corresponde una determinada $P_0(x)$.

Para estudiar la estabilidad del flujo base, descomponemos $U(x, y, z, t)$ y $P(x, y, z, t)$ de la siguiente manera:

$$(15) \quad \begin{cases} \mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}(x, y, z, t) \\ P(x, y, z, t) = P_0 + p(x, y, z, t), \end{cases}$$

donde $\mathbf{u} = (u, v, \omega)$ y p representan una perturbación del flujo base. Sustituyendo (15) en (4) (ver [3]) se obtiene el sistema linealizado

$$(16) \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u} + U'(y) v \mathbf{e}_x = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}. \end{cases}$$

Se observa que el problema es invariante para translaciones en tiempo y en las direcciones x y z . Por tanto, se buscan soluciones en modos normales del tipo

$$(17) \quad \begin{cases} \mathbf{u}(x, y, z, t) = \Re(\hat{\mathbf{u}}(y) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}) \\ p(x, y, z, t) = \Re(\hat{p}(y) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}), \end{cases}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}(y) = (\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y))$ y $\hat{p}(y)$ son funciones desconocidas que caracterizan el flujo en la dirección perpendicular a su propagación. Además, $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ real es el *vector de onda*, cuya norma indica el número de onda y cuya dirección

su propagación¹, y $w = w_r + iw_i$ la *frecuencia*, donde w_i es el ratio de crecimiento temporal de las perturbaciones.

Sustituyendo (17) en (16) e introduciendo la *velocidad de fase compleja*

$$(18) \quad c = \frac{w}{k_x}$$

se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(19) \quad \begin{cases} ik_x \hat{u} + ik_z \hat{w} + \frac{d\hat{v}}{dy} = 0 \\ ik_x [U(y) - c] \hat{u} + U'(y) \hat{v} = -ik_x \hat{p} + \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k_x^2 - k_z^2 \right) \hat{u} \\ ik_x [U(y) - c] \hat{v} = -\frac{d\hat{p}}{dy} + \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k_x^2 - k_z^2 \right) \hat{v} \\ ik_x [U(y) - c] \hat{w} = -ik_z \hat{p} + \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k_x^2 - k_z^2 \right) \hat{w}, \end{cases}$$

al cual se le añaden las condiciones de contorno no-slip

$$\begin{aligned} \hat{u}(-h) &= \hat{u}(h) = 0 \\ \hat{v}(-h) &= \hat{v}(h) = 0 \\ \hat{w}(-h) &= \hat{w}(h) = 0. \end{aligned}$$

El sistema anterior define un problema de valores propios. Para poder tener solución no trivial se necesita que \mathbf{k} y w cumplan una relación, llamada *de dispersión*, escrita formalmente como

$$D(\mathbf{k}, w; Re) = 0.$$

En definitiva esta relación se corresponde con la curva de estabilidad neutral, que separa la zona estable de la inestable.

A través del cambio de variables de Squire (1933)

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k_x^2 + k_z^2 \\ \tilde{c} &= c \\ \tilde{k} \tilde{u} &= k_x \hat{u} + k_z \hat{w} \\ \tilde{v} &= \hat{v} \\ \frac{\tilde{p}}{\tilde{k}} &= \frac{\hat{p}}{k_x} \\ \tilde{k} \tilde{Re} &= k_x Re, \end{aligned}$$

¹En nuestro caso particular tendremos $k_z = 0$, ya que asumiremos un fluido unidireccional, y nos referiremos a k_x simplemente como k .

podemos reducir el sistema tridimensional para el estudio de la estabilidad lineal (19) a su equivalente bidimensional

$$\begin{cases} i\tilde{k}\tilde{u} + \frac{d\tilde{v}}{dy} = 0 \\ i\tilde{k}[U(y) - \tilde{c}]\tilde{u} + U'(y)\tilde{v} = -i\tilde{k}\tilde{p} + \frac{1}{Re}(\frac{d^2}{dy^2} - \tilde{k}^2)\tilde{u} \\ i\tilde{k}[U(y) - \tilde{c}]\tilde{v} = -\frac{d\tilde{p}}{dy} + \frac{1}{Re}(\frac{d^2}{dy^2} - \tilde{k}^2)\tilde{v} \\ \tilde{v}(-h) = \tilde{v}(h) = 0 \\ \tilde{u}(-h) = \tilde{u}(h) = 0, \end{cases}$$

con su asociada relación de dispersión bidimensional

$$\tilde{D}(\tilde{k}, \tilde{w}; \tilde{Re}) = 0.$$

Teniendo en cuenta (18) y el cambio de variables de Squire podemos expresar \tilde{w} de la siguiente manera:

$$\tilde{w} = \tilde{k}\tilde{c} = \tilde{k}\frac{w}{k_x} = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{k_x}w.$$

Y lo mismo para \tilde{Re}

$$\tilde{Re} = \frac{k_x}{\tilde{k}}Re = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}Re.$$

Así, si la relación de dispersión bidimensional \tilde{D} es conocida, se puede obtener su análoga tridimensional D fácilmente,

$$D(\mathbf{k}, w; Re) \equiv \tilde{D}\left(\sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \frac{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{k_x}w, \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}Re\right) = 0.$$

Se deduce que las propiedades de los modos tridimensionales (\mathbf{k}, w) con un ratio de crecimiento temporal w_i a cierto Reynolds Re , se corresponden con las de los modos bidimensionales (\tilde{k}, \tilde{w}) con $\tilde{w}_i > w_i$ y $\tilde{Re} < Re$.

Sea Re_c un valor crítico del número de Reynolds Re a partir del cual para Re mayores a este el flujo base es inestable. Como consecuencia de la relación anterior, para este valor Re_c la onda que primero se volverá inestable es necesariamente bidimensional. Si no fuera así, por la transformación de Squire se podría obtener una onda bidimensional amplificada a un Re menor, lo que contradice la definición de Re_c .

Hay que señalar que para valores de Re mayores al crítico, la onda más amplificada no tiene porqué ser bidimensional.

Apéndice B

Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

Sea el sistema autónomo

$$(20) \quad \dot{x} = f(x, \beta), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

con $\beta \in \mathbb{R}$ un parámetro.

Supongamos que para $|\beta|$ suficientemente pequeña el sistema (20) tiene una familia de puntos de equilibrio $x^0(\beta)$. Además asumimos que su matriz jacobiana $f_x(x^0(\beta), \beta)$ tiene un par de valores propios complejos conjugados

$$\lambda_{1,2} = \mu(\beta) \pm i\omega(\beta)$$

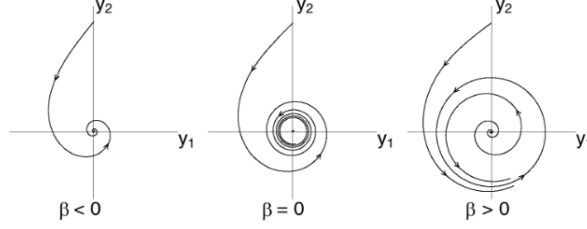
que se vuelven puramente imaginarios para $\beta = 0$, y el resto de valores propios tienen parte real negativa. Entonces, en general, cuando el parámetro pasa por $\beta = 0$, $x^0(\beta)$ cambia su estabilidad y aparece un único ciclo límite. Este tipo de bifurcación se conoce como **bifurcación de Andronov-Hopf**, y será supercrítica o subcrítica dependiendo de si el ciclo límite es estable o inestable respectivamente.

Para entender esta bifurcación veamos con detalle un ejemplo en el plano para un Hopf supercrítica.

Sea el sistema

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = \beta y_1 - y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ \dot{y}_2 = y_1 + \beta y_2 - y_2(y_1^2 + y_2^2). \end{cases}$$

Observamos que tiene un único punto de equilibrio en $(y_1, y_2) = (0, 0)$. Calculando la matriz jacobiana del sistema y evaluándola en este punto se obtienen los valores



B.1. Bifurcación de Hopf supercrítica en el plano. Gráfico de [6]

propios $\lambda_{1,2} = \beta \pm i$, y por tanto nos encontramos en la situación descrita anteriormente. La Figura B.1 muestra el comportamiento de la solución para distintos valores del parámetro.

En coordenadas polares (r, θ) , el sistema (21) toma la forma

$$(22) \quad \begin{cases} \dot{r} = \beta r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

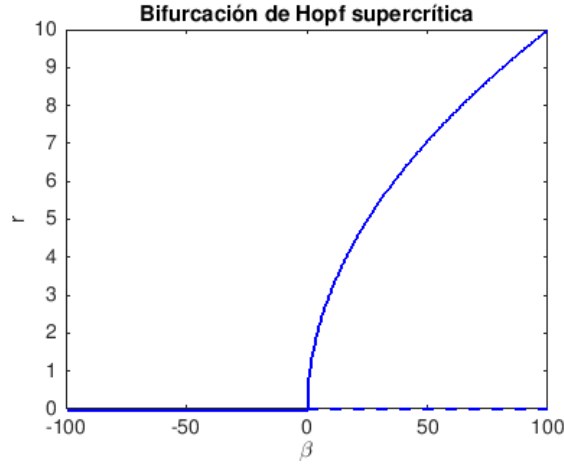
De aquí se observa que todas las órbitas giran a velocidad constante 1 en sentido contrario a las agujas del reloj. Además, imponiendo $\dot{r} = F(r) = 0$ se obtienen los puntos tales que $r = 0$ y $r = \sqrt{\beta}$ (se excluye $r = -\sqrt{\beta}$ ya que representa un radio y se considera $\beta \geq 0$). Por tanto, como

$$\begin{cases} D_r F(0) = \beta \\ D_r F(\sqrt{\beta}) = -2\beta \leq 0, \end{cases}$$

se tiene que el origen es estable solo para $\beta \leq 0$, y además aparece un ciclo límite estable para $\beta \geq 0$ con radio $\sqrt{\beta}$, tal como se muestra en la Figura B.1. Por tanto, esta bifurcación se corresponde con una bifurcación de Hopf supercrítica. En la Figura B.2 se muestra esta bifurcación, siendo $r = 0$ estable para $\beta \leq 0$ y sino inestable (marcado con línea discontinua) por la aparición de un ciclo límite $r = \sqrt{\beta}$.

Para una bifurcación de Hopf subcrítica el cambio de estabilidad se produciría a la inversa. Es decir, para $\beta \leq 0$ se tendría un ciclo límite inestable con el origen un punto estable, y este ciclo desaparecería para $\beta \geq 0$ dando lugar a inestabilidad del origen. Veamos un ejemplo.

Supongamos el sistema



B.2. Diagrama de bifurcación de hopf supercrítica.

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{r} = \beta r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

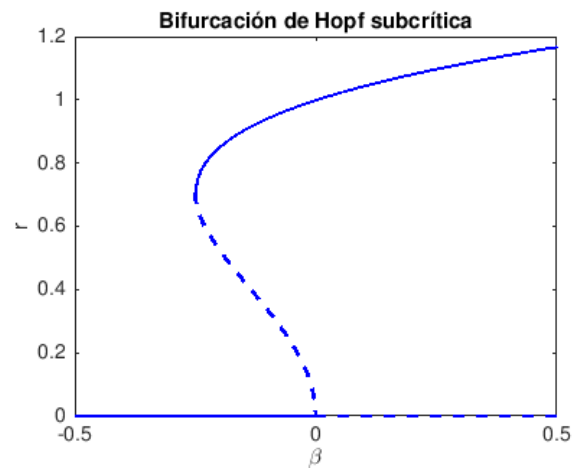
Del mismo modo que para el sistema estudiado anteriormente, buscamos las soluciones de $\dot{r} = F(r) = 0$ y encontramos como ciclos límite aquellos con $r = 0$ (C_0), $r = \sqrt{1 - \sqrt{4\beta + 1}}/\sqrt{2}$ (C_1) y $r = \sqrt{1 + \sqrt{4\beta + 1}}/\sqrt{2}$ (C_2), asumiendo β en el dominio propio de estos dos últimos. Como

$$\begin{cases} D_r F(0) = \beta \\ D_r F(\sqrt{1 - \sqrt{4\beta + 1}}/\sqrt{2}) = -\frac{5}{4}(1 - \sqrt{4\beta + 1})^2 + \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{4\beta + 1}} + \beta \\ D_r F(r = \sqrt{1 + \sqrt{4\beta + 1}}/\sqrt{2}) = -\frac{5}{4}(1 + \sqrt{4\beta + 1})^2 + \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{4\beta + 1}} + \beta, \end{cases}$$

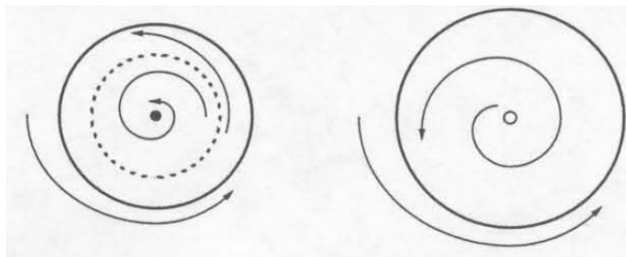
se tiene que el origen C_0 es estable solo para $\beta \leq 0$, C_2 es siempre estable en su dominio, $\beta \geq -\frac{1}{4}$, y, en cambio, el ciclo límite C_1 es siempre inestable, con $-\frac{1}{4} < \beta < 0$.

Es decir, cuando el parámetro β cruz por $\beta = 0$, el ciclo inestable C_1 que convivía con el origen estable desaparece, y provoca la inestabilidad en C_0 . Este es el caso de una bifurcación de Hopf subcrítica. En las Figuras B.3 y B.4 se muestra el comportamiento descrito.

En $\beta = -\frac{1}{4}$ se observa una bifurcación del tipo saddle-node, ya que a medida que el parámetro se modifica se pasa de no tener ciclos límite a tener dos, uno estable y otro inestable. Esta bifurcación se caracteriza por la aparición del valor propio 0 en el sistema.



B.3. Diagrama de bifurcación de hopf subcrítica. Gráfico de [6]



B.4. Bifurcación de Hopf subcrítica en el plano. A la izquierda, para $-\frac{1}{4} < \beta < 0$. A la derecha, para $\beta > 0$.

Apéndice C

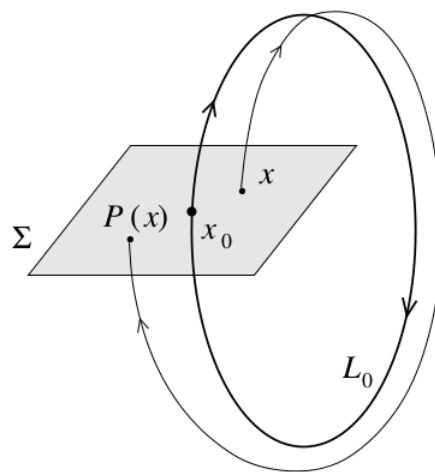
Aplicación de Poincaré

Sea el sistema dinámico

$$(24) \quad \dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Asumimos que (24) tiene una órbita periódica L_0 . Sean $x_0 \in L_0$ un punto de la órbita y Σ la sección transversal al ciclo en este punto, de codimensión 1.

El ciclo L_0 es una órbita que empieza en $x_0 \in L_0$ y vuelve a Σ en exactamente el mismo punto después de un cierto tiempo T . Por continuidad, órbitas con un punto inicial cercano a x_0 también intersecarán Σ transversalmente. Así, se construye la **aplicación de Poincaré \mathbf{P}** como



C.1. Aplicación de Poincaré asociada a un ciclo. Gráfico de [6]

$$P: \begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ x & \longmapsto & \hat{x} = P(x). \end{array}$$

Introduciendo coordenadas locales $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ en Σ tal que $\xi = 0$ se corresponde con x_0 , la aplicación de Poincaré se caracteriza localmente por

$$P: \begin{array}{ccc} \mathfrak{R}^{n-1} & \longrightarrow & \mathfrak{R}^{n-1} \\ \xi & \longmapsto & \hat{\xi} = P(\xi). \end{array}$$

El origen $\xi = 0$ de \mathfrak{R}^{n-1} es un punto fijo de la aplicación. La estabilidad del ciclo L_0 equivale a la estabilidad del punto fijo $\xi_0 = 0$ de P . La matriz jacobiana de P en este punto,

$$A := \left. \frac{dP}{d\xi} \right|_{\xi=0},$$

juega un papel fundamental en el análisis de estabilidad. Consideremos un punto $\xi = \xi_0 + \delta$, con $\|\delta\| \rightarrow 0$. El comportamiento de la perturbación δ bajo la acción de P viene dado por

$$P(\xi_0 + \delta) = P(\xi_0) + A\delta,$$

despreciando los términos $O(\delta^2)$. Repitiendo el proceso para ver los efectos lineales sobre δ se obtiene

$$P^{(2)}(\xi_0 + \delta) = P(\xi_0 + A\delta) = \xi_0 + A^2\delta.$$

Por tanto, después de m periodos completos se tiene que la perturbación se transforma mediante

$$\delta \rightarrow A^m \delta.$$

Así, la evolución geométrica del vector δ vendrá condicionada por los valores propios de la matriz A , los llamados *multiplicadores característicos*, μ_1, \dots, μ_{n-1} . La teoría de Floquet establece que la órbita periódica será estable si los multiplicadores cumplen $\mu_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, n-1$.

Apéndice D

Métodos numéricos

1. Método de Arnoldi

El método de Arnoldi es un algoritmo creado en 1950 por el ingeniero W.E. Arnoldi, cuyo objetivo es el cálculo de los valores propios de mayor módulo de un cierto operador lineal de grandes dimensiones.

La idea del método es parecida a la del método de la potencia, mediante el cual se calcula el valor propio de mayor módulo de una matriz A a través de sucesivas iteraciones de esta matriz por un vector inicial q , ya que el vector $A^j q$ tiende al vector propio dominante a medida que j aumenta. La diferencia es que el método de Arnoldi utiliza a su vez las iteraciones anteriores con A un operador lineal, pudiendo extraer así más información y sin la necesidad de disponer de la matriz explícita de A . Es decir, el algoritmo de Arnoldi en la k -ésima iteración dispondrá de los valores $q, Aq, A^2q, \dots, A^k q$, y buscará una aproximación del vector propio dentro del subespacio de Krylov $K_{k+1}(A, q) = \text{span} \langle q, Aq, \dots, A^{j-1}q \rangle$.

El **j -ésimo subespacio de Krylov** dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y un vector no nulo $x \in \mathbb{C}^n$ se corresponde con el subespacio generado por los vectores $x, Ax, A^2x, \dots, A^{j-1}x$.

Los vectores que forman el subespacio son altamente no ortogonales. Por este motivo el método de Arnoldi trata de irlos ortogonalizando a través del proceso de Gram-Schmidt (generalizado o con reortogonalización para disminuir el error de redondeo y asegurar cierta precisión).

A grandes rasgos, el método encuentra una base ortonormal de $K_{k+1}(A, q)$, q_1, \dots, q_{k+1} de la siguiente manera:

1. Inicialización: $q_1 = \frac{q}{\|q\|}$

En cada paso:

2. Ortogonalización : $\hat{q}_{k+1} = Aq_k - \sum_{j=1}^k q_j h_{j,k}$ con $h_{j,k} = \langle Aq_k, q_j \rangle$
3. Stop: Si $h_{k+1,k} = 0$ el algoritmo finaliza

$$4. \text{ Normalización: } q_{k+1} = \frac{\hat{q}_{k+1}}{\|\hat{q}_{k+1}\|} = \frac{\hat{q}_{k+1}}{h_{k+1,k}}$$

Por los procesos de ortogonalización (2) y normalización (4) descritos anteriormente, se deduce que para $k = 1, 2, 3, \dots$

$$(25) \quad Aq_k = \sum_{j=1}^{k+1} q_j h_{jk}.$$

Esto puede reescribirse en forma matricial usando la notación siguiente :

$$Q_m = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_m] \in \mathbb{C}^{n \times m}$$

y

$$H_{m+1,m} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,m-1} & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,m-1} & h_{2,m} \\ 0 & h_{3,2} & \cdots & h_{3,m-1} & h_{3,m} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & h_{m,m-1} & h_{m,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{m+1,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+1) \times m}.$$

Como Q_m está formada por columnas ortonormales, es una isometría. Por otra parte, $H_{m+1,m}$ es una matriz de Hessenberg superior no cuadrada con entradas estrictamente positivas en la subdiagonal. Con esta notación, por (25) se obtiene

$$AQ_m = Q_{m+1}H_{m+1,m}.$$

Se considera H_m a la matriz de Hessenberg superior cuadrada obtenida al quitar la última fila de $H_{m+1,m}$. Además se separa la última columna de Q_{m+1} y la última fila de $H_{m+1,m}$ del producto matricial. Con esto se obtiene

$$(26) \quad AQ_m = Q_m H_m + q_{m+1} h_{m+1} e_m^T,$$

con e_m el m -ésimo vector de la base canónica en \mathfrak{R}^m .

Si $q, Aq, \dots, A^m q$ son linealmente dependientes entonces $h_{m+1,m} = 0$, y por (26) se obtiene $AQ_m = Q_m H_m$. Esta última expresión indica que las columnas de Q_m son invariantes por A , y además que los valores propios de H_m coinciden con los de A .

En el caso en que $m = n$ tendríamos por tanto que $AQ_n = Q_n H_n$, es decir, $H_n = Q_n^{-1} A Q_n$ y por tanto H_n y A serían matrices semejantes. Así, calculando los valores propios de la matriz de Hessenberg superior H_n tendríamos los de A .

En general, para una n muy grande el proceso debe pararse varias iteraciones antes de llegar a n , debido a problemas de memoria computacional. En este caso se puede interpretar que A se reduce parcialmente a una forma de Hessenberg, que la transformación de similaridad es parcial.

La elección del vector inicial q suele ser aleatoria debido a la falta de información, y por tanto difícilmente se llegue a $h_{m+1,m} = 0$. Para solucionar este problema, y además el de la falta de memoria, se suelen usar variantes como el *método de Arnoldi con reinicio implícito*, en la cual un vector obtenido con una primera iteración del método de Arnoldi se usa como vector inicial para una segunda.

Matlab dispone de la función `eigs` basada en esta variante y esta función es la que se utiliza en este trabajo. Mediante opciones como la tolerancia o el número máximo de iteraciones se impone la convergencia del método, pero no entraremos aquí en los detalles sobre esta rutina.

En conclusión, el método de Arnoldi reduce el problema a encontrar los valores propios de una matriz de Hessenberg superior, lo cual es mucho más rápido y sencillo que hacerlo de toda una matriz entera de grandes dimensiones.

Como se ha comentado, el método va encontrando los valores propios de mayor módulo, y por lo tanto es un método útil para discutir la estabilidad de sistemas pero no lo es si el objetivo es encontrarlos todos.

2. Métodos de Krylov

Supongamos el sistema lineal $Ax = b$, con $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$. Los métodos iterativos de Krylov buscan soluciones aproximadas de este sistema de la forma

$$x_k = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j A^j r_0,$$

con $r_0 = b - Ax_0$. En general se suele tomar $x_0 = 0$, y más en nuestro problema concreto en el que esta x_0 representa una dirección de Newton sobre la cual no tenemos información pero esperamos que sea pequeña. Por esto motivo asumiremos en lo que sigue que $x_0 = 0$. Es decir, $x_k \in K_k(A, b)$, el k -ésimo subespacio de Krylov.

¿Y por qué K_k es un buen espacio para construir una solución aproximada? Veamos esta idea para el caso en que A es no singular, que es el que nos atañe. Para mayor detalle ver [4].

El **polinomio mínimo** $q(t)$ de A es el único polinomio mónico de grado mínimo tal que $q(A) = 0$.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ los valores propios de A con índices m_j (el tamaño del mayor bloque de Jordan asociado a cada λ_j). Entonces se puede ver que

$$(27) \quad q(t) = \prod_{j=1}^d (t - \lambda_j)^{m_j}.$$

Si definimos m como la suma de los m_j y escribimos el polinomio mínimo de la forma

$$q(t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j t^j,$$

por (27) se obtiene que $\alpha_0 = \prod_{j=1}^d (-\lambda_j)^{m_j}$, y por tanto es diferente de 0 si A es no singular.

Además, como

$$0 = q(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_m A^m,$$

se tiene que

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{j+1} A^j.$$

Y por tanto, como $x = A^{-1}b$, se tiene que la solución del sistema pertenece de forma natural al subespacio de Krylov. Así, si $q(t)$ tiene grado $m < n$, entonces la solución pertenecerá al espacio K_m . Por tanto, la dimensión de este espacio está limitada por n . Para una dimensión n muy grande, no es práctico ejecutar n iteraciones hasta encontrar este subespacio, y los métodos de Krylov se usan de forma iterativa parando antes de llegar a este punto.

Para facilitar que el método proporcione una buena solución en un número pequeño de iteraciones se suele utilizar un *precondicionador*. Es decir, se busca una matriz no singular M tal que MA sea diagonalizable con pocos valores propios distintos. Así se espera encontrar una solución de $MAx = Mb$ en un subespacio de Krylov de menor dimensión.

Esta idea es la que comparten los métodos de este tipo, aunque cada uno procede de manera muy distinta para construir la iteración en K_k . Por ejemplo, el método GMRES (Generalized Minimal Residual) resuelve en cada iteración el problema de mínimos cuadrados

$$\min_{z \in K_k(A,b)} \|b - Az\|.$$

En general, estos métodos son muy útiles cuando se tiene un sistema de grandes dimensiones y disperso. Además pueden servir si no se tiene acceso directo a la

matriz A , ya que puede que esta solo aparezca en una subrutina que, dado un vector v , devuelve Av .

3. Métodos de continuación

Supongamos el siguiente sistema dependiente de un parámetro $\alpha \in \mathfrak{R}$:

$$(28) \quad \dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathfrak{R}^n.$$

Sus puntos de equilibrio satisfacen

$$f(x, \alpha) = 0,$$

un sistema de n ecuaciones en \mathfrak{R}^{n+1} . La curva M en \mathfrak{R}^{n+1} descrita por este, la curva de equilibrio, muestra la dependencia del equilibrio de (28) con el parámetro α .

El cálculo de esta curva M es un *problema de continuación*. Es decir, tomando $y = (x, \alpha)$, se quiere encontrar en \mathfrak{R}^{n+1} la curva definida por las n ecuaciones

$$F(y) = 0, \quad F : \mathfrak{R}^{n+1} \Rightarrow \mathfrak{R}^n.$$

Asumiendo que el rango de la matriz jacobiana del sistema, F_y , es n en un punto y^0 , es decir, asumiendo regularidad, por el teorema de la función implícita se tiene la existencia local de la curva M pasando por y^0 .

Numéricamente, esta curva se construye a partir una secuencia y^1, y^2, \dots de valores aproximados calculados a partir de un punto inicial $y^0 = (x^0, \alpha^0)$, siendo y^0 un equilibrio del sistema (28).

Los algoritmos de continuación siguen los siguientes pasos, siendo acorde con [6]:

1. Predicción
2. Corrección
3. Control de la magnitud del paso

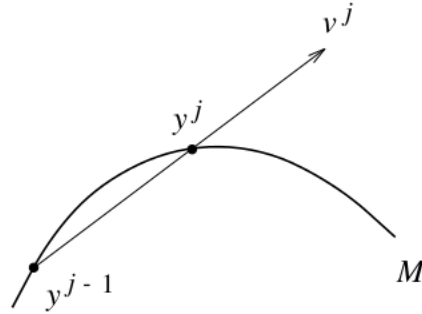
- Predicción

Supongamos encontrados dos puntos y^{j-1} y y^j de la secuencia. Entonces, el siguiente punto puede encontrarse mediante la *predicción por la secante* como

$$(29) \quad \hat{y}^{j+1} = y^j + h_j v^j,$$

donde h es el paso (pequeño) y

$$v^j = \frac{y^{j-1} - y^j}{\|y^{j-1} - y^j\|}.$$



D.1. Método de predicción mediante la secante. Gráfico de [6]

Notamos que este método requiere conocer los dos puntos anteriores, y es el método que usa el código usado en este trabajo partiendo de dos puntos iniciales próximos. Por tanto, no especificaremos aquí otros métodos como el de la tangente que parten de un único punto inicial ya que no nos es necesario.

■ Corrección

Dado el punto \hat{y}^{j+1} presuntamente cercano a la curva, el siguiente paso es encontrar a partir de este el punto y^{j+1} exactamente en la curva o muy cercano a esta dada una precisión. Esto se lleva a cabo mediante un método de Newton sobre el sistema

$$\begin{cases} F(y) = 0 \\ g^j(y) = 0 \end{cases}$$

donde $g^j(y)$ es una condición escalar extra que permite obtener un sistema completo al cual aplicar Newton. Geométricamente, equivale a buscar la intersección de la curva M con una superficie que contiene al punto \hat{y}^{j+1} .

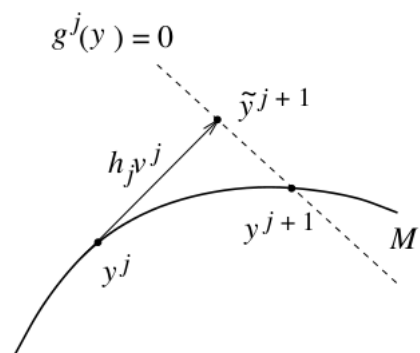
Hay distintas maneras de definir esta función g^j , y en este trabajo se ha usado la *continuación en pseudoarco*, que implica que

$$g^j(y) = \langle y - \hat{y}^{j+1}, v^j \rangle .$$

Es decir, la solución del sistema (3) equivale a la intersección entre el hiperplano ortogonal a v^j por el punto \hat{y}^{j+1} y la curva buscada. La elección de este hiperplano evita problemas de convergencia en puntos límite.

■ Control de la magnitud del paso

Para controlar el paso en cada iteración simplemente nos fijaremos en la dependencia entre este y la convergencia. Es decir, disminuirémos el paso y repetiremos la corrección si después de un número fijado de iteraciones de Newton no se ha llegado a convergencia; lo aumentaremos si hay convergencia muy rápida y lo mantendremos igual, $h^{j+1} = h^j$ si converge en un número moderado de iteraciones.



D.2. Método de corrección. Gráfico de [6]

4. FFT

Dada una función en el dominio del tiempo, para obtenerla en el dominio de frecuencias se usa una transformada de Fourier. En este caso nos centraremos en una transformada discreta, es decir, dada una función continua periódica en un cierto intervalo de tiempo, se generará un muestreo para obtener finitos valores a partir de los cuales encontrar la transformada de la función inicial y así conocer sus frecuencias asociadas. Estos valores pueden ser tanto complejos como reales.

La **transformada discreta de Fourier** (DFT) de una señal x se define como

$$(30) \quad X(w_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-iw_k t_n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} x(n) : \text{amplitud de la señal de entrada en el tiempo } t_n \text{ (segundos)} \\ t_n : \text{n-ésimo instante muestral } (t_n = nT, \text{ segundos)} \\ T : \text{intervalo muestral, indica cada cuánto tiempo se toma una muestra (segundos)} \\ w_k : \text{k-ésima frecuencia muestral } (w_k = k\Omega, \text{ radianes/segundo)} \\ \Omega : \text{intervalo muestral de frecuencia } (\Omega = \frac{2\pi}{NT}, \text{ radianes/segundo)} \\ f_s : \text{ratio muestral, indica el número de muestras por unidad de tiempo (Herzt)} \\ N : \text{Número de muestras} \end{array} \right.$$

Así, $X(w_k)$ representa el coeficiente de la proyección de la señal x en el senoide complejo $e^{-iw_k t_n} = \cos(w_k t_n) + i \sin(w_k t_n)$, y por tanto se interpreta como una medición de la amplitud y fase de este senoide en la señal de entrada x a esta frecuencia, ver Smith[12]. Veámoslo con más detalle.

Se define el **producto interno** entre dos N -vectores complejos como

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} u(n)v(n)^*.$$

Este producto escalar es hermítico e induce a la norma $\|u\|$ de la siguiente manera:

$$(31) \quad \langle u, u \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} u(n)u(n)^* = \sum_{n=0}^{N-1} |u(n)|^2 = \|u\|^2.$$

Definiendo $s_k^n := e^{-i2\pi kn/N}$ para $n = 0, 1, \dots, N-1$ como el k -ésimo sinusoidal complejo para $k = 0, 1, \dots, N-1$, vemos que (30) se corresponde con el producto escalar entre x y s_k . Además estos sinusoides son ortogonales ya que

$$\langle s_k, s_l \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} s_k s_l^* = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(k-l)n/N} = \frac{1 - e^{i2\pi(k-l)N}}{1 - e^{i2\pi(k-l)/N}} = 0 \quad \text{si } k \neq l.$$

Y para $l = k$ se obtiene que

$$\langle s_k, s_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(k-k)n/N} = N.$$

Es decir, $\|s_k\| = \sqrt{N}$.

La **proyección** del vector u en el vector v nombrados anteriormente se define como

$$P_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v,$$

con $\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$ como coeficiente de la proyección.

Volviendo a (30), claramente por lo mencionado anteriormente se tiene que $X(w_k)$ es N veces el coeficiente de la proyección de x en s_k . Es decir, la DFT es proporcional a los coeficientes de la proyección en la base sinusoidal. Así, $X(w_k)$ representa la amplitud y fase de la componente sinusoidal de frecuencia w_k de la señal de entrada, representadas por N veces el módulo y por la fase de $X(w_k)$ respectivamente.

La ortogonalidad de s_k permite definir la inversa de la DFT entendiéndola como la reconstrucción de la señal original a partir de la superposición de sus proyecciones sinusoidales. Esta inversa se escribe como

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(w_k) e^{i2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

En el ámbito numérico, el cálculo de la DFT es bastante rápido usando el algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*), que reduce el número de operaciones de $O(N^2)$ a $O(N \log N)$.

Notamos que (30) puede escribirse de manera matricial como

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_N \mathbf{x},$$

donde $\mathbf{X}[k] = X(w_k)$, $\mathbf{S}_N[k, n] = e^{i2\pi kn/N}$ y $\mathbf{x}[k] = x(k)$, para $k, n = 0, 1, \dots, N-1$.

Por tanto, para el cálculo de la DFT se necesitan $O(N^2)$ operaciones. Sin embargo, a simple vista ya se ve que el número de operaciones se puede reducir, ya que la primera fila de la matriz \mathbf{S}_N es todo $e^0 = 1$, y por tanto puede simplificarse el producto de estos por el vector \mathbf{x} , por ejemplo.

Los algoritmos FFT usan las propiedades de los elementos de la matriz, como la periodicidad, para factorizarla y hacer los cálculos más eficientes, por ejemplo usando recursividad. Además, para el caso en que \mathbf{x} sea real, se tiene que $\mathbf{X}[N-k] = \mathbf{X}^*[k]$, lo cual reduce el número de elementos a calcular ahorrando así en tiempo y memoria.