



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA



ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS DE CAMINS, CANALS I PORTS DE BARCELONA

ANÁLISIS RESISTENTE DE ESTRUCTURAS DE OBRA DE FÁBRICA MEDIANTE REDES FUNICULARES SIMULADAS COMPUTACIONALMENTE

TÈSIS DOCTORAL DE:
ANTONI ANDREU TORRAS

DIRIGIDA POR:
LLUÍS GIL ESPERT
DEPARTAMENT DE RESISTÈNCIA DE MATERIALS I ESTRUCTURES A L'ENGINYERIA

CODIRIGIDA POR:
PERE ROCA FABREGAT
DEPARTAMENT D'ENGINYERIA DE LA CONSTRUCCIÓ



BARCELONA, MAYO DEL 2006

Als meus pares Anna i Vicens i germans Marta i Vicens.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer la dedicación e interés mostrados por el director de tesis Lluís Gil y el codirector de tesis Pere Roca en la realización del presente trabajo de investigación y que ha quedado plasmado en la presente Tesis Doctoral.

También quiero agradecer los comentarios y opiniones mostrados por diferentes investigadores como Kike, Miquel, Ramón, Jorge, Abel , Antonio y Aleix que sin duda han contribuido a mantener el ánimo alto en los momentos complicados y que han aportado ideas nuevas que han facilitado el desarrollo de la presente investigación.

Y no me olvido de Almudena y Lourdes, que también han puesto su granito de arena.

RESUMEN

Este trabajo tiene por objetivo desarrollar una estrategia orientada a resolver de forma computacional el equilibrio estático de las obras pétreas formadas por elementos unidimensionales empleando la analogía clásica de los modelos antifuniculares. Dicha técnica combina los fundamentos de la teoría de la plasticidad, el concepto de redes antifuniculares y técnicas de optimización para definir una metodología que resuelva el cálculo estructural de obras de fábrica.

La técnica que se presenta se orienta de manera que sea aplicable en la práctica. Ésta es una característica general que marca el desarrollo de los diversos elementos que intervienen en su implementación computacional.

El primer elemento que se desarrolla es una herramienta que permite la simulación de redes tridimensionales de líneas de presiones. El desarrollo de dicha herramienta abarca tanto la formulación analítica como la implementación numérica de un nuevo elemento de cable permitiendo la simulación de redes complejas de cables de una forma estable y eficiente.

La segunda herramienta incluida en el presente trabajo e implementada numéricamente facilita la automatización de búsqueda de redes de líneas de presión que permitan establecer la estabilidad de una estructura de obra de fábrica, basada en los principios del análisis límite. Dicho proceso se realiza mediante la definición de un problema de optimización no lineal con restricciones que se abordará mediante la adaptación de algoritmos clásicos de optimización para el caso se estudia.

La técnica desarrollada se aplicará en el estudio de diversos ejemplos como son el puente de Bridgemill, la Catedral de Mallorca, las Torres de la fachada de la Catedral de Barcelona y la Catedral de Girona. La mayoría de ejemplos realizados ya han sido estudiados por otros autores con lo que ha sido posible comparar los resultados obtenidos y así determinar el grado de aproximación que se obtiene con la técnica presentada.

Finalmente se expondrán diversas líneas de estudio y desarrollo que el presente trabajo deja abiertas. Dichas líneas de investigación pasan tanto por el estudio de la aplicabilidad del nuevo elemento de cable desarrollado en el estudio de diversos tipos estructurales que nada tienen que ver con las estructuras de obra de fábrica como la profundización del estudio de la estabilidad de estructuras de obra de fábrica no esqueléticas.

SUMMARY

This study aims to develop a computational method focused on achieving the static equilibrium of masonry structures made up of one-dimensional elements by using the standard analogy of antifunicular modeling. The method combines the basics of the theory of plasticity, the concept of antifunicular nets and a series of optimization techniques, in order to define a methodology for solving the structural calculation of masonry structures.

The method presented is designed to have a practical implementation. This is a general feature shared by the development of the various elements taking part in its computational implementation.

The first element developed is a tool allowing three-dimensional nets simulation for pressure lines. Both an analytical formulation and a numerical implementation for a new cable element are covered by the development of this tool, so that the simulation of complex cable nets by a steady and efficient way is allowed.

The second tool included in this study and numerically implemented helps on automating the search of pressure line nets which allow to establishing the equilibrium in a masonry structure, based on limit analysis principles. This process is carried out by defining a non-linear optimization problem with restrictions, that will be tackled by adapting standard optimization algorithms to the case studied.

The method that has been developed will be applied to different examples such as Bridgemill Bridge, Mallorca Cathedral, the towers in the facade of Barcelona Cathedral and Girona Cathedral. Most of the examples executed were studied previously by other authors; thus, it was possible to compare the results achieved and to determine the accuracy degree obtained with the method shown.

Finally, the present study will set out different research and development lines which will be left opened. This research lines involve both studying the applicability for the new cable element developed by the study of different structure types which have nothing to do with masonry structures, and going into the study of the equilibrium of non-skeleton masonry structures.

ÍNDICE

Capítulo 1.- INTRODUCCIÓN

1.1.Generalidades	1
2.2. Breve introducción histórica.....	2
1.3. Objetivo de la Tesis Doctoral.....	9
1.3.1 Objetivos general.....	9
1.3.2 Objetivos específicos	9
1.4. Contenido de este documento	11

PARTE I.- CÁLCULO DE MODELOS FUNICULARES

Capítulo 2.- ESTADO DEL CONOCIMIENTO SOBRE EL CÁLCULO DE MODELOS FUNICULARES

2.1 Introducción.....	14
2.2 Elementos de cable.....	14
2.2.1 Introducción.....	14
2.2.2 Soluciones analíticas del elemento de cable.....	15
2.2.2.1 Elemento de catenaria inextensible.....	15
2.2.2.2 Elemento de catenaria elástico.....	19
2.2.3 Elementos de cable aproximados.....	21
2.2.3.1 Elemento de barra.....	21
2.2.3.2 Aproximación de Ernst.....	23
2.2.3.3 Aproximación del elemento de cable mediante funciones polinómicas.....	25
2.2.4 Elementos de cable especiales.....	27
2.2.4.1 Elemento asociado de catenaria.....	27
2.2.4.2 Otros elementos encontrados en la bibliografía.....	27
2.3 Técnicas para calcular estructuras formadas por elementos de cables.....	28

2.3.1	Introducción.....	28
2.3.2	Método de la relajación dinámica.....	29
2.3.3	Método de matriz de rigidez.....	30
2.3.4	Método del mínimo de energía del sistema.....	32
2.3.5	Métodos lineales aproximados.....	32
2.3.6	Método de los elementos finitos.....	33
2.3.7	Métodos aproximados: la densidad de fuerzas y la red.....	33
2.3.7.1	Introducción.....	33
2.3.7.2	Método de la densidad de fuerzas.....	33
2.3.7.3	El método de la red.....	35
2.4	Algunas aplicaciones específicas del elemento de cable.....	35

Capítulo 3.- DESCRIPCIÓN DEL MODELO PROPUESTO PARA EL ANÁLISIS DE REDES DE CABLES

3.1	Introducción.....	37
3.2	Elemento de cable inextensible	37
3.2.1	Deducción de las ecuaciones paramétricas de un elemento de cable inextensible.	37
3.2.2	Comportamiento de un elemento de catenaria inextensible.....	42
3.3.	Formulación de un elemento de cable elástico.....	45
3.3.1	Introducción.....	45
3.3.2	Desarrollo del nuevo elemento de cable.....	46
3.2.3	Comparativa entre el elemento elástico desarrollado y el elemento elástico convencional.....	48
3.3.4	Formulación de rigidez de la expresión cinemática del elemento de cable.....	50
3.3.5	Inversión del sistema derivado.....	52
3.3.6	Comportamiento numérico del algoritmo implementado.....	54
3.4	Matriz tangente del elemento de catenaria propuesto.....	56
3.4.1	Desarrollo de la matriz tangente.....	56
3.4.2	Casos de indeterminación de la matriz tangente.....	63
3.4.2.1	Elementos verticales.....	63
3.4.2.2	Elementos sin peso propio.....	64

3.4.3 Comportamiento de la matriz tangente.....	64
3.4.3.1 Introducción.....	64
3.4.3.2 Ejemplo 1.....	64
3.4.3.3 Ejemplo 2.....	67
3.5 Cálculo de redes de cables.....	69
3.5.1 Introducción.....	69
3.5.2 Descripción del método empleado.....	69
3.5.3 Algoritmos empleados para mejorar el proceso de convergencia.....	73

Capítulo 4.- VALIDACIÓN DEL ELEMENTO DE CABLE PROPUESTO

4.1 Introducción.....	76
4.2 Ejemplo 1. Comparativa de soluciones analíticas y numéricas.....	76
4.3 Ejemplo 2 Comparación de las prestaciones de la matriz tangente obtenida analítica o numéricamente.....	80
4.4 Ejemplo 3. Comparación con ensayo real.....	83
4.5 Ejemplo 4. Comparación con elementos de barra	86
4.6 Ejemplo 5. Comparativa de comportamiento entre diferentes elementos de cable.....	87
4.7 Ejemplo 6. Cálculo de una malla simple.....	89
4.8 Ejemplo 7. Cálculo de una red de moderada complejidad.....	92
4.9 Conclusiones obtenidas a partir de los ejemplos realizados.....	97

PARTE II.- ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS DE OBRA DE FÁBRICA.

Capítulo 5.- ESTADO DEL CONOCIMIENTO SOBRE EL CÁLCULO DE OBRA DE FÁBRICA

5.1 Introducción.....	99
5.2 Modelización del comportamiento de la obra de fábrica mediante modelos analógicos.....	99
5.2.1 Modelos antifuniculares.....	99

5.2.2	Modelos basados en la fotoelasticidad.....	103
5.2.3	Modelos a escala reducida.....	103
5.3	Modelización de construcciones mediante Modelos Analíticos.....	104
5.3.1	Análisis límite.	104
5.3.1.1	Introducción.....	104
5.3.1.2	Definición de la línea de empujes o de presiones.....	104
5.3.1.2.1	Planteamiento.....	104
5.3.1.2.2	Concepto y cálculo de líneas de empuje	105
5.3.1.2.3	Línea de inclinación de los empujes	106
5.3.1.2.4	Identificación de las líneas de presión con líneas funiculares	106
5.3.1.3	Hipótesis básicas del análisis límite.....	110
5.3.1.4	La estabilidad y la seguridad de la obra de fábrica.....	111
5.3.2	Estática gráfica.....	112
5.3.3	Análisis mediante elasticidad lineal.....	114
5.4	Modelización de construcciones de obra de fábrica mediante modelos numéricos.....	114
5.4.1	Modelos basados en la aplicación del método de los elementos finitos (MEF).....	114
5.4.1.1	Micromodelos.....	114
5.4.1.2	Macromodelos.....	115
5.4.1.2.1	Introducción.....	115
5.4.1.2.2	Análisis elástico lineal mediante MEF (Método de los Elementos Finitos).....	115
5.4.1.2.3	Modelos de daño.....	115
5.4.1.2.4	Modelos de elasticidad no-lineal.....	116
5.4.1.2.5	Modelos combinados con juntas.....	117
5.4.2	Modelos de barras.....	118
5.4.2.1	Formulación matricial clásica.....	118
5.4.2.2	Formulación matricial generalizada.....	118

**Capítulo 6.- APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE REDES FUNICULARES EN
LA DETERMINACIÓN DE LA ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS
ESQUELÉTICAS DE OBRA DE FÁBRICA**

6.1	Introducción.....	120
6.2	Aplicación de los modelos de redes de cables en la determinación de las líneas de presiones.....	121
6.2.1	Planteamiento.....	121
6.2.2	Variación de la distribución de carga entre la geometría real y el modelo funicular.....	122
6.2.2.1	Introducción.....	122
6.2.2.2	Caso de cargas de peso propio.....	122
6.2.2.3	Caso de cargas distribuidas y puntuales.....	126
6.3	Repaso de los teoremas del análisis límite.....	129
6.4	La estabilidad y la seguridad de la obra de fábrica.....	130
6.5	Optimización de la solución.....	130
6.5.1	Introducción.....	130
6.5.2	Formulación del problema de optimización.....	131
6.5.3	Descripción de los algoritmo de optimización.....	134
6.5.4	Tratamiento de las restricciones el problema de optimización.....	135
6.5.5	Transformación de un problema con restricciones a otro sin restricciones.....	137
6.5.6	Parámetros que controlan el cambio de variable.....	139
6.6	Ejemplos de aplicación del cambio de variable.....	139
6.6.1	Introducción.....	139
6.6.2	Ejemplo 1. Minimización con restricciones. Mínimo en el interior.....	140
6.6.3	Ejemplo 2. Minimización con restricciones. Mínimo en la frontera.....	141
6.7	Comportamiento de los algoritmos de optimización empleados.....	143
6.7.1	Ejemplo 1. Comprobación estabilidad de un arco simétrico 2D.....	143
6.7.2	Ejemplo 2. Comprobación estabilidad de un arco no simétrico 2D.....	146
6.7.3	Ejemplo 3. Comprobación estabilidad de un arco 3D.....	150
6.8	Conclusiones obtenidas a partir de los ejemplos realizados.....	154

Capítulo 7.- EJEMPLOS DE APLICACIÓN

7.1 Introducción.....	152
7.2 Análisis del puente de BridgeMill.....	152
7.3 Aplicación al análisis bidimensional de estructuras. Estudio del pórtico de la Catedral de Mallorca.....	160
7.3.1 Introducción.....	160
7.3.2 Breve introducción histórica.....	160
7.2.3 Estudios previos de la Catedral de Mallorca.....	162
7.2.3.1 Introducción.....	162
7.3.3.2 Análisis de mediante la estática gráfica.....	162
7.2.3.3 Análisis mediante foto elasticidad.....	164
7.2.3.4 Métodos numéricos avanzados.....	165
7.2.4 Verificación de la estabilidad estructural mediante la técnica del análisis funicular.....	166
7.4 Aplicación al análisis tridimensional de estructuras. Cálculo de las torres de la fachada de la Catedral de Barcelona.....	171
7.4.1 Introducción.....	171
7.4.1 Breve introducción histórica.....	171
7.4.2 Modelización de la estructura. Descripción del modelo funicular.....	173
7.4.2.1 Introducción.....	173
7.4.2.2 Descripción de los elementos de la aguja.....	174
7.4.2.3 Descripción de la base intermedia (Tambor).....	175
7.4.2.4 Descripción de los elementos de la base.....	176
7.4.2.5 Propiedades de los materiales.....	177
7.4.3 Acciones de cálculo.....	179
7.4.3.1 Peso propio.....	179
7.4.3.3 Acciones sísmicas.....	181
7.4.3.4 Casos de carga considerados.....	182
7.4.4 Resultados del análisis.....	182
7.4.4.1 Cálculo de la estructura sometida a cargas de peso propio.....	182
7.4.4.2 Cálculo de la torre bajo carga de viento.....	187
7.4.4.3 Cálculo frente acciones sísmicas.....	189

7.4.4.4 Conclusiones referentes al cálculo de la torre bajo cargas horizontales.....	191
7.5 Estudio del pórtico central de la Catedral de Girona.....	192
7.5.1 Introducción.....	192
7.5.2 Modelo del simplificado del pórtico central.....	192
7.5.3 Comparativa de resultados de la reacciones por diversos autores.....	195
7.5.4 Estudio cualitativo de las bóvedas según un modelo funicular tridimensional.....	196

PARTE III.- OTRAS APLICACIONES, CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Capítulo 8.- OTRAS APLICACIONES BASADAS EN EL ELEMENTO DE CABLE DESARROLLADO.

8.1 Introducción.....	198
8.2 Aplicación de la modelización funicular en estructuras de obra de fábrica no esqueléticas.....	198
8.3 Aplicación en el cálculo de tensoestructuras.....	203
8.4 Aplicación en estructuras hinchables.....	205
8.5 Aplicación al diseño asistido por ordenador.....	207
8.6 Aplicación al diseño estructural-arquitectónico.....	209

Capítulo 9.- CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE DESARROLLO.

9.1 Introducción.....	212
9.2 Conclusiones respecto la metodología de cálculo de redes desarrollada Introducción.....	212
9.3 Conclusiones respecto la aplicación de modelos funiculares en el cálculo de estructuras de obra de fábrica.....	214
9.4 Conclusiones respecto los recursos informáticos empleados en el desarrollo de la metodología computacional.....	215
9.5 Líneas futuras de desarrollo.....	216

REFERENCIAS.....	218
ÍNDICE DE FIGURAS	227
ÍNDICE DE TABLAS.....	237

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

Las estructuras de obra de fábrica, entendiendo éstas como estructuras construidas con elementos pétreos de pequeñas dimensiones que pueden ensamblarse entre sí directamente con las llamadas juntas secas o mediante juntas de mortero de escasa o nula resistencia a tracción, constituyen una parte fundamental del legado histórico de la humanidad en forma de edificios religiosos, arquitectura o ingeniería civil. Esto es así, porque hasta no hace más de 150 años, en la construcción de estructuras durables, la mayoría de materiales disponibles han sido los que genéricamente se denominan de mampostería. La característica principal de estos materiales consiste en su nula capacidad para transmitir esfuerzos de tracción de una manera eficaz y esto determina de manera decisiva tanto los sistemas constructivos como las formas peculiares de las estructuras resultantes.

La antigüedad de estas estructuras hace que su conservación se vuelva crucial en nuestros días. Procesos externos como la degradación por la contaminación ambiental o internos como la fluencia de los propios materiales de la construcción, incluso modificaciones llevadas a cabo con posterioridad a su construcción, hacen que dichas estructuras precisen de nuestra atención para asegurar su resistencia al paso del tiempo y continúen siendo uno de los principales legados históricos de la humanidad.

A la hora de abordar el análisis de una construcción histórica se nos presentan una serie de dificultades de orden práctico o conceptual que limitan la posibilidad de abordar su análisis estructural a partir de criterios ideados para analizar las modernas estructuras de hormigón o acero (Roca et al., 2000).

Entre las dificultades de carácter práctico nos encontramos con la imposibilidad de obtener un conocimiento detallado de las propiedades de los materiales y de los diferentes detalles constructivos. Así por ejemplo, algunos de los materiales que las forman son rellenos de mampostería, sillería, que son en general muy heterogéneos y variables en sus propiedades.

Como dificultades de carácter más conceptual nos encontramos con que dichas construcciones han sido objeto de una dilatada evolución temporal, producto de un proceso que generalmente se ha prolongado durante siglos y en mayor o menor intensidad nunca se ha detenido, hasta llegar a sus estado actual. Es evidente que estas construcciones históricas son producto de procesos constructivos muy diferentes a los de la actualidad, cuyo principal objetivo es tanto la minimización del periodo de construcción como en definitiva la reducción de las horas de personal empleadas, ya que éste factor es uno de los costes más influyentes en el presupuesto final de una obra.

La dilatación temporal entre el inicio y finalización de una construcción histórica le han conferido cualidades difícilmente evaluables tanto experimental como numéricamente. También la evolución intrínseca de los materiales con el tiempo o las diversas acciones a las que ha tenido que hacer frente durante el paso de los años son aspectos difícilmente tenidos en cuenta mediante los criterios de comprobación estructural convencionales.

Para intentar abarcar la complejidad que conlleva el estudio de dichas construcciones se han concebido diversas técnicas numéricas muy complejas cuyo inconveniente radica en la necesidad de conocer multitud de información para poder llevar a cabo el cálculo estructural (Cervera, 1998; Crisfield, 1991; Choo, 1991; Laurenço, 1994). Además dichas técnicas numéricas precisan de un proceso de calibración imprescindible para interpretar los resultados que ofrecen (Roca, 2000).

Precisamente la obtención de los parámetros que definen el comportamiento estructural puede depender del modelo aplicado, incluso pueden ser parámetros cuya significación física no esté muy clara. La complejidad que implica la aplicación de estos métodos numéricos en el análisis estructural son motivo de fuente de problemas, no porque la técnica en sí sea errónea, sino porque el modelado y el calibrado exigen un análisis de gran complejidad ofreciendo un volumen de información enorme y de difícil interpretación, con lo que aumenta la probabilidad de errar en el análisis de la construcción.

En contraposición de la utilización de técnicas numéricas complejas, puede ser ventajoso trabajar con técnicas más sencillas que a priori requieran menos información y que a su vez ofrezcan menor volumen de resultados, pero más significativos. El estudio que se quiere llevar a cabo pretende desarrollar una herramienta de este tipo, que permita realizar el análisis de estabilidad de una estructura de obra de fábrica de una forma muy directa y sin necesidad de llevar a cabo una compleja modelización geométrica o mecánica, pero sin perder precisión en los resultados (Heyman, 1995, Huerta, 1990; Lopez G., 2001; Maynou, 2002).

1.2 Breve introducción histórica

Cuando el ser humano, en cualquier época de la Historia, ha querido construir una estructura, con el objetivo de lograr un espacio interior más o menos resguardado de la intemperie, se ha encontrado con la necesidad de solucionar el problema motivado por la aparición de las tracciones que se originan por el efecto de la flexión en los elementos empleados para cubrir las distancias entre apoyos. La solución puede pasar por la

utilización de elementos que soporten tracciones y a su vez dispongan de unas dimensiones suficientes que permitan cubrir la luz entre apoyos, como pueden ser entre los otros perfiles metálicos, las vigas de hormigón armado o pretensado o las vigas de madera. También existe otra solución que permite realizar construcciones a partir de elementos con dimensiones mucho menores a la dimensión que se pretende cubrir. En este caso deberán ser ensamblados entre sí y tendrán que disponer una forma adecuada para permitir la transmisión de las cargas a los cimientos. Como ejemplo se pueden mencionar tanto estructuras de celosía, donde existen elementos comprimidos y traccionados, o también estructuras de arcos donde todos sus elementos están sometidos a esfuerzos de compresión, propiedad que permitirá realizar construcciones constituidas por elementos pétreos altamente durables por lo que se han mantenido en pie hasta la actualidad.

Cabe mencionar que los materiales modernos de construcción aparecen a mediados del siglo XIX y se empiezan a utilizar de manera masiva e industrial a finales del mismo (Serra, 1996). El primer puente metálico se construyó sobre el río Severn, en Inglaterra, entre 1777 y 1779 por Abraham Darby, con forma de arco de medio punto, véase figuras 1.1 y 1.2, una longitud de 30 metros y 387 toneladas de hierro fundido, aún no de acero, por lo que el material con el que está formado no soporta bien las tracciones y en consecuencia dicho puente debe tener una forma adecuada para minimizar la aparición de las mismas tal como sucede con los puentes de mampostería.



Figura 1.1. Primer puente metálico de la Historia (1777-1779), obra de Abraham Darby (<http://www.virtual-shropshire.co.uk>)

Las estructuras metálicas que trabajan como tal, es decir absorbiendo las tracciones originas por la flexión, comenzaron a desarrollarse a gran escala en la segunda mitad del siglo XIX, gracias al desarrollo de la siderurgia, (Bessemer en 1855 perfecciona sistemas de afinado y en

1865 se pone a punto el procedimiento de afino en hornos Martin-Siemens) y a la popularidad alcanzada por la Torre Eiffel, edificada con motivo de la Exposición Universal celebrada en París en 1889 (Ensidesa, 1993).



Figura 1.2. Vista inferior del primer puente metálico de la Historia.
(<http://www.virtual-shropshire.co.uk>)

Por otro lado, si bien el hormigón ya se utilizaba desde la época de los romanos, su desarrollo, en su concepción moderna, se inició en 1824 cuando J. Aspdin inventó el cemento artificial Portland. Pero no será hasta la aparición del hormigón armado que no se podrá aplicar en la construcción de estructuras. El hormigón armado, el otro material de construcción por excelencia, tiene su precursor en un jardinero francés, Monier pues éste en 1867 empezó a construir sus macetas de hormigón armado con alambres. No será hasta que se disponga de acero en suficiente cantidad y que soporte bien las tracciones, cuando se empleó este nuevo material en la construcción de manera intensiva. Las primeras aplicaciones a gran escala, en el campo de la construcción, se realizarían en 1890 (E.L. Ransome en EE.UU y F. Hennembique en Francia).

Por tanto, se puede decir que hasta mediados-finales del siglo XIX no se construye con elementos durables que soporten bien las tracciones, a excepción de la madera. No obstante este material tiene una escasa durabilidad que no le permite sobrevivir al paso los siglos.

Pero la humanidad ha construido desde antiguo estructuras con obra de fábrica que por sus dimensiones todavía hoy nos siguen fascinando (Por ejemplo y por citar algunos casos de especial renombre: Panteón o el Coliseo de Roma, Acueducto de Segovia, o las diferentes Catedrales góticas por citar algunas la de Mallorca o Girona). Si los constructores antiguos no han dispuesto de materiales durables capaces de absorber tracciones, no les ha quedado

otro remedio que adaptar la forma de sus construcciones con el objetivo de reducir la aparición de las mismas en las estructuras para evitar la rotura de los elementos que las forman. Por esta razón, a lo largo de la historia de la construcción con obra de fábrica, uno de los principales objetivos que se ha abordado es el de la minimización de los esfuerzos de tracción que aparecen las construcciones y que mejor forma de solucionar dicho problema sino evitando que aparezcan. Dichas estructuras están formadas por elementos pétreos de dimensiones reducidas que se ensamblan entre sí para formar elementos mayores pidiendo dar lugar a construcciones de gran envergadura. Si el material, en sí mismo, solamente tiene capacidad de transmitir compresiones, será la geometría de la estructura resultante la que permita transmitir de forma segura las cargas desde su punto de aplicación hasta la cimentación. Como ejemplo de esta manera de construir podemos citar las catedrales Góticas y Románicas y más modernamente, algunas de las construcciones enclavadas en el estilo Modernista cuyo máximo exponente es el arquitecto Antoni Gaudí (Gonzalez et al. 2002; Joslow, 2002; Ráfols, 1929; Roca, 2002).

También es necesario comentar que los conocimientos científicos, basados en la mecánica y el método científico, se empiezan a introducir en el mundo de la construcción con el artículo de Poleni sobre la estabilidad de la cúpula de San Pedro en 1748 (Huerta, 1996, 2001; Lopez G., 2001). Si bien bastante anteriormente, otros grandes sabios y eruditos como Leonardo da Vinci (1452-1519) ya empezaron a vislumbrar explicaciones basadas en métodos científicos a problemas planteados por la construcción. Los métodos para crear modelos matemáticos y verificarlos mediante experimentos fueron adoptados por Francis Bacon (1561-1626) y Galileo Galilei (1564-1642).

Particularmente Galileo realiza el primer estudio que se conoce para determinar la posición de la fibra neutra en una sección sometida a flexión. Éste realiza unas hipótesis erróneas que le conducen a determinar un valor del momento flector tres veces superior al real. En la figura 1.3 se aprecia una reproducción del gráfico empleado por Galileo en su estudio de la flexión de las vigas.

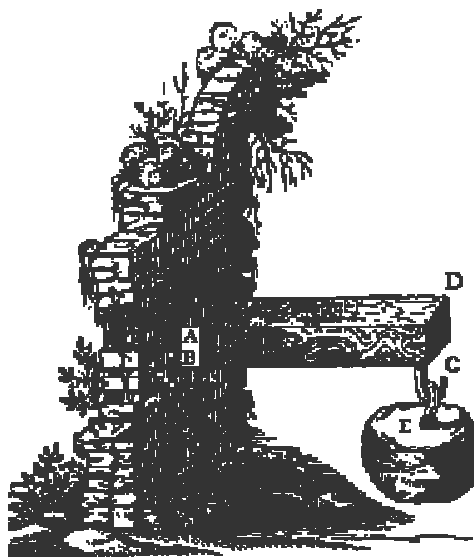


Figura 1.3. Esquema de Galileo del libro “Diálogos sobre dos nuevas ciencias” (Galilei, 1638)

Debido a esta falta de estudios científicos, las construcciones hasta el siglo XVIII eran concebidas y diseñadas sin conocimientos de mecánica racional ni de resistencia de materiales, aunque los constructores sí tenían a su alcance amplios conocimientos de geometría gracias al amplio legado greco-romano.

A pesar de los inconvenientes mencionados, carencia de materiales con suficiente resistencia a tracción y desconocimientos de nociones científicas de mecánica, los constructores de todas las épocas han construido estructuras de gran envergadura, muchas de las cuales han sido a lo largo de la Historia referencia para la arquitectura e ingeniería, incluso actualmente nos sorprenden por su osadía y grado de optimización en el empleo de materiales.

Por tanto, el éxito de dichas construcciones en gran medida radica en su forma. Es la forma donde se acumula el ingenio de los constructores para garantizar la estabilidad de la estructura. Por tanto es la Geometría la Ciencia que en un primer estadio histórico, colabora decisivamente a levantar grandes construcciones.

Uno de los métodos utilizados desde finales del siglo XVII para encontrar formas que permitan modelar las estructuras en las que no aparezcan tracciones son los modelos antifunculares (Huerta, 1990, 1996, 2001). Dichos modelos se basan en la analogía entre modelos funiculares, o sea modelos cuya forma permite que los elementos que forman la estructura sólo estén sometidos a esfuerzos a tracción (estructuras formadas por hilos) y las líneas de empujes en las estructuras de obras de fábrica.

El primer paso para elaborar y formular dichos modelos se encuentra en el estudio de la forma que adopta un hilo sin resistencia a flexión suspendido por sus dos extremos. Galileo en 1638, ya había concluido erróneamente que la curva era un arco de circunferencia. Otros matemáticos que abordaron el problema supusieron equivocadamente que la curva era una parábola. En 1691, en respuesta a un reto de Jacob Bernoulli, los matemáticos Leibnitz, Johann Bernoulli y Huygens, este último por métodos geométricos, encontraron la ecuación que describe el trazado de la curva que cumple el enunciado del problema planteado por Jacob Bernoulli. Leibnitz emplea la reciente teoría del cálculo infinitesimal, descubierta de forma independientemente por él y Newton, para encontrar la ecuación de dicha curva. En la figura 1.4 se puede observar la reproducción del grabado original de la publicación de Bernoulli "*Acta Eruditorum*" de Junio de 1691 donde describe como Leibniz encuentra la expresión analítica de la ecuación de la catenaria.

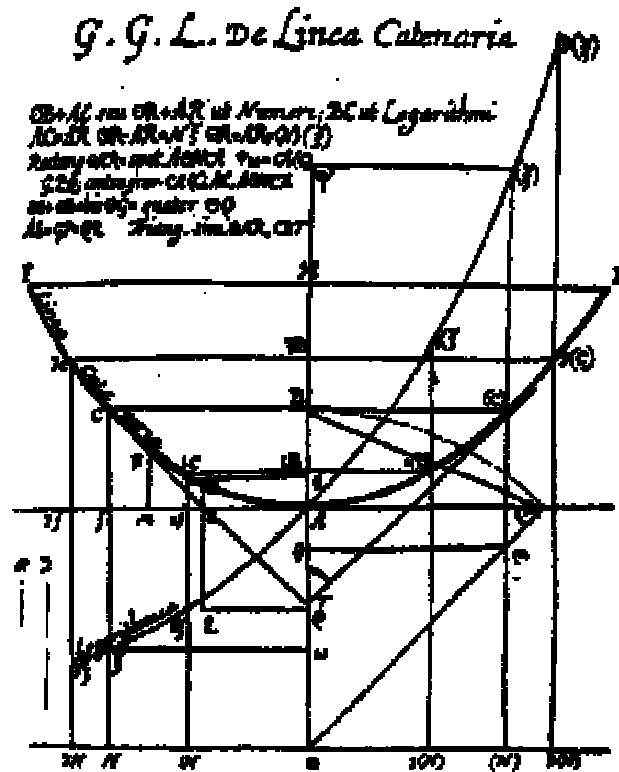


Figura 1.4. Reproducción del grabado original de la curva catenaria obtenida por Leibniz en 1691.

El primero en introducir la analogía de los modelos antifuniculares fue el científico inglés Robert Hooke (Irvine, 1981; López G. 2001). Éste en 1675 propone en un anagrama críptico y por primera vez en términos científicos, que la forma ideal para un arco es la forma de una catenaria invertida. Gregory en 1695, de forma independiente a Hooke, pues su anagrama no fue descifrado hasta 1705, formula también el mismo principio de Hooke exponiendo la condición de equilibrio de un arco. Pero fue Stirling, en su obra *Lineae Tertii Ordinis* (López G., 2001) de 1717 quien, a través del estudio del equilibrio mediante polígonos de fuerzas de arcos compuestos por esferas, establece con mayor claridad la relación entre la forma invertida de una catenaria y la de un arco.

Esta relación entre la forma de la curva que traza una catenaria y la forma de los arcos es explotada al máximo en el celebre artículo de Poleni (1748) sobre la estabilidad de la cúpula de San Pedro de Roma. A través de un acertado modelo antifunicular analógico, Poleni demuestra que las líneas de empuje se encuentran en el interior de la cúpula concluyendo que la forma de la misma permite su estabilidad.

Ya a finales del siglo XIX el arquitecto catalán Antoni Gaudí (Ràfols ,1929) empleó profusamente la analogía del modelo antifunicular para diseñar sus celebres edificios característicos de la arquitectura modernista. Un claro ejemplo de esta forma de diseñar edificios es el modelo antifunicular de la iglesia de la Colonia Güell donde no solo se utiliza el modelo analógico antifunicular para diseñar arcos, sino que lo utiliza para diseñar complicadas estructuras tridimensionales. En la figura 1.5 se puede apreciar la fotografía de

una maqueta antifunicular que Gaudí empleó en sus estudios previos del proyecto de la iglesia de la Colonia Güell de Santa Coloma de Cervelló, (Ráfols 1929).

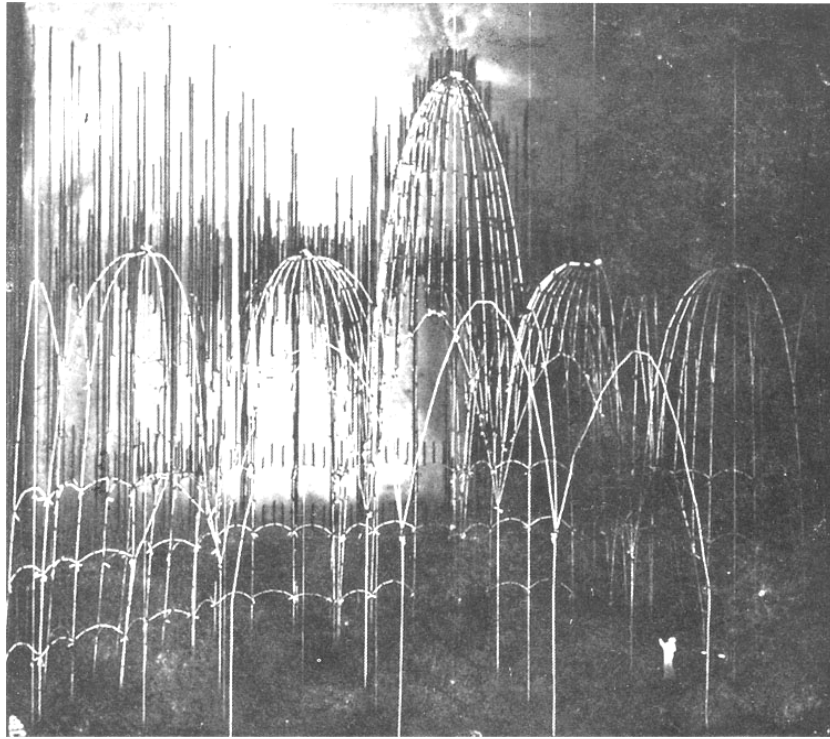


Figura 1.5. Maqueta antifunicular (polifunicula según Ráfols) utilizada por Gaudí (Ráfols, 1929)

Actualmente el gran desarrollo de los equipos informáticos está permitiendo la aplicación de nuevas técnicas numéricas orientadas al estudio de estructuras de obra de fábrica. Dichas técnicas numéricas se basan principalmente en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no-lineales por el método de los elementos finitos. Esta técnica está orientada a determinar el campo de deformaciones y tensiones que experimenta una estructura. Como se ha descrito en la introducción estas técnicas se enfrentan a unas dificultades de orden conceptual o práctico que pueden dificultar su aplicabilidad real.

En contraposición a estas técnicas computacionales modernas se propone utilizar, actualizar y ampliar una técnica utilizada desde antiguo, la analogía antifunicular para determinar la estabilidad de estructuras de obra de fábrica. Dicha técnica se ha llevado a cabo mediante modelos analógicos, es decir, maquetas colgantes, también llamadas estereostáticas o polifuniculares, algunas de ellas extraordinariamente laboriosas. Más modernamente se ha ampliado su aplicabilidad al diseño de estructuras bidimensionales mediante modelos termo-plásticos (Andrés et al., 1993).

También existen aplicaciones de esta metodología en su vertiente computacional, como por ejemplo la modelización de la maqueta colgante de la iglesia de la Colonia Güell realizada por Serrallonga, (2003) aplicando un modelo computacional que simula el comportamiento

de redes de cables. No obstante dicha aplicación puede verse limitada por el propio comportamiento de los elementos tipo barra para simular elementos de cable.

1.3 Objetivo de la Tesis Doctoral

1.3.1 Objetivo general

Para recuperar y potenciar la viabilidad actual de la técnica basada en la analogía antifunicular para determinar la estabilidad de estructuras de obra de fábrica se propone desarrollar, en el contexto de la presente tesis doctoral, una formulación analítica que permita la simulación numérica mediante ordenador de modelos funiculares complejos y estudiar su aplicación en el análisis de la estabilidad de construcciones de obra de fábrica mediante el empleo de la teoría del análisis límite. También el diseño de estructuras de obra de fábrica se puede considerar como aplicación directa de la técnica que se pretende desarrollar.

1.3.2 Objetivos específicos

Los objetivos específicos a tratar en el desarrollo de la tesis doctoral necesarios para cubrir el objetivo general son:

1. Analizar el estado del conocimiento sobre metodologías de cálculo y análisis tanto de construcciones de obra de fábrica como de estructuras funiculares. En el estudio del estado del conocimiento referente a los métodos de cálculo y modelización de las estructuras de obra de fábrica se realizará una revisión histórica para contemplar los métodos de cálculo usados en la era preinformática. Así mismo se investigarán las aplicaciones de los modelos analógicos funiculares llevadas a cabo con anterioridad. El estudio del estado del conocimiento sobre la modelización y cálculo de estructuras funiculares se dividirá en tres partes.
 - Estudio de diferentes tipos de elementos de cable encontrados en la bibliografía.
 - Estudio de diferentes estrategias para abordar el análisis de redes, entendiendo redes como un conjunto interconectado de elementos de cables.
 - Estudio de estructuras compuestas por elementos tipo cable y viga.
2. Formular un nuevo elemento de cable válido para modelizar estructuras de obra de fábrica mediante el método funicular. Este desarrollo se centrará en la obtención de expresiones analíticas que permita aumentar su eficiencia a la hora de ser implementado numéricamente mediante un programa de ordenador. Se deberán analizar los problemas numéricos que se puedan generar de cara a establecer técnicas que permitan dotar de estabilidad a los algoritmos numéricos que impliquen a los elementos de cable desarrollados. Puesto que la metodología a

desarrollar tiene por objetivo su aplicación práctica en modelizaciones complejas la formulación del elemento de cable deberá contemplar también el desarrollo de la matriz tangente asociada a dicho elemento para aumentar la rapidez y estabilidad en la convergencia de los sistemas no lineales resultantes.

3. Implementar la formulación analítica en un programa de ordenador mediante algoritmos numéricos que permitan el cálculo de redes complejas. Ello incluye el análisis de las cualidades numéricas del algoritmo implementado con el fin de ser utilizado en estudio de casos complejos. Dicha implementación debe contemplar:
 - Desarrollo de un método altamente convergente para establecer una relación entre fuerzas y desplazamientos en extremos de los nudos del elemento de cable.
 - Establecimiento de una estrategia numérica capaz de implementar de una manera estable y eficiente la formulación desarrollada para el cálculo de estructuras funiculares (redes) modeladas a partir de los elementos de cables desarrollados.
 - Desarrollo de algoritmos eficientes de almacenaje de datos, así como implementar métodos numéricos eficientes para lograr que la aplicación de la metodología de cálculo a casos reales no represente un uso prohibitiva de recursos informáticos. Es un objetivo poder utilizar medios informáticos convencionales (ordenadores personales) como herramientas para el estudio de la mayoría de estructuras reales por compleja que sea su geometría. En especial se estudiará el comportamiento de métodos directos e iterativos para la solución de sistemas lineales implicados en el algoritmo desarrollado.
 - Utilización de una estrategia de optimización para automatizar el proceso de búsqueda de soluciones, de cara a la comprobación de la estabilidad de estructuras de obra de fábrica. Esto implicará definir una serie de parámetros variables, establecer las restricciones oportunas y definir una función objetivo, así como una estrategia de minimización.
4. Validación del buen comportamiento de la metodología desarrollada así como la bondad de los resultados. Para lograr este objetivo se modelarán estructuras ensayadas experimentalmente y se compararán los resultados obtenidos numéricamente con los obtenidos en los ensayos. También se realizarán comparativas con otros modelos numéricos o estudios de estructuras reales de otros autores para poder extraer conclusiones sobre la aplicabilidad del método desarrollado.
5. Comprobación de la validez de la metodología formulada para estudiar estructuras de gran complejidad geométrica.

6. Empleo de un preprocesador y postprocesador gráfico, tanto para facilitar el trabajo de la modelización como y representar de una manera cómoda los resultados de los cálculos, para así poderlos interpretar de una manera más directa.
7. Estudio de otras posibles aplicaciones de la formulación desarrollada en otros campos de la física o de la técnica como la creación de superficies mínimas a partir de un contorno fijado para su aplicación en modelos de CAD y el análisis de estructuras hinchables, el diseño de formas estructurales antifuniculares, el cálculo de estructuras postesadas o el cálculo de estructuras a tracción.

1.4 Contenido de este documento

Con el objetivo de mostrar con mayor claridad los temas desarrollados el presente trabajo se ha dividido en tres partes fundamentales. La primera parte comprenderá los capítulos segundo, tercero y cuarto y presentará una formulación para el cálculo de redes de cables. Esta parte también comprenderá el desarrollo y comparación de un nuevo elemento de cable. La metodología de cálculo de redes de cables mostrada ofrece múltiples aplicaciones que se expondrán de forma general en el capítulo noveno. Más concretamente en la segunda parte del presente trabajo que comprende los capítulos quinto, sexto y séptimo, se desarrollará en profundidad la aplicación al cálculo de estructuras de obra de fábrica mediante la aplicación de la teoría del análisis límite, empleando la formulación presentada en la primera parte del trabajo para encontrar redes complejas de líneas de presiones. Finalmente en la tercera parte del trabajo, que comprende los capítulos octavo y noveno, se presentan otras aplicaciones de la metodología desarrollada, conclusiones y líneas futuras de investigación.

En el segundo capítulo se revisarán los diferentes elementos de cables encontradas en la bibliografía y se repasarán las diferentes técnicas empleadas en la solución de estructuras funiculares, también llamadas estructuras de cables. Finalmente, se extraerán conclusiones acerca de los aspectos sobre los que se debe profundizar y que permitan lograr los objetivos de la presente investigación. Este capítulo finalizará con un compendio de ejemplos particulares relacionados con las estructuras de cables.

En el tercer capítulo se desarrollará un nuevo elemento de cable que será empleado en la simulación de las líneas de presiones. Dicho desarrollo comprenderá tanto la deducción de las expresiones cinemáticas del elemento como la deducción de su matriz tangente. Así mismo, se describirá la metodología, tanto analítica como numérica necesaria para resolver redes de cables formadas por un número arbitrario de elementos de cable. Se mostrará especial interés en desarrollar estrategias numéricas altamente estables con el objetivo de obtener una convergencia rápida, pero sobre todo estable, del problema no lineal planteado.

En el cuarto capítulo se compararán de las características del nuevo elemento frente a otros descritos en la bibliografía, dicha comparativa comprenderá tanto el grado de aproximación respecto resultados experimentales como su comportamiento desde el punto de vista numérico.

En el quinto capítulo se presenta una revisión del estado actual del conocimiento del área estructural que nos ocupa. En él se exponen los aspectos fundamentales sobre la modelización mediante diferentes técnicas del comportamiento de estructuras de obra de fábrica. Básicamente las diferentes técnicas de análisis que se mostrarán se pueden dividir en tres grandes grupos:

- Técnicas basadas en el empleo de modelos analógicos.
- Técnicas basadas en modelos analíticos.
- Técnicas basadas en modelos numéricos.

Concretamente se realizará una exhaustiva revisión de la teoría del análisis límite empleada en el estudio de la estabilidad de las estructuras de obra de fábrica. Dicha revisión comprenderá también los conceptos de mecánica clásica que profusamente se emplean en el análisis límite. Se realizará una aproximación a la evolución histórica del análisis de las estructuras de obra de fábrica para fundamentar la metodología del análisis mediante modelos analógicos antifuniculares, base del presente trabajo.

En el sexto capítulo se desarrollará la estrategia para abordar mediante técnicas numéricas el análisis de las estructuras de obra de fábrica empleando los modelos analógicos-numéricos desarrollados en el capítulo tercero. También se desarrollará una técnica basada en la optimización no lineal que permitirá automatizar la búsqueda de soluciones que muestren la estabilidad de las estructuras analizadas. Se realizarán también diversos ejemplos en 2 y 3 dimensiones que permitirán mostrar la bondad de la estrategia de optimización desarrollada mediante la simulación de estructuras simples.

En el séptimo capítulo se describirá la modelización de estructuras reales de cierta complejidad geométrica analizadas mediante las técnicas descritas en el presente documento. En el primer caso se realizará un ejemplo característico en el estudio de estructuras de obra de fábrica, la determinación de la carga última del puente Bridge Mill, ensayado hasta la rotura y utilizado como caso test por diferentes autores. En el segundo caso se analizará una estructura bidimensional, el pórtico tipo de la catedral de Mallorca. Este caso permitirá comparar los resultados ofrecidos por la técnica desarrollada, con otros, obtenidos a lo largo de la historia mediante técnicas completamente diferentes. El tercer ejemplo consistirá en el análisis de una estructura tridimensional de una complejidad geométrica moderada, la aguja de la Catedral de Barcelona. Dicho ejemplo mostrará tanto la potencia del método a la hora de analizar estructuras complejas, como las limitaciones de la técnica del análisis límite. Finalmente se estudiará de forma simplificada la estabilidad de la nave central de la catedral de Girona, analizando de forma cualitativa la forma de sus bóvedas comprándolas con el contorno de un esquema funicular equivalente.

El octavo capítulo expondrá brevemente diferentes aplicaciones de investigación que se pueden derivar de la formulación desarrollada. Dichas perspectivas se introducirán mediante ejemplos desarrollados en el contexto del presente trabajo.

El noveno capítulo expone y resume las conclusiones que ofrece el presente trabajo. Se realizará tanto un resumen de las aportaciones tanto en el campo del análisis de las

estructuras de obra de fábrica como del cálculo de estructuras funiculares o de cables. Finalmente se expondrán las líneas de investigación que quedan abiertas y se derivan de la presente investigación.

Parte I

Cálculo de modelos funiculares

Capítulo 2

Estado del conocimiento sobre el cálculo de modelos funiculares

2.1 Introducción.

El estado del conocimiento de las técnicas de cálculo de redes de cables describirá no sólo técnicas para tratar problemas con múltiples grados de libertad (redes) sino que tendrá que hacer referencia al análisis y modelización del comportamiento tanto de un elemento de cable aislado como de su combinación con otros elementos tipo barra. Dicha combinación permitirá mejorar la modelización de las estructuras de obra de fábrica que tengan incorporados elementos como zunchos o tirantes que trabajen a tracción, así el modelo antifunicular podrá modelar dichos elementos mediante barras que trabajen a compresión. Se describirán formulaciones estáticas y dinámicas así como las simplificaciones realizadas que permiten una formulación matemática más sencilla.

2.2 Elementos de Cable.

2.2.1 Introducción.

Actualmente en la mayoría de campos de ingeniería orientada al análisis estructural existe una gran variedad de elementos finitos que permiten modelar el comportamiento físico de los diferentes tipos estructurales. En el campo de la modelización de estructuras de cables existen diversos tipos de elementos finitos pero particularmente, en esta tipología estructural, nos encontramos con una buena colección de elementos de carácter analítico. Muchos nacen a partir de la solución directa del problema de equilibrio y compatibilidad que se plantea a partir de la física del problema, sin tener que recurrir a aproximaciones de tipo numérico.

El desarrollo que se presentará a continuación se centrará en la descripción de los diferentes elementos de cable existentes en la bibliografía. También se realizará una breve exposición

de aplicaciones específicas de los mismos. Se agruparán los elementos de cable dependiendo de su origen, es decir, según si han sido desarrollados a partir de deducciones analíticas o mediante formulaciones de elementos finitos u otro tipo de aproximaciones.

2.2.2 Soluciones analíticas del elemento de cable.

2.2.2.1 Elemento de catenaria inextensible.

Se define un elemento de catenaria como la curva que adopta un cable formado con material inextensible, con rigidez a flexión despreciable, suspendido por sus extremos y bajo el efecto de la gravedad.

La expresión analítica para este caso se conoce desde muy antiguo. En 1691, en respuesta a un reto planteado por Jacob Bernoulli, los científicos Leibnitz, Huygens y Johann Bernoulli encontraron la ecuación para el caso de la catenaria inelástica. Particularmente Leibnitz empleó la reciente teoría del cálculo infinitesimal, descubierta independientemente por él y Newton, para deducir la ecuación de dicha curva (Tibert, 1999).

Aquí se expondrán las expresiones tal como se presentan en Tibert (1999). En la figura 2.1 se muestra un elemento de catenaria suspendido por sus nodos extremos. El peso por unidad de longitud de cuerda es denominado q , la fuerza horizontal aplicada en los extremos de nudo H y la longitud de la catenaria L .

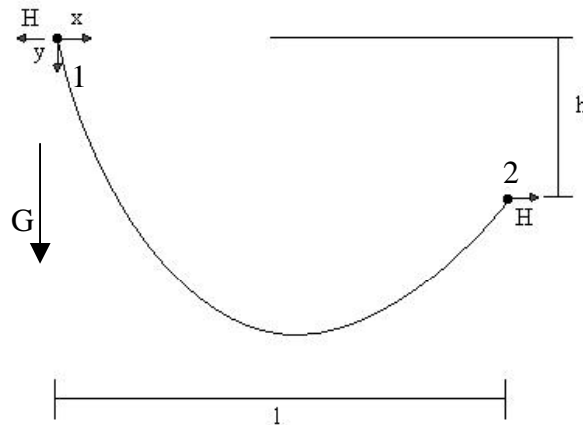


Figura 2.1. Catenaria inextensible

Para profundizar en la deducción se puede consultar en Tibert (1999) donde se muestra de una manera muy clara la obtención de la expresión analítica de la catenaria y el planteamiento de la ecuación diferencial de la que se deriva. Para el segmento de cable mostrado en la figura 2.2, tomando como condiciones de contorno $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y $(x_2, y_2) = (l, h)$ la expresión que relaciona la posición de la coordenada y en función de la ordenada x toma la siguiente forma.

$$y = \frac{H}{q} \left[1 + \cosh\left(\frac{qx}{H} + \zeta\right) - \cosh(\zeta) \right] \quad (2.1)$$

siendo:

$$\zeta = \sinh^{-1}\left(\frac{qh}{2H \sinh(\omega)}\right) - \omega \quad (2.2)$$

donde:

$$\omega = \frac{ql}{2H} \quad (2.3)$$

La longitud de la catenaria podrá ser calculada a partir de la siguiente expresión:

$$L^2 = \frac{l^2}{\omega^2} \sinh^2(\omega) - h^2 \quad (2.4)$$

La expresión anterior se puede transformar, expresándose en forma de ecuaciones paramétricas, según el parámetro arco de la curva s ; relacionando la posición de los nudos extremos con las fuerzas aplicadas en estos. El parámetro arco s mide la distancia sobre la cuerda del nudo 1 al nudo 2. Dicha expresión que se muestra a continuación será deducida en el capítulo 3.

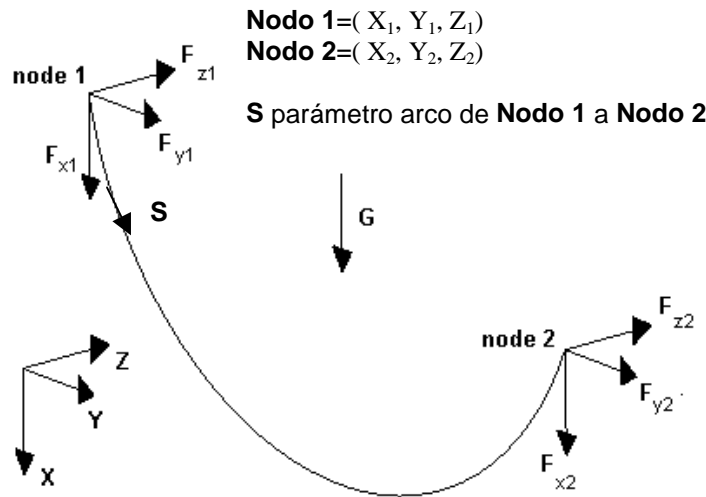


Figura 2.2. Catenaria inelástica 3D sometida a la fuerza de la gravedad G

Las expresiones para el caso 3D, según la base de referencia mostrada en la figura 2.2, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
X_2 &= X_1 + \frac{1}{q} \cdot \left(\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + (P + Fx_2)^2} - \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + (Fx_2 + q(L - s))^2} \right) \\
Y_2 &= Y_1 + \frac{Fy_2}{q} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fx_2 + q(L - s)}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \right) \\
Z_2 &= Z_1 + \frac{Fz_2}{q} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fx_2 + q(L - s)}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde q representa el peso por unidad de longitud, L es la longitud inicial del elemento, s es el parámetro arco y P el peso total del elemento.

Estas expresiones muestran la relación altamente no lineal entre la posición de las coordenadas de los nodos extremos y las fuerzas aplicadas en éstos. Las expresiones definen el elemento de catenaria inextensible, pudiéndose éstas emplear en un esquema convencional de rigidez para proceder al cálculo de redes formadas por dichos elementos.

Se puede observar de las expresiones anteriores que el elemento de catenaria descrito es explícito desde un punto de vista de flexibilidad. Dado que dichas expresiones no son invertibles no se dispone de la expresión de rigidez explícita. Para obtener los valores de las fuerzas a partir de la posición de los nudos, se deberá resolver el correspondiente sistema no lineal.

La utilización de este elemento inextensible para modelar redes de cables es poco recomendable dada la alta inestabilidad que confiere al problema matemático aunque físicamente el resultado de dicha modelización sea correcto. La propia condición de inextensibilidad del elemento implica la existencia de comportamientos asintóticos que dificultan extraordinariamente la convergencia del problema numérico resultante. Esta cuestión se puede solventar dotando de cierta extensibilidad al material que forma el elemento de catenaria. Incorporando dicha variación se mejora extraordinariamente el comportamiento numérico del problema ya que en el caso de la catenaria elástica se substituye el comportamiento asintótico por un comportamiento de tipo lineal.

En el punto 3.2.2 del capítulo 3 se expone ampliamente la problemática que presenta dicho elemento inextensible y se planteará un nuevo elemento de cable que permita superar los problemas numéricos que plantea el cable inextensible.

A modo introductorio se muestra a continuación un ejemplo donde se compara el comportamiento de un elemento de cable inextensible con otro elástico. En la figura 2.3 se puede ver el esquema del ejemplo planteado. La longitud (L) del cable es de 15m y la rigidez del elemento elástico será de $EA=1e5$ kN. El ejemplo consiste en ir separando los apoyos de manera que el elemento se vaya tensando y observar el comportamiento que experimenta la reacción horizontal en función de la separación de los apoyos.

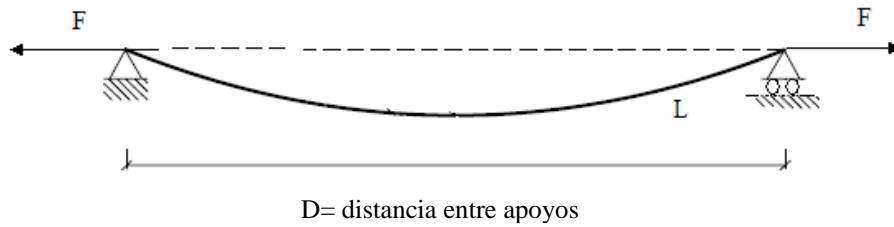


Figura 2.3. Elemento de cable suspendido por los nodos extremos

El gráfico de la figura 2.4 compara la relación entre la distancia entre apoyos y la reacción horizontal que se obtiene empleando un elemento inextensible y otro elástico. Se puede ver como para situaciones en el que el cable está poco tenso el comportamiento es muy parecido para los dos tipos de elementos.

La diferencia en el comportamiento se produce cuando la separación entre nodos es próxima a la longitud de la cuerda. En esta situación para el caso inextensible aparece una rama asintótica que se transforma en el caso elástico lineal en una relación lineal entre desplazamientos y tensión con la pendiente igual a la rigidez del cable.

En definitiva en el caso inextensible se aprecia claramente el comportamiento asintótico de la catenaria inelástica que como es lógico se sitúa para una distancia entre apoyos de 15m.

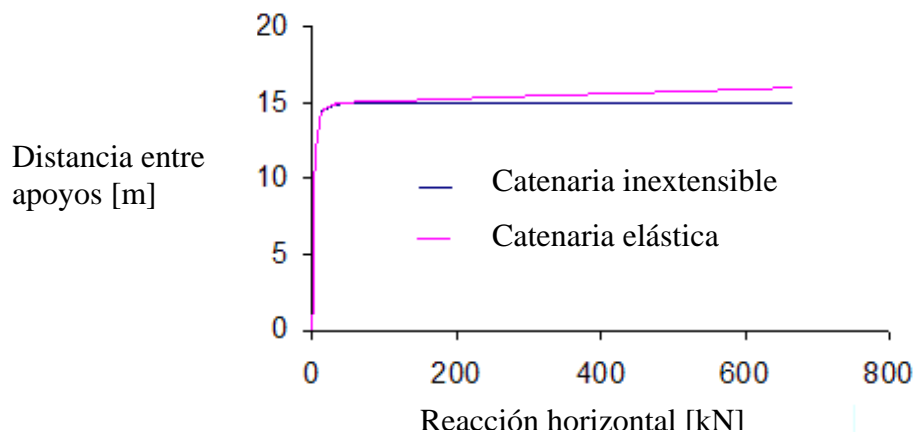


Figura 2.4. Comportamiento mecánico de una catenaria elástica e inelástica

En el caso elástico la rigidez del cable cuando está completamente tenso es equivalente a la de una barra traccionada es decir igual a EA/L , de aquí la profusión del empleo del elemento convencional de barra para simular el comportamiento de estructuras a tracción, ya que en situaciones donde los elementos estén suficientemente traccionados su comportamiento mecánico es muy similar al de un cable, ofreciendo ventajas de tipo numérico en su resolución computacional.

2.2.2.2 Elemento de catenaria elástico.

Se define un elemento elástico de catenaria como la curva que adopta un cable formado con material perfectamente elástico lineal, que cumple la ley de Hooke, con rigidez a flexión despreciable, suspendido por sus extremos y sometido al efecto de la gravedad.

La expresión de la catenaria formada por material elástico lineal fue obtenida por Routh en 1891, (Irvine, 1981). Dicha expresión exhibe una complicación formal que dificulta su aplicación práctica. Aquí se mostrará la expresión ofrecida por Irvine (1981) para el caso bidimensional por su mayor claridad .

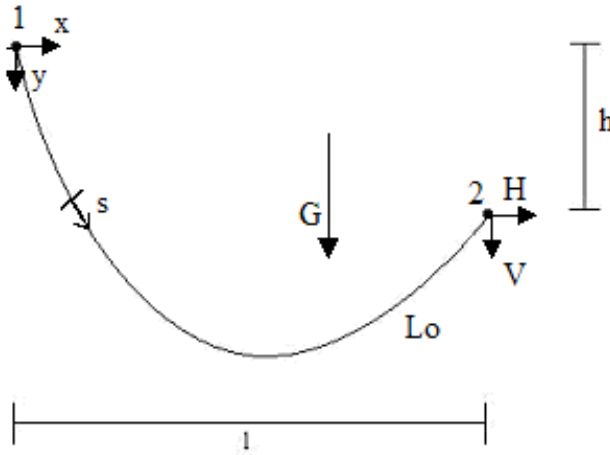


Figura 2.5. Catenaria elástica

Cabe decir que para la deducción de las siguientes expresiones se realiza la hipótesis de pequeños desplazamientos, estableciendo el equilibrio de fuerzas en la configuración sin deformar. Dicha hipótesis es perfectamente válida para cables formados por materiales suficientemente rígidos. Tomando como condiciones de contorno $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y $(x_2, y_2) = (l, h)$ se obtiene la siguiente expresión paramétrica en función del parámetro arco s, que tiene su origen en el nodo 1:

$$\begin{aligned}
 X_2(s) &= \frac{Hs}{EA} + \frac{HL_0}{q} \cdot \left(\operatorname{arcsnh}\left(\frac{V}{H}\right) - \operatorname{arcsnh}\left(\frac{V - qs/L_0}{H}\right) \right) \\
 Y_2(s) &= \frac{qs}{EA} \left(\frac{V}{q} - \frac{s}{2L_0} \right) + \frac{HL_0}{q} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V}{H}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V - qs/L_0}{H}\right)^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

La expresión anterior (2.6) está referida según los ejes definidos en la figura 2.5. La variable V es la fuerza vertical aplicada en el nodo 2, E es el módulo de Young del material que forma el cable y A la sección del mismo. Dado que en este caso la catenaria es extensible se tiene que matizar que L_0 es la longitud inicial del cable, aún sin cargar.

Para $s=L_0$ se obtiene la relación entre fuerzas y coordenadas de los nodos extremos, muy útil para determinar la expresión de la matriz de rigidez tangente del elemento.

$$l = \frac{HL_0}{EA_0} + \frac{HL_0}{q} \cdot \left(\operatorname{arcsnh}\left(\frac{V}{H}\right) - \operatorname{arcsnh}\left(\frac{V-q}{H}\right) \right) \quad (2.7)$$

$$h = \frac{qL_0}{EA_0} \left(\frac{V}{q} - \frac{1}{2} \right) + \frac{HL_0}{q} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V}{H}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V-q}{H}\right)^2} \right)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden describir de la siguiente manera:

$$l = f(H, V) \quad (2.8)$$

$$h = g(H, V)$$

Por tanto, diferenciando las expresiones anteriores:

$$dl = \frac{\partial f}{\partial H} dH + \frac{\partial f}{\partial V} dV \quad (2.9)$$

$$dh = \frac{\partial g}{\partial H} dH + \frac{\partial g}{\partial V} dV$$

La anterior expresión puede describirse como:

$$\begin{bmatrix} dH \\ dV \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} dl \\ dh \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

donde:

$$K = F^{-1} = \begin{bmatrix} f_{22} & -f_{12} \\ -f_{21} & f_{11} \end{bmatrix} \frac{1}{f_{22}f_{11} - f_{12}f_{21}} \quad (2.11)$$

siendo:

$$f_{11} = \frac{\partial f}{\partial H} \quad f_{12} = \frac{\partial f}{\partial V} \quad f_{21} = \frac{\partial g}{\partial H} \quad f_{22} = \frac{\partial g}{\partial V} \quad (2.12)$$

En la referencia (Irvine, 1981) se pueden encontrar las expresiones anteriores de forma explícita.

Karoumi (1998), muestra un estudio sobre la aplicabilidad de este tipo de elemento para modelar tirantes de puentes de gran longitud. Compara los resultados con elementos de barra convencional y con elementos de barra con la rigidez ficticia deducida por Ernst

(1965). Las gráficas expuestas en la figura 2.6 son tomadas de Karoumi (1998) y muestran, como es de esperar, que el elemento de catenaria elástica tiene un mayor grado de precisión que los elementos de barra. Además se pone de manifiesto que el uso de los elementos de barra convencionales requiere mayor capacidad de recursos informáticos para un nivel de precisión aceptable.

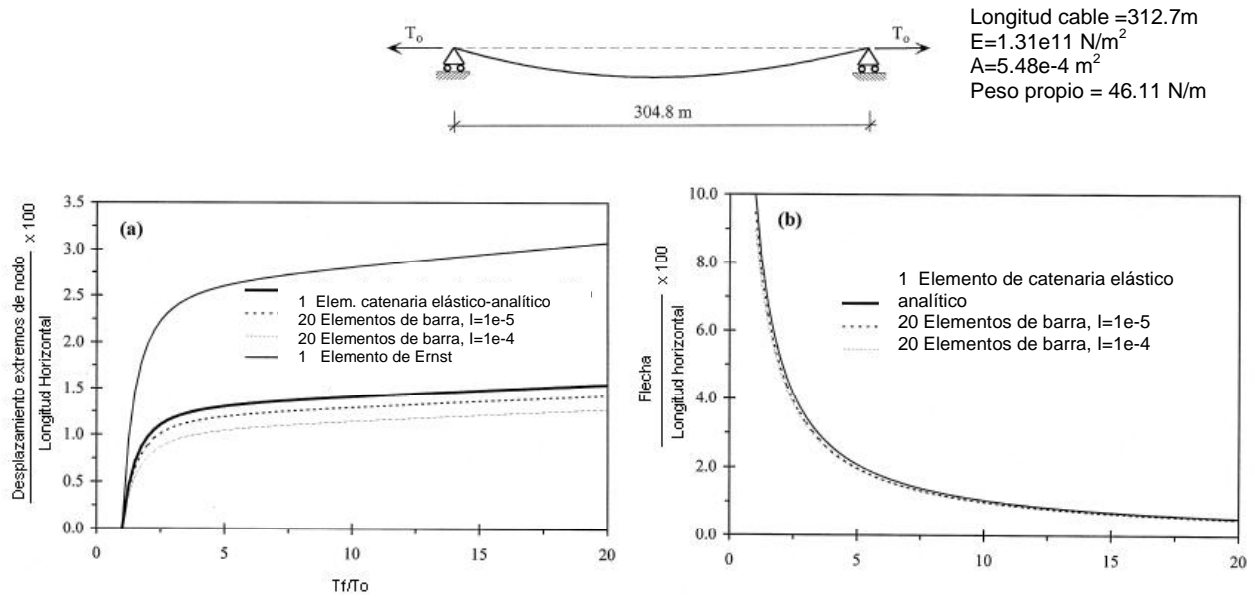


Figura 2.6. Comparativas realizadas por Karoumi (1998)

La formulación del elemento de cable elástico mostrada anteriormente también es utilizado por Vinasithamby et al. (2001) para modelar estructuras expandibles proyectadas para misiones espaciales. La modelización se realiza combinando elementos de viga convencional y elementos de cable obteniendo muy buenos resultados.

2.2.3 Elementos de cable aproximados.

2.2.3.1 Elemento de barra.

Este es de los elementos más usados para modelizar estructuras de cables a pesar de las limitaciones y problemáticas inherentes a él. De hecho, se han desarrollado métodos exclusivos de resolución de problemas de redes de cables utilizando este tipo de elemento (Tibert, 1999; Gil A. 2001). Como se ha dicho anteriormente, para casos donde los elementos se encuentran traccionados la aproximación que ofrece este elemento es suficiente. Los inconvenientes son debidos a la existencia de elementos poco o nada traccionados, con lo que para simular correctamente el comportamiento es necesario el empleo de multitud de elementos, con el coste computacional que ello conlleva.

En la figura 2.7 se puede observar un elemento de barra situado en el espacio que servirá para deducir las expresiones cinemáticas y la matriz de rigidez tangente del elemento.

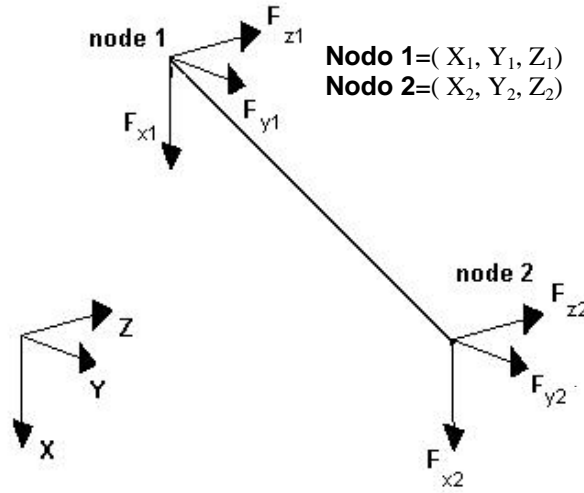


Figura 2.7. Elemento de barra

Utilizando una formulación lagrangiana la expresión cinemática analítica de este elemento es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 F_{x_1} &= EA(X_1 - X_2) \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_f} \right) \\
 F_{y_1} &= EA(Y_1 - Y_2) \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_f} \right) \\
 F_{z_1} &= EA(Z_1 - Z_2) \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_f} \right) \\
 F_{x_1} &= -F_{x_2} \quad F_{y_1} = -F_{y_2} \quad F_{z_1} = -F_{z_2}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

siendo

$$l_f = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}
 \tag{2.14}$$

E módulo de young del material, A sección de la barra y l_0 la longitud inicial de la barra.

La matriz tangente asociada a este elemento puede ser deducida como:

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{3 \times 3}_{11} & \mathbf{K}^{3 \times 3}_{12} \\ \mathbf{K}^{3 \times 3}_{21} & \mathbf{K}^{3 \times 3}_{22} \end{bmatrix}
 \tag{2.15}$$

siendo

$$F = (Fx_1, Fy_1, Fz_1, Fx_2, Fy_2, Fz_2) \quad (2.16)$$

y

$$\chi_2 = (X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2) \quad (2.17)$$

Se deduce fácilmente que:

$$\begin{aligned} K_{21} &= -K_{22} \\ K_{12} &= -K_{22} \\ K_{11} &= K_{22} \end{aligned} \quad (2.18)$$

La siguiente submatriz de rigidez tangente puede escribirse como:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} aux_2 + aux_1 \cdot a^2 & -aux_1 \cdot a \cdot b & -aux_1 \cdot a \cdot c \\ & aux_2 + aux_1 \cdot b^2 & -aux_1 \cdot b \cdot c \\ SIM & & aux_2 + aux_1 \cdot c^2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

siendo las variables auxiliares :

$$a = X_1 - X_2; \quad b = Y_1 - Y_2; \quad c = Z_1 - Z_2; \quad aux_1 = \frac{EA}{l_f^3}; \quad aux_2 = \frac{EA}{(l_0 - l_f)} \quad (2.20)$$

Este elemento fue el primero que se utilizó para calcular tenso-estructuras. Hay que hacer especial mención al diseño de la cubierta del estadio Olímpico de Munich (Argyris et al. 1974), una de las primeras aplicaciones de las tenso estructuras, para el cual se utilizaron elementos de barra para representar los cables de dicha cubierta.

Como se ha comentado, uno de los principales inconvenientes que conlleva la utilización de estos elementos es la necesidad de discretizaciones que involucren gran cantidad de grados de libertad para simular cables poco tensados. Como muestra la figura 2.6 en los resultados obtenidos en Karoumi (1998), hacen falta 20 elementos conectados uno tras de otro para aproximar el comportamiento de un elemento de catenaria elástico analítico. Para mejorar el comportamiento de dicho elemento se han desarrollado estrategias como la de Ernst (1965) que se muestran a continuación.

2.2.3.2 Aproximación de Ernst.

El comportamiento real de un cable es altamente dependiente de la tensión del mismo y esta característica lo diferencia del comportamiento de una barra rígida. Se han desarrollado

aproximaciones que proporcionan una rigidez ficticia relacionada con el grado de tensión de la barra para simular la pérdida de rigidez del cable cuando éste está poco traccionado, emulando su comportamiento cinemático real. Ernst (1965) resuelve el problema introduciendo un modulo elástico equivalente definido como:

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(\gamma l)^2 E}{12\sigma^3}} \tag{2.21}$$

siendo A la sección del cable, γ peso por unidad de longitud, l la longitud del cable en proyección horizontal, E el módulo de young real y E_{eq} el módulo equivalente en función de la tensión del cable σ .

Como se puede observar en la expresión propuesta para el módulo de elasticidad equivalente, en el caso que la tensión tienda a un valor alto, el módulo equivalente tendera a igualarse con el módulo elástico del material, ofreciendo la misma rigidez como si de una barra rígida se tratase. En cambio cuando la tensión tienda a cero, la rigidez del módulo equivalente tenderá también a cero.

En la figura 2.8, obtenida de Pao-Hsii et al. (2001), se puede ver una gráfica que relaciona la rigidez aparente con la tensión de un cable de acero y su longitud. Se hace evidente el grado de no linealidad del comportamiento de un cable elástico, dicho comportamiento no lineal se acentúa para cables más largos. Para cables cortos para una tracción baja, la rigidez equivalente es muy parecida a la de una barra.

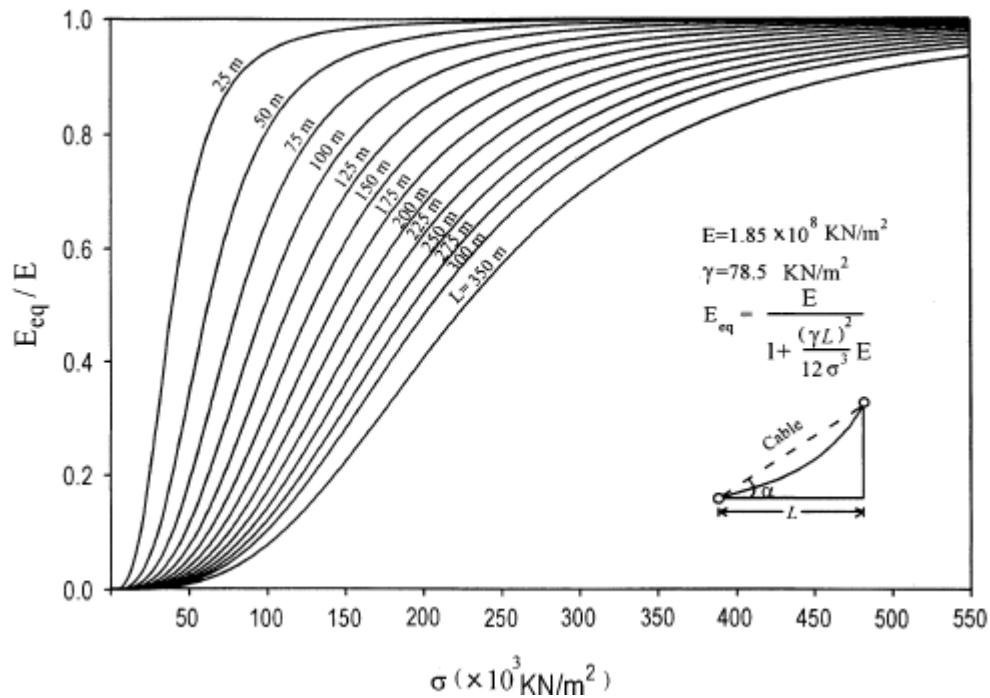


Figura 2.8. Variación del módulo equivalente con la tensión, tomado de Pao-Hsii et al. (2001)

Pao-Hsii et al. (2001) utiliza dicha aproximación para calcular el comportamiento de puentes atirantados obteniendo unos resultados satisfactorios. Diseña un elemento de barra con una rigidez definida a tramos, calculada como

$$KA = \begin{cases} \frac{E_{emst} A}{l} & \text{caso barra traccionada} \\ 0 & \text{caso barra comprimida} \end{cases} \quad (2.22)$$

Este autor realiza una simulación de estructuras de puentes atirantados mediante modelos que combinan este elemento de cable y elementos de viga. Para simular las pilas emplea elementos especiales de barra para tener en cuenta los efectos de segundo orden. Realiza simulaciones orientadas a determinar el comportamiento estático y dinámico de las estructuras atirantadas reales obteniendo un buen grado de aproximación.

2.2.3.3 Aproximación del elemento de cable mediante funciones polinómicas.

Es usual aproximar la geometría de una catenaria por la de un polinomio de 2° grado. De hecho la parábola es la antifunicular de una carga distribuida horizontal. Por tanto, para cables con una pequeña curvatura la aproximación puede ser aceptable.

La expresión de la parábola que aproxima el trazado de una catenaria es:

$$z = \omega l \left[\left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right) \right] + h \left(\frac{x}{l} \right) \quad (2.23)$$

Donde:

$$\omega = \frac{ql}{2H} \quad (2.24)$$

y las variables tienen el mismo significado que en el apartado de donde se describe la catenaria inextensible (expresiones 2.1-2.4) . El sistema de referencia también es el mostrado en la figura 2.1.

El elemento parabólico definido en (2.23) es inextensible, es decir, no se le atribuye elasticidad al material que forma el cable. También se han desarrollado elementos elásticos parabólicos para modelar elementos de cable extensibles. Esta aproximación será válida para casos en los que el elemento tenga poca curvatura. La formulación completa de dichos elementos se puede encontrar en las referencias en Tibert (1999); Ahmadi-Kashani (1983); K. Møllmann, (1974).

Las ventajas de la utilización de dichos elementos consisten en la mayor sencillez de las expresiones cinemáticas y de las matrices de rigidez tangentes respecto la formulación exacta de la curva catenaria. Por ello es de esperar una mayor rapidez en el cálculo de las simulaciones que involucren estos elementos aunque la convergencia de los procesos iterativos de resolución serán menos estables.

Por otro lado estos elementos están limitados a la hora de simular correctamente el comportamiento de cables poco tensos o lo que es lo mismo, con una curvatura apreciable, En definitiva su utilización está limitada a unos casos determinados y obligan a la revisión de los resultados obtenidos para validar su aplicabilidad en cada caso en concreto.

En la figura 2.9 se puede apreciar la comparativa entre el perfil de una catenaria (azul) y una parábola. Se puede apreciar el error cometido si se utiliza la parábola como aproximación a una catenaria con una curvatura apreciable

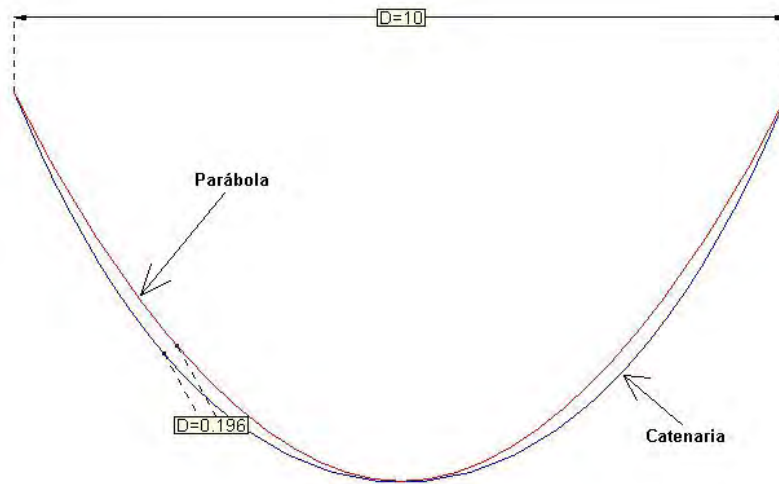


Figura 2.9. Comparativa entre el perfil de una catenaria (azul) y una parábola.

Existen formulaciones que usan polinomios de mayor grado para aproximar el perfil y comportamiento de la catenaria. En Leonard, J. W. (1988) se pueden encontrar elementos basados en aproximaciones polinomiales de cuatro nodos. Estos elementos aproximan con suficiente precisión cables con poca flecha pero como ocurría en el caso de los elementos tipo barra, para simular cables con una curvatura apreciable hará falta una discretización que emplee varios elementos. La evaluación tanto de las fuerzas en extremos de nodo como de la matriz tangente requiere integraciones numéricas dado que las expresiones analíticas son muy complejas de obtener.

2.2.4 Elementos de cable especiales.

2.2.4.1 Elemento asociado de catenaria.

Éste es un elemento que relaciona la carga distribuida aplicada sobre él y la elongación del mismo. En este caso la carga aplicada sobre el cable se tiene que entender como una presión aplicada por unidad de longitud. Es decir, en la formulación del elemento se tiene en cuenta que el incremento de longitud del cable repercute en una mayor carga distribuida en el mismo. En Tibert (1999) se puede encontrar el desarrollo completo tanto de las expresiones cinemáticas del elemento como de la matriz de rigidez tangente.

Este elemento no representa correctamente el problema que se pretende abordar en el presente trabajo puesto en la modelización de líneas de presiones mediante elementos antifuniculares la carga en un dato de partida y constante. Precisamente la elongación del cable no tiene que influir en la carga del mismo ya que esto falsearía los resultados incorporando artificialmente una carga que no existe al modelo funicular.

2.2.4.2 Otros elementos encontrados en la bibliografía.

Vinlay y Rogers (1992) y Peregrino (1993) realizan un estudio de redes de cables modelándolos como elementos de barra, pero descomponiendo los movimientos según su naturaleza que experimenta dicho elemento. Por un lado se consideran los movimientos asociados al cambio de las fuerzas internas del elemento (extensión del elemento) y por otro los movimientos de sólido rígido, los cuales no generan esfuerzos internos sino traslación de los elementos. Se proponen aproximaciones lineales para modelar los movimientos de sólido rígido que a efectos prácticos, ya aproximan suficientemente el comportamiento de las redes de cables.

Esta línea de trabajo también es seguida por Kwan (1998), quien utiliza la aproximación clásica consistente en considerar el cable como un elemento de barra, pero utiliza desarrollos de Taylor para aproximar las diferentes funciones no lineales que aparecen en la formulación del elemento. Todo ello para obtener un nuevo elemento que se comporte mejor delante de la alta no linealidad geométrica de las estructuras de cables.

Mitsugi (1992) desarrolla un elemento de cable que se comporta como un elemento convencional de barra pero con la peculiaridad que permite modelar elementos intercalados entre las barras como poleas y elementos de conexión que permiten rotaciones en los nudos que conectan los elementos. Dicho desarrollo se realiza para aplicarlo a estructuras desplegadas como antenas y otros elementos en el contexto de la industria aeroespacial. El elemento desarrollado lo denomina hipercable.

Shan y Zhai (1998) han diseñado un macro-elemento formado por elementos de barra, elementos de viga y elementos de catenaria inelástica para modelar el comportamiento dinámico de catenaria de ferrocarril. Los autores aprovechan el hecho que el tendido eléctrico utilizado en la ingeniería ferroviaria está compuesto por la repetición del mismo tipo estructural. El análisis mediante subestructuras es utilizado por los autores y para ello

crean un elemento que modela el comportamiento de la estructura que forma la unidad básica de la catenaria ferroviaria.

Zhou, Accorsi y Leonard (2004) han desarrollado un elemento de cable de unas características similares a los de un elemento de barra convencional, con la peculiaridad de añadir la posibilidad de modelar nodos deslizantes. Es decir, dentro de un elemento de cable añaden un nodo especial para simular el deslizamiento con otros cables. Aplican este elemento de cable en la simulación dinámica de la abertura de paracaídas. Emplean el principio de los trabajos virtuales y una formulación lagrangiana para desarrollar este nuevo elemento. Se puede ver un ejemplo de aplicación en las figuras 2.10 y 2.11.

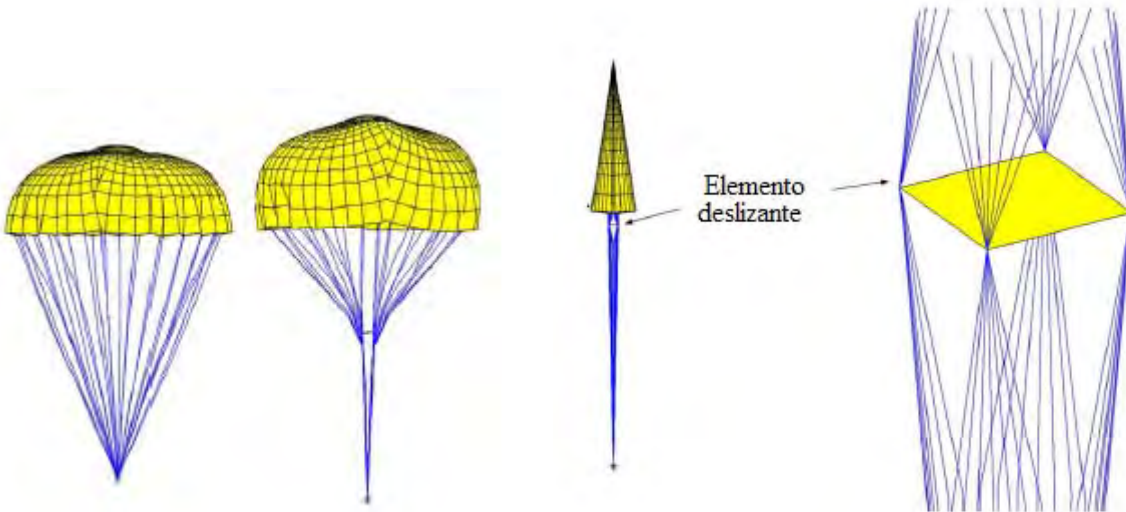


Figura 2.10. Paracaídas modelado por B. Zhou et al. Donde se aprecia el efecto del elemento deslizante. Zhou, Accorsi y Leonard, 2004

Figura 2.11. Detalle del elemento deslizante. Zhou, Accorsi y Leonard, 2004

Kim y Hae Sung (2001) desarrollan un elemento de cable orientado al estudio de estructuras de puentes colgantes añadiendo el factor de la incertidumbre de la longitud inicial de los mismos. Utilizan la formulación del elemento de catenaria elástico clásico (Irvine, 1981). El estudio está orientado a la determinación de longitud óptima de los cables que forman la estructura de suspensión de puentes atirantados o colgantes, antes de entrar en tensión.

2.3 Técnicas para calcular estructuras formadas por elementos de cables.

2.3.1 Introducción.

En un gran número de cálculos estructurales, dada la naturaleza del problema, se puede aplicar la hipótesis de pequeñas deformaciones permitiendo establecer el equilibrio de fuerzas en la geometría inicial sin deformar. Ésta permite simplificar enormemente el problema matemático resultante aunque estrictamente nunca se cumple dado que no existen

cuerpos infinitamente rígidos por lo que siempre sufren alguna deformación y por tanto la solución correcta debería establecer el equilibrio en la configuración deformada. No obstante lo anterior y a efectos prácticos dicha aproximación es perfectamente válida para modelar la mayoría de estructuras que aparecen en los casos convencionales de la ingeniería estructural.

En el caso de las estructuras de cables esto no es así. Las estructuras formadas por estos elementos tienen la peculiaridad de que el equilibrio lo alcanzan cuando han sufrido grandes movimientos. Es por ello que el alto grado de no linealidad geométrica caracteriza el comportamiento de este tipo de estructuras. Este hecho pone de manifiesto la necesidad de disponer de herramientas y procesos numéricos capaces de resolver el problema que plantea su modelización mediante el cálculo del problema matemático planteado.

Como se ha comentado en apartados anteriores, antes de disponer de los recursos informáticos actuales y como en otras ramas de la técnica, se han empleado modelos analógicos mediante maquetas para aproximar el comportamiento de las estructuras a escala natural. Un ejemplo emblemático en el empleo de dichas técnicas es el de Frei Otto (Tibert 1999; Gil, 2001) que realizó un riguroso estudio orientado a la modelización de membranas a escala a partir de películas de jabón, maquetas textiles, etc.

El objetivo de este apartado será el de describir suficientemente las diversas técnicas numéricas utilizadas para modelar estructuras de cables.

2.3.2 Método de la relajación dinámica.

Este método fue inicialmente desarrollado por Otter (1964) en el contexto de una investigación de estructuras de hormigón pretensado destinadas a la contención de reactores nucleares. Posteriormente dicha técnica ha sido aplicada a numerosos problemas estructurales y en concreto al cálculo de redes de cables y membranas. Particularmente, la primera aplicación de esta técnica en el campo de las estructuras de cables es debida a Day y Bunce (1970).

La relajación dinámica presenta en sí misma una atractiva aproximación a la modelización de estructuras de cables dado que utiliza una técnica relativamente simple que permite llevar a cabo tanto el análisis como la búsqueda de las formas de equilibrio de una red de cables.

La técnica está basada en un pseudo-análisis dinámico que parte de una configuración en desequilibrio estático y utiliza la expresión de D’Alembert para buscar la posición de equilibrio mediante una integración explícita en el dominio temporal. La ecuación que rige el proceso es:

$$p(t) = M \ddot{d} + C \dot{d} + Kd \quad (2.25)$$

Donde $p(t)$ es un vector de cargas exteriores dependientes del tiempo, M es una matriz de masa ficticia, C es la matriz viscosa también ficticia, K es la matriz de rigidez y d es el vector de desplazamientos.

Los términos de inercia y viscoso

$$M \ddot{d} + C \dot{d} \quad (2.25a)$$

representan las fuerzas residuales que son minimizadas iterativamente por efecto de las propias fuerzas viscosas, hasta un valor aceptable, permitiendo considerar que se ha llegado a un equilibrio estático.

La matriz K es singular por la naturaleza del problema, pues representa una estructura formada por barras que es un mecanismo. Los términos dinámicos de la ecuación eliminan la singularidad del problema estático, pues lo transforma en un pseudo problema-dinámico que permite ser resuelto a través del parámetro tiempo.

Este algoritmo numérico básicamente es utilizado en combinación con el elemento de barra convencional aunque hay autores que lo han combinado con elementos más complejos (Kwan, 1998).

Aquí se ha presentado el método de una forma general pero existen diversos desarrollos que aportan matices al algoritmo y aumentan su estabilidad y velocidad de convergencia. Es evidente que este algoritmo utiliza multitud de parámetros que realmente no reflejan una física concreta del problema, como son los parámetros que forman las matrices de masa y viscosas o el propio intervalo de tiempo para realizar la integración. Es por ello que se pueden encontrar diversas propuestas para fijar dichos valores en Barnes (1974), Alwar et al. (1975), Lewis (1982), Lewis y Rushton (1984) y Lewis y Shan (1987)

2.3.3 Método de matriz de rigidez.

El método de la matriz de rigidez consiste en resolver directamente el sistema no lineal que se deriva del planteamiento de las ecuaciones de equilibrio en una red de cables.

Partiendo del sistema obtenido a partir de la sumatoria de fuerzas (tanto internas como externas) aplicadas en cada grado de libertad, se puede establecer un esquema incremental-iterativo del tipo Newton-Rapson que permite encontrar el punto de equilibrio.

Sea el sistema no linal

$$F(d) = f_{ext} \quad (2.26)$$

donde F es la función que representa la resultante de fuerzas internas en cada grado de libertad, obtenida a partir del ensamblaje de las expresiones cinemáticas de cada elemento, d es el vector posición de la red objeto del cálculo y f_{ext} es el vector de cargas exteriores.

El proceso iterativo se basa en la siguiente expresión de recurrencia:

$$d_{i+1} = d_i - \left(\frac{\partial F}{\partial d}(d_i) \right)^{-1} \cdot F(d_i) \quad (2.27)$$

Donde :

$$\frac{\partial F}{\partial d}(d_i) \quad (2.28)$$

se obtiene por el ensamblaje de las matrices tangentes de cada elemento evaluadas en d_i .

Para disminuir el tiempo de computación, evitando la necesidad de invertir la matriz tangente global (2.28), se substituirá el cálculo siguiente producto

$$\left(\frac{\partial F}{\partial d}(d_i) \right)^{-1} \cdot F(d_i) \quad (2.29)$$

por la resolución del sistema lineal siguiente

$$\left(\frac{\partial F}{\partial d}(d_i) \right) X_i = F(d_i) \quad (2.30)$$

siendo X_i el avance de cada iteración

$$d_{i+1} = d_i - X_i \quad (2.31)$$

La metodología descrita tiene la ventaja que su formulación es independiente del elemento empleado y puede combinar diferentes tipos de elemento dentro de una misma simulación, lo cual le dota de una gran versatilidad. Este algoritmo será comentado más ampliamente en capítulos posteriores pues será implementado y utilizado para resolver el equilibrio de redes planteado en esta Tesis.

Este método es descrito ampliamente por Krishna (1978) e Irvine (1981) y es utilizado por Vinasihamb y Ragavan (2001). Estos últimos autores han realizado un programa de ordenador orientado a la modelización del comportamiento de estructuras expandibles destinadas a misiones espaciales. Realizan la modelización combinando elementos de viga y elementos de cable elástico clásico. Los autores descartan tratar el problema mediante elementos de cable a modo de barras a tracción por su elevado coste computacional y bajo grado de precisión.

2.3.4 Método del mínimo de energía del sistema.

En este caso se utiliza el método clásico del principio de la mínima energía de un sistema para determinar el equilibrio estático que presenta un sistema estructural.

Se define el funcional de energía potencial asociado a un esquema estructural de la siguiente manera:

$$W = U - V \quad (2.32)$$

Siendo W el potencial total, U la energía interior del sistema y V el trabajo realizado por las fuerzas seguidoras aplicadas sobre el sistema.

Concretando esta expresión para un sistema discreto se tiene que:

$$W = \sum_{m=1}^M U_m - \sum_{n=1}^N x_n f_n \quad (2.33)$$

donde M es el número total de elementos, N el número total de fuerzas aplicadas en el sistema, x_n es el desplazamiento para cada grado de libertad con una fuerza aplicada en él f_n y U_m la energía mecánica en cada uno de los elementos que forman la estructura.

Minimizando la expresión anterior respecto al campo de movimientos d se puede encontrar el punto de equilibrio de la estructura,

$$\frac{\partial W}{\partial d} = 0 \quad (2.34)$$

Dependiendo del elemento de cable empleado en la modelización de la estructura, el problema de minimización tiene mayor o menor grado de linealidad. En el caso de considerar elementos de barra para modelar los cables del sistema, la función potencial adopta una forma cuadrática pudiéndose en este caso emplear el algoritmo de los gradientes conjugados, especialmente adaptado por Stefanou et al. (1993) que ha mostrado un alto grado de eficiencia para problemas de gran número de grados de libertad.

Si se utilizan otros elementos que aportan un mayor grado de no linealidad al funcional energético pueden emplearse otros métodos de minimización más generales como los mostrados por Coyette y Gisset (1988) que utilizan el método de la minimización del gradiente o Sufian & Templeman (1992) que utilizan métodos quasi-Newton

2.3.5 Métodos lineales aproximados.

Estos métodos establecen que los efectos que produce una carga en una red de cables pueden ser descompuestos en dos: Uno causante de esfuerzos de tracción y otra causante de movimientos de sólido rígido. Pellegrino (1993), tras comprobaciones experimentales

establece que para una red pretensada los efectos del segundo tipo son pequeños y establece un procedimiento aproximado que ofrece buenos resultados. Vilnay y Rogers (1992) aproximan el problema de una manera parecida.

2.3.6 Método de los elementos finitos.

La técnica de los elementos finitos también es empleada en la resolución de estructuras de redes de cables. Cabe decir que los elementos de cable desarrollados mediante esta técnica no ofrecen el grado de exactitud que puedan ofrecer los elementos de cable analíticos, a pesar de ello su empleo está bastante difundido. Particularmente Leonhard (1988) realiza un profundo análisis del empleo de esta técnica.

Gambhir y Batchelor (1977) formulan elementos finitos de cables curvos para estructuras de cables y membranas. Como se ha comentado, Mitsugi (1994) desarrolla el elemento finito del denominado Hipercable, que consiste en un elemento de cable con elementos extensibles intercalados. Antonio Gil (2001) describe diversos métodos numéricos para abordar el análisis de membranas y redes de cables desde la perspectiva de los elementos finitos.

2.3.7 Métodos aproximados: la densidad de fuerzas y la red.

2.3.7.1 Introducción.

La aproximación de un elemento de cable mediante elementos de barra, es posiblemente la metodología más utilizada para modelar las estructuras traccionadas. El desarrollo de técnicas aproximadas que emplean específicamente este elemento y que simplificaban el problema matemático, intrínsecamente no lineal, simplificándolo a otro de lineal, permitió ser de los primeros que se utilizó para aproximar el comportamiento de dichas estructuras. Las técnicas más utilizados son el método de densidad de fuerza y el método de la red. A continuación se presentarán tal como se encuentra en Tibert (1999).

2.3.7.2 Método de la densidad de fuerzas

Para una red formada por elementos de cables se debe verificar la siguiente expresión de equilibrio:

$$\sum_{j=1; j \neq i}^{n_i} N^{ij} \cdot \cos \theta_k^{ij} = P_k^i \quad k = 1, 3; \forall \text{ nodos} \quad (2.35)$$

Siendo:

- i, j nodos de un mismo elemento;
 n_i total elementos conectados al nodo i
 θ_k^{ij} coseno director elemento i, j según dirección k
 P_k^i fuerza exterior sobre nodo i según dirección k
 N^{ij} Axil en el elemento i, j

El término de la izquierda representan las fuerzas internas y el de la derecha fuerzas externas aplicadas en el nodo i . Teniendo en cuenta que la expresión del coseno director es:

$$\cos \theta_k^{ij} = \frac{x_k^i - x_k^j}{L^{ij}} \quad (2.36)$$

siendo x_k^i, x_k^j las componentes ($k=1,2,3$) de los nodos i, j y que la expresión de la longitud L^{ij} de un elemento es:

$$L^{ij} = \sqrt{(x_1^i - x_1^j)^2 + (x_2^i - x_2^j)^2 + (x_3^i - x_3^j)^2} \quad \forall \text{ elementos} \quad (2.37)$$

Si no consideramos cargas exteriores e introducimos las relaciones anteriores la expresión de equilibrio anterior se transforma en:

$$\sum_{j=1; j \neq i}^{n_i} N^{ij} \frac{x_k^i - x_k^j}{L^{ij}} = 0 \quad \forall \text{ nodos} \quad (2.38)$$

El problema de búsqueda de la configuración de equilibrio pasa por la resolución del sistema anterior, una vez impuestas las condiciones de contorno y teniendo en cuenta las relaciones que imponen las ecuaciones de compatibilidad del elemento. Es evidente, la no linealidad del sistema (2.38).

Para simplificar la resolución, en vez de considerar las expresiones de compatibilidad, este método de resolución se basa en la imposición arbitraria de un cociente llamado densidad de fuerza que consiste en fijar el valor de

$$\frac{N^{ij}}{L^{ij}} = c_n \quad (2.39)$$

denominado densidad de fuerza, con lo que aparte de añadir las ecuaciones que faltan para que el sistema sea determinado, se linealiza su expresión.

Este método tiene el inconveniente que el resultado no representa de manera realista la distribución de fuerzas en la estructura por la simplificación mostrada anteriormente. Para corregir este inconveniente se han desarrollado diversas técnicas iterativas que corrigen este defecto como muestran Gründig y Bahndorf (1988), Tibert (1999), y Gil (2001).

2.3.7.3 El método de la red

El método de la red ha sido el método pionero en la técnica para resolver el problema del cálculo de redes o membranas y ha sido desarrollado específicamente para redes ortogonales por Siev y Eidelmann (1964).

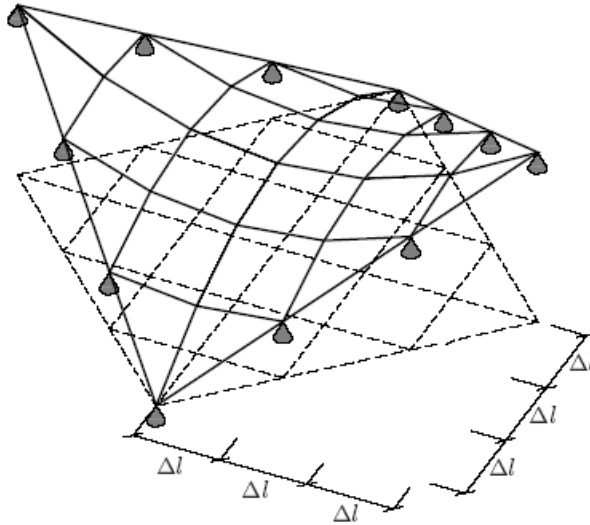


Figura 2.12. Esquema del método simplificado de la red (Tibert, 1999)

Parte de una configuración de cables formada por células ortogonales (ver figura 2.12) y realiza la hipótesis que considera que la deformada seguirá teniendo la misma proyección en planta que la geometría sin deformar. Esto permite simplificar el anterior sistema de ecuaciones (2.35) limitando las incógnitas a los desplazamientos verticales de los nudos aunque ofrece una fiabilidad bastante baja (Tibert, 1999; Gil, 2001).

2.4 Algunas aplicaciones específicas del elemento de cable.

Existen diversas aplicaciones que combinan el empleo de elementos de cable, en algunas de sus versiones, con otros elementos tipo viga o barra. A continuación mostraremos algunas aplicaciones que muestran las posibilidades del empleo del elemento de cable.

Lewis (1998) analiza el comportamiento de cubiertas textiles para coches descapotables. Estudian las tensiones que se generan al pretensar las cubiertas y las formas que adoptan, así como el comportamiento acoplado con la presión del viento de cara a obtener el comportamiento aerodinámico del vehículo mediante el método de la relajación dinámica. Para encontrar el perfil pretensado inicial utilizan un método de minimización del potencial energético. Realizan ensayos que se comparan con resultados numéricos obteniendo un buen grado de aproximación.

Shan et al. (1999) realiza un estudio sobre estructuras de cables y barras. Los cables son modelizados como barras a tracción y las barras pueden trabajar a compresión-flexión. Se estudia específicamente la interacción entre cables y barras analizando la influencia de dicha interacción en el resultado final. Se apuntan aplicaciones a estructuras tipo tensegrity.

Talvik (2001) analiza el problema de estructuras de cables pretensados anclados en bastidores rígidos. En la solución del problema combina elementos de cables con elementos de viga. Encuentra resultados para problemas estáticos y dinámicos mediante algoritmos basados en la técnica de los elementos finitos. Trabaja con un elemento de cable barra que trabaja solo axialmente a tracción.

Capítulo 3

Descripción del modelo propuesto para el análisis de redes de cables

3.1. Introducción.

En el presente capítulo se desarrolla un nuevo elemento de cable que será empleado en la simulación de las líneas de presiones. Dicho desarrollo comprenderá tanto la deducción de las expresiones cinemáticas del elemento como la deducción de su matriz tangente. Así mismo se describirá la metodología, tanto analítica como numérica necesaria para resolver redes de cables formadas por un número arbitrario de elementos de cable. Se enfatizará el desarrollo de estrategias numéricas altamente estables con el objetivo de obtener una convergencia rápida del problema no lineal planteado.

3.2 Elemento de cable inextensible.

3.2.1 Deducción de las ecuaciones paramétricas de un elemento de cable inextensible.

La expresión de la curva catenaria inelástica encontrada en la bibliografía y que se muestra en el punto 2.2.2.1 del capítulo 2, encuentra la ecuación que define el lugar geométrico en el plano de los puntos que cumplen la condición para definir el trazado de una cura catenaria. Como se puede ver en la expresión (2.1) del capítulo anterior relaciona las coordenadas de un punto en el plano, es decir las coordenadas x e y según el sistema de referencia mostrado en la figura 2.2, el peso repartido por unidad de longitud, la fuerza horizontal aplicada en el extremo del elemento y la longitud de la cuerda.

Para desarrollar el elemento de cable que se propone en el presente trabajo será necesario deducir la expresión paramétrica de la ecuación de la curva catenaria, es decir se encontraran las expresiones que relacionarán de forma explícita las coordenadas x e y de un punto cualquiera contenido en la curva catenaria en función de las fuerzas aplicadas en el extremo del elemento. En términos de mecánica computacional dichas expresiones no son más que las ecuaciones cinemáticas del elemento de catenaria inextensible expresadas en términos de flexibilidad.

Para deducir dichas expresiones paramétricas en función del parámetro arco se partirá de un sistema discreto de masas en equilibrio estático. Dicho sistema se transformará posteriormente en uno de continuo que permita obtener las expresiones paramétricas buscadas.

En la figura 3.1 se muestra un sistema discreto formado por un número n de pesos m iguales entre sí y vinculados por elementos inextensibles a modo de eslabones de igual longitud l que permiten el libre giro de las masas entre si. Dicho sistema se haya sujeto en su extremo superior a un punto fijo, mientras que en el extremo opuesto es libre y tiene aplicada una fuerza vertical F_v y otra horizontal F_h . Todo el sistema está sujeto al efecto de la gravedad G . Este sistema discreto esta referenciado al sistema de referencia T,U, tal como se muestra en la siguiente figura.

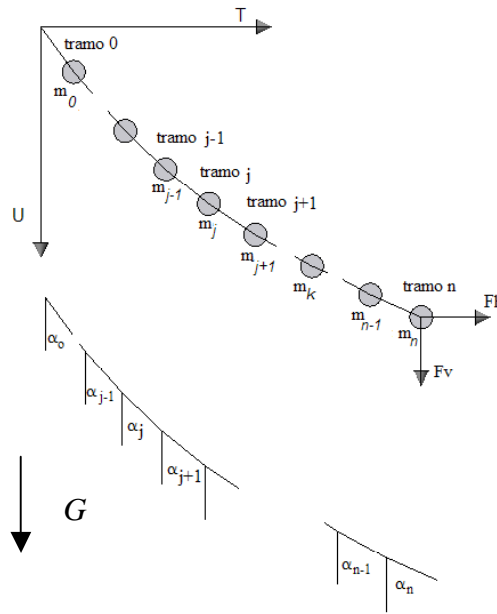


Figura 3.1. Esquema de un sistema discreto de masas vinculadas entre sí.

Se pueden encontrar fácilmente la expresiones explícitas que relacionan la posición de equilibrio de la masa k -ésima, dando las coordenadas (U_k, T_k) en función de las fuerzas aplicadas en el sistema. Dichas expresiones son:

$$\begin{aligned}
 U_k &= \sum_{j=0}^{j=k} l \cos(\alpha_j) \\
 T_k &= \sum_{j=0}^{j=k} l \sin(\alpha_j)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

donde:

$$\alpha_j = \arctg\left(\frac{F_h}{F_v_j}\right)
 \tag{3.2}$$

y

$$Fv_j = (n - j)m + Fv \quad (3.3)$$

Cabe mencionar que el peso m tiene unidades de fuerza puesto se considera que es el producto de la masa considerada por la gravedad.

Una vez encontradas las expresiones de las ecuaciones que describen el equilibrio del sistema discreto se formulará dicho problema como uno de continuo haciendo tender la longitud de separación de las masas a cero. Es decir, la separación entre masas será un diferencial de longitud, mientras que el número de masas n tenderá a infinito. Estas transformaciones imponen que la longitud del sistema y su peso se mantengan invariables.

Las transformaciones descritas anteriormente se pueden describir matemáticamente como sigue:

$$\begin{aligned} l &\rightarrow ds \\ n &\rightarrow \infty \\ m &\rightarrow 0 \\ n \cdot l &= l_0 \\ m \cdot n &= l_0 \cdot p_0 = P \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde se ha llamado l_0 a la suma total de longitudes de los eslabones y P es el peso total del sistema. Cabe mencionar que los resultados del productos $n \cdot l$ y $n \cdot m$ son indeterminados puesto multiplican cantidades que tienden a infinito y a cero respectivamente. Esta indeterminación queda resuelta al imponer que la longitud y peso del sistema quede invariante he igual a sus valores iniciales l_0 y P .

Esta transformación hace aparecer una nueva variable p_0 que no es más que el peso por unidad de longitud de la catenaria y se expresa como:

$$p_0 = \frac{P}{l_0} \quad (3.5)$$

Los índices de los sumatorios del problema discreto j y k se transforman en variables continuas s y s_0 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} l \cdot j &= s \\ l \cdot k &= s_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si se transforman los contadores discretos j, k en la variable continua s, s_0 y se integran las expresiones desde el punto de partida $s=0$ hasta $s=s_0$ que es el punto donde se quieren obtener las coordenadas respecto el sistema de referencia $\langle U, T \rangle$ se encontraran las expresiones paramétricas buscadas.

De acuerdo con lo anterior, substituyendo las expresiones (3.4-3.6) en las ecuaciones (3.1), se transformará el problema discreto en uno continuo obteniendo las siguientes expresiones integrales:

$$\begin{aligned}
 U(s_o) &= \int_{s=0}^{s=s_o} \cos \left(\arctg \left(\frac{Fh}{((l_0 - s)p_0 + Fv)} \right) \right) ds \\
 T(s_o) &= \int_{s=0}^{s=s_o} \text{sen} \left(\arctg \left(\frac{Fh}{((l_0 - s)p_0 + Fv)} \right) \right) ds
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Integrando dichas expresiones se obtendrán las ecuaciones paramétricas explícitas de la curva catenaria formada por un material inextensible. Cabe decir que por construcción s_o es parámetro arco.

$$\begin{aligned}
 U(s_o) &= \left(\sqrt{Fh^2 + (P + Fv^2)} - \sqrt{Fh^2 + (Fv + (l_0 - s_o)p_0)^2} \right) \\
 T(s_o) &= \frac{Fh}{p_0} \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{(l_0 p_0 + Fv)}{Fh} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{(l_0 - s_o)p_0 + Fv}{Fh} \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Como se puede deducir de las expresiones anteriores la catenaria es plana al estar contenida en un plano vertical local $\langle U, T \rangle$ formado por el vector gravedad y el vector fuerza aplicado en el extremo de la misma. A continuación se transformarán dichas expresiones para encontrar las expresiones paramétricas en el espacio tridimensional. En la siguiente figura se puede observar la transformación que parte de un espacio 2D según los ejes de referencia $\langle U, T \rangle$ a otro 3D según los ejes de referencia $\langle X, Y, Z \rangle$.

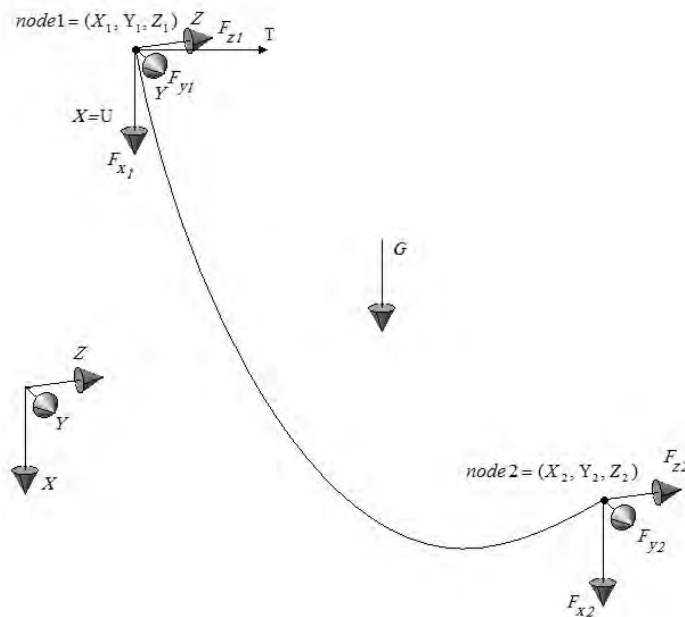


Figura 3.2. Catenaria inextensible en un espacio 3D

La transformación se formula como sigue:

$$\begin{aligned}
 Fh &= \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2} \\
 Fv &= Fx_2 \\
 X(s_o) &= U(s_o) \\
 Y(s_o) &= \frac{Fy_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} T(s_o) \\
 Z(s_o) &= \frac{Fz_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} T(s_o)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Valorando la expresión para el extremo de la catenaria $s_o = l_o$ y usando la notación que se define en la figura 3.2 se obtienen finalmente las siguientes ecuaciones ya expresadas de forma genérica en un espacio tridimensional:

$$\begin{aligned}
 X_2 &= X_1 + \frac{1}{p_0} \cdot \left(\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + (P + Fx_2)^2} - \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + Fx_2^2} \right) \\
 Y_2 &= Y_1 + \frac{Fy_2}{p_0} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \right) \\
 Z_2 &= Z_1 + \frac{Fz_2}{p_0} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

que de forma simplificada se pueden escribir:

$$X^i = f(F^i) \tag{3.11}$$

donde

$$\begin{aligned}
 X^i(x_j, y_j, z_j, x_k, y_k, z_k) \quad j, k = 1, 2 \\
 F^i(Fx_j, Fy_j, Fz_j, Fx_k, Fy_k, Fz_k) \quad j, k = 1, 2
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Las expresiones cinemáticas encontradas formulan el problema en términos de flexibilidad, es decir, ofrecen explícitamente la posición de los extremos del elemento en función de las fuerzas aplicadas en ellos. Dado que la resolución de un sistema genérico de elementos ensamblados entre sí se aborda usualmente en términos de rigidez, será necesario encontrar las expresiones cinemáticas inversas u obtener un algoritmo numérico capaz de realizar su inversión numéricamente de forma estable, para obtener de forma directa los esfuerzos en función de la posición de los extremos del elemento.

3.2.2 Comportamiento de un elemento de catenaria inextensible.

Como exige la formulación desarrollada, la longitud del elemento, al considerarse que está formado por un material inextensible, es invariante y no depende de las fuerzas aplicadas en los nudos. En consecuencia se deberá cumplir en todo momento que la distancia medida en línea recta entre los nudos extremos del elemento debe ser menor que la longitud del elemento (figura 3.3). Esta condición influirá muy negativamente en el comportamiento de los algoritmos numéricos de inversión de las ecuaciones cinemáticas (3.10) en la resolución de redes complejas mediante una estrategia de rigidez.



Figura 3.3. En un elemento inextensible a distancia $AB < \text{long cuerda } AB$

Para analizar la repercusión numérica de dicha característica se realizará un ejemplo simple pero que ilustra la problemática que aparece en los algoritmos numéricos de inversión.

En la figura 3.4 se muestra un elemento de cable suspendido entre dos apoyos libres. En dichos apoyos actúan sendas fuerzas horizontales que mantienen el sistema en equilibrio. El ejemplo consiste en encontrar la gráfica que relaciona la fuerza aplicada en los extremos libres del elemento y la separación entre sí.

El material que forma el cable tiene una capacidad nula para estirarse y su longitud es de 5 metros. Dicho elemento está cargado uniformemente con una carga de 10N/m.

Empleando las expresiones cinemáticas paramétricas de un elemento de cable inextensible (3.10), se encontrará la relación entre la fuerza aplicada y la separación de los extremos del cable inextensible.

A continuación se muestra un esquema donde se representa el problema a resolver.

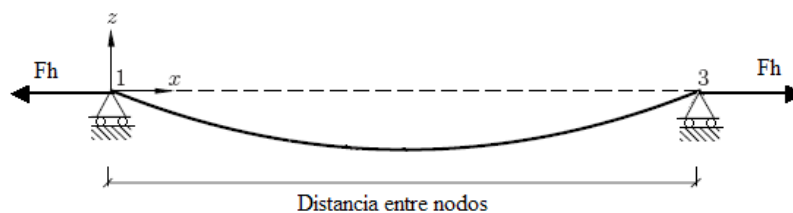


Figura 3.4. Catenaria inextensible

En la figura 3.5 se observan diferentes trazados del cable en equilibrio según las diferentes fuerzas horizontales aplicadas en su extremo. Se puede ver que a partir de cierto valor de la carga horizontal el trazado apenas varía.

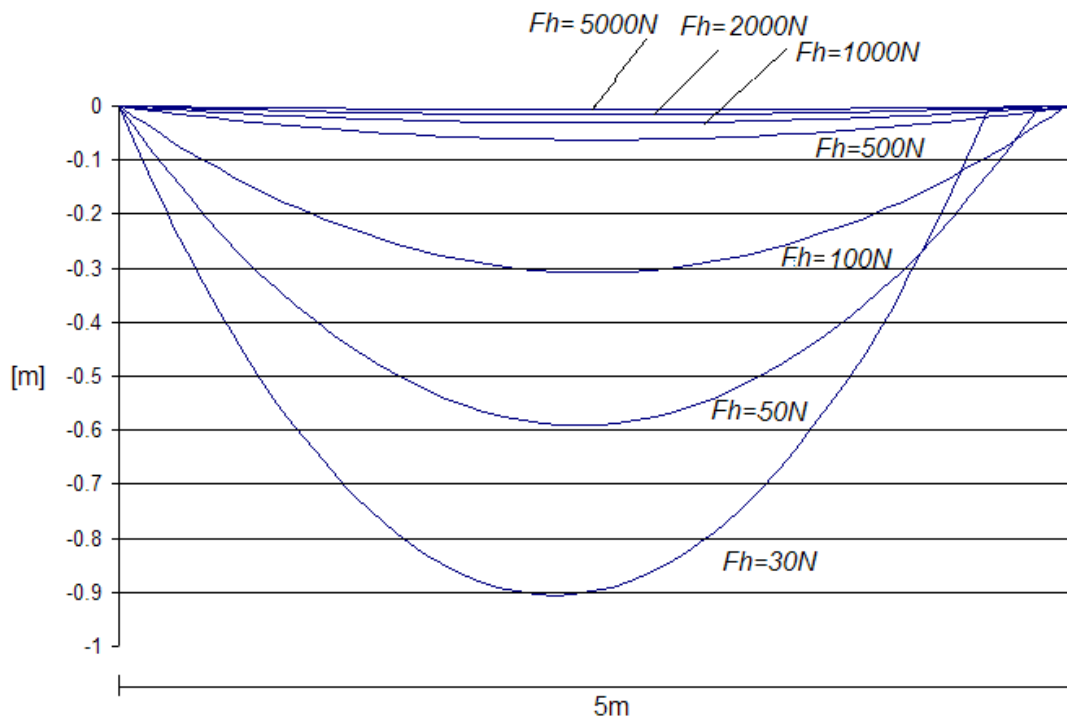


Figura 3.5. Trazados de la catenaria en función de la fuerza aplicada en extremos de nudos

Si se grafica la separación entre los nodos en función de la fuerza horizontal aplicada en los nudos extremos se obtiene la función que se observa en la figura 3.6.

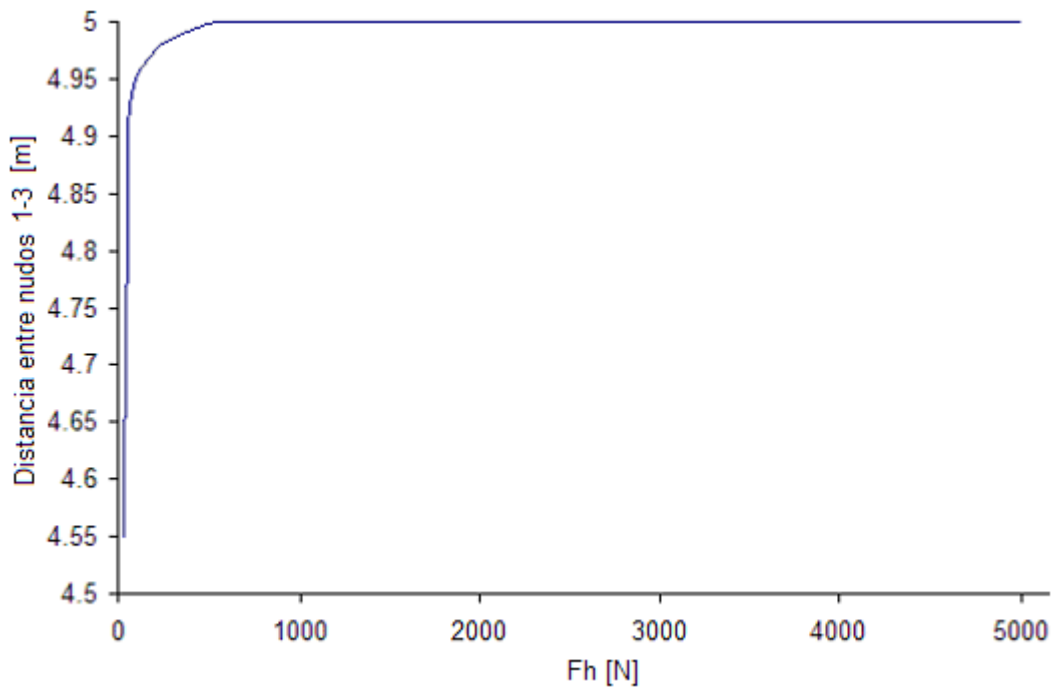


Figura 3.6. Relación entre la distancia entre nudos y la fuerza horizontal aplicada

Se puede observar el acentuado comportamiento asintótico de la función obtenida. Dicha función representa claramente la física del problema, es decir para fuerzas muy elevadas la variación de la separación entre los nudos extremos es mínima. Además como se ha comentado, la separación entre nudos está limitada por la distancia de la cuerda del elemento.

Este comportamiento dificulta enormemente la resolución de redes formadas por elementos de cables inextensibles. En la resolución del sistema no lineal que se obtiene bajo un esquema de rigidez, se adopta como vector de variables incógnitas las posiciones de los nudos de la estructura y en el proceso de iteración se varia al vector de variables incógnitas x_i mediante un vector de avance d_i que las va modificando sucesivamente en función de las fuerzas aplicadas en los nudos. El esquema se resume en la siguiente expresión

$$x_{i+1} = x_i + d_i(F_i) \quad (3.12)$$

La problemática con el comportamiento del elemento de cable inextensible se produce por dos razones.

Como se ha expuesto anteriormente, en un esquema de rigidez se debe disponer de las expresiones que relacionen explícitamente las fuerzas en extremos de nudos con la posición de éstos. En el presente caso, se dispone precisamente de la expresión inversa por lo que será necesario invertir el sistema no lineal obtenido (3.10) para cada elemento. El comportamiento asintótico de dichas expresiones hace que, en la rama asintótica, para pequeñas variaciones en la posición de los nudos se originen grandes variaciones en el valor de las fuerzas aplicadas en extremos del elemento, es por ello que en el proceso de inversión de las expresiones mostradas en (3.10) cualquier error numérico en la zona asintótica puede inestabilizar irremisiblemente el proceso numérico de inversión.

La segunda razón que provoca el mal comportamiento numérico está relacionada con el propio esquema iterativo (3.12) descrito anteriormente. Puesto que en el caso de que en una iteración, por la razón que sea, se obtenga un vector x_{i+1} de manera que la distancia entre dos nudos sea superior a la distancia de la cuerda del elemento que los une, será imposible seguir avanzando en el proceso iterativo dado que las fuerzas que aparecerán en extremo de los nudos de dicho elemento serán indeterminadas produciendo un “overflow”, que desestabiliza irremisiblemente la resolución del sistema no lineal.

Se han probado diferentes técnicas de estabilización, como la de acotar el vector de avance d_i de forma que siempre se obtenga un vector x_{i+1} que cumpla la condición básica mostrada en la figura 3.3, mediante una acotación arbitraria del vector x_{i+1} . Dicha técnica sólo soluciona parcialmente el problema no permitiendo abordar la resolución de redes complejas. Para superar esta cuestión se ha considerado necesario desarrollar un elemento específico, cuya inversión tenga un comportamiento más estable y no tenga un espacio acotado en las variables que lo definen. En el siguiente apartado se plantea la formulación de las expresiones cinemáticas del elemento de cable elástico desarrollado.

3.3. Formulación de un elemento de cable elástico.

3.3.1 Introducción.

Para la deducción de la expresión cinemática del elemento de catenaria propuesto, se realizarán tres hipótesis básicas:

1. Conservación de la masa. En la configuración deformada el peso propio se repartirá uniformemente a lo largo del elemento, compensando el incremento de longitud de manera que el peso total del elemento se conserve.
2. Hipótesis de pequeñas deformaciones. Para encontrar el incremento de longitud del elemento se integra a lo largo de la configuración en equilibrio sin deformar.
3. Funicularidad del elemento deformado. El elemento de catenaria una vez deformado adopta una configuración funicular de equilibrio de las cargas, con una nueva longitud debido al estiramiento experimentado y una nueva carga repartida, para compensar este incremento de longitud mediante una disminución de la carga repartida.

El desarrollo de un nuevo elemento de cable está orientado a poder simular adecuadamente las líneas de presiones en un análisis antifunicular de una estructura de obra de fábrica. Es por ello que para modelizar adecuadamente un elemento estructural será imprescindible que el peso del elemento de cable que modeliza el correspondiente elemento estructural no varíe, con independencia del estiramiento que experimente.

Por otra banda, la elasticidad del elemento es el factor que le atribuye una mayor estabilidad numérica en los procesos de inversión de las expresiones cinemáticas. Pero dicho estiramiento modificará levemente la equivalencia estática entre el modelo de cables y la estructura original. Es por ello que para minimizar esa variación se ha optado por redistribuir uniformemente el peso del elemento entre la longitud final. De esta manera se obtendrá un nuevo peso repartido coherente con la nueva longitud del cable y con el elemento estructural de obra de fábrica que modelice (figura 3.7).

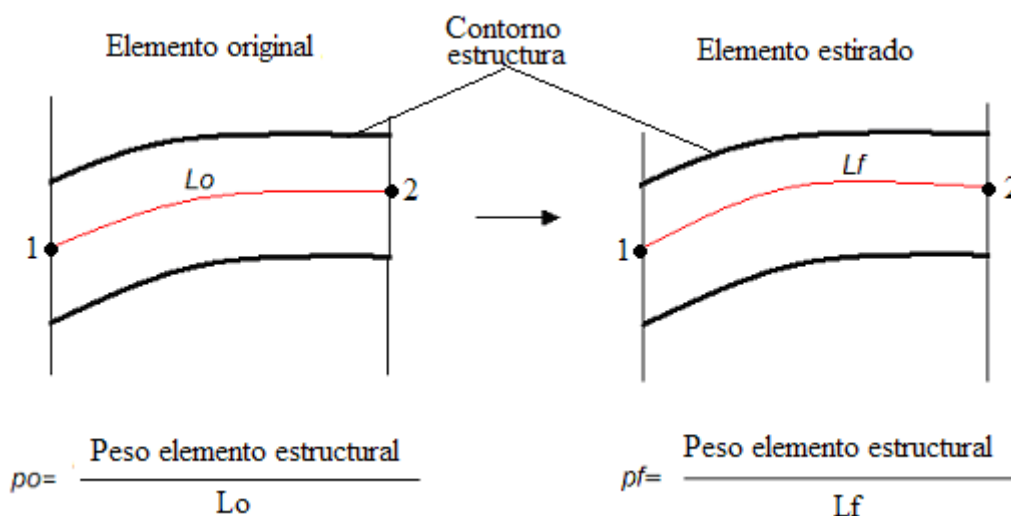


Figura 3.7. Influencia de la variación de la longitud en la distribución del peso propio del elemento

La tercera hipótesis exige el equilibrio funicular del elemento de cable una vez estirado y con la nueva carga aplicada en él, obtenida mediante la segunda hipótesis.

Las anteriores tres hipótesis que se imponen para el desarrollo del nuevo elemento de cable le aseguran unas cualidades que le permitirán simular adecuadamente el peso de la pieza de obra de fábrica que represente, con independencia del estiramiento que sufra dicho elemento cable.

3.3.2 Desarrollo del nuevo elemento de cable.

En la figura 3.8 se puede observar un elemento de catenaria en el espacio 3D. El parámetro arco es representado por s y p_o representa el peso del cable por unidad de longitud medida en parámetro arco, en la configuración inicial sin deformar.

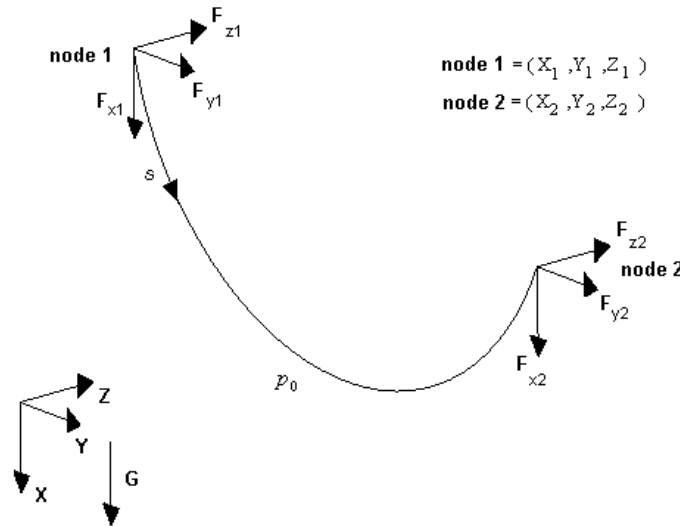


Figura 3.8. Catenaria en el espacio 3D

Las coordenadas y fuerzas aplicadas en los nudos representados respecto el sistema global de referencia son:

$$\begin{aligned}
 X^i(x_j, y_j, z_j, x_k, y_k, z_k) \quad j, k = 1, 2 \\
 F^i(Fx_j, Fy_j, Fz_j, Fx_k, Fy_k, Fz_k) \quad j, k = 1, 2
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

En el caso de tratar una catenaria inelástica la expresión cinemática sería la obtenida en (3.10) y el peso repartido y la longitud del elemento no varían en la configuración final.

Para el elemento de catenaria propuesto, la carga repartida aplicada en el elemento varía entre la configuración inicial y final pero dado que seguirá siendo un elemento que adopta la antifunicular (hipótesis 3º) de las cargas, la expresión cinemática del elemento deformado seguirá siendo la de una catenaria inelástica (3.10) pero con un peso repartido desconocido. La expresión por tanto será:

$$\begin{aligned}
X_2 &= X_1 + \frac{1}{p_f} \cdot \left(\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + (P + Fx_2)^2} - \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + Fx_2^2} \right) \\
Y_2 &= Y_1 + \frac{Fy_2}{p_f} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \right) \\
Z_2 &= Z_1 + \frac{Fz_2}{p_f} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

En la expresión anterior p_f es una incógnita. Para determinar el valor de p_f se deberá emplear la 1° hipótesis consistente por un lado en establecer la conservación de la masa entre la configuración original y la deformada y por otro en considerar la distribución uniforme del peso del elemento en la configuración deformada. Esta hipótesis se traduce en la siguiente ecuación que permitirá despejar p_f :

$$\begin{aligned}
l_0 p_0 &= P = l_f p_f \\
l_f &= l_0 + \Delta l \\
p_f &= \frac{l_0 p_0}{l_0 + \Delta l} = \frac{P}{(l_0 + \Delta l)}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Donde el incremento de longitud Δl se deducirá empleando la 2° hipótesis, es decir integrando la deformación a lo largo de la configuración sin deformar. Se empleará además la hipótesis adicional referente al cumplimiento de la ley de Hooke para calcular el alargamiento del cable Δl integrando la deformación $\varepsilon(s)$ a lo largo del parámetro arco s , según:

$$\Delta l = \int_0^{l_0} \varepsilon(s) ds \tag{3.16}$$

De acuerdo con la teoría de la elasticidad, la deformación del cable será:

$$\varepsilon(s) = \frac{N(s)}{EA} \tag{3.17}$$

donde $N(s)$ representa el esfuerzo axial para cada punto s del cable y E es el módulo de elasticidad del material y A su sección transversal. $N(s)$ puede calcularse como:

$$N(s) = \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + ((l_0 - s)p_0 + Fx_2)^2} \tag{3.18}$$

Al integrar la expresión (3.16) resulta:

$$\Delta l = \frac{-1}{p_0 EA} \left[\frac{t^2}{2} \times \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + t^2} + \frac{Fy_2^2 + Fz_2^2}{2} \times \ln \left(t + \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + t^2} \right) \right]_{t=l_0 + Fx_2}^{t=Fx_2} \tag{3.19}$$

Sustituyendo los valores se obtiene:

$$\Delta l = \frac{-1}{p_0 EA} \times \left(\frac{Fx_2 \theta}{2} + \frac{\eta^2}{2} \ln(Fx_2 + \theta) - \frac{(P + Fx_2)\omega}{2} - \frac{\eta^2}{2} \ln(Fx_2 + P + \omega) \right) \quad (3.20)$$

Donde las variables auxiliares son:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + (P + Fx_2)^2} \\ \theta &= \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + Fx_2^2} \\ \eta &= \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo tanto, después de la deformación, el cable tendrá una longitud final l_f tal que

$$l_f = l_o + \Delta l \quad (3.22)$$

Con lo que substituyendo en las ecuaciones 14 y15 se obtienen las expresiones cinemáticas explícitas del elemento de cable i , en términos de flexibilidad que de forma simplificada se puede escribir

$$X^i = f(F^i) \quad (3.23)$$

3.3.3 Comparativa entre el elemento elástico desarrollado y el elemento elástico convencional.

Será interesante analizar la diferencia entre los comportamientos del elemento obtenido y del elemento elástico convencional mostrado en Irvine (1981).

Se realiza dicha comparativa mediante el análisis del comportamiento de un ejemplo muy simple pero que ilustra la diferencia entre ambos elementos. La figura 3.9 muestra el ejemplo a resolver. Consiste en un elemento de cable de 20 metros de longitud suspendido entre sus nodos extremos separados entre sí 10 metros. Dichos nodos se han fijado constituyendo los apoyos de cable.

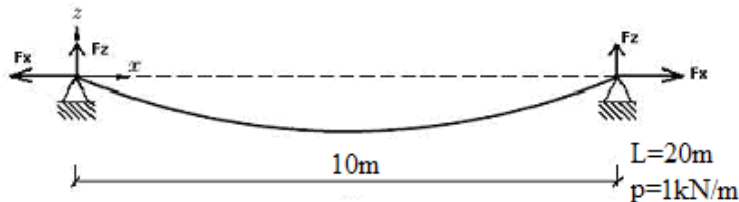


Figura 3.9. Comparativa de comportamiento entre elementos elásticos

A continuación, empleando las ecuaciones cinemáticas desarrolladas anteriormente (3.14) y la desarrollada por Irvine se obtendrá la gráfica que relaciona las reacciones horizontales en los apoyos en función de las diferentes rigidezes del cable.

La figura 3.10 muestra los resultados del cálculo de la estructura de la figura 3.9 en función de las diferentes rigideces adoptadas. Se puede ver que a partir de cierto valor de la rigidez el trazado apenas varía, correspondiendo dicho trazado al de la catenaria inextensible, siendo independiente de las características mecánicas del cable por lo que queda definido por consideraciones geométricas.

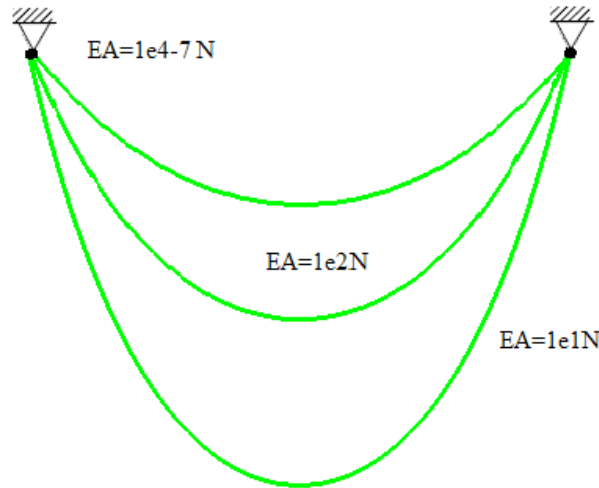


Figura 3.10. Contornos para diferentes rigideces

Las gráficas siguientes muestran el comportamiento de los dos tipos de elementos. Se puede comprobar que para rigideces altas el comportamiento es, como era de esperar, muy similar entre sí, convergiendo al de un elemento inextensible. En cambio se observa un comportamiento diferenciado para rigideces relativamente bajas, obteniéndose variaciones de hasta el 100% en su valor .

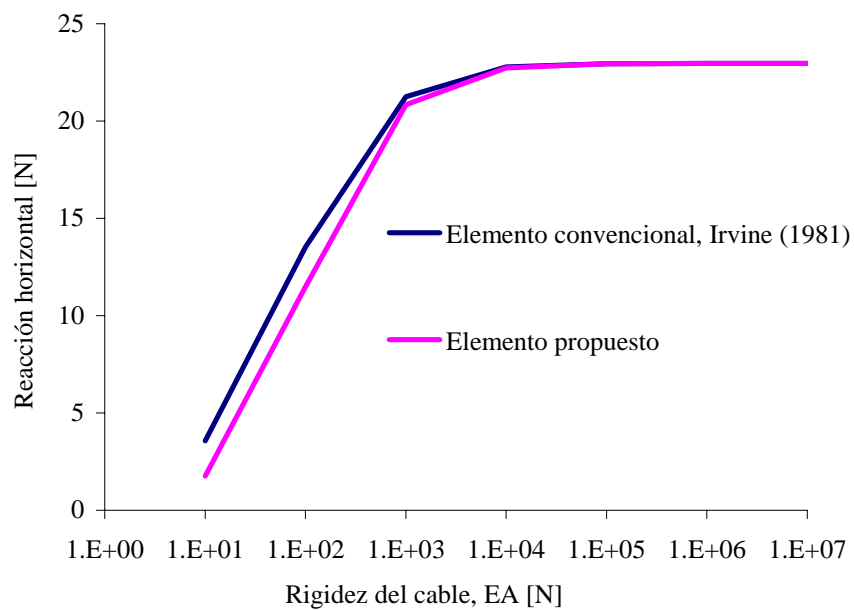


Figura 3.11. Comparativa entre la reacción horizontal obtenida con el elemento de cable convencional y el desarrollado en el presente trabajo.

Como se puede apreciar en la gráfica de la figura 3.12 para altas deformaciones, la influencia de la actualización del peso propio que ofrece la formulación del nuevo elemento de cable se hace evidente y lo diferencia del elemento de catenaria elástica convencional.

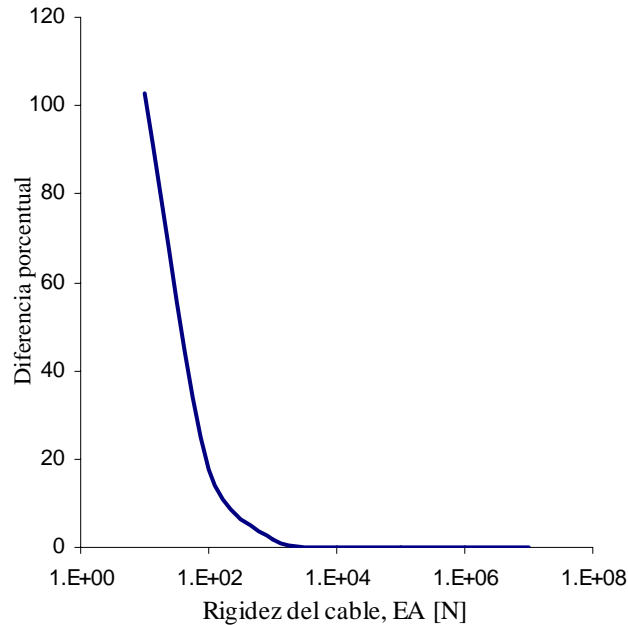


Figura 3.12. Diferencia porcentual del valor de las reacciones

3.3.4 Formulación de rigidez de la expresión cinemática del elemento de cable.

La expresión cinemática (3.14) relaciona explícitamente la posición de nodos en función de las fuerzas aplicadas en ellos, corresponde pues a un esquema de flexibilidad. La estrategia adoptada para resolver redes está basada en una formulación de rigidez, por lo que será necesario disponer de la expresión inversa que permita encontrar de forma directa las fuerzas aplicadas en los nodos en función de sus coordenadas. Como no ha sido posible obtener dicha expresión inversa analíticamente se ha recurrido a estrategias numéricas iterativas siempre convergentes para solucionar el sistema no lineal (3.23) y para obtener numéricamente los esfuerzos en extremo de nodo en función de su posición (3.24). La expresión cinemática implícita del elemento en términos de rigidez tiene la siguiente forma:

$$F^i = g(X^i) \quad (3.24)$$

Para facilitar la resolución numérica del sistema (3.14) se simplificará el problema transformándolo de tres a dos dimensiones disminuyendo substancialmente el coste computacional necesario para realizar dicha inversión. Para realizar dicha simplificación se aprovechará la cualidad que tiene la curva catenaria consistente en que está contenida en un plano vertical.

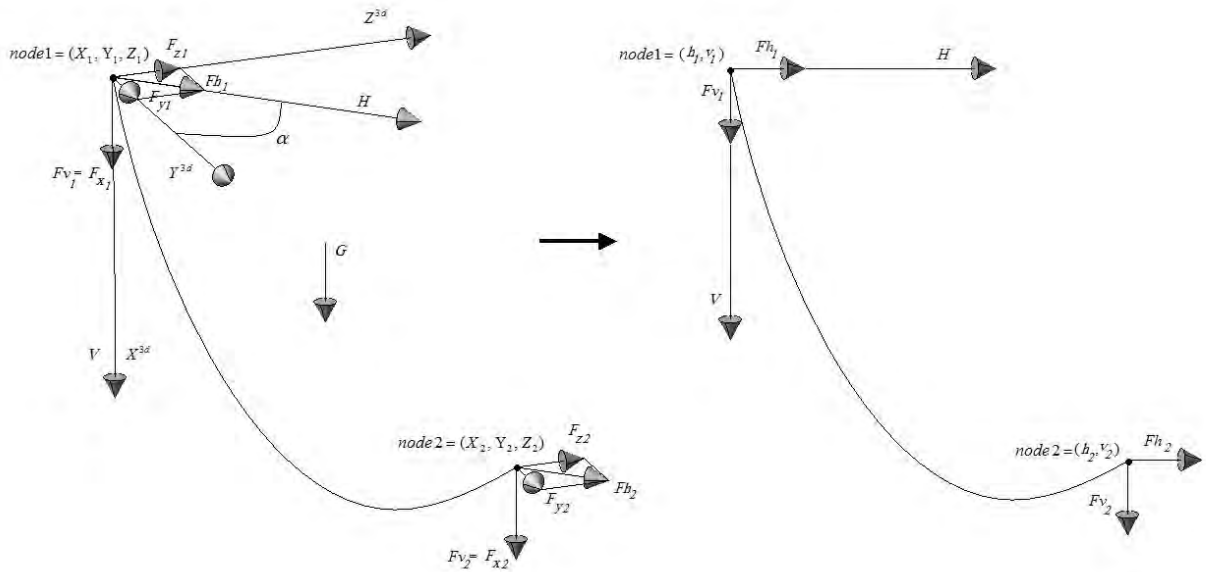


Figura 3.13. Reducción de ecuaciones mediante el abatimiento del plano que contiene la catenaria

Empleando la notación mostrada en la figura 3.13 tomando como eje de giro el eje vertical la transformación geométrica se expresa como sigue:

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{(Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \\
 \sin(\alpha) &= (Z_2 - Z_1) / d \\
 \cos(\alpha) &= (Y_2 - Y_1) / d \\
 h_2 &= d \\
 v_2 &= X_2 - X_1 \\
 h_1 &= 0 \\
 v_1 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

En cuanto los esfuerzos en los nudos se transforman como sigue:

$$\begin{aligned}
 Fh_2 &= \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2} \\
 Fv_2 &= Fx_2 \\
 Fh_2 &= -Fh_1 \\
 Fv_2 &= -Fv_1 - P
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

La transformación inversa de los esfuerzos, es decir para pasar del plano 2D al espacio 3D respecto los ejes globales se tiene:

$$\begin{aligned}
Fx_1 &= -Fv_2 - P \\
Fy_1 &= -Fh_2 \cdot \cos(\alpha) \\
Fz_1 &= -Fh_2 \cdot \sin(\alpha) \\
Fx_2 &= Fv_2 \\
Fy_2 &= Fh_2 \cdot \cos(\alpha) \\
Fz_2 &= Fh_2 \cdot \sin(\alpha)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Substituyendo las expresiones anteriores en (3.14) se obtiene la expresión cinemática respecto el sistema de referencia H, V mostrado en la figura 3.13 contenido en el plano de la catenaria, dicha expresión toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
v_2 &= \frac{1}{p_f} \cdot \left(\sqrt{Fh_2^2 + (P + Fv_2)^2} - \sqrt{Fh_2^2 + Fv_2^2} \right) \\
h_2 &= \frac{Fh_2}{p_f} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fv_2}{Fh_2} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fv_2}{Fh_2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

siendo P_f y Δl los valores mostrados en (3.15) y (3.20).

El sistema se reduce a dos ecuaciones con dos incógnitas en lugar de las tres anteriores. Las incógnitas son Fh_2 y Fv_2 y serán encontradas mediante el siguiente proceso iterativo.

3.3.5 Inversión del sistema derivado

Para invertir el sistema (3.28) será necesario emplear un algoritmo siempre convergente para garantizar la estabilidad del proceso iterativo que primará sobre la velocidad de convergencia. Por ello se usará el método de la bisección, pues aunque sea uno de los más lentos también es uno de los que ofrece una mayor estabilidad. Se ha empleado el método Regula Falsi, en teoría también siempre convergente y de mayor velocidad de convergencia que el método de la bisección, aunque en la práctica se han observado divergencias en algunos casos. En el presente trabajo se ha empleado el método Regula Falsi en las primeras iteraciones para continuar el proceso de iterativo con el método de la bisección, cosa que ha mejorado substancialmente el tiempo de convergencia. El algoritmo se define a continuación:

Se definen las funciones f y g de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
f(Fh_2, Fv_2) &= \frac{1}{p_f} \cdot \left(\sqrt{Fh_2^2 + (P + Fv_2)^2} - \sqrt{Fh_2^2 + Fv_2^2} \right) - v_2 \\
g(Fh_2, Fv_2) &= \frac{Fh_2}{p_f} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fv_2}{Fh_2} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fv_2}{Fh_2} \right) \right) - h_2
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Dados v_2 y h_2 se buscarán los valores de Fv_2 y Fh_2 tales que:

$$\begin{aligned} f(Fh_2, Fv_2) &= 0 \\ g(Fh_2, Fv_2) &= 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Para ello se define el siguiente algoritmo que es una ampliación para el caso de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas del conocido método de la bisección en ecuaciones con una incógnita:

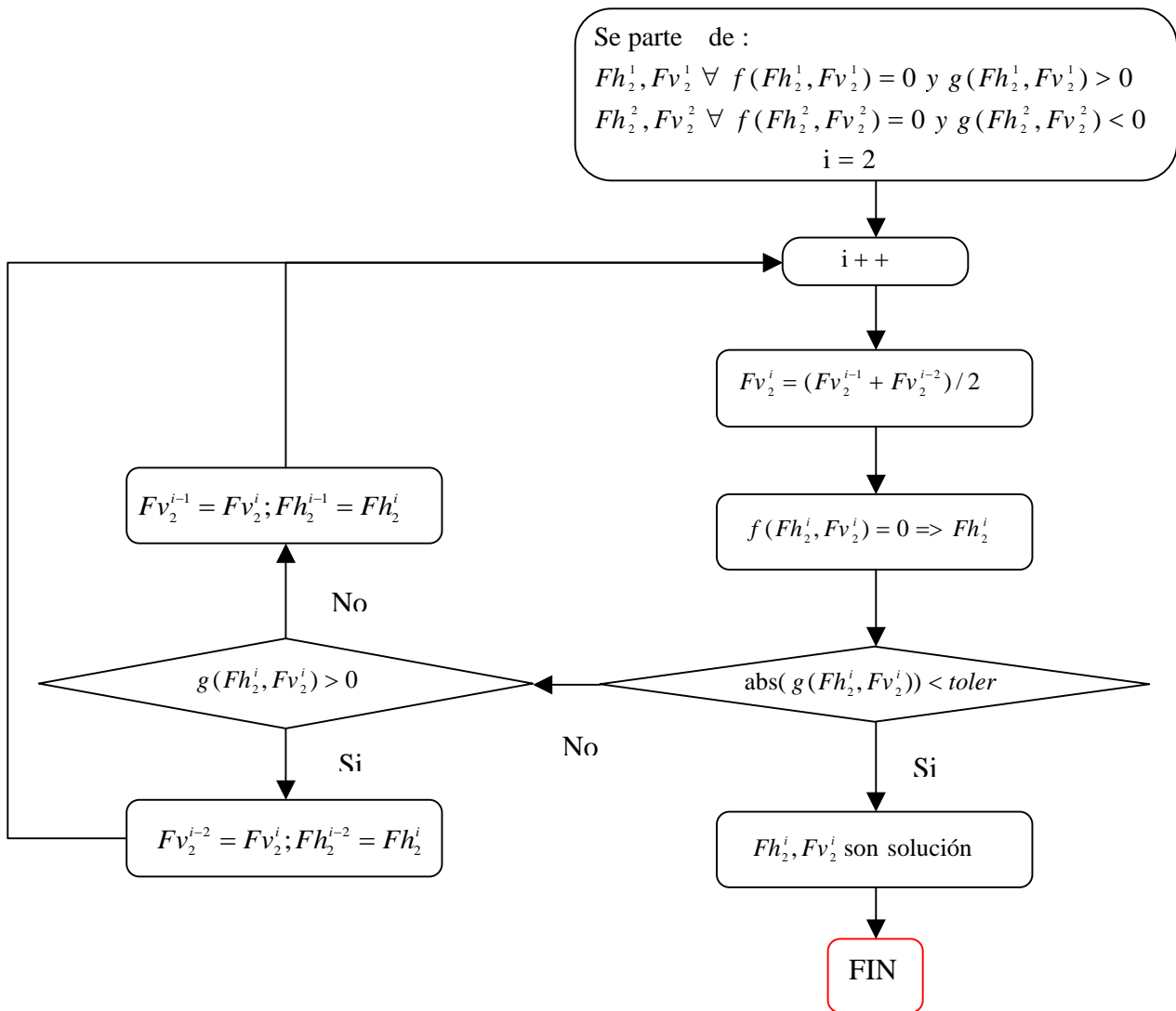


Figura 3.14. Diagrama de flujo del algoritmo de inversión del sistema (3.30)

Para encontrar los $Fh_2^1, Fv_2^1, Fh_2^2, Fv_2^2$ de partida se puede emplear un sencillo algoritmo descrito a continuación:

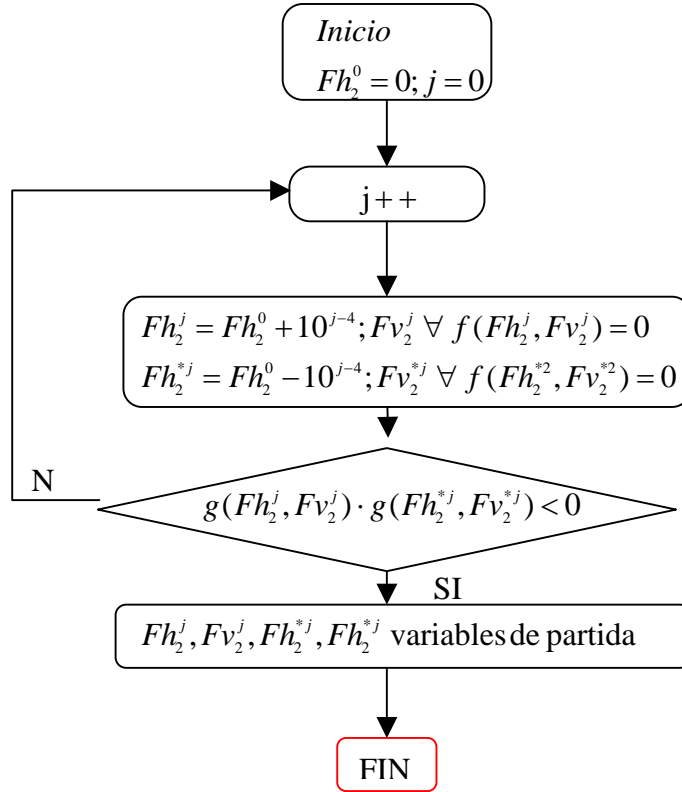


Figura 3.15. Diagrama de flujo del algoritmo para obtener los valores iniciales del algoritmo de inversión anterior.

Los valores encontrados $Fh_2^j, Fh_2^{*j}, Fv_2^j, Fv_2^{*j}$ serán los valores de partida $Fh_2^1, Fh_2^2, Fv_2^1, Fv_2^2$ y según el signo que tome la función g se identificarán de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 g(Fh_2^j, Fv_2^j) > 0 &\Rightarrow Fh_2^1 = Fh_2^j, Fv_2^1 = Fv_2^j, Fh_2^2 = Fh_2^{*j}, Fv_2^2 = Fv_2^{*j} \\
 g(Fh_2^j, Fv_2^j) < 0 &\Rightarrow Fh_2^2 = Fh_2^j, Fv_2^2 = Fv_2^j, Fh_2^1 = Fh_2^{*j}, Fv_2^1 = Fv_2^{*j}
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Una vez obtenidos los esfuerzos Fv_2 y Fh_2 , expresados según el sistema de referencia local de cada elemento de catenaria, se deberán transformar para expresarlos según los ejes globales X, Y, Z. Dicha transformación se realizará de forma directa mediante la expresión (3.27).

3.3.6 Comportamiento numérico del algoritmo implementado.

El algoritmo desarrollado permite solucionar las ecuaciones cinemáticas del elemento de una forma muy estable. El método de la bisección es muy adecuado para conferir dicha cualidad y se puede afirmar que es casi siempre convergente y sólo en muy raras ocasiones diverge. Dicha estabilidad en el proceso de convergencia tiene una contrapartida dado que la velocidad de convergencia no es demasiado alta por tratarse de un algoritmo de búsqueda de orden cero. Para mejorar este aspecto se ha implementado un algoritmo tipo Regula Falsi en las tres primeras iteraciones, lo que mejora la velocidad de convergencia. Se ha observado que si se emplea este método, en

todo el proceso de convergencia, se obtiene un alto grado de inestabilidad, atribuido a que el cociente que aparece en este método tiende rápidamente a cero por lo que los errores de redondeo distorsionan el proceso de convergencia restándole estabilidad.

A continuación se presenta un simple ejemplo que permite ilustrar el comportamiento del algoritmo de inversión descrito en el apartado anterior. En la figura 3.16 se muestra un elemento de cable suspendido por sus extremos que se hallan separados entre sí una distancia de 10 metros. El cable tiene una rigidez a tracción de 10000N/m^2 , la carga distribuida vale 0.5N/m y la longitud del elemento es de 20m.

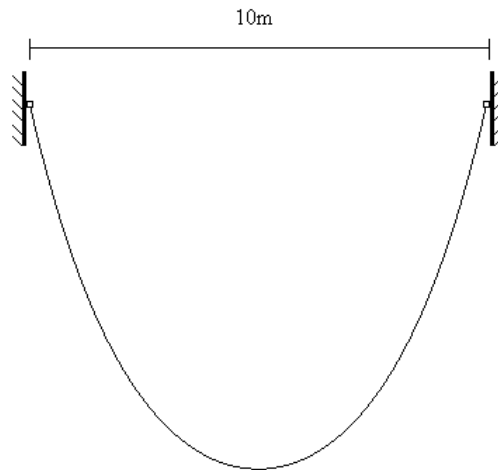


Figura 3.16 Elemento de catenaria.

La figura 3.17 representa la distribución de axiles en el elemento así como las reacciones que aparecen en los apoyos. La reacción horizontal adopta un valor de 1.1476N mientras que la reacción vertical vale 5N .

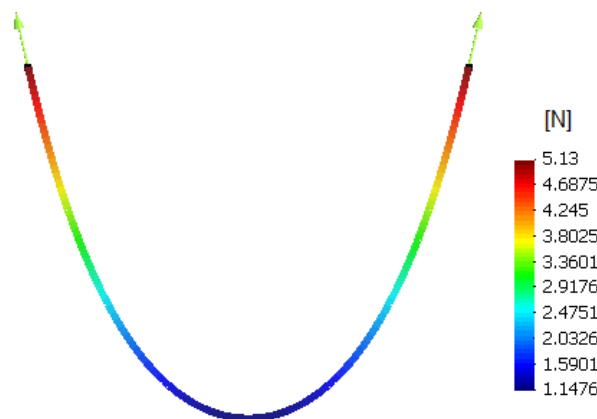


Figura 3.17 Resultado del cálculo

El proceso converge con una tolerancia de $10\text{e-}15$ en 28 iteraciones. Se puede observar que la convergencia del residuo tiene una tendencia lineal, como era de esperar dado que el algoritmo aplicado es de orden cero, aunque rápidamente tiende a valores muy pequeños. El valor de la reacción horizontal se estabiliza a partir de la interacción $i=14$.

Como se ha comentado anteriormente el método se muestra altamente estable aunque su velocidad de convergencia es la característica de métodos de orden cero y por lo tanto se obtiene la convergencia con un número de iteraciones considerable.

Las siguientes graficas muestran la convergencia del proceso iterativo descrito en el diagrama de flujo mostrado en la figura 3.14.

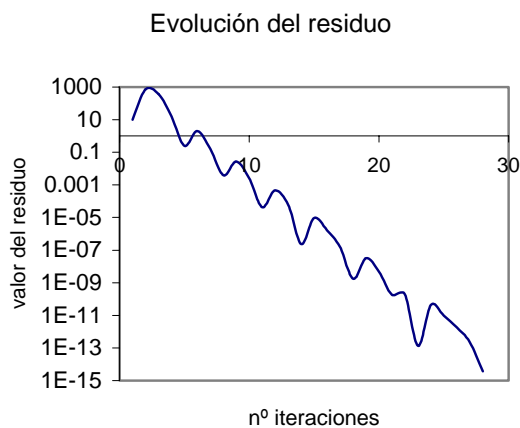


Figura 3.18. Evolución del residuo

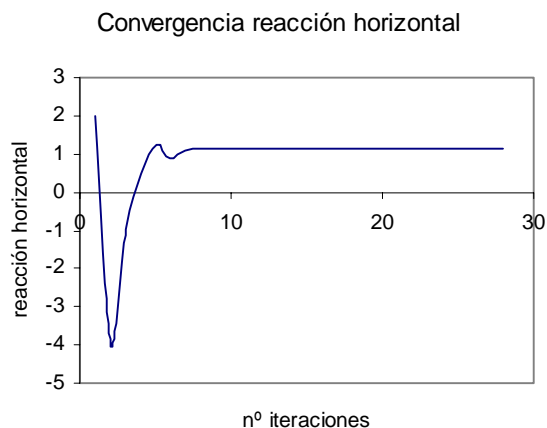


Figura 3.19. Convergencia del valor de la reacción horizontal

3.4 Matriz tangente del elemento de catenaria propuesto

3.4.1 Desarrollo de la matriz tangente

Dada la alta no linealidad existente entre las coordenadas de los nodos de un elemento y las fuerzas aplicadas a ellos, será necesario adoptar estrategias adecuadas que permitan la resolución del sistema no lineal global que se generará al calcular redes de cables complejas. Para dotar al algoritmo de resolución de mayor robustez se considera necesario obtener la matriz tangente del elemento a partir de las expresiones cinemáticas (3.14). Como posteriormente se explicará, el ensamblaje de dichas matrices elementales permitirán formar la matriz jacobina del sistema no lineal planteado en términos de rigidez.

Para la deducción de la matriz del elemento de catenaria propuesto se partirá de las expresiones cinemáticas del elemento que como se ha comentado están expresadas en términos de flexibilidad. La matriz tangente buscada se expresará en términos de rigidez y se construirá como sigue.

Las expresiones cinemáticas expresadas en (3.14) se pueden reescribir de la siguiente manera, donde las variables se expresan según las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
X_2 &= X_1 + \frac{\Delta}{p_0} \cdot \left(\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + (P + Fx_2)^2} - \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + Fx_2^2} \right) \\
Y_2 &= Y_1 + \frac{\Delta \cdot Fy_2}{p_0} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \right) \\
Z_2 &= Z_1 + \frac{\Delta \cdot Fz_2}{p_0} \cdot \left(\operatorname{arcsnh} \left(\frac{P + Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) - \operatorname{arcsnh} \left(\frac{Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \right) \\
\Delta &= \left(\frac{\Delta l}{l} + 1 \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde Δl es:

$$\Delta l = \frac{-1}{p_0 EA} \times \left(\frac{Fx_2 \theta}{2} + \frac{\eta^2}{2} \ln(Fx_2 + \theta) - \frac{(P + Fx_2) \omega}{2} - \frac{\eta^2}{2} \ln(Fx_2 + P + \omega) \right) \tag{3.33}$$

siendo:

$$\omega = \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + (P + Fx_2)^2} \quad \theta = \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + Fx_2^2} \quad \eta = \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2} \tag{3.34}$$

con las siguientes expresiones auxiliares:

$$\begin{aligned}
\beta &= \left(\frac{P + Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \quad \gamma = \left(\frac{Fx_2}{\sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2}} \right) \\
\alpha &= \operatorname{arcsnh}(\beta) - \operatorname{arcsnh}(\gamma) \\
a &= \omega - \theta \quad b = Fy_2 \alpha \quad c = Fz_2 \alpha \\
\psi &= \frac{\sqrt{\beta^2 + 1}}{\beta^2 + 1} \quad \Gamma = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1}}{\gamma^2 + 1} \\
E &= \ln(Fx_2 + \theta) \quad H = \ln(Fx_2 + \omega + P)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Se puede verificar que las expresiones anteriores cumplen las siguientes relaciones.

$$\Gamma = \frac{\eta}{\theta} \quad \psi = \frac{\eta}{\omega} \quad \left(\frac{\psi - \Gamma}{\eta} \right) = \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\theta} \right) \tag{3.36}$$

Se podrán simplificar las expresiones cinemáticas (3.34) expresándolas de la siguiente manera:

$$X_2 = X_1 + \frac{\Delta}{p_0} a \tag{3.37 a}$$

$$Y_2 = Y_1 + \frac{\Delta}{p_0} b \tag{3.37 b}$$

$$Z_2 = Z_1 + \frac{\Delta}{p_0} c \quad (3.37 \text{ c})$$

Por otro lado, las expresiones de equilibrio que se deducen de la figura 3.8 son:

$$\begin{aligned} Fx_1 + Fx_2 + P &= 0 \\ Fy_1 + Fy_2 &= 0 \\ Fz_1 + Fz_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

A partir de las expresiones anteriores se puede deducir la expresión de la matriz tangente en términos de rigidez.

Con los siguientes vectores F y χ definidos en la expresión (3.12), la expresión de la matriz tangente será.

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Fx_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Fx_1}{\partial y_1} & \frac{\partial Fx_1}{\partial z_1} & \frac{\partial Fx_1}{\partial x_2} & \frac{\partial Fx_1}{\partial y_2} & \frac{\partial Fx_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Fy_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Fy_1}{\partial y_1} & \frac{\partial Fy_1}{\partial z_1} & \frac{\partial Fy_1}{\partial x_2} & \frac{\partial Fy_1}{\partial y_2} & \frac{\partial Fy_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Fz_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Fz_1}{\partial y_1} & \frac{\partial Fz_1}{\partial z_1} & \frac{\partial Fz_1}{\partial x_2} & \frac{\partial Fz_1}{\partial y_2} & \frac{\partial Fz_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Fx_2}{\partial x_1} & \frac{\partial Fx_2}{\partial y_1} & \frac{\partial Fx_2}{\partial z_1} & \frac{\partial Fx_2}{\partial x_2} & \frac{\partial Fx_2}{\partial y_2} & \frac{\partial Fx_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Fy_2}{\partial x_1} & \frac{\partial Fy_2}{\partial y_1} & \frac{\partial Fy_2}{\partial z_1} & \frac{\partial Fy_2}{\partial x_2} & \frac{\partial Fy_2}{\partial y_2} & \frac{\partial Fy_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Fz_2}{\partial x_1} & \frac{\partial Fz_2}{\partial y_1} & \frac{\partial Fz_2}{\partial z_1} & \frac{\partial Fz_2}{\partial x_2} & \frac{\partial Fz_2}{\partial y_2} & \frac{\partial Fz_2}{\partial z_2} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Que simplifícadamente se puede expresar como una matriz formada por cuatro submatrices K_{ij} $i = 1,3 ; j = 1,3$ que se distribuyen de la siguiente manera

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Para simplificar el cálculo de las componentes K_{ij} anteriores se aprovechará las simetrías que aparecen al derivar las expresiones de equilibrio (3.38) obteniendo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Fx_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Fx_2}{\partial x_1} = 0 & \quad \frac{\partial Fy_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Fy_2}{\partial x_1} = 0 & \quad \frac{\partial Fz_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Fz_2}{\partial x_1} = 0 \\
 \frac{\partial Fx_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Fx_2}{\partial x_2} = 0 & \quad \frac{\partial Fy_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Fy_2}{\partial x_2} = 0 & \quad \frac{\partial Fz_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Fz_2}{\partial x_2} = 0 \\
 \frac{\partial Fx_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Fx_2}{\partial y_1} = 0 & \quad \frac{\partial Fy_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Fy_2}{\partial y_1} = 0 & \quad \frac{\partial Fz_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Fz_2}{\partial y_1} = 0 \\
 \frac{\partial Fx_1}{\partial y_2} + \frac{\partial Fx_2}{\partial y_2} = 0 & \quad \frac{\partial Fy_1}{\partial y_2} + \frac{\partial Fy_2}{\partial y_2} = 0 & \quad \frac{\partial Fz_1}{\partial y_2} + \frac{\partial Fz_2}{\partial y_2} = 0 \\
 \frac{\partial Fx_1}{\partial z_1} + \frac{\partial Fx_2}{\partial z_1} = 0 & \quad \frac{\partial Fy_1}{\partial z_1} + \frac{\partial Fy_2}{\partial z_1} = 0 & \quad \frac{\partial Fz_1}{\partial z_1} + \frac{\partial Fz_2}{\partial z_1} = 0 \\
 \frac{\partial Fx_1}{\partial z_2} + \frac{\partial Fx_2}{\partial z_2} = 0 & \quad \frac{\partial Fy_1}{\partial z_2} + \frac{\partial Fy_2}{\partial z_2} = 0 & \quad \frac{\partial Fz_1}{\partial z_2} + \frac{\partial Fz_2}{\partial z_2} = 0
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Derivando las expresiones cinemáticas (3.14) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Fx_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial Fx_2}{\partial x_2} & \quad \frac{\partial Fx_2}{\partial y_1} = -\frac{\partial Fx_2}{\partial y_2} & \quad \frac{\partial Fx_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial Fx_2}{\partial z_2} \\
 \frac{\partial Fy_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial Fy_2}{\partial x_2} & \quad \frac{\partial Fy_2}{\partial y_1} = -\frac{\partial Fy_2}{\partial y_2} & \quad \frac{\partial Fy_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial Fy_2}{\partial z_2} \\
 \frac{\partial Fz_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial Fz_2}{\partial x_2} & \quad \frac{\partial Fz_2}{\partial y_1} = -\frac{\partial Fz_2}{\partial y_2} & \quad \frac{\partial Fz_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial Fz_2}{\partial z_2}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

De las igualdades anteriores se desprende que.

$$\begin{aligned}
 K_{21} &= -K_{22} \\
 K_{12} &= -K_{22} \\
 K_{11} &= K_{22}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Las expresiones (3.41, 3.42) simplifican enormemente el cálculo de la matriz tangente elemental puesto las únicas expresiones que se deben encontrar serán las componentes de K_{22} es decir las parciales de Fx_2 , Fy_2 , Fz_2 respecto x_2 , y_2 , z_2 .

Dado que las expresiones de partida son las relaciones cinemáticas explícitas en función de x_2 , y_2 , z_2 . se deberá aplicar el teorema de la función implícita para obtener las expresiones buscadas.

Primeramente se encontrarán las siguientes expresiones $\frac{\partial Fx_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial Fy_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial Fz_2}{\partial x_2}$. Para ello de derivarán las expresiones cinemáticas (3.14) respecto x_2 obteniendo las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x_2} &\Rightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} a + \Delta \frac{\partial a}{\partial x_2} \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} &\Rightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} b + \Delta \frac{\partial b}{\partial x_2} \\ \frac{\partial C}{\partial x_2} &\Rightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} c + \Delta \frac{\partial c}{\partial x_2}\end{aligned}\quad (3.44)$$

donde :

$$\Delta = \left(\frac{\Delta l}{l} + 1 \right)$$

Desarrollando la primera expresión se obtiene:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = -\frac{1}{PEA} \left[\begin{aligned} &\left(\frac{\theta}{2} + \frac{Fx_2^2}{2\theta} + \frac{\eta^2}{2\theta} - \frac{\omega}{2} - \frac{(Fx_2 + P)^2}{2\omega} - \frac{\eta^2}{2\omega} \right) \frac{\partial Fx_2}{\partial x_2} + \\ &\left(\frac{Fx_2 Fy_2}{2\theta} + Fy_2 E + \frac{\eta^2 Fy_2}{2\theta(Fx_2 + \theta)} - \frac{(Fx_2 + P)Fy_2}{2\omega} - Fy_2 H - \frac{\eta^2 Fy_2}{2\omega(Fx_2 + P + \omega)} \right) \frac{\partial Fy_2}{\partial x_2} + \\ &\left(\frac{Fx_2 Fz_2}{2\theta} + Fz_2 E + \frac{\eta^2 Fz_2}{2\theta(Fx_2 + \theta)} - \frac{(Fx_2 + P)Fz_2}{2\omega} - Fz_2 H - \frac{\eta^2 Fz_2}{2\omega(Fx_2 + P + \omega)} \right) \frac{\partial Fz_2}{\partial x_2} \end{aligned} \right] \quad (3.45)$$

Derivando los términos a, b, c respecto x_2 resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial x_2} &= \left(\frac{P + Fx_2}{\omega} - \frac{Fx_2}{\theta} \right) \frac{\partial Fx_2}{\partial x_2} + Fy_2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\theta} \right) \frac{\partial Fy_2}{\partial x_2} + Fz_2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\theta} \right) \frac{\partial Fz_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial b}{\partial x_2} &= Fy_2 \left(\frac{\psi - \Gamma}{\eta} \right) \frac{\partial Fx_2}{\partial x_2} + \left(\alpha + Fy_2^2 \left(\frac{\Gamma Fx_2 - \psi(P + Fx_2)}{\eta^3} \right) \right) \frac{\partial Fy_2}{\partial x_2} + Fz_2 Fy_2 \left(\frac{\Gamma Fx_2 - \psi(P + Fx_2)}{\eta^3} \right) \frac{\partial Fz_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial c}{\partial x_2} &= Fz_2 \left(\frac{\psi - \Gamma}{\eta} \right) \frac{\partial Fx_2}{\partial x_2} + Fz_2 Fy_2 \left(\frac{\Gamma Fx_2 - \psi(P + Fx_2)}{\eta^3} \right) \frac{\partial Fy_2}{\partial x_2} + \left(\alpha + Fz_2^2 \left(\frac{\Gamma Fx_2 - \psi(P + Fx_2)}{\eta^3} \right) \right) \frac{\partial Fz_2}{\partial x_2}\end{aligned}\quad (3.46)$$

Ya se está en condiciones de definir un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

para encontrar las derivadas parciales buscadas $\frac{\partial Fx_2}{\partial x_2}, \frac{\partial Fy_2}{\partial x_2}, \frac{\partial Fz_2}{\partial x_2}$.

El sistema será.

$$Mv_x = d_x \quad (3.47)$$

Donde la matriz M del sistema es:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{PEA} + \Delta \left(\frac{lp + Fx_2}{\omega} - \frac{Fx_2}{\theta} \right) & \frac{ab}{PEA} + \Delta \left(\frac{Fy_2}{\omega} - \frac{Fy_2}{\theta} \right) & \frac{ac}{PEA} + \Delta \left(\frac{Fz_2}{\omega} - \frac{Fz_2}{\theta} \right) \\ \frac{ab}{PEA} + \Delta \left(\frac{Fy_2}{\omega} - \frac{Fy_2}{\theta} \right) & \frac{b^2}{PEA} + \Delta \left(\alpha + Fy_2^2 \left(\frac{\Gamma Fx_2 - \psi(P + Fx_2)}{\eta^3} \right) \right) & \frac{bc}{PEA} + \Delta \left(Fz_2 Fy_2 \left(\frac{\Gamma Fx_2 - \psi(P + Fx_2)}{\eta^3} \right) \right) \\ \frac{ac}{PEA} + \Delta \left(\frac{Fz_2}{\omega} - \frac{Fz_2}{\theta} \right) & \frac{bc}{PEA} + \Delta \left(Fz_2 Fy_2 \left(\frac{\Gamma Fx_2 - \psi(P + Fx_2)}{\eta^3} \right) \right) & \frac{c^2}{PEA} + \Delta \left(\alpha + Fz_2^2 \left(\frac{\Gamma Fx_2 - \psi(P + Fx_2)}{\eta^3} \right) \right) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

y por simple inspección se comprueba su simetría.

El término independiente del sistema y el vector incógnita serán respectivamente:

$$d_x = \begin{bmatrix} p_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$v_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial Fx_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Fy_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Fz_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

cuya solución se obtiene directamente y vale

$$v_x = M^{-1}d_x \quad (3.51)$$

La expresión anterior permite obtener explícitamente los valores $\frac{\partial Fx_2}{\partial x_2}, \frac{\partial Fy_2}{\partial x_2}, \frac{\partial Fz_2}{\partial x_2}$ en función de Fx_2, Fy_2, Fz_2 .

Repitiendo exactamente el proceso anterior derivando las expresiones (3.37) respecto y_2 obtendremos la segunda columna de la matriz K_{22} , la formada por:

$$v_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial Fx_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial Fy_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial Fz_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

En definitiva el sistema resultante de ecuaciones será:

$$Mv_y = d_y \quad (3.53)$$

La matriz M del sistema no cambia, el vector independiente es el siguiente:

$$d_y = \begin{bmatrix} 0 \\ p_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

De nuevo la solución se obtiene directamente,

$$v_y = M^{-1}d_y \quad (3.55)$$

La expresión anterior permite obtener explícitamente los valores buscados en función de Fx_2, Fy_2, Fz_2

Se repetirá finalmente el proceso derivando las expresiones (3.37) respecto z_2 obteniendo la última columna de la matriz K_{22} , formada por:

$$v_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial Fx_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Fy_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Fz_2}{\partial z_2} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

El sistema de ecuaciones será:

$$Mv_z = d_z \quad (3.57)$$

Siendo el vector independiente

$$d_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

La siguiente expresión permite obtener explícitamente los valores buscados en función de Fx_2, Fy_2, Fz_2 :

$$v_z = M^{-1}d_z \quad (3.59)$$

Ahora ya se dispone de la expresión explícita de \mathbf{K}_{22} construida con los vectores obtenidos anteriormente.

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Y aplicando las igualdades definidas anteriormente (3.43) obtenemos la matriz de rigidez tangente elemental (3.40).

Por la naturaleza del problema mecánico, sometido únicamente al efecto de la gravedad y dado que las cargas aplicadas son seguidoras, es posible aplicar el Teorema de Green por lo que la matriz tangente encontrada será simétrica y definida positiva, cualidades requeridas para el empleo de métodos específicos de resolución de sistemas lineales como el de Cholesky, permitiendo minimizar la cantidad de tiempo empleado en la

resolución de los sistemas lineales generados a partir del ensamblaje de las matrices elementales encontradas (3.60).

3.4.2 Casos de indeterminación de la matriz tangente.

3.4.2.1 Elementos verticales

Cuando las fuerzas aplicadas en el extremo de nudo tiendan a ser verticales o lo que es lo mismo $F_{y2} \rightarrow 0$ $F_{z2} \rightarrow 0$, aparecen una serie de indeterminaciones que inestabilizan el proceso numérico. Por ello es conveniente obtener las expresiones analíticas anteriores para este caso concreto.

Las variables auxiliares definidas en (3.35) toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 \omega &= P + Fx_2 \\
 \theta &= Fx_2 \\
 \eta &= 0 \\
 \beta &= \inf \\
 \gamma &= \inf \\
 \alpha &= \ln(P + Fx_2) - \ln(Fx_2) \\
 a &= P \\
 b &= 0 \\
 c &= 0 \\
 \psi &= 0 \\
 \Gamma &= 0 \\
 E &= \ln(Fx_2 + \theta) \\
 H &= \ln(Fx_2 + \omega + lp)
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Y la expresión del incremento de longitud vale:

$$\Delta l = \frac{-1}{2p_0 EA} \cdot (Fx_2^2 - (P + Fx_2)^2) \tag{3.62}$$

La matriz M adoptará la siguiente forma:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{P}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\alpha \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

3.4.2.2 Elementos sin peso propio

Este es el caso característico de las membranas, donde las fuerzas en los extremos del elemento son muy superiores al valor del peso propio de éste. En este caso la matriz tangente se puede simplificar substancialmente, aportando estabilidad al proceso numérico. Evidentemente para el caso que $P=0$ las expresiones de equilibrio adoptan la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Fx_1 + Fx_2 &= 0 \\ Fy_1 + Fy_2 &= 0 \\ Fz_1 + Fz_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

y la matriz K_{22} se simplifica como sigue:

$$K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{(X_2 - X_1)^2}{Mod} \cdot \frac{EA}{l_f} + \frac{N}{l_f} & \frac{(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)}{Mod} \cdot \frac{EA}{l_f} & \frac{(X_2 - X_1)(Z_2 - Z_1)}{Mod} \cdot \frac{EA}{l_f} \\ \frac{(Y_2 - Y_1)(X_2 - X_1)}{Mod} \cdot \frac{EA}{l_f} & \frac{(Y_2 - Y_1)^2}{Mod} \cdot \frac{EA}{l_f} + \frac{N}{l_f} & \frac{(Y_2 - Y_1)(Z_2 - Z_1)}{Mod} \cdot \frac{EA}{l_f} \\ \frac{(Z_2 - Z_1)(X_2 - X_1)}{Mod} \cdot \frac{EA}{l_f} & \frac{(Z_2 - Z_1)(Y_2 - Y_1)}{Mod} \cdot \frac{EA}{l_f} & \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{Mod} \cdot \frac{EA}{l_f} + \frac{N}{l_f} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

donde

$$\begin{aligned} Mod &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \\ N &= \sqrt{Fy_2^2 + Fz_2^2 + Fx_2^2} \\ l_f &= l + \Delta l \\ \Delta l &= \frac{N \cdot l}{EA} \end{aligned} \quad (3.66)$$

3.4.3 Comportamiento de la matriz tangente.

3.4.3.1 Introducción.

Para observar el comportamiento de la matriz tangente obtenida (3.48) y (3.65) se realizarán dos sencillos ejemplos. El primero en analizará la variación de los diferentes términos de la matriz tangente de un elemento de cable en función de diferentes grados de tesado. El segundo analizará la influencia del peso propio y se compararán la matriz tangente general (3.48) y la simplificada (3.65).

3.4.3.2 Ejemplo 1.

En la figura 3.20 se presenta un ejemplo que tiene por finalidad analizar la influencia de la tensión del cable en la matriz tangente. Se trata de un cable que se modeliza mediante un sólo elemento que se encuentra suspendido por sus extremos. La distancia entre los

apoyos es de un metro. La rigidez del cable es de $EA=1e6kN$ y está sometido a una carga distribuida de $p=0.1kN/cm$.

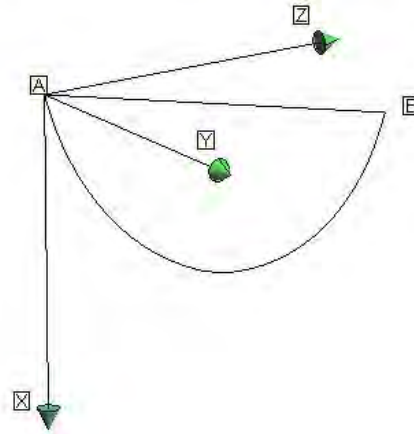


Figura 3.20 Elemento en la posición inicial. Ejemplo 1

Para analizar la influencia del grado de tesado del cable en las componentes de la matriz tangente se definirá el factor F como cociente entre la longitud inicial de la catenaria y la distancia entre los apoyos del elemento que es un dato invariante dado que los puntos A y B son fijos en el espacio. Se realizaran diferentes cálculos para valores de $F= 1.5, 1.1, 1.01, 0.9, 0.1$.

Como es previsible, a medida que el grado de tesado aumenta, el trazado del cable se va volviendo horizontal hasta volverse casi un segmento de línea recta. En la siguiente figura se puede apreciar la evolución de la forma del cable en función del grado de tesado.

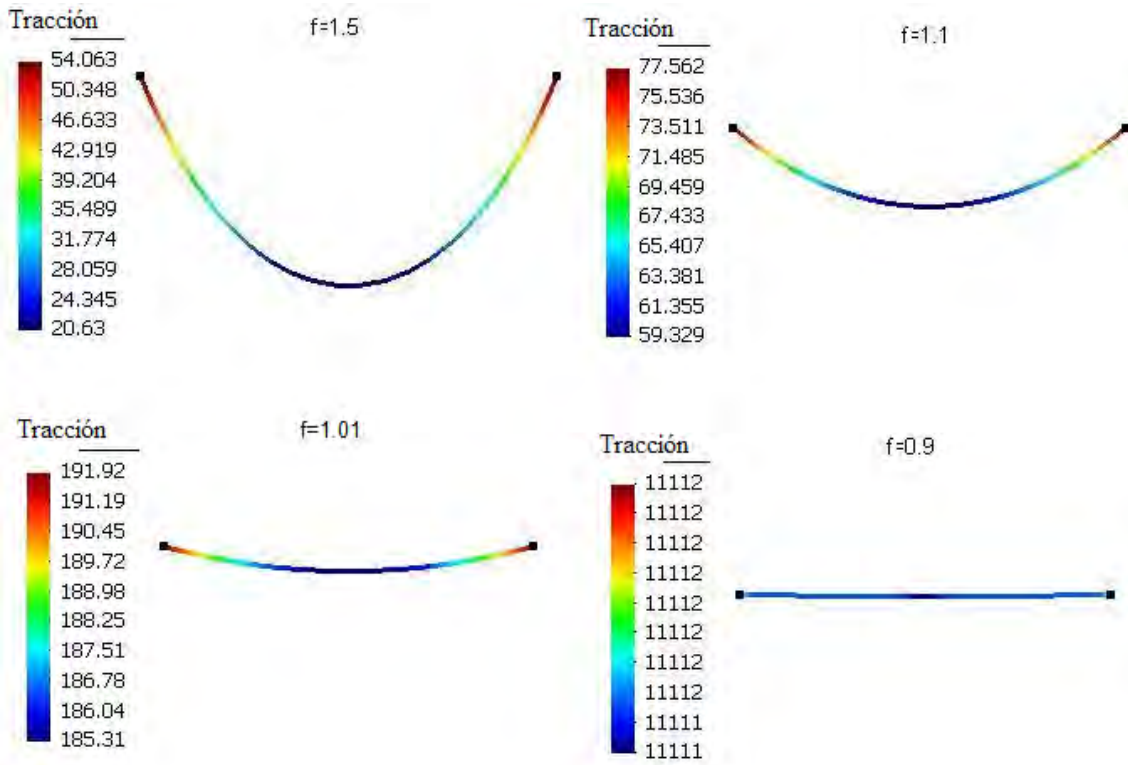


Figura 3.21 Trazados según el grado de tensión [N]

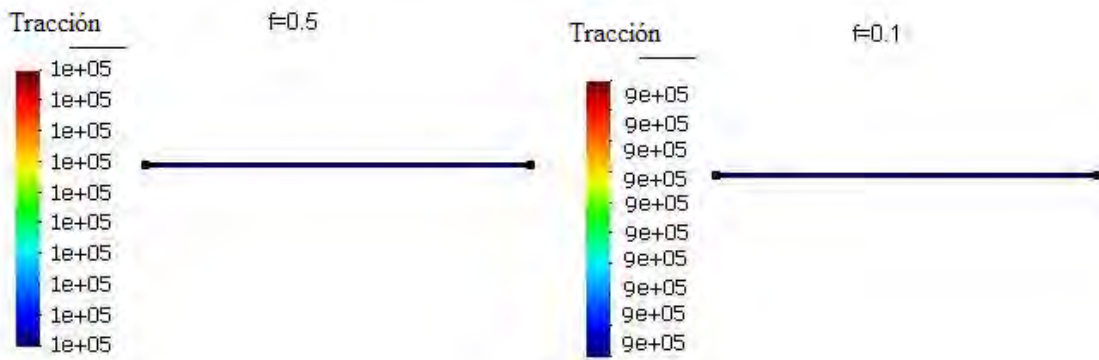


Figura 3.21b Trazados según el grado de tensión [N]

Las respectivas submatrices K_{22} adoptan los siguientes coeficientes expresados en [N/m]:

F=1.5			F=1.1		
0.360226	6.22E-06	6.22E-06	0.704671	6.81E-05	6.81E-05
6.22E-06	0.341364	0.136028	6.81E-05	2.16071	1.56773
6.22E-06	0.136028	0.341364	6.81E-05	1.56773	2.16071
F=1.01			F=0.9		
1.89678	0.00069405	0.00069405	111.121	0.00016699	0.00016699
0.00069405	38.1761	36.323	0.00016699	611.111	499.991
0.00069405	36.323	38.1761	0.00016699	499.991	611.111
F=0.5			F=0.1		
1000.05	1.86E-05	1.86E-05	9000.47	2.06E-06	2.06E-06
1.86E-05	1500.08	500.026	2.06E-06	9500.5	500.026
1.86E-05	500.026	1500.08	2.06E-06	500.026	9500.5

Tabla 3.1. Submatrices K_{22} según el grado de tesado.

Se observa claramente la tendencia a volverse diagonalmente dominante a medida que la tensión en el cable aumenta. Si evaluamos el caso de $F=0.1$ mediante la aproximación de la matriz K_{22} mostrada en (3.65) obtenemos:

9000.46	0.0039	0.0039
0.0039	9500.49	500.026
0.0039	500.026	9500.49

Tabla 3.2. Caso para $F=0.1$ evaluada con la aproximación mostrada en (3.65)

Definiendo el error relativo como

$$error = \frac{\sum_{ij} abs(k_{ij}^{aproximada} - k_{ij}^{exacta})}{\sum_{ij} k_{ij}^{exacta}} \times 100 = \frac{0.029}{29001.52} \times 100 = 9.99e-5 \quad (3.67)$$

se obtiene un error de 9.99e-5 quedando de manifiesto que para casos donde las tensiones son altas, el comportamiento de la catenaria pasa a ser el de un cable tesado; donde la influencia del peso propio en su estado tensional es mínima por lo que la expresión límite de la matriz tangente se torna plenamente operativa y fiable.

3.3.3.3 Ejemplo 2.

A continuación se estudiará la influencia del peso propio en el comportamiento de la matriz tangente desarrollada. El elemento de cable que servirá de ejemplo tiene 10 metros de longitud y se encuentra suspendido por uno de sus extremos (A) mientras el otro (B) se haya cargado por las siguientes fuerzas $F_x=100\text{kN}$; $F_y=100\text{kN}$; $F_z=100\text{ kN}$. La rigidez del cable es de $EA=1\text{e}6\text{kN}$ y los pesos propios considerados han sido de $p=1, 0.1, 0.01, 0.00001\text{kN/cm}$. En la figura 3.22 se muestra el ejemplo planteado.

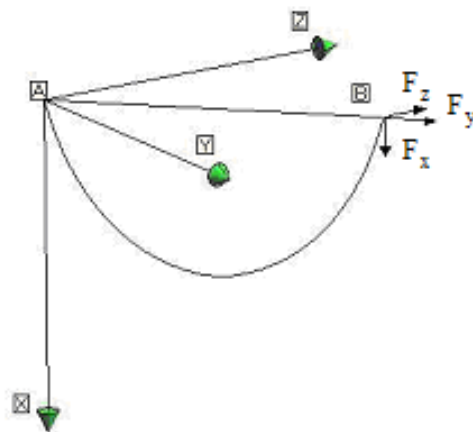


Figura 3.22. Esquema ejemplo 2

Para diferentes pesos propios obtenemos las siguientes resultados:

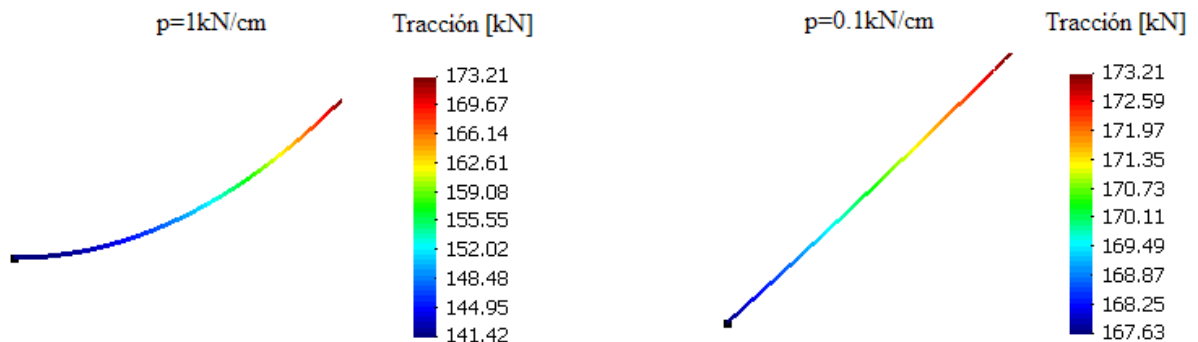


Figura 3.23 Trazados resultantes en función del peso propio considerado

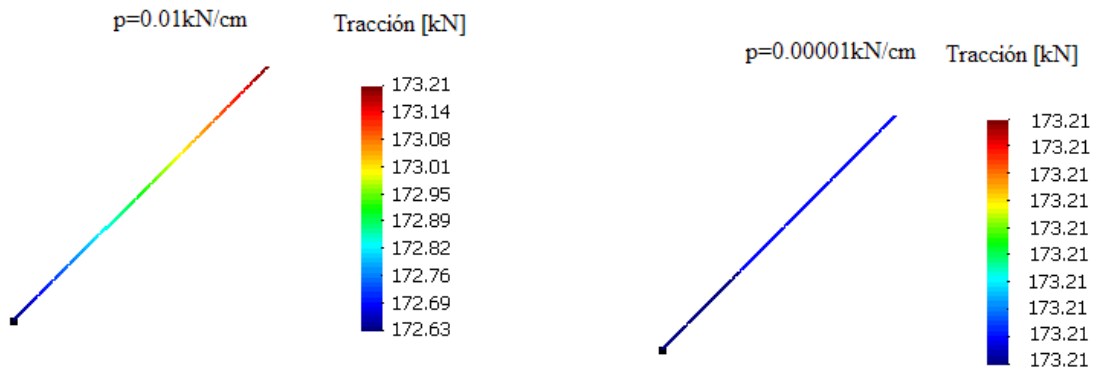


Figura 3.24 Trazados resultantes en función del peso propio considerado

Las respectivas submatrices K_{22} adoptan los siguientes coeficientes expresados en [N/m]:

$p=1\text{kN/m}$				$p=0.1\text{kN/m}$			
Aprox.	5210.293	3525.498	3525.498	Aprox.	3563.994	3378.154	3378.154
	3525.498	2421.185	2396.741		3378.154	3236.038	3218.153
	3525.498	2396.741	2421.185		3378.154	3218.153	3236.038
Exacta	908.447	615.513	615.513	Exacta	3244.569	3074.97	3074.97
	615.513	447.301	426.84		3074.97	2947.702	2930.119
	615.513	426.84	447.301		3074.97	2930.119	2947.702
$p=0.01\text{ kN/m}$				$p=0.00001\text{ kN/m}$			
Aprox.	3367.061	3333.057	3333.057	Aprox.	3344.883	3327.575	3327.575
	3333.057	3333.832	3316.484		3327.575	3344.849	3327.559
	3333.057	3316.484	3333.832		3327.575	3327.559	3344.849
Exacta	3363.466	3329.518	3329.518	Exacta	3344.883	3327.575	3327.575
	3329.518	3330.291	3312.971		3327.575	3344.849	3327.559
	3329.518	3312.971	3330.291		3327.575	3327.559	3344.849

Tabla 3.3. Comparativa de matrices tangentes en función del peso distribuido

Con este ejemplo se pone de manifiesto que para casos donde los esfuerzos de tracción en el cable debidos al peso propio sean irrelevantes frente a los esfuerzos originados por las cargas en los nudos, es decir, cuando el efecto del peso propio sea despreciable, el limite de la expresión de la matriz tangente encontrada (3.65) es muy satisfactorio y evita la aparición de indeterminaciones numéricas originadas por los pesos propios muy pequeños en comparación con los esfuerzos axiales que aparecen en el elemento.

3.5 Cálculo de redes de cables

3.5.1 Introducción

Hasta ahora se han deducido tanto la expresión cinemática de elementos de catenaria aislados como la expresión correspondiente de la matriz tangente que se deriva de dichas expresiones. En este apartado, el objetivo es plantear el método que permita obtener de forma automática el sistema de ecuaciones que relacionen un conjunto de elementos que están conectados entre sí, para poder simular el comportamiento de una red compleja de cables.

Básicamente, el método empleado aquí consistirá en establecer las ecuaciones de equilibrio en cada nudo para posteriormente aplicar las ecuaciones cinemáticas mediante un esquema de rigidez convencional para determinar las posiciones de equilibrio de un sistema.

En el presente capítulo se describirán también las estrategias ideadas para estabilizar los procesos de convergencia ya que el problema planteado es altamente no lineal y por tanto será tan importante determinar una metodología que teóricamente determina la posición de equilibrio de un sistema de cables, como establecer estrategias numéricas para implementar de manera eficiente los algoritmos necesarios para solucionar el problema planteado.

3.5.2 Descripción del método empleado

Como se ha mostrado, para cada elemento aislado se puede establecer el equilibrio entre las fuerzas actuantes en sus nodos extremos y su peso propio mediante las ecuaciones de equilibrio estático (3.38). Además se pueden establecer las relaciones entre la posición de los nudos de un elemento y las fuerzas aplicadas en éstos mediante las expresiones cinemáticas, tanto en términos de flexibilidad (3.14) como en términos de rigid

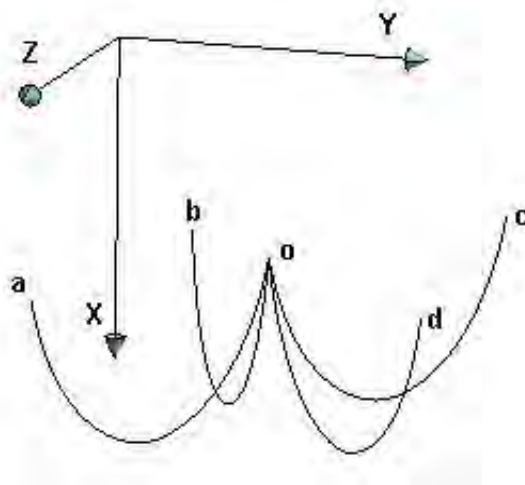


Figura 3.25. Red de cuatro elementos conectados entre sí en el nudo o.

Asimismo, en una red formada por elementos interconectados entre sí a través de un nodo por ejemplo como la mostrada en la figura 3.25, se podrá encontrar la resultante de las fuerzas internas para el nodo i ($R_{x_i}, R_{y_i}, R_{z_i}$) ocasionadas por los elementos que convergen en dicho nodo (3.69). Evidentemente, también se exigirá la compatibilidad de movimientos de los extremos de nodo de los elementos que convergen en un nodo determinado.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{x_i} &= R_{x_i} \\ \sum_{i=1}^n F_{y_i} &= R_{y_i} \\ \sum_{i=1}^n F_{z_i} &= R_{z_i} \end{aligned} \tag{3.69}$$

$n = \text{elementos que convergen en el nodo } i$

Para obtener el equilibrio de fuerzas en cada nodo del sistema deberá exigirse que el sistema de referencia sea el mismo en todos los elementos que confluyen en dicho nodo. Para simplificar el proceso de ensamblaje de fuerzas se ha tomado el sistema de referencia global. En la figura 3.26. siguiendo con el ejemplo mostrado en la figura 3.25 se muestra en azul el sistema de referencia adobado y en rojo las fuerzas en los extremos de los elementos que confluyen en el nodo. Se puede ver que dichas fuerzas se expresan según el sistema de referencia adobado.

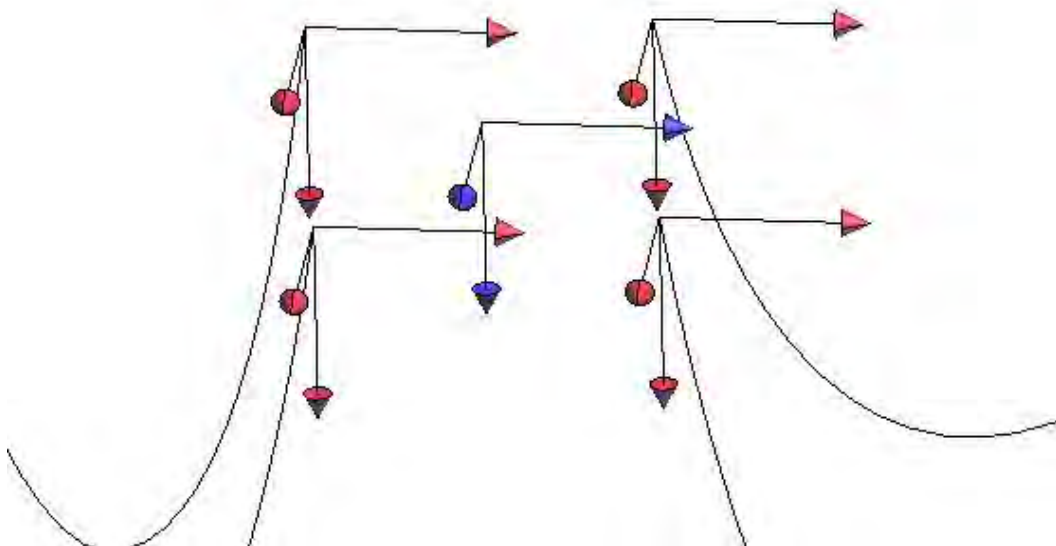


Figura 3.26. Sistema de referencia en cada nudo de la red

Por consiguiente, se deberá resolver el sistema no lineal resultante del ensamblaje de las fuerzas en cada nodo para que se cumplan las ecuaciones (3.69) para todos los nodos de la red. Como se ha visto las fuerzas interiores de los elementos son función de su posición (3.14) por lo que se podrá definir una función que relacione cada grado de libertad con la fuerza resultante asociada a dicho grado de libertad y para obtener el

equilibrio del sistema de elementos se deberá exigir el equilibrio global de fuerzas internas y externas o lo que es lo mismo que las resultantes de las fuerzas internas en cada nodo sean iguales a las fuerzas externas aplicadas (3.70). El sistema podrá expresarse como:

$$F'(X') = f'_{ext} \quad (3.70)$$

Donde X' representa el vector que agrupa las coordenadas de los nodos, $F'(X')$ las fuerzas resultantes para cada nodo y f'_{ext} las fuerzas externas aplicadas.

A esta función de le deberán eliminar las componentes que describen los grados fijados con lo que se obtiene un vector de grados de libertad $X(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ y un vector de fuerzas externas f_{ext} que se relaciona mediante la función F que impone el equilibrio de fuerzas interiores y exteriores. Dicha relación se expresará matemáticamente mediante un sistema no lineal cuya solución describirá la posición de equilibrio del sistema (3.71).

$$F(X) = f_{ext} \quad (3.71)$$

En definitiva se trata de un esquema de rigidez idéntico al formulado en la teoría matricial de estructuras pero con una relación entre esfuerzos y desplazamientos no lineal por lo que consecuentemente se acaba obteniendo un sistema de ecuaciones no lineal que refleja dicha relación. Se adoptará un esquema incremental iterativo en cargas, donde se aplicará el método Newton-Raphson para solucionar en cada intervalo el sistema no lineal resultante. El esquema básico que define el algoritmo Newton-Raphson en el siguiente:

$$x_{i+1} = x_i - \left[\frac{\partial F(x)}{\partial x} \right]_{x=x_i}^{-1} F(x_i) \quad (3.72)$$

Por tanto se pone de manifiesto la necesidad de encontrar la jacobiana de F . Dicha matriz se obtendrá mediante el ensamblaje de las matrices tangentes elementales, evaluadas en el punto x_i .

$$j(X) = \left[\frac{\partial F(X)}{\partial x} \right] \quad (3.73)$$

Evidentemente en cada iteración no se realizará la inversión de la matriz jacobina sino que se resolverá el siguiente sistema aprovechando las cualidades de simetría y definición positiva de J .

$$\left[\frac{\partial F(X)}{\partial x} \right]_{X=x_i} D_i = F(X_i) \quad (3.74)$$

Como se ha mostrado anteriormente, las matrices tangentes son función de las fuerzas en extremo de nudo, es por ello que previamente a su evaluación se deberá invertir las respectivas expresiones cinemáticas para obtener los esfuerzos en extremo de elemento para evaluar cada matriz tangente. El proceso para evaluar la matriz tangente del elemento i es el siguiente:

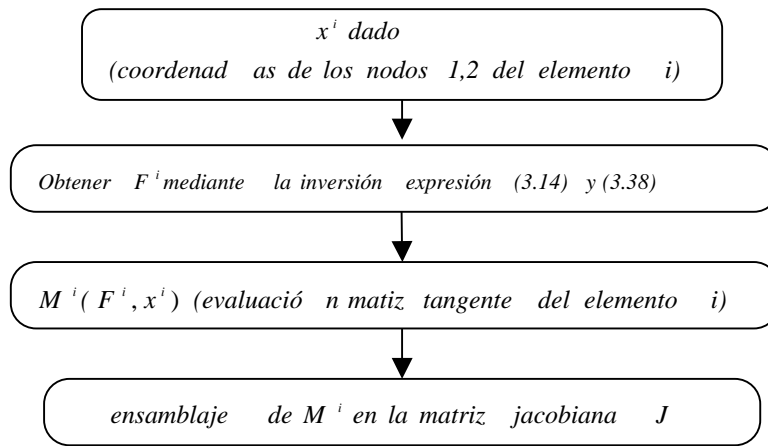


Figura 3.27. Evaluación de la matriz tangente del elemento i

Este algoritmo se repite para todos los elementos y permite obtener la matriz jacobiana que se debe actualizar para iteración. La solución directa del sistema 3.71 se realizaría mediante el siguiente algoritmo:

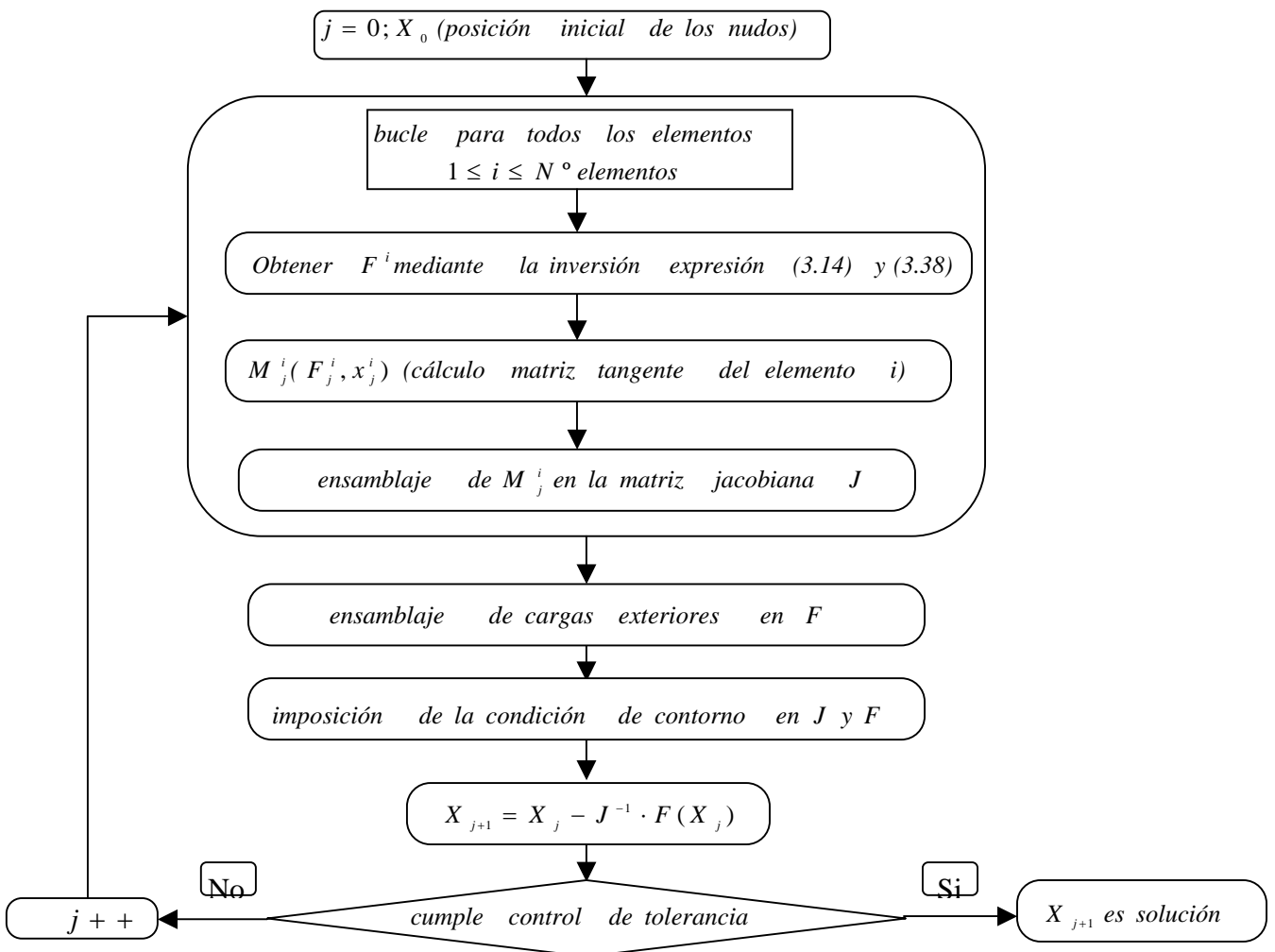


Figura 3.28. Solución directa del sistema 3.71.

Para aumentar la estabilidad del proceso se puede emplear un esquema incremental iterativo en las cargas y a su vez se puede combinar con un esquema de control del proceso similar al método denominado relajación dinámica (Day et al. 1970), muy empleado por diversos autores para mejorar comportamiento en la convergencia de problemas como los que se tratan en el presente trabajo.

3.5.3 Algoritmos empleados para mejorar el proceso de convergencia.

Se han implementado dos estrategias numéricas con el objetivo de mejorar el proceso de convergencia del proceso iterativo. La utilización de las siguientes estrategias es usual en la resolución de problemas no lineales especialmente en el caso que se aborda (3.71). Las estrategias adoptadas persiguen aproximar el vector solución al vector inicial, éste es un procedimiento clásico para resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones no-lineales (Ralston, 1986).

Las estrategias se combinarán de la siguiente manera: inicialmente se resolverá el problema considerando que está sometido exclusivamente a la acción de la gravedad, actuando el procedimiento de relajación, posteriormente si existen cargas externas aplicadas se iniciará sobre la geometría encontrada anteriormente un proceso incremental de carga hasta encontrar el sistema en equilibrio con el 100% de las cargas aplicadas. A continuación se describen los procedimientos con mayor detalle.

1. Procedimiento de relajación

Este procedimiento se basa en ir encontrando sistemas no lineales con la solución próxima a la semilla considerada. Se ha denominado relajación de reacciones ficticias y consiste en fijar a priori todos los grados de libertad que no estén coartados, obteniendo cada una de las reacciones. Dichas reacciones “ficticias” se aplican a sus correspondientes grados de libertad como si se tratasen de fuerzas exteriores. A continuación se liberan todas las coacciones ficticias, dejando libres los grados de libertad que no estén coartados a modo de apoyos. Progresivamente se disminuye el valor de dichas reacciones ficticias, resolviendo el sistema resultante, obteniendo diferentes posiciones de los grados de libertad. Como es natural se toma la posición de los nodos en el paso i como semilla para el paso $i+1$.

Como se ha comentado la solución se obtendrá cuando las cargas ficticias se anulen, encontrando el equilibrio para la situación realmente existente, es decir que solamente actúe el peso propio.

En la figura 3.29 se muestra un ejemplo cualitativo en el que describe el proceso de relajación en una malla de dos elementos. Se puede ver que en el primer paso se fija el único grado de libertad obteniendo la reacción R_0 . Para obtener dicha reacción sólo hace falta realizar el ensamblaje de las fuerzas en extremos de nudo, para lo cual se emplean las expresiones cinemáticas mostradas anteriormente. En el siguiente paso $i=1$, se aplica un decremento de dicha reacción ficticia, con lo que se logra que la posición de equilibrio no diste mucho de la posición anterior, estabilizando la resolución del sistema no lineal generado. Este proceso se repite hasta anular las reacciones ficticias obteniendo la configuración en equilibrio estático.

Cabe mencionar que dicho procedimiento estabiliza considerablemente el proceso de convergencia del problema.

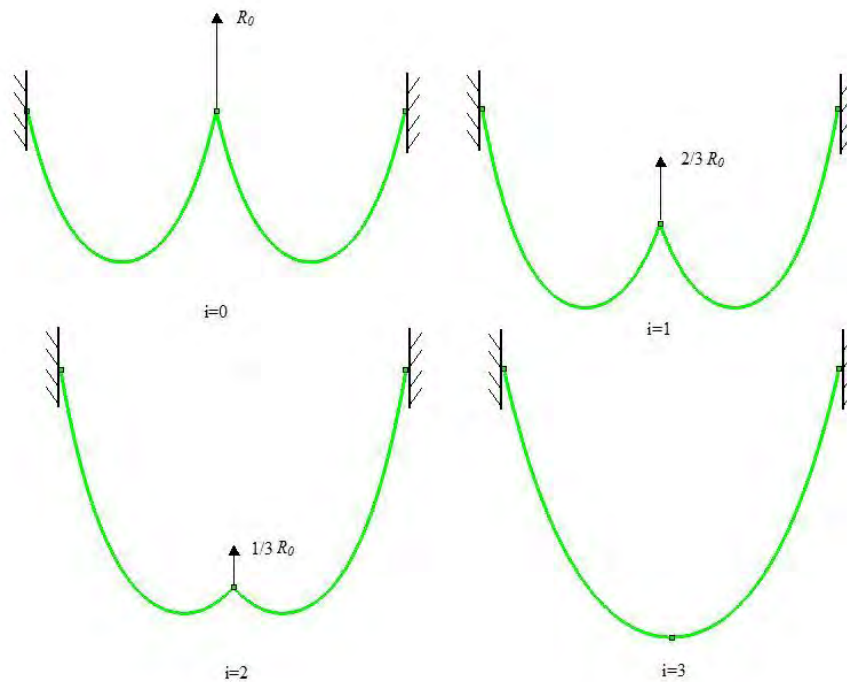


Figura 3.29. Proceso de relajación de las cargas ficticias

2. Proceso incremental de cargas

Es un procedimiento típico en la resolución de sistemas no lineales derivados de problemas estructurales sometidos a cargas externas. Consiste simplemente en dividir el proceso de carga en una serie de incrementos y aplicar el proceso de solución descrito anteriormente pero en vez de disminuir la carga en cada iteración se irá sumando, de esta manera el vector solución parcial se aproximará recursivamente a la solución final con toda la carga aplicada. Como es natural se toma el resultado del paso i como semilla para el paso $i+1$.

El esquema conjunto se puede ver en el diagrama de flujo siguiente:

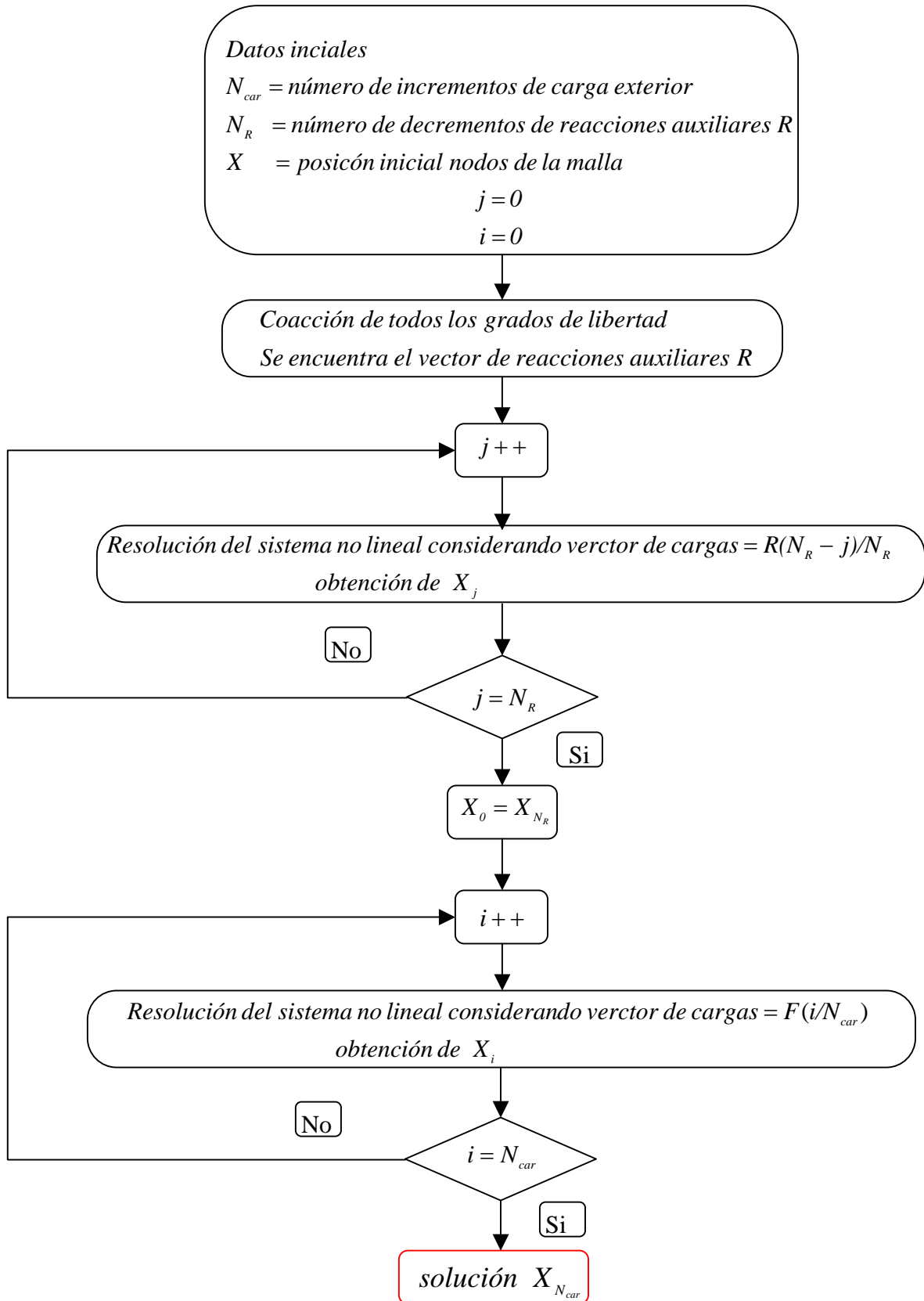


Figura 3.30. Algoritmo incremental iterativo de resolución del problema no lineal 3.71.

Capítulo 4

Validación del elemento de cable propuesto

4.1 Introducción

Se considera imprescindible comparar los resultados que ofrece el elemento de cable formulado frente otros encontrados en la bibliografía. Es por ello que en el presente capítulo se realizarán una serie de ejemplos que ya han sido abordados por diferentes autores para testar la bondad y verificar el grado de exactitud de los diferentes elementos desarrollados.

4.2 Ejemplo 1. Comparativa de soluciones analíticas y numéricas.

El siguiente ejemplo se ha extraído de Vanderplaats (1984) y consiste en obtener el punto de equilibrio de una estructura formada por dos muelles anclados entre sí, con un nudo libre. Dicho nudo se carga como se indica en la figura 4.1.

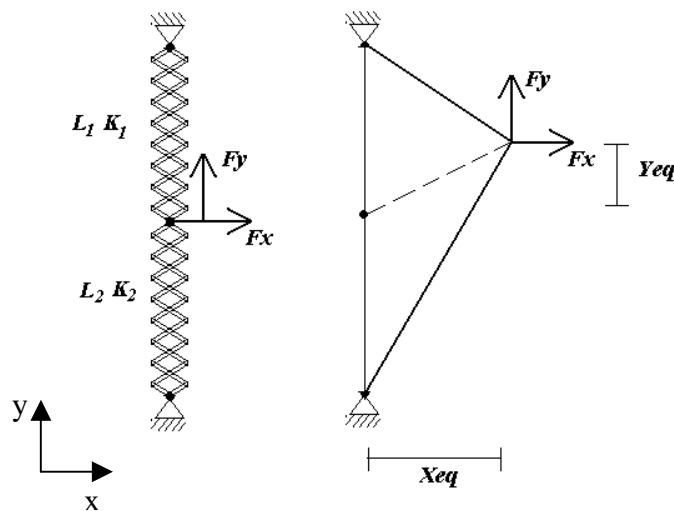


Figura 4.1. Esquema ejemplo 1, (Vanderplaats, 1984)

Los datos del problema son:

$K_1=8$ N/cm; $L_1=10$ cm; $K_2=1$ N/cm; $L_2=10$ cm; $F_x=5$ N; $F_y=5$ N; No se contempla el peso distribuido de los elementos. Las incógnitas del problema son las posiciones de equilibrio del nudo, es decir X_{eq} , Y_{eq} .

Para resolver el problema se puede formular analíticamente la expresión que describe el potencial del sistema en función de las variables X_{eq} , Y_{eq} con el objetivo de obtener analíticamente el mínimo de dicha función, encontrando así la posición de equilibrio y en consecuencia las coordenadas buscadas. La función potencial tiene la siguiente forma:

$$PE(x, y) = \frac{1}{2} K_1 \left(\sqrt{x^2 + (y - L_1)^2} - L_1 \right) + \frac{1}{2} K_2 \left(\sqrt{x^2 + (L_2 + y)^2} - L_2 \right) - x \cdot F_x - y \cdot F_y \quad (4.1)$$

minimizando la expresión anterior anulando el gradiente:

$$\nabla PE(x, y) = 0 \quad (4.2)$$

se obtiene $X_{eq}=8.631$ cm ; $Y_{eq}=4.533$ cm.

A continuación resolveremos el problema mediante el algoritmo desarrollado empleando la matriz tangente exacta (3.60). Para poder emplearla se asignara un valor cuasi cero al valor del peso distribuido para evitar divisiones por cero. En la estrategia de resolución se tomarán diferentes incrementos de carga y de relajación.

El criterio de parada detiene el proceso iterativo cuando uno de los dos criterios de convergencia siguientes se cumple.

Para el residuo de fuerzas se ha considerado la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^n R_i^2 < 10^{-5} \quad (4.3)$$

Para los incrementos en las variables se ha considerado la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^n \Delta d_i^2 < 10^{-5} \quad (4.4)$$

La siguiente tabla muestra los diferentes resultados obtenidos.

Incr. de carga	Decr. de relajación	X_{eq}	Y_{eq}	Total iteraciones
1	1	8.6321	4.5319	5
3	1	8.6321	4.5319	14
1	3	8.6321	4.5319	5
3	3	8.6321	4.5319	14

Tabla 4.1 Resultados ejemplo 1

Se puede comprobar que el error producido respecto X_{eq} es del 0.012% y respecto Y_{eq} es del 0.024%. Se puede apreciar también que el hecho de incrementar el número de incrementos de carga o de relajación no afecta al resultado, realizando simplemente más iteraciones en los casos que se aumentan los pasos de carga. Generalmente para casos simples no se requieren muchos incrementos de carga o relajación para tener un buen comportamiento en la convergencia del sistema.

La siguiente figura muestra la posición del sistema en equilibrio, se puede observar el gran desplazamiento experimentado por las variables del sistema.

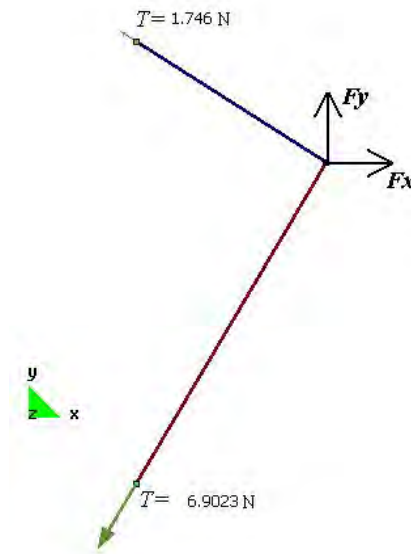


Figura 4.2. Configuración final en equilibrio

Se graficará el proceso de resolución en el que sólo se ha empleado un intervalo de cargas y un intervalo de relajación. Se puede apreciar la estabilidad del proceso de convergencia y la similitud entre ambas gráficas.

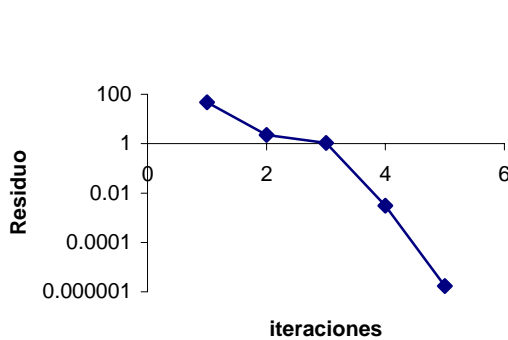


Figura 4.3. Evolución del residuo

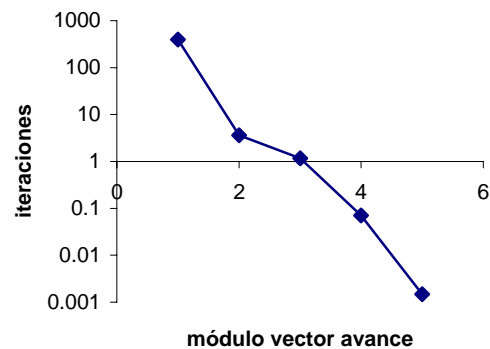


Figura 4.4. Evolución del módulo del avance

A continuación la tabla 4.2 muestra el resultado del cálculo empleando el elemento de barra convencional para solucionar el ejemplo planteado. Se puede ver que se requiere

un esfuerzo computacional mucho mayor en comparación con el empleo del elemento de catenaria desarrollado aplicado en el caso anterior.

Incr. de carga	Decr. de relajación	X_{eq}	Y_{eq}	Total iteraciones
1	1	8.63204	4.5319	256

Tabla 4.2. Resultados empleando elemento de barra convencional

En las figuras 4.5 y 4.6 se aprecian las gráficas de convergencia que muestran un proceso estable pero que requieren un gran número de iteraciones para lograr la convergencia del problema. Se hace evidente la menor capacidad frente al elemento de catenaria desarrollado y que se ha aplicado anteriormente.

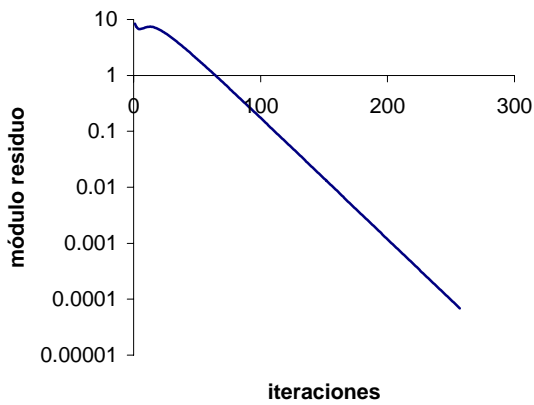


Figura 4.5 Evolución del residuo empleando el elemento de barra

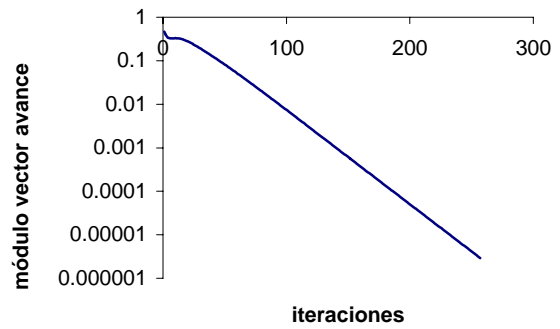


Figura 4.6 Evolución del avance empleando el elemento de barra

Finalmente se empleará la matriz tangente (3.65) desarrollada para el caso de peso propio nulo para evaluar su comportamiento frente los anteriores resultados. En este caso se obtiene un comportamiento en la convergencia parecido al caso del empleo de barras elásticas pero con un menor esfuerzo computacional, aún así también se muestra menos competitivo que en el primer caso (tabla 4.3).

Incr. de carga	Decr. de relajación	X_{eq}	Y_{eq}	Total iteraciones
1	1	8.63208	4.5319	109

Tabla 4.3. Resultados usando la matriz tangente para el caso de pesos propio nulo

En las figuras 4.7 y 4.8 se aprecian las gráficas de convergencia, que muestran un proceso estable pero que, como en el caso anterior, requiere un gran número de iteraciones para lograr la convergencia del problema.

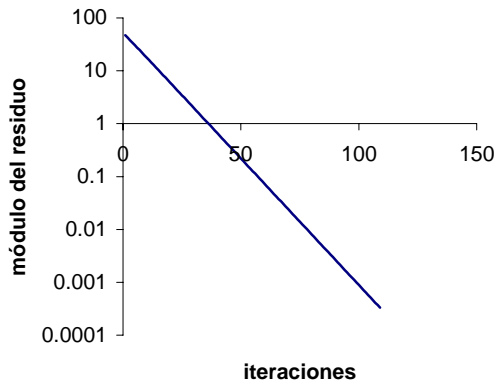


Figura 4.7. Evolución del residuo empleando el elemento de barra

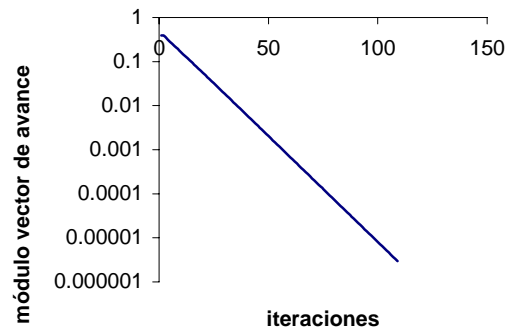


Figura 4.8. Evolución del avance empleando el elemento de barra

En definitiva, a la vista de los resultados se puede decir que por una banda, el elemento de cable desarrollado ofrece una gran exactitud en los resultados así como el comportamiento de la matriz tangente completa es muy satisfactorio a la hora de obtener una convergencia rápida y segura, cosa que se puede comprobar en la siguiente gráfica donde se comparan los tres procesos de convergencia en función del elemento y matriz tangente empleada. En la figura 4.9 se muestra una gráfica comparativa de los tres procesos.

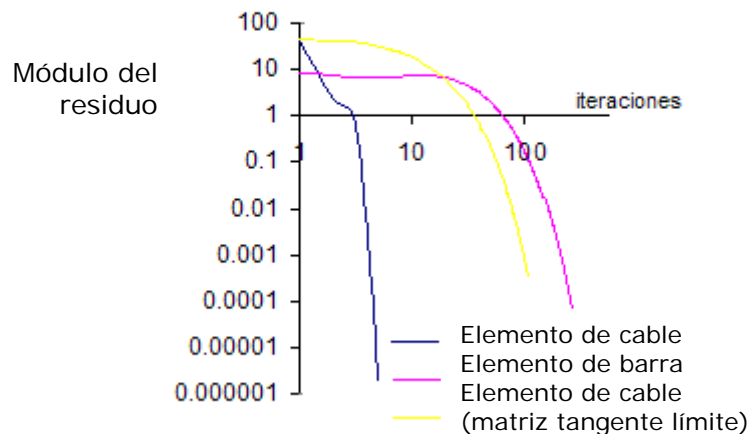


Figura 4.9. Gráfica de convergencia función del elemento y matriz tangente empleada

4.3 Ejemplo 2. Comparación de las prestaciones de la matriz tangente obtenida analítica o numéricamente.

En el presente ejemplo se compararán los comportamientos numéricos del proceso de convergencia para el caso de evaluar la matriz tangente del sistema mediante las expresiones analíticas desarrolladas en los apartados anteriores (3.60) o encontrando

dicha matriz mediante evaluaciones numéricas mediante el empleo de la técnica de diferencias finitas.

La evaluación numérica de la matriz tangente mediante la técnica de las diferencias finitas consiste en aplicar directamente la definición de la derivada en un punto de forma discreta

$$K_{ij} = \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + \Delta h, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\Delta h} \quad (4.5)$$

En la expresión (4.5) f_i representa la componente i -ésima de la función $F(X)$ definida en (3.71), Δh es el incremento empleado para evaluar la derivada numéricamente, x_i representa el grado de libertad i -ésimo y n el número total de grados de libertad. Empleando un Δh suficientemente pequeño se puede aproximar de forma correcta la matriz de rigidez del sistema.

Se ha comprobado que para Δh menores de $1e-6$ el proceso diverge desde un principio. Dado que para encontrar el valor de cada f_i se debe proceder a la solución iterativa de las expresiones cinemáticas de cada elemento (3.14), se produce una acumulación de errores por truncamiento que acaban por falsear la diferencia que se encuentra en el denominador de (4.5) y al dividir por Δh dicho error numérico se amplía distorsionando absolutamente el valor de K_{ij} . Con lo que se obtiene una matriz tangente no simétrica y defectuosa que produce la divergencia del proceso de convergencia.

Para valores de Δh adecuados se puede obtener la solución en algunos casos sencillos, pero en general el proceso numérico es altamente inestable y mucho más lento que utilizar las expresiones analíticas.

A continuación se mostrará mediante un ejemplo el comportamiento numérico del proceso tanto para el caso de emplear una matriz aproximada numéricamente o encontrada mediante las expresiones analíticas (3.60). El ejemplo consiste en encontrar el equilibrio de un cable que inicialmente está suspendido por sus dos extremos y posteriormente uno de ellos se deja libre. Evidentemente la posición final del cable será la vertical.

En este caso con sólo un elemento se modeliza la geometría del problema. Las características geométricas y mecánicas son: $L=10\text{m}$; $EA=100\text{N}$; $p_0=5\text{N/m}$. Se puede ver un esquema del ejemplo en la figura 4.10.

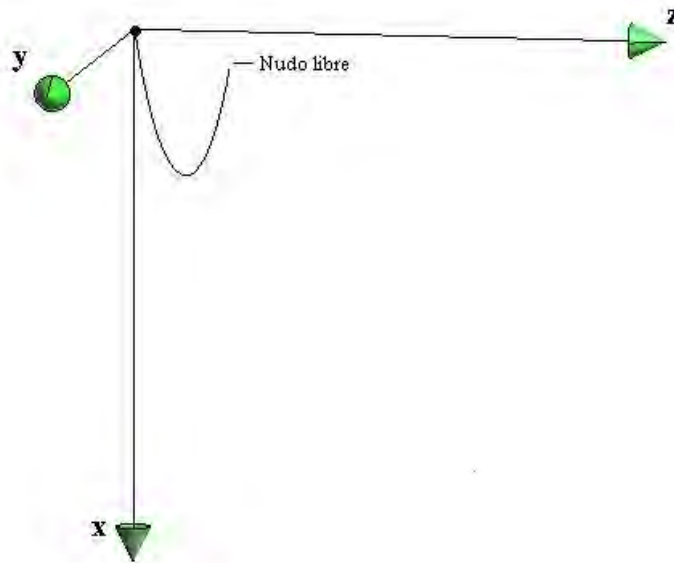


Figura 4.10 Geometría inicial

La configuración final es vertical, produciéndose un estiramiento debido al peso propio de 2.5m.

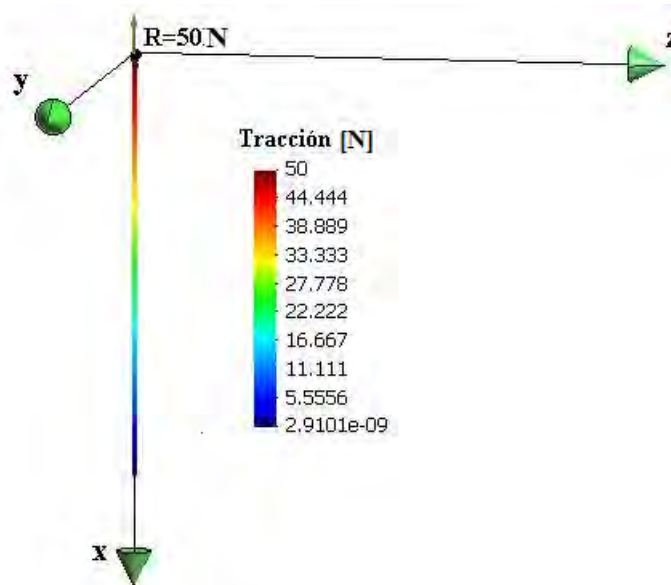


Figura 4.11. Geometría final

El criterio de parada es el definido en (4.3) y (4.4). Se comprueba que utilizando la matriz de rigidez tangente del elemento se obtiene la convergencia en 8 iteraciones, para el caso de la evaluación numérica de la misma se necesitan 31.

Se puede ver el comportamiento del proceso en las figuras 4.12 y 4.13 según se emplee la evaluación numérica o analítica de la matriz tangente. Para el caso en el que se emplea la matriz tangente analítica, el comportamiento del proceso de convergencia es claramente satisfactorio, caracterizándose por su regularidad y estabilidad. En cambio para el caso de utilización de la matriz tangente numérica, el proceso de convergencia

presenta una serie de irregularidades que en este caso sólo han afectado a la velocidad de convergencia, pero para casos de una complejidad mayor produce efectos totalmente negativos impidiendo la convergencia del proceso iterativo. En definitiva se pone de manifiesto la mejora substancial en el comportamiento numérico en el caso de utilización de la matriz tangente analítica frente a la obtenida numéricamente.

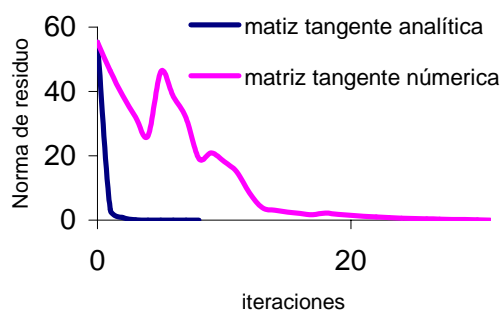


Figura 4.12. Evolución del residuo

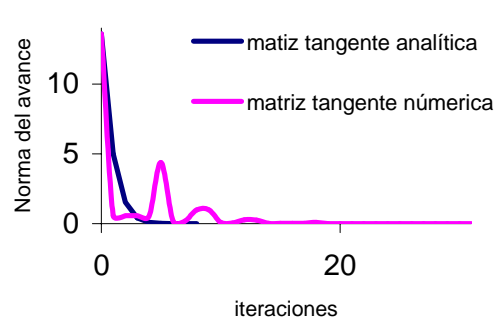


Figura 4.13. Evolución del avance

Este hecho es comentado por Kwan (1998) quien afirma que en los casos estudiados por él, no tan solo no observa inestabilidad en el proceso de convergencia originado empleando de la matriz tangente numérica en la resolución de redes de cables sino que se obtiene un comportamiento satisfactorio.

Se ha considerado interesante reproducir dicho ejemplo para comparar los comportamientos de ambos procesos de convergencia. También servirá para comparar los resultados con diversos autores que han empleado el mismo ejemplo para estudiar la bondad de los diferentes elementos desarrollados.

4.4 Ejemplo 3. Comparación con ensayo real.

A continuación se presenta un ejemplo que presenta especial interés dado que se dispone de los resultados experimentales de un ensayo real realizado por Lewis et al. (1984) y empleado por diversos autores como modelo test para analizar la bondad de diferentes métodos de resolución. Es por ello que se resolverá el problema con la formulación desarrollada permitiendo comparar los resultados obtenidos con los ofrecidos por la bibliografía.

La estructura consiste en una malla cuya geometría se asemeja a la de un paraboloides hiperbólico formado por 31 segmentos de cable con una rigidez de $AE=100.72\text{KN}$ y cargada tal como se muestra en la siguiente figura con fuerzas de 157N. Los cables están pretensados con una carga de 200N. En la figura 4.14 se puede apreciar la geometría del ejemplo.

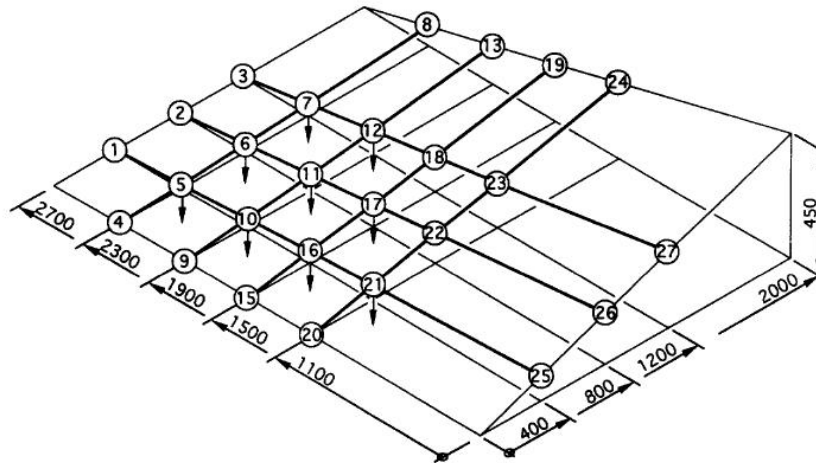


Figura 4.14. Configuración inicial, (Kwan, 1998)

El criterio de parada detiene el proceso iterativo es el definido en (4.3, 4.4). Se ha obtenido la convergencia empleando solo un paso de carga y de relajación, haciendo falta seis iteraciones para converger que equivalen a 2 segundos en tiempo de computación.

A continuación, en la tabla 4.4 se muestra la comparativa con los desplazamientos obtenidos (en mm) por diferentes autores y por la presente investigación. También se comparan tiempos de CPU (en segundos) en el caso de Kwan .

Nodo	Experimental Lewis, 1984	Matriz de rigidez Krishna, 1978	Mínimo energético Sufian, 1992	Relajación dinámica Lewis, 1984	Relajación dinámica Kwan, 1998	Aproximación por series Kwan, 1998	Presente método
5	19.5	19.6	19.3	19.3	19.38	19.52	19.51
6	25.3	25.9	25.5	25.3	25.62	25.35	25.65
7	22.8	23.7	23.1	23.0	22.95	23.31	23.37
10	25.4	25.3	25.8	25.9	25.57	25.86	25.87
11	33.6	33.0	34.0	33.8	33.79	34.05	34.14
12	28.8	28.2	29.4	29.4	29.32	29.49	29.65
16	25.2	25.8	25.7	26.4	25.43	25.79	25.86
17	30.6	31.3	31.2	31.7	31.11	31.31	31.47
18	21.0	21.4	21.1	21.9	21.28	21.42	21.57
21	21.0	22.0	21.1	21.9	21.16	21.48	21.62
22	19.8	21.1	19.9	20.5	19.79	20.00	20.15
23	14.2	15.7	14.3	14.8	14.29	14.40	14.55
CPU					150 s.	120 s.	2 s. (*)

Tabla 4.4. Comparativa de resultados, desplazamientos en [mm]

(*) CPU Pentium II, 233Mhz.

La comparativa demuestra la buena aproximación entre los resultados numéricos obtenidos mediante el empleo de la técnica presentada en este trabajo y los resultados experimentales mostrados por Lewis. No obstante se observa una clara mejora del presente método respecto los anteriores en cuanto al tiempo de computación mostrándose claramente más competitivo. Dicha mejora no se atribuye tanto al

elemento de cable desarrollado sino al empleo de la matriz tangente analítica. Kwan emplea tanto su metodología propia, aproximación por series, invirtiendo 120s, como la relajación dinámica convencional, invirtiendo en este caso 150s. Cabe destacar que Kwan evalúa la matriz tangente numéricamente mediante el empleo de la técnica de las diferencias finitas (4.5), cosa que hace aumentar en dos ordenes de magnitud el tiempo empleado en la resolución respecto la metodología desarrollada en el presente trabajo.

La figura 4.15 muestra los esfuerzos de tracción en N.

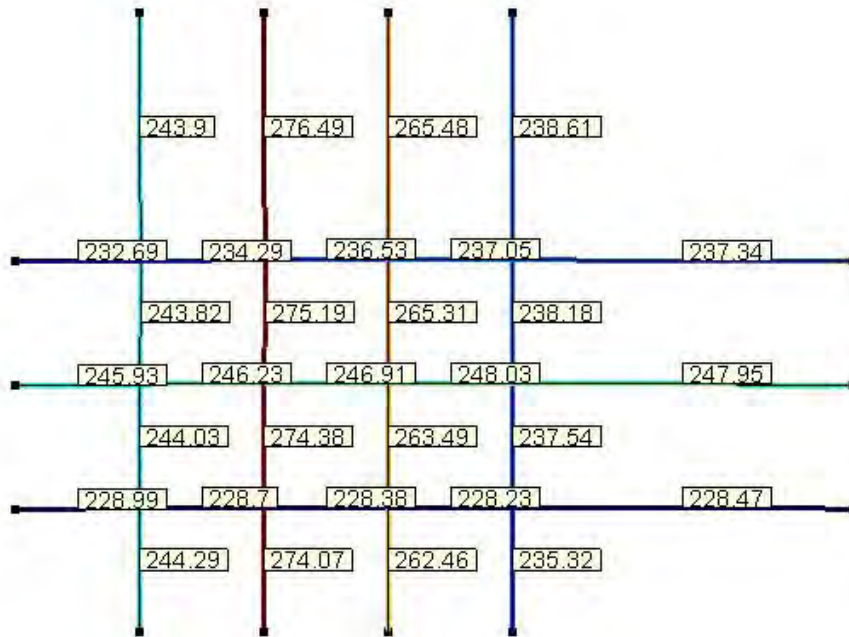


Figura 4.15. Resultados obtenidos N.

La figura 4.16 muestra la gráfica del proceso de convergencia.

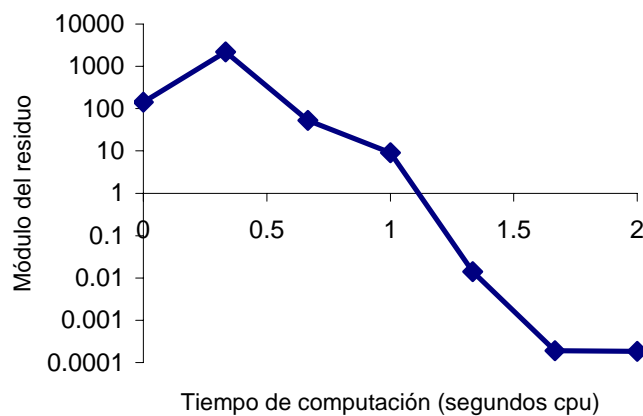


Figura 4.16. Evolución de la convergencia

El ejemplo realizado pone de manifiesto tanto la bondad del método numérico como su potencia para resolver redes de cables.

4.5 Ejemplo 4. Comparación con elementos de barra.

Este ejemplo ha sido reproducido de la monografía realizada por Gil. A (2001), que a su vez fue tomado de Buchholdt, (1985).

La planta de la estructura a calcular se muestra en la figura 4.17, donde los nudos 2 y 3 se pueden mover libremente y el resto se encuentran totalmente coartados. Todos los elementos tienen una sección de 2mm^2 , e inicialmente están sometidos a un pretensado de $F_{\text{pret}} = 500\text{N}$. Se ha adoptado un único material para todos los elementos con un módulo de elasticidad $E = 110000\text{ N/mm}^2$.

La estructura se carga con dos fuerzas puntuales descendentes en los nodos 2 y 3 de valor 200N cada una.

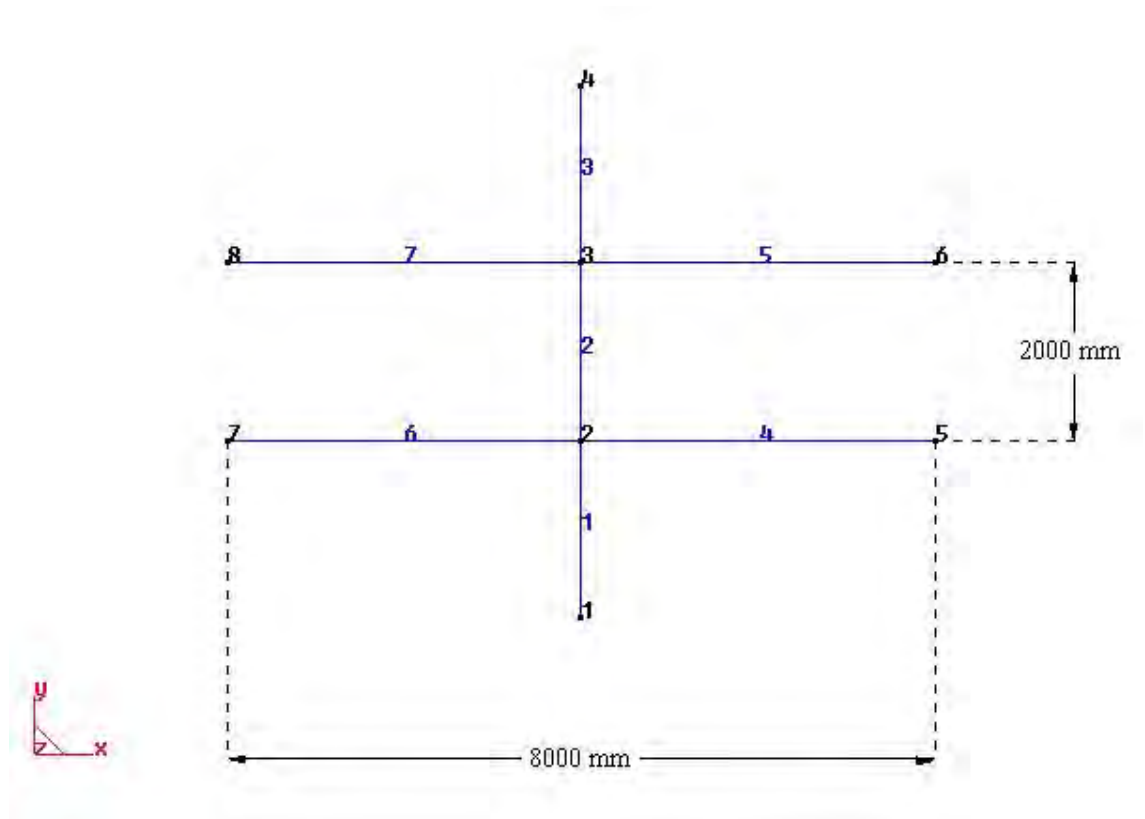


Figura 4.17. Geometría inicial

Dada la naturaleza de estructura de cables pretensados los autores emplean elementos de barra convencional para resolver el problema. En nuestro caso se emplea el elemento de cable desarrollado y se ha resuelto mediante un proceso incremental iterativo de cinco intervalos de relajación y cuatro incrementos de carga, empleando una tolerancia tanto en el vector de avance como en el residuo de fuerzas de $1\text{e-}007$. En la figura 4.18 se muestra la geometría deformada.

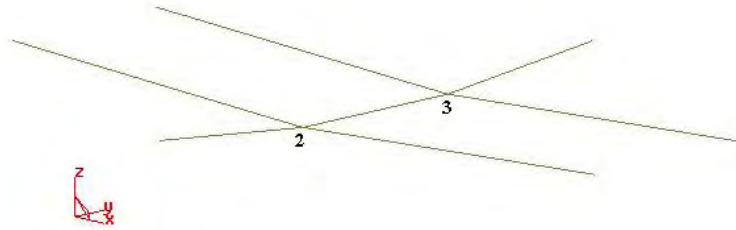


Figura 4.18. Geometría resultante

En la siguiente tabla se pueden comparar los desplazamientos en mm obtenidos por diversos autores que emplean elementos de barra convencionales, comparándose con los resultados del actual estudio.

Nodo 2	Desplazamiento X	Desplazamiento Y	Desplazamiento Z
Buchholdt (1985)	0.000	3.289	-199.431
Gil (2001)	0.000	3.296	-199.636
Método propuesto	0.000	3.300	-199.626
Nodo 3	Desplazamiento X	Desplazamiento Y	Desplazamiento Z
Buchholdt (1985)	0.000	-3.289	-199.431
Gil (2001)	0.000	-3.296	-199.636
Método propuesto	0.000	-3.300	-199.626

Tabla 4.5. Comparativa de resultados. Desplazamientos en [mm]

Se puede observar la gran similitud entre los resultados.

4.6 Ejemplo 5. Comparativa de comportamiento entre diferentes elementos de cable.

El siguiente caso ha sido tomado de Tibert (1999) y es un ejemplo clásico para comparar resultados entre diferentes implementaciones realizadas. El primero en utilizar dicho ejemplo fue Michalos y Birnstiel (1960) y posteriormente ha sido empleado por O'Brien y Francis (1964), Saafan (1970), Jayaraman y Knudson (1981) y por el propio Tibert (1999). La configuración inicial y los datos de partida para este ejemplo se pueden encontrar en la figura 4.19 y tabla 4.6 respectivamente. En la tabla 4.7 se puede ver la tabla comparativa entre los diferentes resultados.

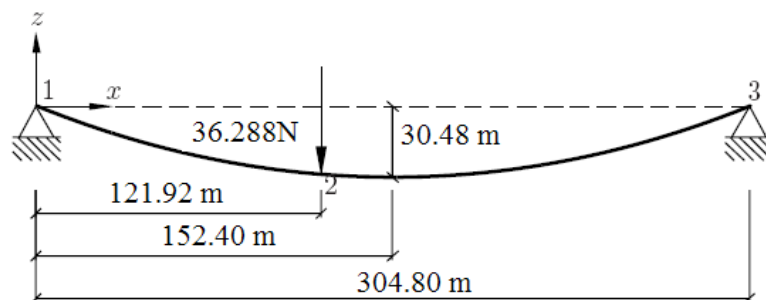


Figura 4.19. Configuración inicial

Los datos del ejemplo se muestran en la tabla 4.6.

Descripción	Magnitud
Sección del cable	5.4842cm ²
Módulo de elasticidad	13357.7kN/cm ²
Peso propio del cable	47kN/m
Longitud inicial del cable	Segmento 1-2 125.88m Segmento 2-3 186.85m

Tabla 4.6 Características geométricas y mecánicas

La geometría resultante adopta la siguiente forma:

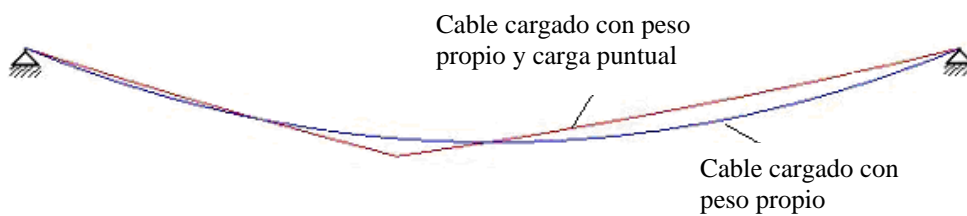


Figura 4.20. Geometría resultante

Se puede observar en la tabla 4.7 la gran similitud que existe entre los resultados obtenidos con la formulación propuesta y los resultados del elemento de catenaria elástica convencional. El hecho que el cable sea muy rígido hace que se deforme poco por lo que la diferencia en la formulación de los elementos influye muy poco. También es interesante observar el error que se produce al modelar la estructura con elementos de barra. Dada la baja curvatura en los elementos resultantes, en el caso del elemento de la parábola elástica se obtienen buenos resultados.

Investigador	Tipo elemento	Desp. Vertical	Desp. Horizontal
Saafan, 1970	Barra elástica	-5.472	-0.846
O'Brien & Francis, 1964	Catenaria elástica	-5.627	-0.860
Michalos & Birnstiel, 1960	Barra elástica	-5.472	-0.845
Jayaraman & Knudson, 1981	Barra elástica	-5.471	-0.845
Jayaraman & Knudson, 1981	Catenaria elástica	-5.626	-0.859
Tibert, 1999	Parábola elástica	-5.601	-0.866
Tibert, 1999	Catenaria elástica	-5.626	-0.859
Tibert, 1999	Catenaria asociada	-5.656	-0.860
Elemento propuesto	Catenaria elástica	-5.626	-0.860

Tabla 4.7. Comparativa de resultados. Desplazamientos en metros.

4.7 Ejemplo 6. Cálculo de una malla simple.

A continuación se reproduce un ejemplo realizado por Kwan (1998) y por Lewis (1987). En este ejemplo que Kwan toma de Lewis (1987), combina la formulación de su elemento con un algoritmo de resolución basado en la resolución directa del sistema de ecuaciones de equilibrio (método de la matriz de rigidez). Lewis aborda el problema usando elementos de barra convencionales y usa técnicas de resolución basadas en el método de relajación y el propio método de la matriz de rigidez).

El ejemplo consiste en una malla 3x3 formada por celdas cuadrangulares de 400mm de lado, ver figura 4.21. Los cables tienen una rigidez de 97.97kN y cuentan con un pretensado inicial de 200N. Los extremos de la malla se consideran apoyos fijos y los nudos centrales están cargados según se muestra en la figura 4.21. No se considera el peso propio. (En Kwan (1998) existe una errata en el valor de las cargas consideradas, pone 150N cuando quiere decir 15N).

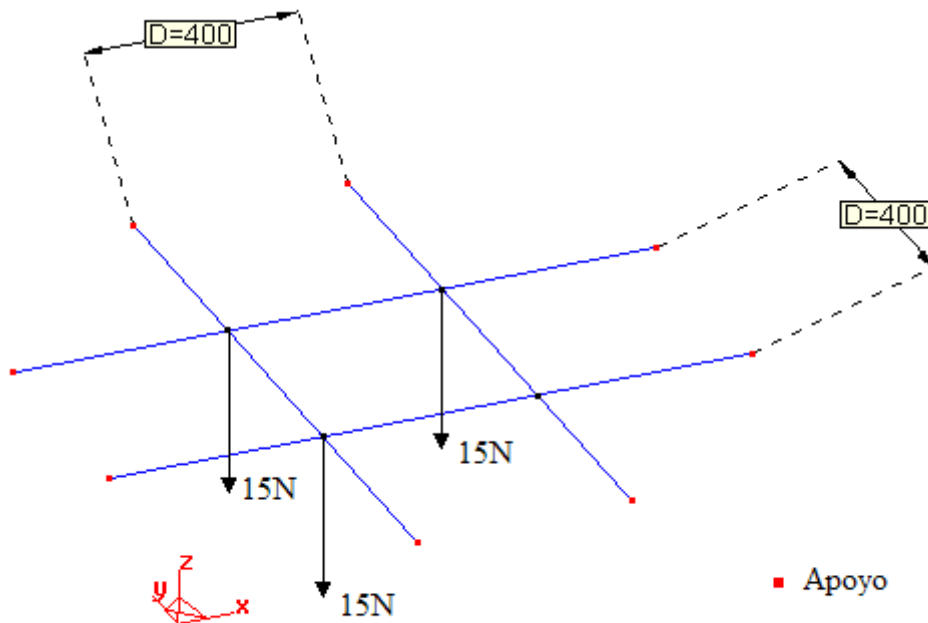


Figura 4.21. Esquema del ejemplo 6, cotas en [mm].

Los resultados obtenidos por Kwan y Lewis se muestran en la figura 4.22.

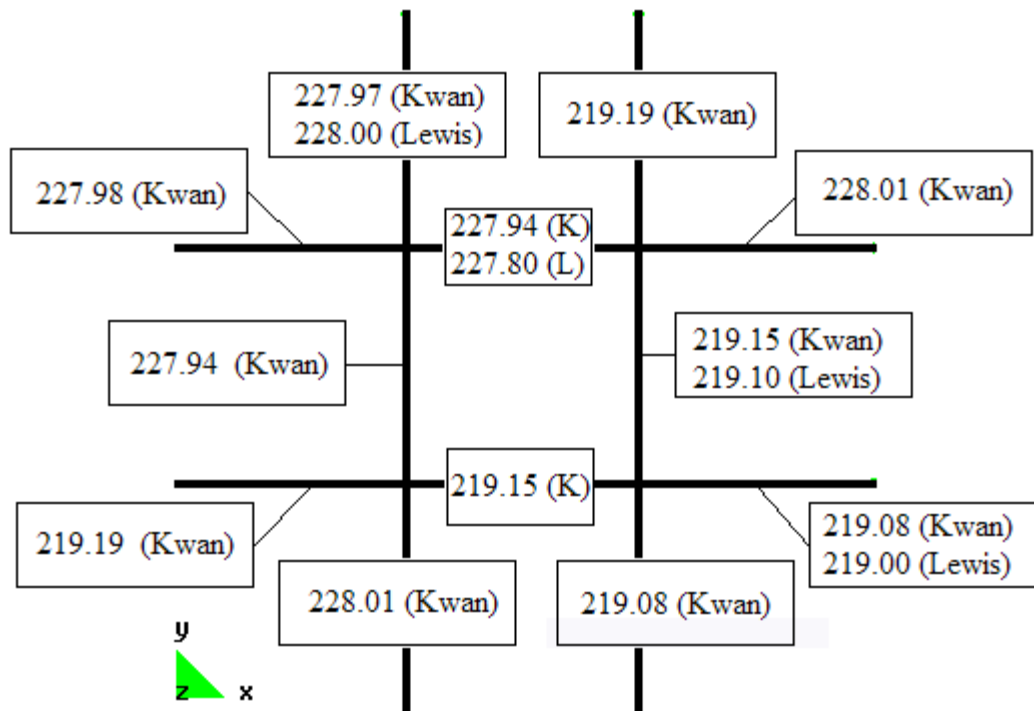


Figura 4.22. Tensiones obtenidas por Kwan (1998) y Lewis (1987). Tensión en [N].

Para abordar este problema se empleará la matriz tangente analítica (expresiones 3.48-3.60) donde aparece la variable del peso propio. Para minimizar su efecto en los resultados, ya que en este ejemplo el peso propio se considera nulo, se considerará el peso repartido en el cable 0.01 (con independencia de las unidades empleadas) y se escalarán las dimensiones del problema multiplicando por $1e-5$, de esta manera el efecto peso propio se minimiza y no afecta a los resultados. La figura 4.23 muestra los esfuerzos de tracción obtenidos.

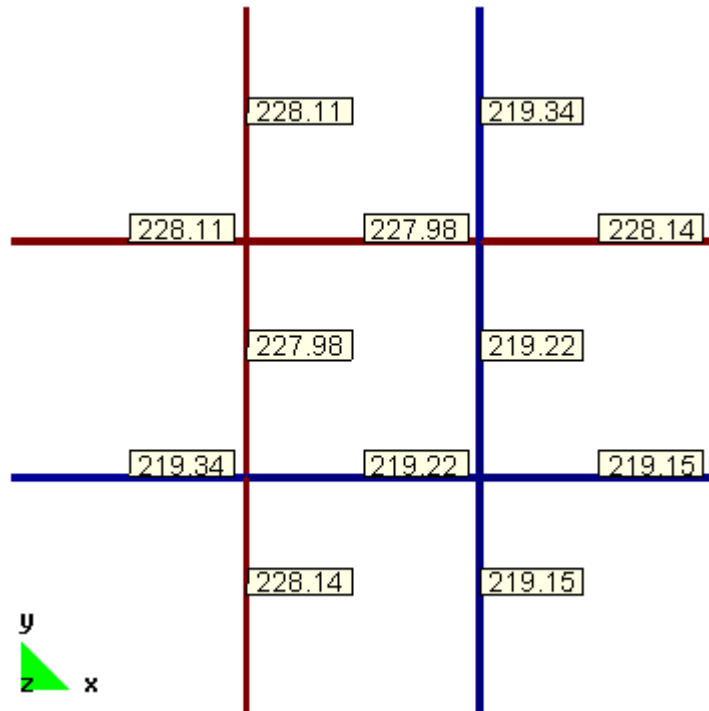


Figura 4.23. Tensiones obtenidas, en rojo los elementos más traccionados. Tensión en [N].

En la figura 4.24 se compararán los desplazamientos obtenidos en los nudos libres. Dada la geometría, condiciones de contorno y cargas del problema los resultados obtenidos, tanto desplazamientos como esfuerzos, deberán ser simétricos respecto el eje “ab”. Cabe destacar que la metodología propuesta respeta absolutamente dicha condición.

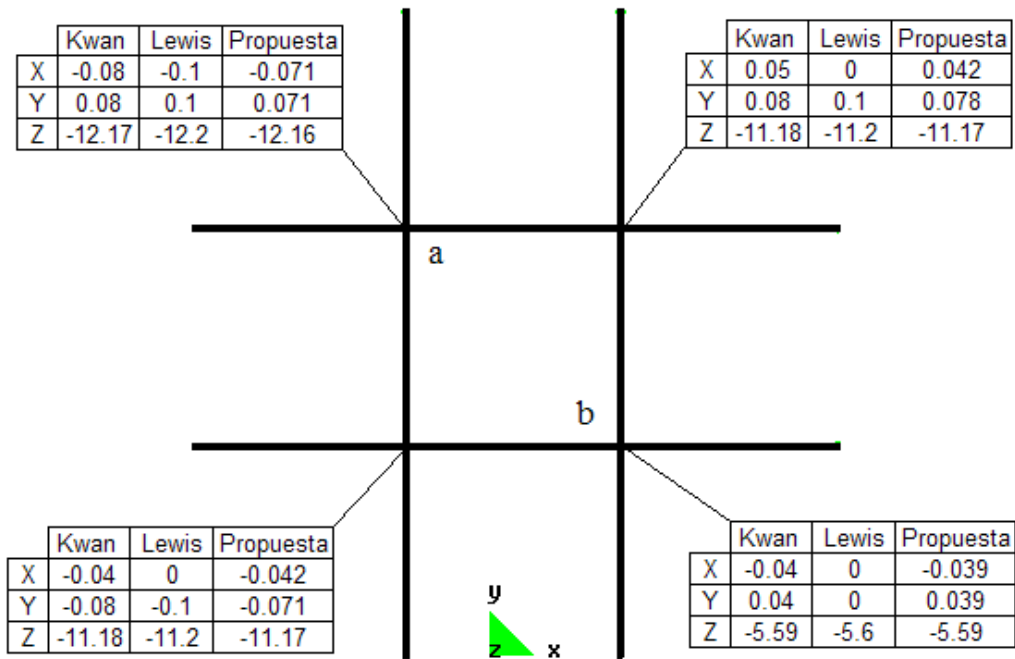


Figura 4.24. Comparación de los desplazamientos [mm] obtenidos.

Se ha adoptado por una resolución directa, sin emplear esquemas de relajación o procesos incrementales de carga. Las gráficas de convergencia se muestran en las figuras 4.25. los criterios de convergencia utilizados han sido los descritos en (4.3, 4.4). En este caso el criterio que ha detenido el proceso ha sido el de desplazamientos, obteniendo la convergencia en tan solo 4 iteraciones. Teniendo en cuenta que se ha resuelto un sistema no lineal de 12 incógnitas se pone de manifiesto la eficiencia de la metodología desarrollada.

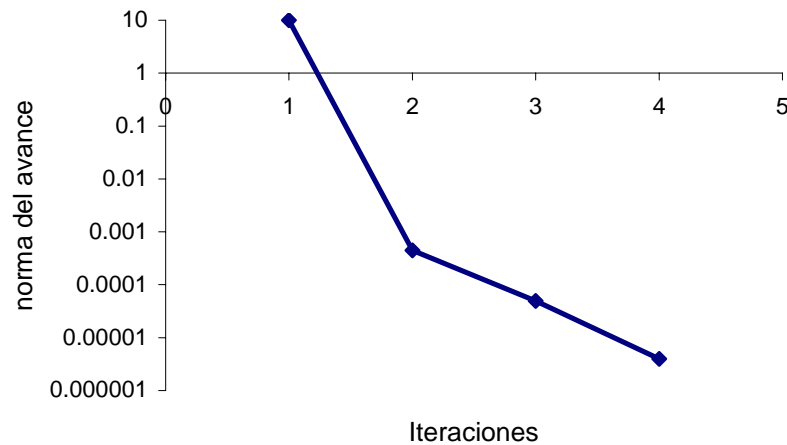


Figura 4.25. Evolución del residuo del avance.

4.8 Ejemplo 7. Cálculo de una red de moderada complejidad.

Los ejemplos realizados anteriormente han tenido por objetivo estudiar el comportamiento del elemento de cable desarrollado comparando los resultados obtenidos con los de otros autores. Es conveniente para poder realizar un estudio comparativo realizar ejemplos simples en los que influyan pocas variables para permitir un análisis claro de los resultados obtenidos.

A continuación se tratara un caso de una mayor complejidad con dos objetivos: el primero mostrar la capacidad del algoritmo desarrollado en situaciones que exijan una cierta eficiencia en la estrategia y el cálculo para poder ser abordados. El segundo es el de ofrecer un caso que no se encuentra en la bibliografía para que pueda ser empleado como ejemplo de comparación por otros autores.

En la figura 4.26 se muestra una red de cables contenida en un plano horizontal en la cota $Z=0$, formada por una cuadrícula de 82×41 celdas rectangulares de 2×1 m cada una. Dicha malla es cruzada diagonalmente por otra serie de cables. Todas las intersecciones entre cables son solidarias, es decir, todos los elementos que convergen en una unión se transmiten los esfuerzos entre sí a través del nodo común a ellos.

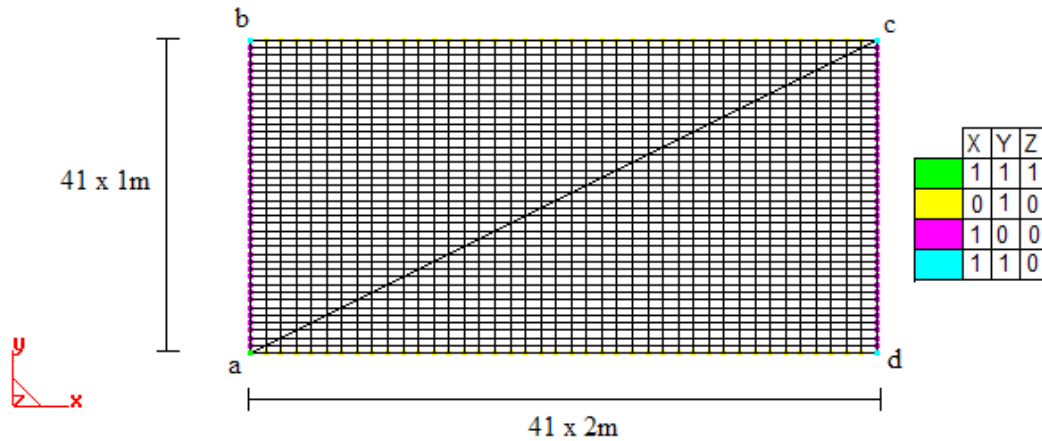


Figura 4.26. Condiciones de contorno y geometría inicial. (1 indica movimiento coaccionado y 0 indica movimiento libre)

Las líneas *ab*, *bc*, *cd* y *da* son planos de simetría verticales, por lo que los nodos situados sobre estas líneas tienen el desplazamiento perpendicular al plano vertical que pasa por ellos coaccionado. Los puntos *b*, *c* y *d*, debido a que están en la intersección de dos planos de simetría verticales sólo podrán moverse en vertical. El punto *a* está fijo y todos los otros nodos situados en el interior del contorno pueden moverse libremente. Tras imponer las condiciones de contorno problema consta de 5123 grados de libertad

Los cables tienen una rigidez de 100kN, y tienen un peso propio aplicado de 50N/m.

Se ha empleado el criterio de convergencia mostrado en (4.3, 4.4). El ejemplo ha sido calculado de forma directa, sin haber tenido que emplear ningún esquema de relajación, habiendo realizado 9 iteraciones para obtener la convergencia, en este caso el criterio que ha activado la parada ha sido la del residuo de la norma de los desplazamientos. En la figura 4.27 se muestra la malla obtenida. El descenso vertical en el punto *b* ha sido de 29.5775m, en el punto *d* ha sido 43.7936m y en el punto *c* ha sido 52.5924m.

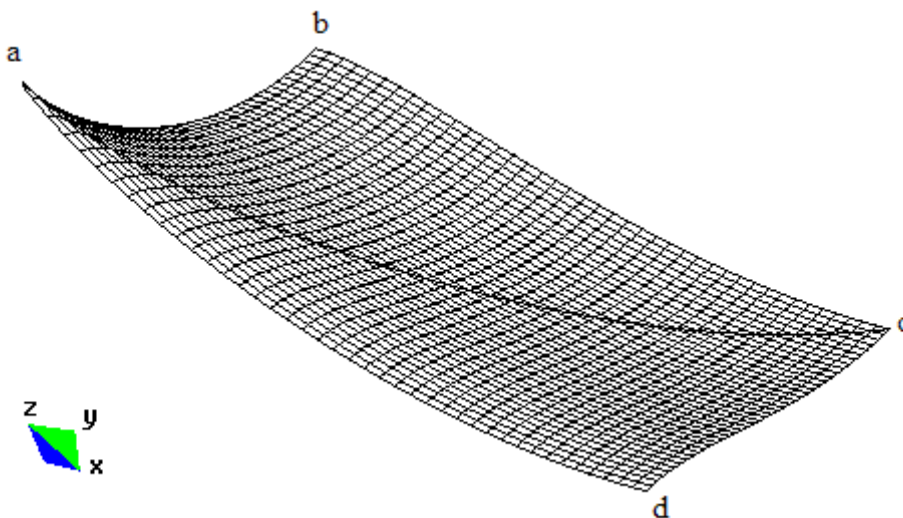


Figura 4.27. Malla deformada.

Aprovechando las condiciones de contorno impuestas en las líneas bc y cd se ha realizado una construcción que representa una malla rectangular suspendida por sus esquinas. En las figuras 4.28 y 4.29 se aprecian una vista lateral y frontal respectivamente de la malla reconstruida.

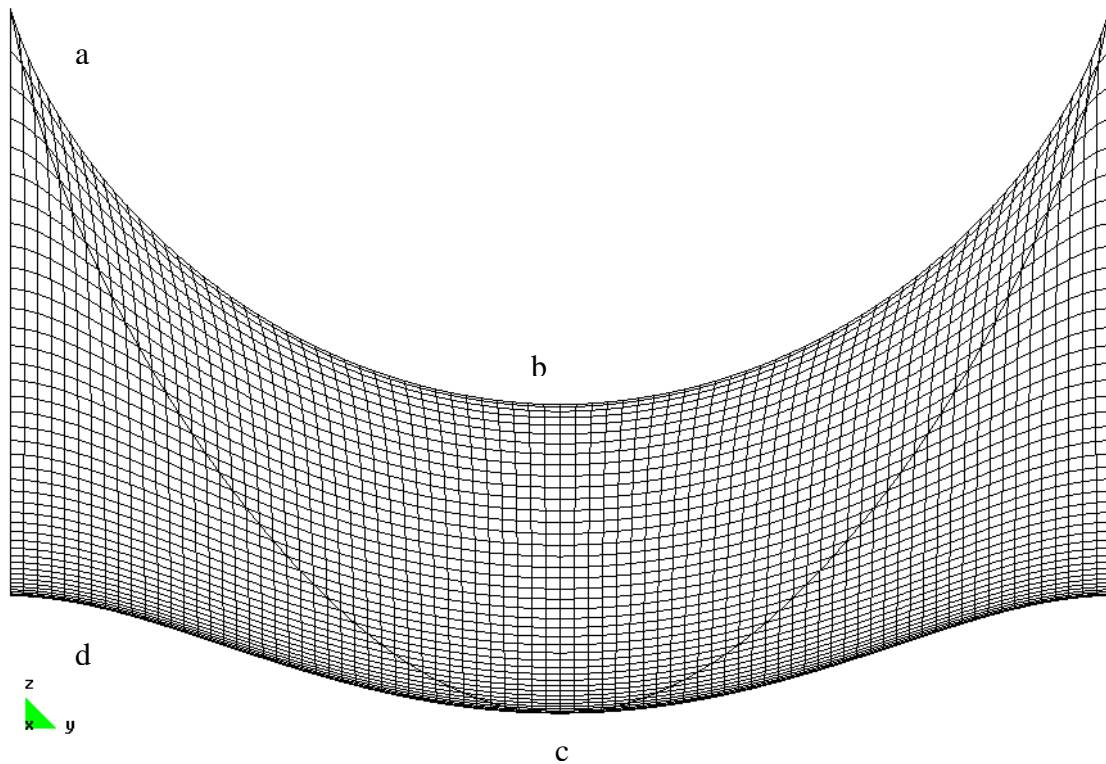


Figura 4.28. Vista lateral de la malla.

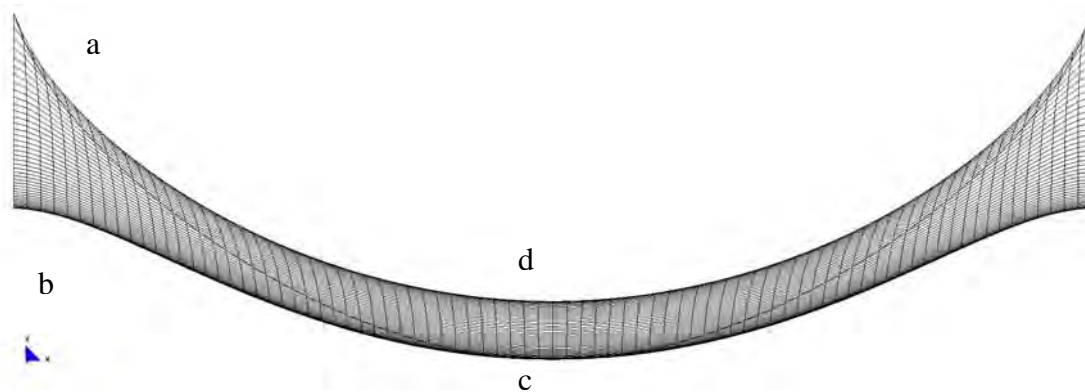


Figura 4.29. Vista frontal.

En la figura 4.30 se puede ver la forma y las tensiones resultantes. El perfil obtenido recuerda la de una bóveda de crucería. De hecho Heyman (1995) reproduce la forma de una bóveda de estas características empleando la analogía de un modelo colgante.

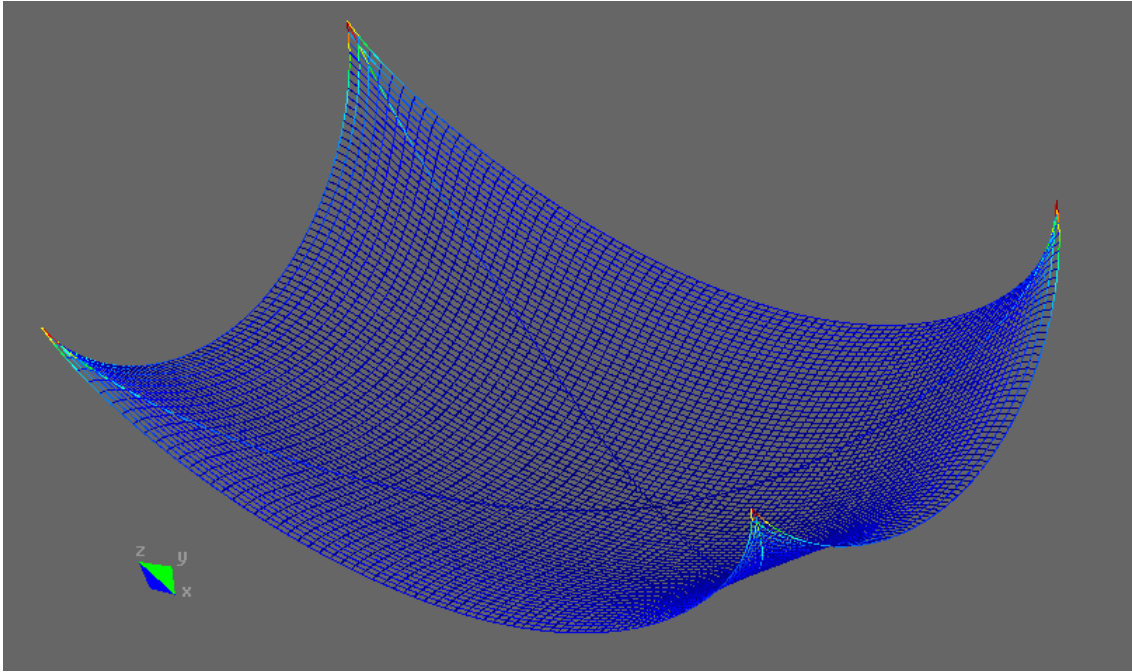


Figura 4.30 Malla sometida a peso propio y suspendida por sus extremos.

En la figura 4.31 se representa el mapa de tracciones obtenido por simetría del modelo inicial. Como es lógico los esfuerzos se acumulan en las esquinas, puesto son los únicos puntos que pueden transmitir la carga de peso propio a los apoyos

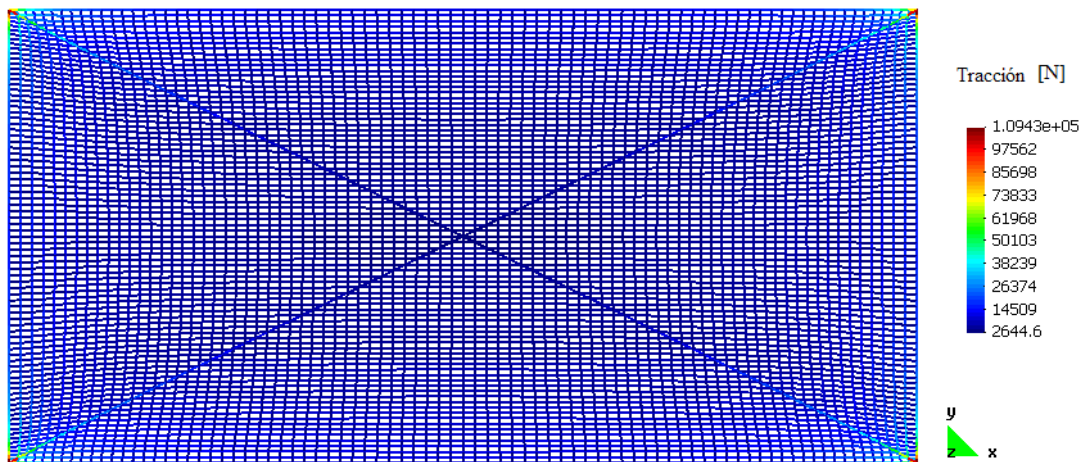


Figura 4.31. Mapa de tensiones del modelo formado aprovechando las simetrías del modelo inicial

En la figura 4.32 se muestra una mapa de tracciones acotado inferiormente, de manera que se pueden ver con mayor claridad los elementos más cargados. No se aprecian en la parte central de la malla los elementos ya que están muy descargados y su tracción es menor a la mínima que aparece en la leyenda. Se observa que a medida que los cables se alejan del centro se traccionan más los que se apoyan sobre las diagonales, siendo estos responsables de transmitir la carga de los elementos menos traccionados hacia las diagonales, canalizando estas finalmente la carga global hacia los apoyos. En cambio en la zona cercana a los apoyos se observa que la transmisión de la carga se bifurca buscando los cables del contorno que a su vez se dirigen directamente la zona del apoyo.

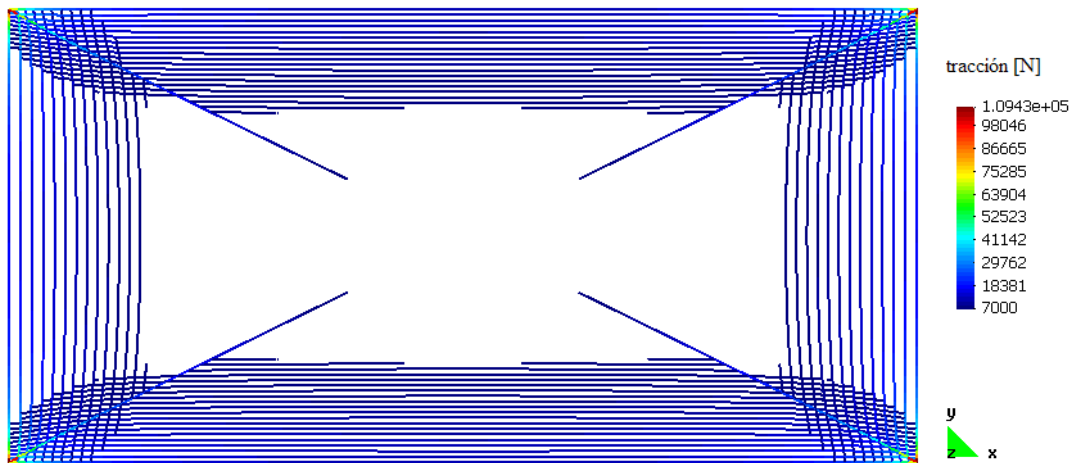


Figura 4.32. Mapeado de tracciones acotado inferiormente

En la figura 4.33 se pueden apreciar las reacciones en los apoyos, teniendo un valor la reacción vertical en el punto *a* de 262884N. No se aprecian las reacciones horizontales por un efecto de escala.

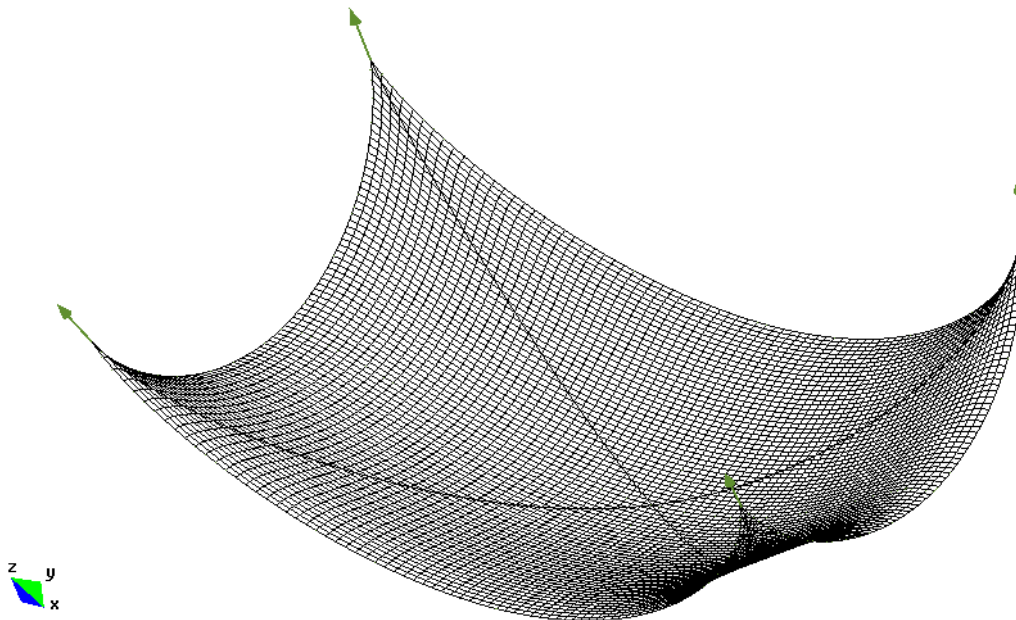


Figura 4.33. reacciones en el modelo generado por simetría del inicial.

En la figura 4.34 se pueden ver las reacciones horizontales de la malla original según los ejes X e Y. Se aprecia que se concentran básicamente en la zona de los apoyos, obteniendo un valor máximo en el punto *a* de $R_x = 11773\text{N}$ y $R_y = 17215\text{N}$.

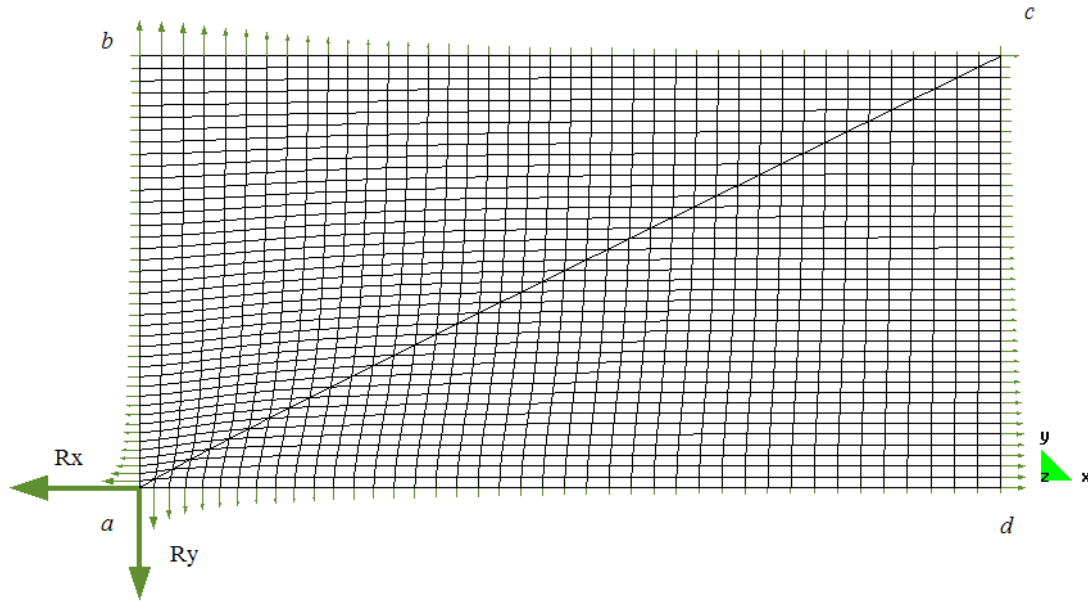


Figura 4.34. Reacciones horizontales. Se observa su concentración en el punto de apoyo *a*.

Finalmente se presenta la gráfica del proceso de convergencia en la figura 4.35. Se aprecia que el comportamiento es de 2º orden, como era de esperar puesto en la resolución del sistema no lineal se emplea el método Newton-Rapson con la evaluación explícita de la jacobiana. Empleando un ordenador portátil dotado de un procesador *Mobile Intel penium 4A* de 3.06GHz, con una velocidad de lectura en memoria RAM de 1353 Mb/s y un velocidad de escritura en RAM de 535Mb/s, se han necesitado 12 segundos en correr este ejemplo.

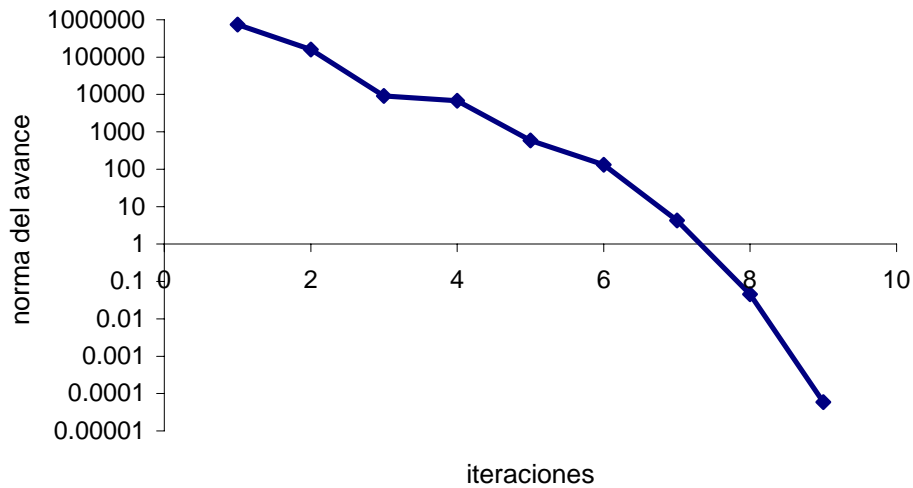


Figura 4.35. Gráfica de convergencia.

4.9 Conclusiones obtenidas a partir de los ejemplos realizados.

De los ejemplos desarrollados se desprenden diversas conclusiones que se enumeran a continuación:

- Los resultados que ofrecen los diferentes casos analizados permiten concluir que el grado de precisión y exactitud en la modelización de estructuras formadas por cables mediante la técnica implementada es muy satisfactoria. El comportamiento de un cable elástico puede ser perfectamente modelado por el elemento propuesto sin limitaciones ni aproximaciones. La comparativa con otros ejemplos encontrados en la bibliografía muestra el alto grado de aproximación en los modelos comparados.
- El comportamiento numérico los diferentes algoritmos implementados para simular redes complejas de cables es muy satisfactorio, tanto en la inversión de las expresiones cinemáticas como del algoritmo global de resolución. La estabilidad en la resolución del problema consistente en encontrar la posición de equilibrio de redes de cables tiene la cualidad de ser casi siempre convergente. Se ha obtenido un equilibrio entre la velocidad de convergencia y la estabilidad mediante la combinación de algoritmos siempre convergentes para la resolución del sistema de ecuaciones originado por la inversión de las expresiones cinemáticas de los elementos y de métodos de segundo orden para solucionar el sistema global de ecuaciones generado.
- El empleo de la matriz tangente analítica desarrollada en el presente trabajo aumenta de forma decisiva la estabilidad y velocidad del proceso de convergencia, especialmente si comparamos dicho comportamiento con el obtenido si se emplea la matriz tangente evaluada numéricamente.
- Se ha obtenido una elevada eficiencia respecto la inversión de tiempo de CPU necesaria para resolver los problemas planteados. Se ha comprobado que el factor limitante en cuanto obtener mejoras en el tiempo de computación ha sido la resolución del sistema lineal en cada iteración. Se ha empleado un esquema de almacenamiento simétrico Sky-Line acoplado a un esquema Cholesky de resolución apropiado a las propiedades de la matriz obtenida, simétrica y definida positiva. La optimización de dicho proceso se escapa al contexto del presente trabajo.

Parte II

Análisis de la estabilidad de estructuras de obra de fábrica

Capítulo 5

Estado del conocimiento sobre el cálculo de obra de fábrica

5.1 Introducción

El presente capítulo describe el estado del conocimiento sobre técnicas tanto para la modelización del comportamiento de las construcciones de obra de fábrica a nivel estructural como para la modelización de estructuras de cables.

Dentro del bloque que describe el estado del conocimiento de las técnicas utilizadas para la modelización del comportamiento de la obra de fábrica a escala estructural se incluyen propuestas previamente efectuadas en relación con la modelización y análisis de estructuras de obra de fábrica de tipo esquelético. Puesto que el método que se pretende desarrollar surge de la revisión de técnicas históricas, basadas en modelos analógicos y gráficos, se estudiarán detenidamente los procedimientos científicos utilizadas en el pasado para estudiar y verificar de la estabilidad de obras de fábrica.

El estado del conocimiento de las técnicas de cálculo de redes de cables describirá no sólo técnicas para tratar problemas de múltiples grados de libertad (redes) sino que tendrá que hacer referencia al análisis y modelización del comportamiento tanto de un elemento de cable aislado como de su combinación con otros elementos tipo barra. Dicha combinación permitirá mejorar la modelización de las estructuras de obra de fábrica que tengan incorporados elementos como zunchos o tirantes que trabajen a tracción, así el modelo antifunicular podrá modelar dichos elementos mediante barras que trabajen a compresión. Se describirán formulaciones estáticas y dinámicas así como las simplificaciones realizadas que permiten una formulación matemática más sencilla.

5.2 Modelización del comportamiento de la obra de fábrica mediante modelos analógicos.

5.2.1 Modelos antifuniculares.

Uno de los primeros métodos para comprobar de manera científica la estabilidad de una construcción de obra de fábrica ha sido el método de la antifunicular de las cargas, es

decir realizar un modelo funicular de hilos, con una distribución de cargas semejante a la construcción a analizar y comprobar que la inversa del modelo funicular permanezca en el interior del contorno de la construcción. Precursor de este método fue Simon Stevin quien en 1586 inició el estudio de polígonos funiculares de fuerzas, véase figura 5.1.

Las primeras aplicaciones de este método se concentraron en el diseño de arcos de fábrica para la construcción de puentes (Huerta, 1996; Irvine, 1981; López G., 2001). Robert Hooke en 1675 ya hacia publica, aunque de manera críptica a través de un anagrama, la relación entre la forma de una catenaria y la forma de la rosca de un puente, afirmando que ese era el contorno más apropiado para la construcción de arcos de obra de fábrica. Posteriormente Gregory (1698) formula de manera independiente el principio bajo el cual se puede utilizar el principio de la antifunicular para verificar o diseñar arcos de obra de fábrica, incluso establece la analogía entre esfuerzos de tracción en el modelo funicular y la reacción en estribos de un arco.

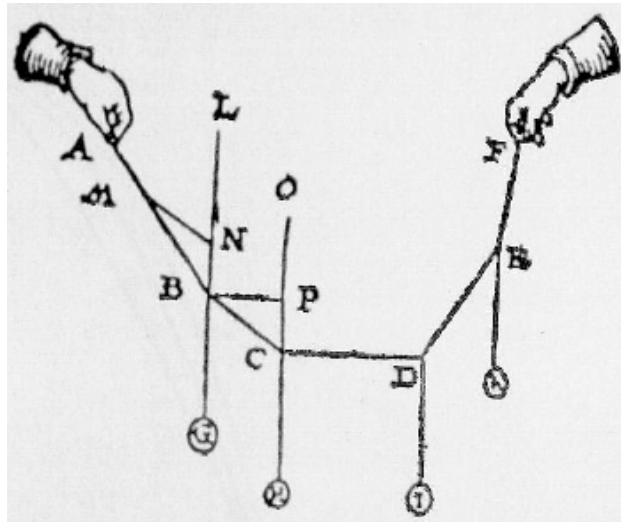


Figura 5.1. Polígonos funiculares empleados por Stevin en 1586 (Serrallonga, 2003)

Es Stirling en 1717 quien demuestra por métodos geométricos la relación entre la estabilidad de un arco de obra de fábrica y el perfil que define una catenaria. Estos descubrimientos son aplicados por científicos de la época para diseñar construcciones o verificar su estabilidad. Por ejemplo Wren aplica el principio descrito por Hooke para diseñar la cúpula de San Pablo en Londres y Poleni aplica el mismo principio, pero referenciando a Stirling, en su famoso dictamen sobre la estabilidad de la cúpula de San Pedro en el Vaticano. Tal como indica Huerta (1990) en su tesis doctoral, Perronet también aplica el principio de la antifunicular para encontrar la forma del arco del puente de Neuilly y probablemente Rondelet también lo emplea para definir la cúpula de Santa Genoveva.

En el siglo XIX nos encontramos con aplicaciones a gran escala del método de la antifunicular (Huerta, 1990). Hubsch desarrolla el método y lo aplica en el diseño de las bóvedas y contrafuertes de la iglesia de Bulach y catedral de Rottenburg en Wurtemberg. El tratado de Hubsch es recogido por el tratado de arquitectura de Breyman. Por otro lado Heinzerling rigoriza el método de la antifunicular en su publicación de 1869.

La potencia del método a la hora de elaborar modelos estructurales acertados y su capacidad de lograr formas estéticamente aceptadas por los arquitectos hace que éste determine las formas tanto en la arquitectura expresionista de Rudolf Steiner como en el modernismo de Antoni Gaudí (Huerta, 1990; Ràfols, 1929; Roca, 2002). En la figura 5.2 se muestra una fotografía de la maqueta realizada por Gaudí para realizar el proyecto de la Iglesia de la Colonia Güell. En ella Gaudí empleó cuerdas y telas para dotar a la estructura resultante del trazado antifunicular de las cargas que en la maqueta se consideraban mediante la aplicación de pesos a escala mediante bolsitas rellenas de balines colgadas de la maqueta, tal como se aprecia en la siguiente figura.



Figura 5.2. Maqueta antifunicular de la Colonia Güell

Existen aplicaciones de esta metodología en su vertiente computacional, como por ejemplo la modelización de la maqueta colgante de un estudio previo de la iglesia de la Colonia Güell, mostrada en la figura 1.5, realizada por Serrallonga (2003) mediante el empleo de modelos computacionales que emplean elementos de barra para simular el comportamiento de los hilos. El modelo realizado consta de 834 nodos, 1003 barras y en su resolución se empleó más de una hora y media de tiempo de computación de ordenador dotado de un procesador Pentium IV a 1.7GHz. En la figura 5.3 se puede apreciar el modelo resultante. Cabe destacar el alto grado de aproximación del modelo numérico respecto la maqueta real realizada por Jos Tomlow.

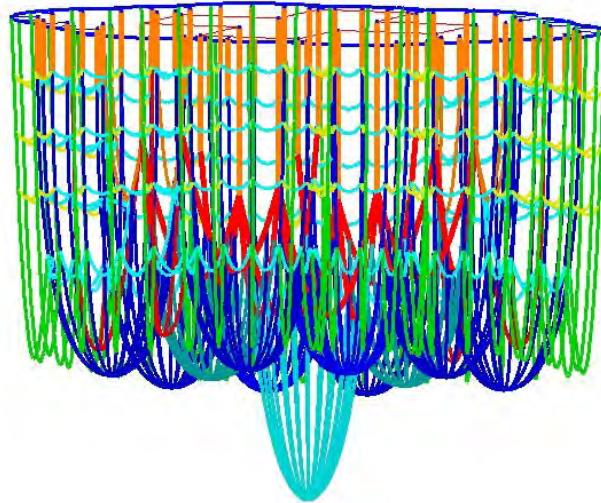


Figura 5.3. Modelo computacional de la maqueta funicular mostrada en la figura 1.5.

Frei Otto fue un arquitecto pionero en el diseño y construcción de estructuras que trabajan a tracción. Entre sus trabajos destaca el proyecto de las cubiertas del Estadio Olímpico de Munich. En 1969, dada la limitación computacional que existía en la época para analizar complejos problemas numéricos que requerían el análisis y estudio del perfil de las superficies mínimas, realizó diversos modelos analógicos de dichas superficies mediante películas jabonosas para así producir los diseños de las cubiertas como la mostrada en la figura 5.4.



Figura 5.4. Cubiertas del Estadio Olímpico de Munich, reproducida de (Tibert, 1999).

Andrés y Ortega (1993) realizan una generalización y actualización de la técnica que empleó Gaudí. Dicha actualización consiste en realizar modelos analógicos de dos dimensiones empleando placas de un material termo-plástico. El proceso consiste en calentar dichas placas con lo que el módulo elástico del material baja, perdiendo toda rigidez a flexión, comportándose como un chicle de manera que adopta formas antifuniculares de las cargas aplicadas.

5.2.2 Modelos basados en la fotoelasticidad

Robert Mark (1982) en los años setenta llevó a cabo un estudio mediante modelos reducidos fotoelásticos de las secciones transversales de una serie de catedrales góticas como Amiens, Beauvais, Bourges, Chartres y Palma de Mallorca. éste fue el primer intento de modelizar de forma générica las edificaciones góticas, aportando luz sobre el comportamiento de estas construcciones frente diversas acciones y analizando el papel que jugaban los diferentes elementos constructivos utilizados (pilares, arbotantes, contrafuertes...) y comparando diferentes diseños entre sí. En la figura 5.5 se puede observar el resultado de un análisis fotoelástico de el pórtico central de la Catedral de Mallorca.



Figura 5.5. Modelo fotoelástico de la nave central de la Catedral de Mallorca(Mark, 1982)

5.2.3 Modelos a escala reducida

Los modelos a escala reducida han sido utilizados desde la antigüedad, las primeras referencias proceden de la época griega aunque posiblemente fueron anteriores.

La carencia de métodos basados en la mecánica racional no fueron obstáculo para que los constructores de la Edad Media erigiesen las fabulosas catedrales góticas. La realización de modelos a escala reducida sirvió para que los constructores dedujesen aspectos que luego llevaron a la práctica a escala real consiguiendo un alto grado de perfeccionamiento estructural. Construcciones como la Catedral de Palma de Mallorca parecen haber sido diseñadas a partir de modelos a escala reducida, cosa que explicaría su elevado grado de optimización.

Rondelet describe sus experiencias con modelos de bóvedas y arcos a escala reducida. Su objetivo era establecer reglas empíricas para facilitar el diseño de arcos y bóvedas.

Santiago Huerta (1990) describe un método muy simple que permite evaluar la estabilidad de estructuras que puedan ser analizadas a partir de su sección transversal. El método consiste en realizar un modelo a escala reducida de las piezas que componen la estructura y ensamblarlas entre sí en un plano horizontal. Luego este plano se va levantando progresivamente hasta que el modelo se apoya en sí mismo, de la misma

manera que lo hace el modelo real. Este simple modelo ha permitido a Huerta describir los diferentes modos de colapso en arcos.

Frei Otto como dice Huerta (1990) utiliza también modelos a escala reducida para determinar el grado de seguridad de construcciones de obra de fábrica frente acciones horizontales. El método consiste básicamente en construir un modelo semejante a la construcción original sobre un plano inclinado. La inclinación máxima que permita el modelo establecerá su grado de estabilidad frente acciones horizontales. Frei Otto especula sobre la posibilidad que los constructores antiguos utilizasen este método para diseñar construcciones que han sobrevivido a múltiples seísmos.

5.3 Modelización de construcciones mediante Modelos Analíticos.

5.3.1 Análisis límite.

5.3.1.1 Introducción

Este método basado en las teorías del análisis plástico de pórticos de acero pretende establecer un método que determine una cota inferior de la carga última que es capaz de soportar una estructura.

En experimentos realizados en Inglaterra se determinó la gran sensibilidad de los resultados de los cálculos elásticos a pequeñas variaciones en las condiciones de contorno. En cambio, la carga final se mantenía sensiblemente igual con independencia de las mismas perturbaciones iniciales. Este hecho ha sido el que ha determinado la orientación de las investigaciones para establecer una sólida teoría plástica que permita determinar la carga última de una estructura.

Kooharian fue el primero en aplicar las teorías del análisis plástico de pórticos de acero al análisis de obras de fábrica pero ha sido Jacques Heyman el principal impulsor de la teoría del análisis límite aplicada a obras de fábrica (Huerta, 1990).

5.3.1.2 Definición de la línea de empujes o de presiones.

5.3.1.2.1 Planteamiento

Las principales características del material de obra de fábrica son su baja resistencia a tracción combinada con una apreciable resistencia a compresión. Éste hecho generalmente va unido al bajo nivel tensional al que están sometidas dichas estructuras, dado lo generoso de las dimensiones de los elementos que normalmente las forman.

Los dos factores anteriores acaban determinando que la estabilidad de estas estructuras no depende tanto de un control de las tensiones máximas que aparecen en su interior, sino más bien, en que la geometría de la estructura permita conducir adecuadamente las cargas hacia los cimientos.

Dicho proceso de “conducción de cargas” se puede entender mediante la aplicación del modelo matemático de líneas de empuje, basada en el equilibrio de fuerzas internas de un sólido, es decir, de las resultantes aplicadas en una sección arbitraria de la misma.

5.3.1.2.2 Concepto y cálculo de líneas de empuje

Este concepto fue desarrollado de forma simultánea e independiente por Gerstner en Alemania, Moseley en Inglaterra y Mery en Francia entre 1830 y 1840 precisamente para obtener un proceso que permitiese explicar el colapso de arcos de piedra. Según Huerta (1996) la contribución de Gerstner fue limitada y presenta algunas incorrecciones. El tratamiento de Moseley es muy riguroso y altamente matemático y constituye el primer intento con éxito de modelar matemáticamente un conjunto de bloques rígidos en contacto entre sí mediante juntas secas. El trabajo de Mery está orientado a clarificar y rigorizar ideas, realizando multitud de ejemplos de líneas de empuje de arcos límite, es decir arcos que dispongan de un perfil de rosca adecuado a las cargas para permitir la estabilidad del mismo.

Cabe decir que la línea de empujes es producto de un cálculo meramente estático y totalmente independiente de las ecuaciones constitutivas de los materiales que forman la estructura objeto del cálculo o de los movimientos de sólido rígido que experimenten alguna de sus partes. Este factor limita la aplicabilidad del método a estructuras poco deformables, es decir donde la geometría deformada coincida sensiblemente con la inicial sin deformar. Esta condición es necesaria puesto que el cálculo de las líneas de presión se realiza partiendo de la geometría inicial y en consecuencia corresponde su esquema estático inicial debiendo ser éste representativo del esquema estático final, o sea del real, por lo que tanto en cuanto la distribución de cargas en la configuración final se asemeje más al inicial, el resultado será más representativo del esquema estático real de la estructura.

Consideremos un objeto prismático obtenido a partir de un apilamiento de sillares recibidos con juntas secas, por ejemplo el mostrado en la figura 5.6 extraída de (Huerta, 1996). Dicho objeto está sometido al peso propio y a un conjunto de fuerzas exteriores. Consideremos ahora que dicha estructura se corta según una serie de planos que le originan una serie de secciones. Llegados a este punto podemos obtener el equilibrio estático para cada una de las partes resultantes originada a partir de la división por los planos de corte considerados. Encontrando dicho equilibrio se obtendrá la fuerza resultante aplicada en cada sección de corte. Por tanto, se puede definir la línea de empujes de una estructura prismática como el lugar geométrico formado por los puntos de aplicación de las fuerzas resultantes que aparecen en las secciones originadas por una familia arbitraria de planos que cortan dicha estructura. Por tanto el trazado de dicha curva dependerá tanto de la propia geometría de la estructura como de la familia de planos de corte considerado (Huerta, 1990).

En la figura 5.6 se observa como se obtiene la línea de presiones a partir de una familia de planos de corte, que en este caso coinciden con las juntas entre elementos. Como se puede observar tenemos un sólido formado por el apilamiento de una serie de sillares independientes señalados en la figura con las letras rojas A,B,C,D,E,F y G. Las letras en negrita A,B,C,D y E designan las resultantes de fuerzas en cada sección 1-2, 3-4,5-6... siendo designadas con las letras a,b,c,d,e y f los puntos de paso de dichas fuerzas

resultantes por dichas secciones. Entonces la línea de empujes (o presiones) será la poligonal formada por los puntos a,b,c,d,e y f, grafiada en color azul.

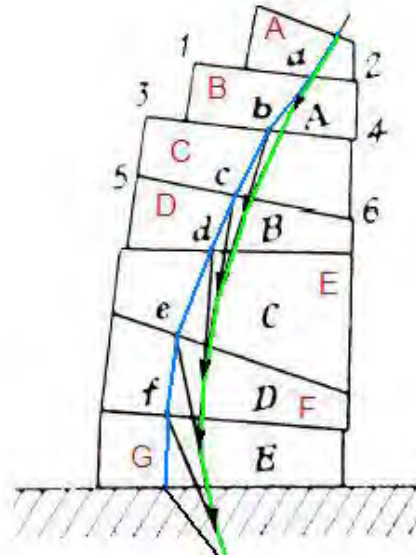


Figura 5.6 Trazado de la línea de presiones (línea azul) y línea de inclinaciones (línea verde) en una estructura formada por sillares (Huerta, 1996).

5.3.1.2.3 Línea de inclinación de los empujes.

Se puede definir otra línea que caracteriza el estado estático de una estructura y permite analizar su estabilidad. Una vez se dispone de la línea de empujes y por tanto del conjunto de resultantes en cada sección se puede definir la línea de inclinación de los empujes como la línea envolvente de las resultantes por lo que en cada punto de dicha línea la resultante en cada sección será tangente a esta. En la figura 5.6 se puede apreciar la línea de inclinación de empujes graficada en color verde.

La determinación del trazado de las líneas de presión y de inclinaciones permite conocer el estado estático en el que se encuentra una estructura de obra de fábrica y por tanto, combinado con los teoremas plásticos que posteriormente se expondrán, permiten determinar su nivel de estabilidad, puesto que dichas líneas aportan información sobre la magnitud de la resultante, su punto de aplicación y su orientación.

5.3.1.2.4 Identificación de las líneas de presión con líneas funiculares .

Robert Hooke en 1675 fue quien planteó por primera vez la relación entre la forma de la catenaria y la de un arco estable. Hooke afirmó “*Ut pendet continuum flexile sic stabit contiguum rigidum inversum*” (extraído de O'Dwyer, (1999)) que traducido dice: “Del mismo modo que cuelga un hilo flexible, así, pero invertido se sostendrá el arco rígido”. Sin embargo Hooke no sustentó dicha afirmación con ninguna deducción analítica o geométrica y se supone que la hizo más bien por su intuición y experiencia (Huerta, 1996; Irvine, 1981; López, 2001).

Posteriormente, en 1698 Gregory formulo de forma independiente, puesto que Hooke formulo su principio en forma de anagrama que fue descifrado en 1705, el mismo principio que Hooke incluso va más allá e intuye el principio de la seguridad del cálculo plástico “ Sólo la catenaria es la forma correcta de un arco. Y si los arcos de otras formas se sostienen es por que en su espesor hay contenida una catenaria”. La intuición de Gregory va más allá y utiliza la analogía para determinar las fuerzas que deben soportar los estribos de los puentes pues afirma “ La fuerza en que la cadena tira hacia adentro en el arco empuja hacia fuera” (Huerta, 1996; López , 2001).

La correspondencia entre el trazado de las líneas de presión y el trazado de un modelo funicular estáticamente equivalente la demostró en 1717 Sirling mediante una deducción de tipo geométrico (López G., 2001).

Stirling realiza la siguiente deducción: Consideremos el conjunto de esferas en equilibrio estático que se muestra en la figura 5.7. Consideremos los puntos de tangencia entre las esferas; estos son los puntos de paso de las fuerzas que actúan entre las esferas y de acuerdo con la definición de línea de presiones, estos puntos forman parte de esta línea.

Consideremos que estas esferas van reduciendo su diámetro y a la vez aumentan en número. Siguiendo este proceso y llevándolo al límite se acabará obteniendo un trazado de una curva que, para el caso de que el diámetro de las esferas sea igual en todas ellas, corresponde al de una catenaria, tal como se puede observar en la figura 5.7.

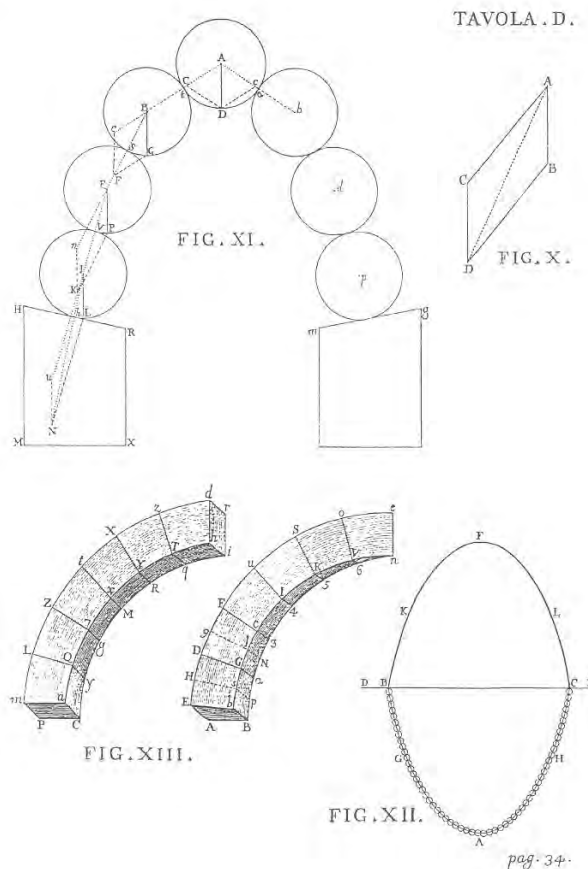


Figura 5.7 Equivalencia entre la línea de presiones y el trazado de una curva catenaria.

El caso que se ha descrito correspondería al de un arco con el peso uniformemente repartido a lo largo de su directriz. En el caso que el peso variase a lo largo de esta se debería desarrollar un modelo estáticamente equivalente y siguiendo una deducción equivalente se llegaría a un trazado igualmente antifunicular. Esta casuística se puede apreciar en las figuras realizada por Tomlow (2002) donde muestra gráficamente la relación entre diferentes modelos estructurales y sus modelos funiculares equivalentes. La figura 5.8 muestra algunos ejemplos sencillos. Se hace evidente que la distribución del peso en el modelo colgante repercute directamente sobre la forma del arco que representa.

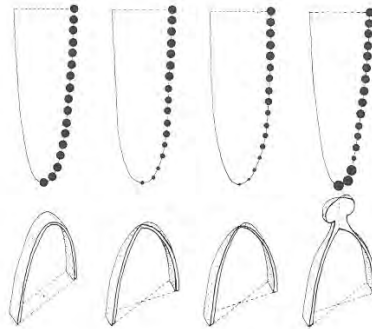


Figura 5.8 Diferentes modelos funiculares adecuados a las estructuras que representan.

Este procedimiento fue utilizado por Poleni en su famoso estudio sobre la estabilidad de la cúpula de san Pedro de Roma. Para realizar el análisis sobre la estabilidad de la famosa cúpula, en tela de juicio por las fisuras aparecidas en ella, véase figura 5.9, se dividió en gajos la cúpula para así obtener una serie de arcos que deberían ser estables por si mismos. En este caso Poleni tuvo que realizar un modelo formado por una cadena de la que se colgaban pesos proporcionales a la distribución de masa de los gajos. Posteriormente se comparó dicho modelo con el perfil resistente de la cúpula, para finalmente establecer que esta era estable puesto su modelo funicular equivalente se inscribía en el interior del perfil resistente (Poleni, 1743).

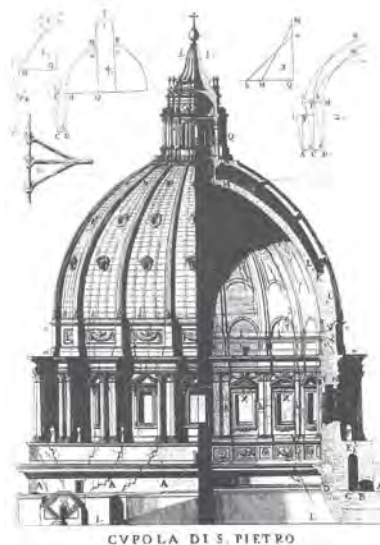


Figura 5.9 Esquema de la cúpula de San Pedro donde se muestran las grietas en su tambor.

Es interesante hacer hincapié en el concepto de “Modelo funicular equivalente” de este ejemplo histórico. Inicialmente Poleni empleó un modelo funicular compuesto por un cable de donde se suspendían cuentas esféricas de igual tamaño, tal como se muestra en la figura 5.10. Dicho modelo (graficado en la figura 5.10 en color azul) no representaba la distribución de peso propio de los arcos en que se dividió la cúpula para su análisis puesto el peso de las dovelas variaba a lo largo de los gajos disminuyendo a medida que se acerca al centro de la cúpula. Este modelo no encajaba en el perfil resistente de la cúpula, cosa que hizo recapacitar a Poleni. Se realizó entonces un modelo (graficado en color rojo en la figura 5.10) estáticamente equivalente a la estructura objeto de verificación compuesto por diversas cuentas de diferente tamaño que reflejaban la distribución de peso de la estructura a verificar. Dicho modelo se situaba en el interior del perfil resistente de la cúpula con lo que Poleni aseveró que éste era el correcto para garantizar su estabilidad.

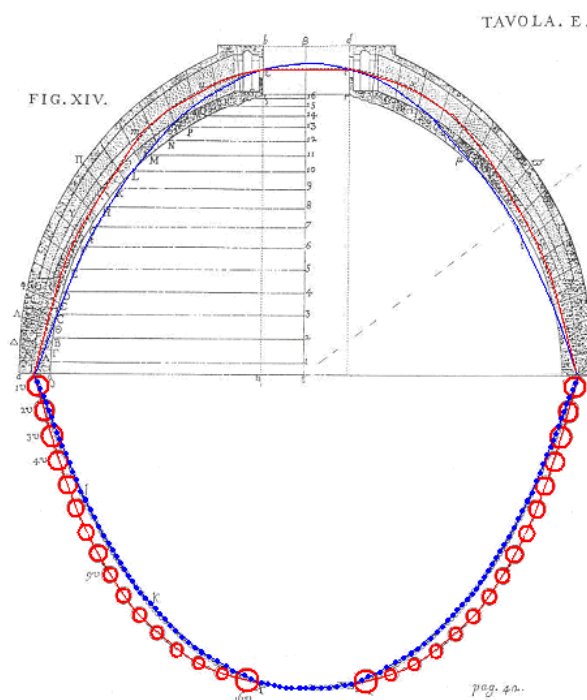


Figura 5.10 Análisis funicular de la cúpula de San Pedro de Roma. (Poleni, 1743).

El razonamiento expuesto por Stirling, es reproducido en términos matemáticos por Huerta (1990) donde se deduce la ecuación general de la catenaria tomando como base la reducción del grosor del canto de una bóveda cualquiera hasta anularlo, concluyendo el equilibrio estático de esta cúpula teórica, aunque éste fuese inestable debido al fenómeno de la abolladura. Realizando este análisis, el trazado de la línea obtenida coincide con la antifunicular de las cargas, es decir, el trazado de una curva funicular sometida al mismo estado de cargas al que esta sometida la estructura. En este caso la línea de presiones, la de pendientes y la funicular obtenida coinciden.

O'Dwyer (1999) extiende el razonamiento anterior para un caso tridimensional y afirma que el perfil que adopta una membrana cargada, por ejemplo la mosrada en la figura 5.11, definirá el contorno ideal de una cúpula sometida a la misma carga pero en sentido contrario, puesto soportará dicha distribución de cargas produciéndose en ella únicamente una distribución de esfuerzos de compresión.

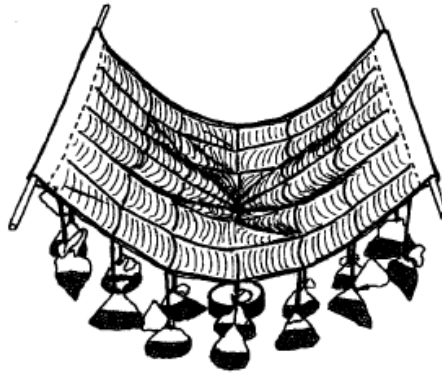


Figura 5.11 Contorno ideal de una cúpula cargada arbitrariamente (O'Dwyer, 1999)

5.3.1.3 Hipótesis básicas del análisis límite.

Heyman (1969, 1982, 1983, 1995, 1998) observó los principios necesarios para poder aplicar la teoría del análisis límite a estructuras de fábrica, estos son:

1. La resistencia a compresión de los elementos que forman la estructura de obra de fábrica es infinita.
2. El colapso por deslizamiento es imposible.
3. La resistencia a tracción es nula.

La primera hipótesis implica que las tensiones en las estructuras de fábrica son muy bajas en relación a su resistencia, lo cual implica que el fallo estructural nunca se podrá producir por aplastamiento del material que forma la estructura. Este principio generalmente no es restrictivo, dadas las bajas tensiones a las cuales se somete el material

En el caso que la tensión admisible a compresión del material pueda ser un factor limitante pudiendo colapsar la estructura por aplastamiento se podrá aplicar este análisis suponiendo una distribución plástica de las tensiones provocadas por la resultante aplicada en la sección. Comparando la tensión máxima encontrada con la distribución propuesta con la admisible podrá determinarse la estabilidad estructural.

La segunda hipótesis supone que el rozamiento entre dovelas es suficiente para evitar el deslizamiento entre sí. Dicha condición implica que la inclinación de la resultante aplicada en un posible plano de deslizamiento está contenida en un cono recto cuyo ángulo de apertura es el doble del ángulo de rozamiento interno entre planos de deslizamiento. Ver figura 5.12.

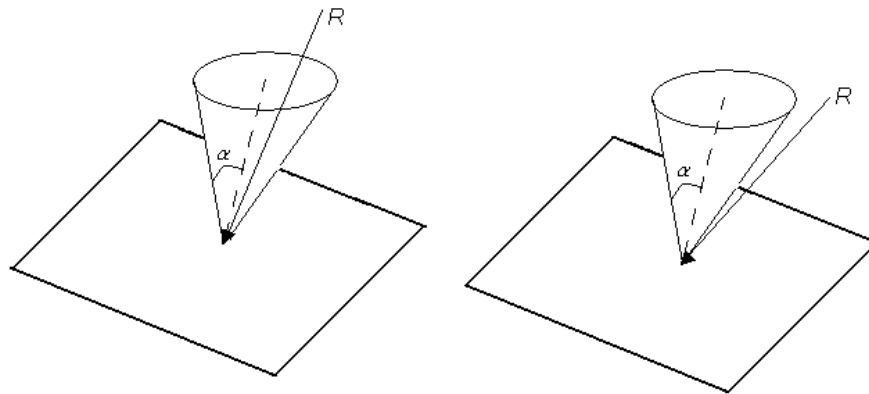


Figura 5.12 Criterio de deslizamiento entre dovelas

La tercera hipótesis queda del lado de la seguridad, puesto que las uniones generalmente no son secas y disponen de mortero que ofrece una pequeña resistencia a tracción.

Tomando como ciertos los tres principios anteriores se puede aplicar los teoremas del análisis plástico al caso de estructuras de obra de fábrica. Estos son:

- Primer teorema (de seguridad) : El colapso no se producirá si en cada caso de carga que actúa sobre la estructura es posible encontrar un estado de equilibrio estáticamente admisible.

En el caso de los arcos este teorema implica que si se puede encontrar una línea de empujes estáticamente admisible dentro del contorno de la estructura, el arco es estable. Con este teorema podemos determinar una cota inferior de la carga de rotura.

- Segundo teorema (de unicidad): El colapso se producirá si se encuentra una configuración de colapso cinemáticamente admisible. Esto quiere decir que cuando se produzcan el número suficiente de rótulas para que la estructura se convierta en un mecanismo, la estructura colapsará. Esto es lo mismo que afirmar que cuando se produzca un mecanismo inestable la estructura colapsará. Se considera que se forma una rótula cuando la línea de presiones se haga tangente o corte el contorno de la estructura.

Heyman en base a estos teoremas establece el coeficiente de seguridad geométrico comparando el grosor real del arco con el mínimo necesario para asegurar la estabilidad.

5.3.1.4 La estabilidad y la seguridad de la obra de fábrica.

El concepto de seguridad en el caso de las estructuras de obra de fábrica es un concepto difícil de evaluar. Cumpliendo las hipótesis de Heyman y de acuerdo con los teoremas de plasticidad se pueden encontrar multitud de líneas de presión en el interior del contorno de una estructura que aseguren su estabilidad. Para establecer un criterio que determine el grado de seguridad de la estructura, Heyman define el coeficiente de seguridad geométrico, que consiste en comparar el grosor de una sección con el mínimo grosor que inscribiría una línea de presión. De manera que a medida que se puedan

encontrar líneas de presión más próximas a la directriz (o sea alejadas del contorno), se podrá asignar un grado de seguridad mayor a la misma. Se puede considerar el coeficiente de seguridad como el margen que separa el estado actual de cargas del estado de colapso.

Por ejemplo en la figura 5.13 se muestra un arco cargado y una de las posibles líneas de presiones en su interior. En este caso el nivel de seguridad que ofrece dicha línea corresponda al nivel de separación entre el arco mínimo que contiene dicha línea y el grosor del arco real, o dicho de otra manera se podrá definir un coeficiente de seguridad $\gamma = D/d$ asociado a una línea de presiones considerada, de manera que para $\gamma = 1$ se estaría al borde del colapso.

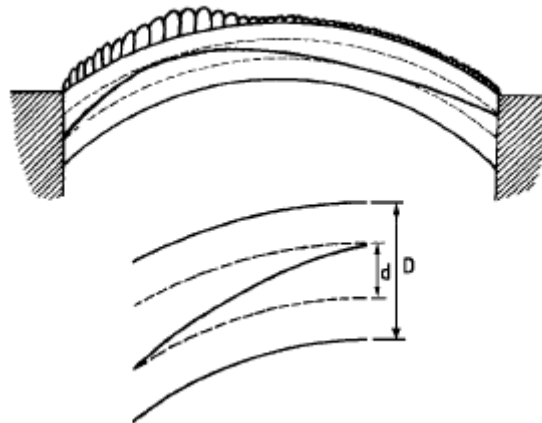


Figura 5.13 Coeficiente de seguridad geométrico obtenido como la relación entre el grosor del arco y el grosor del mínimo arco que inscribe una línea de presiones (O'Dwyer, 1999).

5.3.2 Estática gráfica.

El origen del cálculo gráfico de los arcos se remonta a La Hire quien en 1695 aplicó el polígono funicular para estudiar la estabilidad de un arco de dovelas (Huerta, 1996, 2001; López G., 2001). En el siglo XIX se retoma con gran fuerza el cálculo de líneas de presión por métodos gráficos. Rankine en su "Manual de mecánica aplicada" (1856) describe con todo rigor la teoría de las líneas de empujes, relaciona el cálculo analítico con el gráfico así como el empleo de polígonos de fuerzas y funiculares. Culmann en (1866) popularizó la estática gráfica mediante la publicación de diversos trabajos.

Esta línea de trabajo también tiene su vertiente computacional. Destacar la aportación de O'Dwyer (1999), que realiza un análisis estructural utilizando los principios del análisis límite último, definiendo un polígono de fuerzas antifunicular de las cargas y maximizando la carga última mediante un proceso de optimización. O'Dwyer establece un procedimiento que permite generalizar la aplicación del análisis límite de Heyman, para casos tridimensionales, véase figura 5.14., pero sin demostrar la compatibilidad cinemática entre los modelos de polígonos de fuerzas y los esquemas de rotura que se originan.

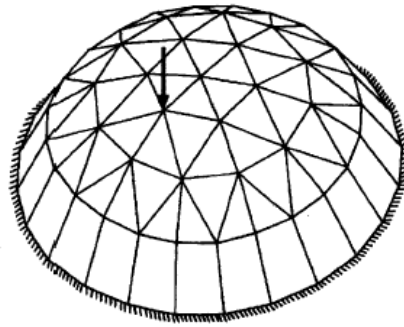


Figura 5.14 Modelo funicular realizado por O'Dwyer (1999).

La estática gráfica tiene la limitación de no poder encontrar la verdadera línea de empujes puesto que se basa únicamente en ecuaciones de equilibrio. De hecho la estática gráfica sólo contribuye al análisis de la estabilidad de una estructura de obra de fábrica si podemos aplicar el principio del análisis límite. Para solventar esta limitación se desarrollaron métodos analíticos donde interviene la ecuación constitutiva del material, siendo el análisis elástico lineal el método con más difusión.

Recientemente Maynou (2002) se ha llevado a cabo una investigación en la UPC, en el contexto de elaboración de una tesina de especialidad, en la que se a desarrollado una metodología informática basada en el barrido de las variables que determinan cada conjunto de líneas de presión con lo que se encuentran un gran número de las posibles líneas de presión en la nave central de la Catedral de Mallorca, obteniendo soluciones muy similares a las que obtuvo Rubió a principios de siglo XX. En la figura 5.15 se aprecia el conjunto de soluciones encontradas que verifican el primer teorema del análisis límite.

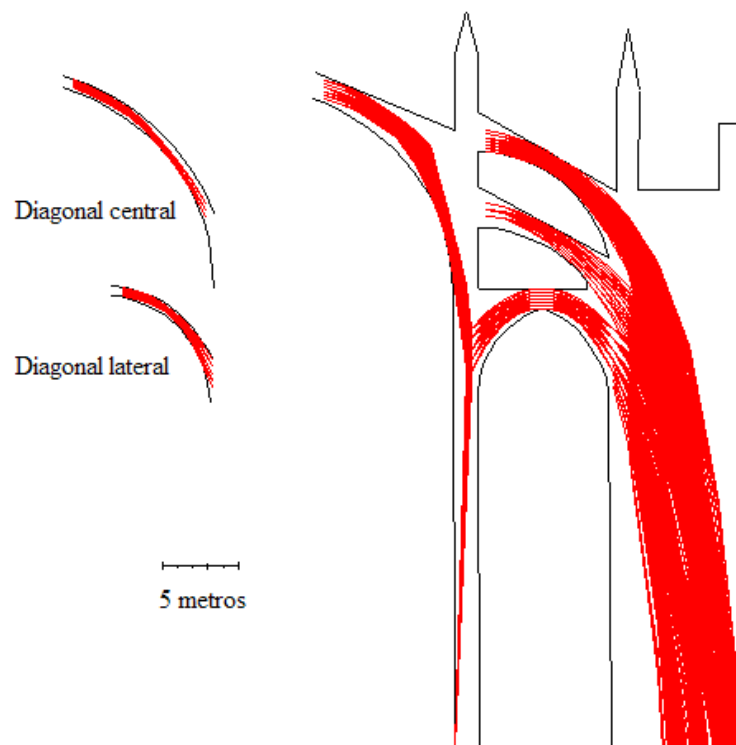


Figura 5.15 Conjunto de líneas de presiones encontradas por Maynou en el análisis del pórtico central de la Catedral de Mallorca.

5.3.3 Análisis mediante elasticidad lineal.

En el siglo XIX se desarrolló (Huerta, 1996) la teoría de la elasticidad y se aplicó entre otras cosas al cálculo de arcos. Esta teoría se aplicaba especialmente en el cálculo de arcos metálicos donde la ecuación constitutiva del material justificaba el empleo de dicho modelo. En arcos de fábrica su justificación era más complicada y pasaba simplemente por la inexistencia de otros modelos más precisos que pudiesen ser abarcados por modelos matemáticos resolubles manualmente.

Aún así, su empleo sirvió para obtener conclusiones muy acertadas. Winkler (1879) fue el primero que propuso de manera explícita el empleo de la teoría elástica para el cálculo de arcos mediante la determinación analítica de la línea de empujes. Winkler era consciente que la aplicación de la teoría de la elasticidad es susceptible de sufrir perturbaciones como la influencia de la deformación de las cimbras, movimiento de los estribos y el propio proceso constructivo. A estos efectos hay que sumarle el comportamiento del propio material difícilmente asimilable a una ecuación constitutiva elástica.

Krohn y Mohr contribuyeron también a su desarrollo pero es Castigliano quien inicia la exploración de métodos no lineales para modelar mejor el comportamiento de la fábrica. Castigliano introduce un modelo de análisis por tanteos para un material elástico sin resistencia a la tracción y aplicó este método para calcular el puente de Mosca de Turín.

El método elástico no se popularizó demasiado por una serie de inconvenientes que lo hacían difícilmente aplicable. En primer lugar, la solución de un modelo era muy sensible a las condiciones de contorno por lo que era difícil de asegurar que los resultados del modelo tuviesen relación con el modelo real. También los largos y tediosos cálculos hacían muy penosa su aplicación a problemas reales. En definitiva, la aparente precisión de los cálculos no se correspondía con la realidad de las estructuras, cosa que arrinconaría este tipo de métodos hasta la aparición de las computadoras y su aplicación en la vertiente numérica a finales del siglo XX.

5.4 Modelización de construcciones de obra de fábrica mediante modelos numéricos.

5.4.1 Modelos basados en la aplicación del método de los elementos finitos (MEF).

5.4.1.1 Micromodelos.

La micromodelización consiste en reproducir el comportamiento global de un material compuesto mediante una discretización geométrica detallada, basada en el método de los elementos finitos, e incorporando las leyes constitutivas no lineales de cada uno de los componentes. En general, la aplicación de micromodelos a materiales compuestos como el hormigón o la obra de fábrica requiere de un enorme esfuerzo de cálculo debido a la necesidad de emplear discretizaciones densas y métodos iterativos para resolver los sistemas de ecuaciones no lineales resultantes. Por ello, en el caso de la obra de fábrica su aplicación queda restringida, en general, al estudio de paneles individuales o muros con un muy reducido número de aperturas y al de los efectos locales sobre muros debidos, por ejemplo, a cargas concentradas. No obstante, la

micromodelización constituye, juntamente con la experimentación, una técnica válida para profundizar en el comportamiento real de la obra de fábrica. En los micromodelos se representan las piezas y el mortero de los tendeles y de las llagas por separado. En general, para las piezas se emplean elementos finitos de tensión plana mientras que para las juntas de mortero se han empleado básicamente dos técnicas dependiendo del compromiso entre precisión y sencillez de la modelización.

Page (1978) fue el primer investigador en obtener resultados mediante la aplicación de un micromodelo al estudio de la fábrica de ladrillo. El modelo de Page considera un comportamiento indefinidamente elástico e isótropo para los ladrillos. La rotura se produce cuando en los tendeles o las llagas se alcanza un cierto criterio de rotura a tracción o a corte propuesto por el mismo autor.

Mediante este modelo, Page estudió el comportamiento de una viga de gran canto de fábrica de ladrillo y comparó los resultados del modelo con los de un ensayo sobre una viga real obteniendo una buena coincidencia para las distribuciones de tensiones.

Posteriormente otros autores han ido sofisticando las modelizaciones para aproximar mejor el comportamiento real de la obra de fábrica. Autores que han contribuido al desarrollo de la modelización mediante micromodelos son: Chiostrini y Vignoli (1989), Ali y Page (1988) y Lourenço, (1994).

5.4.1.2 Macromodelos

5.4.1.2.1 Introducción

La macromodelización parte de considerar la obra de fábrica como un material continuo con una determinada ecuación constitutiva, incluyendo una relación tenso-deformacional y un criterio de rotura. En general, se distingue entre dos tipos básicos de macromodelos: aquellos basados en modelos existentes desarrollados para el hormigón armado y aquellos específicamente desarrollados para la obra de fábrica.

Los modelos existentes para el hormigón armado tienen una inmediata aplicación a la fábrica de bloques de hormigón, en especial si ésta se construye completamente rellena, ya que presenta una anisotropía mucho menor que sin relleno.

5.4.1.2.2 Análisis elástico lineal mediante MEF (Método de los Elementos Finitos).

El análisis elástico con MEF puede ofrecer resultados de gran valor ingenieril, a pesar de sus evidentes limitaciones para el estudio de obra de fábrica, tal como se ha señalado en el punto 2.3. Este tipo de análisis ha sido utilizado como herramienta auxiliar para el estudio de las condiciones mecánico-resistentes de edificios muy emblemáticos, tales como la Torre de Pisa (Macchi et al., 1993), el Coliseo de Roma (Crocì, 1998), la Basílica de San Marco en Venecia (Mola y VitaIiani, 1997) o la Catedral Metropolitana de México (Meli, 1997).

5.4.1.2.3 Modelos de daño.

En los modelos continuos de daño, la fisuración se trata como un efecto local cuyo progreso con el aumento de la carga aplicada queda determinado a partir de parámetros conocidos del material y por una o más funciones que controlan su evolución. El "daño" que afecta al material se reconoce mediante un parámetro que varía entre 0 (material intacto) y 1 (material totalmente agotado). Como extrapolación, es posible definir parámetros de daño asociados a un elemento estructural o bien a una estructura global, ocurriendo igualmente su colapso para un valor 1.

En esencia, los modelos de daño reproducen directamente la pérdida de rigidez asociada a la microfisuración. Cada punto dañado se supone sujeto a una reducción de rigidez proporcional al promedio de defectos (como microfisuras o huecos) producidos o existentes en una microregión. La pérdida de rigidez en cada punto se define mediante los correspondientes parámetros de daño, cuya evolución entre 0 y 1 se caracteriza mediante leyes experimentales obtenidas a partir de ensayos en laboratorio.

Mediante este tipo de modelos se pretenden superar ciertas dificultades o contradicciones teóricas producidas por los modelos de no-tracción o elásticos perfectamente frágiles con fisuración distribuida, y que en la práctica pueden generar serios problemas de tipo numérico. Por otra parte, un modelo de este tipo puede incorporar todos los aspectos importantes que deben considerarse en un análisis no lineal de estructuras de hormigón o de fábrica, incluyendo el comportamiento a compresión y tracción, o la degradación de la rigidez ante efectos de tipo mecánico o físico-químico-biológico.

Una de las ventajas de tales modelos de daño radica en la independencia del análisis con respecto a las direcciones de la fisuración, es decir, estas pueden ser identificadas a posteriori, una vez la solución no lineal haya sido obtenida, como lugar geométrico de puntos dañados. Ello permite superar los problemas asociados a la mayor parte de los métodos basados en una descripción de la fisuración como fenómeno distribuido en combinación con posibles relaciones tenso deformacionales para material frágil.

En la Universidad Politécnica de Cataluña existe un equipo de investigadores dedicados a la formulación de modelos de este tipo. Destacar un modelo propuesto por Oñate et al. (1995) y otro modelo propuesto por Cervera et al. (1998). La utilización práctica del modelo de Cervera ha sido empleado recientemente en el cálculo de los pórticos tipo de la catedral de Girona por Mendoza (2002).

5.4.1.2.4 Modelos de elasticidad no-lineal.

Durante los últimos años, diversos autores han propuesto métodos para el análisis de la obra de fábrica mediante elementos finitos unidimensionales o bidimensionales con ecuaciones constitutivas no lineales susceptibles de aproximar el comportamiento real de la obra de fábrica de ladrillo o de piedra. Este intento da lugar, de hecho, a soluciones que pueden interpretarse a la luz de los conceptos básicos del análisis límite y que en general resultan compatibles con éste. La condición fundamental reside en la capacidad de los métodos para simular zonas con fuertes concentraciones de curvatura que a efectos computacionales trabajen virtualmente como rótulas.

Crisfield y Wills (1995), fueron de los primeros en aplicar el método de los elementos finitos al estudio de estructuras de arcos de obra de fábrica. Dichos autores han propuesto una técnica de modelización basada en el uso de modelos unidimensionales o bidimensionales en combinación con una ecuación constitutiva de tipo elástica-lineal perfectamente frágil.

Loo y Yang (1991), también han utilizado elementos finitos en combinación con un criterio de rotura para hormigón en masa sujeto a estados biaxiales de tensiones teniendo en cuenta la fisuración del hormigón a tracción y su aplastamiento a compresión. El modelo de "no-tensión" se usa en conjunción con una ecuación constitutiva a compresión.

Choo et al. (1991), han basado su estrategia en una aproximación distinta. Han utilizado un tipo de elemento de viga de canto variable para representar el canto efectivo de la rosca del arco. Este canto se actualiza constantemente eliminando consecutivamente las partes fisuradas o aplastadas. En compresión, se utiliza un diagrama bilineal para representar un comportamiento elástico-lineal con plasticidad perfecta tras cedencia.

5.4.1.2.5 Modelos combinados con juntas.

Gong et al., (1993) han propuesto un método más sofisticado para tener en cuenta un mayor abanico de posibles formas de rotura y mecanismos últimos. Este método considera el efecto de la pérdida de mortero o de ladrillos, así como una posible fisuración (o separación) radial entre roscas superpuestas o entre la rosca y las paredes de enjuta. Estos efectos son tratados como una separación entre los elementos finitos bidimensionales utilizados en forma de fisuración discreta. En el caso de separación entre roscas o entre rosca y paredes de enjuta, los elementos pueden deslizarse relativamente entre ellos siendo su comportamiento friccional modelado mediante una ley de Coulomb.

En la propuesta de Hohberg (1993), las fisuras son tratadas mediante elementos de interfaz situados en planos débiles (previamente supuestos) o en las juntas.

A pesar de los resultados obtenidos con estas propuestas, y tal como observan distintos autores (Loo y Yang, 1991; Gong et al., 1993) los procedimientos basados en este tipo de técnicas tienden fácilmente a sufrir problemas numéricos como consecuencia de la utilización de simples modelos "no-tracción" para materiales perfectamente frágiles en combinación con el método de los elementos finitos formulado en desplazamientos. De hecho, se dispone de mucha experiencia en el manejo de este tipo de problemas en el caso de estructuras de hormigón en masa (Bazant, 1979), experiencia que en general conduce a la necesidad de tratamientos matemáticos más sofisticados para la fisuración. En general, se requieren tratamientos fundamentados en teorías más robustas desde el punto de vista energético o termodinámico.

Loo y Yang (1991) han resuelto este problema adoptando un diagrama bilineal a tracción que incluye una rama de reblandecimiento ("softening") tras producirse la fisuración para la resistencia a tracción. A compresión utilizan, como otros autores, un diagrama elástico-lineal combinado con plasticidad perfecta. El modelo requiere

proveer el dato relativo a la deformación última a tracción, límite de reblandecimiento a cuyo respecto existe muy poca investigación experimental. Loo (1995) ha conducido recientemente cierta investigación orientada a la posible definición de este valor, habiendo demostrado que influye de forma muy significativa en la predicción numérica de la capacidad portante de los arcos.

Para incorporar el efecto, en general beneficioso, de los rellenos de enjuta se han propuesto principalmente dos técnicas. En una primera, las fuerzas laterales causadas por el relleno se simulan mediante un conjunto de barras rectas horizontales definidas a modo de muelle elástico, a partir de una constante de rigidez equivalente, como dicen Crisfield y Wills (1985) y Choo et al. (1991).

En la segunda aproximación, el relleno se discretiza como un conjunto de elementos finitos bidimensionales integrados en la malla que modeliza la estructura y obviamente conectados con los elementos de la rosca de arco como dicen Crisfield y Wills (1985), Loo et al. (1995), Gong et al. (1993) y Loo et al. (1991). Las anteriores referencias introducen vínculos especiales para permitir el control del posible deslizamiento entre la rosca y la pared o el relleno de enjuta.

5.4.2 Modelos de barras.

5.4.2.1 Formulación matricial clásica.

León y Casati, han mostrado como, a partir de una cuidadosa modelización de la sección y de las bóvedas de la Catedral de León en elementos lineales, dentro de un cálculo matricial clásico, ha sido posible llevar a cabo un estudio paramétrico sobre la influencia de distintas variables en la respuesta resistente del edificio. El estudio ha sido realizado para las secciones transversales principales y para las bóvedas altas de la catedral.

5.4.2.2 Formulación matricial generalizada.

Se basa en crear estructuras reticulares planas o espaciales mediante elementos rectos o curvos. La formulación matricial generalizada está planteada en términos de flexibilidad y se basa en el equilibrio de fuerzas externas e internas a nivel seccional. Dicha técnica tiene incorporados modelos no lineales tipo no-tacción o elastoplásticos. Destacar especialmente la capacidad para modelar comportamientos con grandes deformaciones y gran concentración de curvaturas en determinadas secciones simulando la aparición de rotulas plásticas de forma coherente con la teoría del análisis límite. Se atribuye este buen comportamiento a su formulación exacta en términos de flexibilidad. Con esta técnica Molins y Roca (1998) han realizado multitud de análisis de construcciones complejas como la Catedral de Barcelona, Cripta Güell y la Casa Botines, entre otras, con un notable éxito. En la figura 5.16 se muestra el modelo geométrico realizado de la Casa Botines (León) mediante elementos de barra generalizados y en la figura 5.17 el resultado del cálculo en el que se simula un sismo incidente en la dirección perpendicular a la fachada. Reproducido de Roca y Molins (2000).

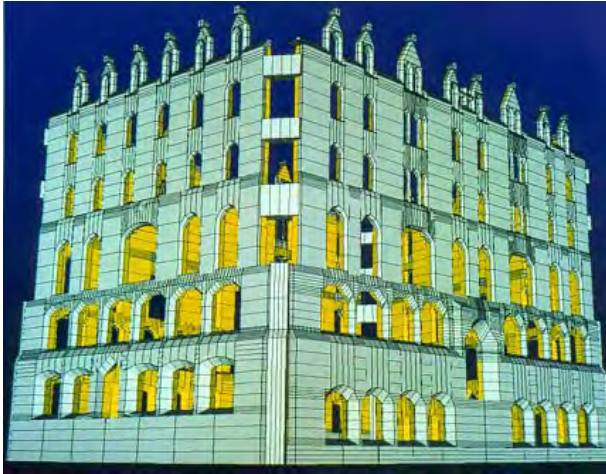


Figura 5.16. Aspectos del modelo de la Casa Botines representado en volumen



Figura 5.17. Tensiones normales producidas por un sismo, en rojo zonas con tracciones superiores a 1,0 MPa; en verde zonas comprimidas.

Capítulo 6

Aplicación del cálculo de redes funiculares en la determinación de la estabilidad de estructuras esqueléticas de obra de fábrica

6.1 Introducción

Como se ha visto en capítulos anteriores, el complejo comportamiento de las estructuras de obra de fábrica y más concretamente, las de carácter histórico, hace que su análisis no pueda ser abordado empleando directamente técnicas usuales utilizadas para diseñar o comprobar estructuras modernas, generalmente constituidas por hormigón, armado o pretensado, o por perfilaría metálica, es decir por materiales perfectamente acotados respecto sus propiedades mecánicas.

La obra de fábrica es un material con unas propiedades tenso-deformacionales altamente no lineales y generalmente presenta una distribución muy heterogénea en el seno de las estructuras formadas por ella. Por ello los modelos numéricos que pretenden aproximar su comportamiento presentan una gran complejidad teórica y práctica y exigen conocer un número considerable de propiedades difícilmente interpretables y evaluables por lo que se requieren procesos de tarado que permitan evaluar la propia bondad del análisis.

Así pues el análisis convencional (entendiendo por convencional aquel que pretende conocer el campo de tensiones y deformaciones de una estructura) es complejo y dificultoso en el tipo de estructuras que nos ocupa, por lo que puede ser interesante recurrir a otros tipos de modelización, empleados en el pasado, adaptados para analizar dichas estructuras.

Como se ha dicho la obra de fábrica tiene unas características mecánicas que dificultan su análisis convencional, pero el comportamiento global de una estructura formada por este material presenta unas cualidades, como son su alta ductilidad, escasa resistencia a

la tracción y una cierta capacidad frente al deslizamiento de los elementos que la componen, que permiten abordar el estudio de su estado último mediante técnicas basadas en el análisis plástico.

Cabe destacar que el material en si mismo tiene un comportamiento frágil y en casos como los bloques de piedra, puede presentar una elevada capacidad a tracción, pero el comportamiento global viene controlado por la existencia de juntas secas o con un mortero poco resistente a tracción, ofreciendo las propiedades mencionadas en el párrafo anterior.

Como se verá el análisis plástico requiere de muy pocos datos de partida, minimizando así la posibilidad que se produzcan errores en la modelización de la estructura y a su vez ofrece una información substancial sobre el estado límite último de una estructura.

En el presente capítulo se pretende desarrollar una herramienta de este tipo, basada en la aplicación de la teoría de análisis límite desarrollada por Heyman (1995) empleado los modelos funiculares para obtener de forma directa las líneas de presiones que permitan realizar análisis de estabilidad de una estructura de obra de fábrica de una forma muy simple y sin necesidad de llevar a cabo una compleja modelización numérica.

6.2 Aplicación de los modelos de redes de cables en la determinación de las líneas de presiones.

6.2.1 Planteamiento

La línea de presiones mostrada en la figura 5.6 del capítulo anterior se puede encontrar mediante procesos matemáticos convencionales, aplicando el equilibrio de fuerzas y momentos y determinando así tanto las fuerzas resultantes en cada sección como los puntos de aplicación de las mismas. También se pueden emplear procesos gráficos que de hecho fueron ampliamente utilizados en el siglo XIX y principios del XX para el cálculo de numerosos tipos estructurales.

También se puede encontrar el trazado de las líneas de presión mediante la analogía de los modelos funiculares, puesto que en cada punto de la línea de presión debe existir equilibrio de fuerzas y evidentemente, el momento resultante de las cargas exteriores debe ser cero. Estas dos características son las que define un modelo funicular y por tanto, en el caso en que éste represente correctamente, desde un punto de vista estático, el modelo real, el trazado de la línea de presiones coincidirá con el del modelo funicular. Es por ello que el modelo funicular debe tener la misma distribución de pesos que la estructura que se pretende modelar.

Si se emplea la analogía funicular y por tanto modelos de redes de cables para encontrar el trazado de las líneas de presión se deberá tener en cuenta que el desplazamiento propio de el modelo de cables, al encontrar su posición de equilibrio, hace que se modifique la distribución de cargas consideradas respecto el modelo inicial. Por ello se deberá ir corrigiendo los sucesivos modelos que se originen en un el proceso de cálculo para que la configuración final sea la que represente la distribución de pesos de la estructura.

A continuación se analizará éste hecho para el caso de cargas de peso propio y de cargas puntuales exteriores.

6.2.2 Variación de la distribución de carga entre la geometría real y el modelo funicular.

6.2.2.1 Introducción

Dado que en la modelización de redes de cables desarrollada en el capítulo 3 las cargas tanto interiores debidas al peso propio como exteriores, son seguidoras es decir, se desplazan siguiendo su punto de aplicación, el comportamiento del esquema estático del modelo funicular será diferente para el caso que en el modelo se contemplen solamente cargas de peso propio o se contemplen también cargas puntuales externas. Por esta razón se realizarán dos ejemplos que permitirán analizar ambas problemáticas.

6.2.2.2 Caso de cargas de peso propio.

A continuación se estudiará como afecta la variación de la posición de las cargas de peso propio entre el modelo y la estructura. Para ello se realizará un ejemplo que permitirá analizar dicha problemática.

El ejemplo consiste en encontrar la línea de presiones del arco de canto variable mediante el uso de la analogía antifunicular. La geometría del problema se muestra en la figura 6.1.

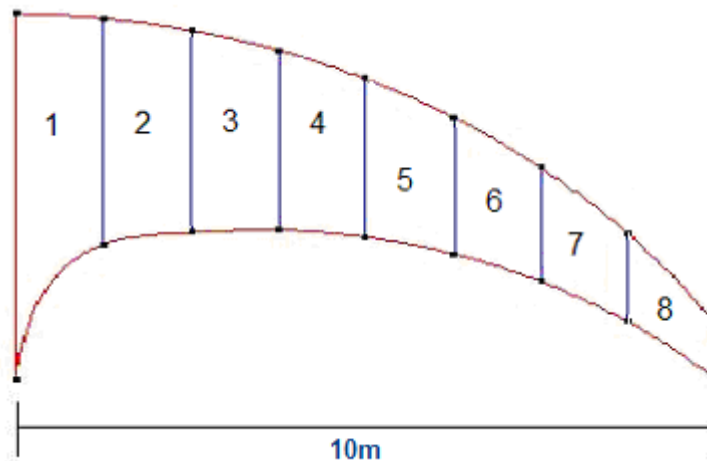


Figura 6.1. Arco descompuesto en dovelas.

El primer paso para aplicar dicha analogía consistirá en discretizar el arco mostrado en la figura 6.1 en ocho dovelas de igual grosor. Los pesos de cada dovela se muestran en la tabla 6.1.

Dovela	Peso
1	6
2	5.5
3	5
4	4.5
5	4
6	3.5
7	3
8	2.5

Tabla 6.1. Discretización del arco mostrado en la figura 6.1

Se ha de tener en cuenta que el trazado de las líneas de presión es indeterminado tanto en cuanto se desconozca el punto de aplicación del empuje horizontal y su valor. Partiendo de este hecho, para calcularlo se determinan arbitrariamente unos puntos de paso de la propia línea de presión y con ello se podrá determinar su trazado. Esta determinación arbitraria de los puntos de paso de la línea de presión se traduce en el esquema antifuncular mediante la fijación arbitraria de los puntos de apoyo del modelo funicular y la longitud del mismo.

Entonces, para encontrar el trazado de una posible línea de presión, se partirá de un modelo inicial que no es más que un trazado de prueba en el que se aplicará la distribución de cargas del arco. Dicha distribución de cargas se deberá corregir sucesivamente para minimizar el efecto de desplazamiento de las cargas, puesto que éstas son seguidoras en dicho modelo funicular.

En la figura 6.2 se muestra un trazado de prueba sobre el que se aplica la distribución de cargas del arco en cuestión.

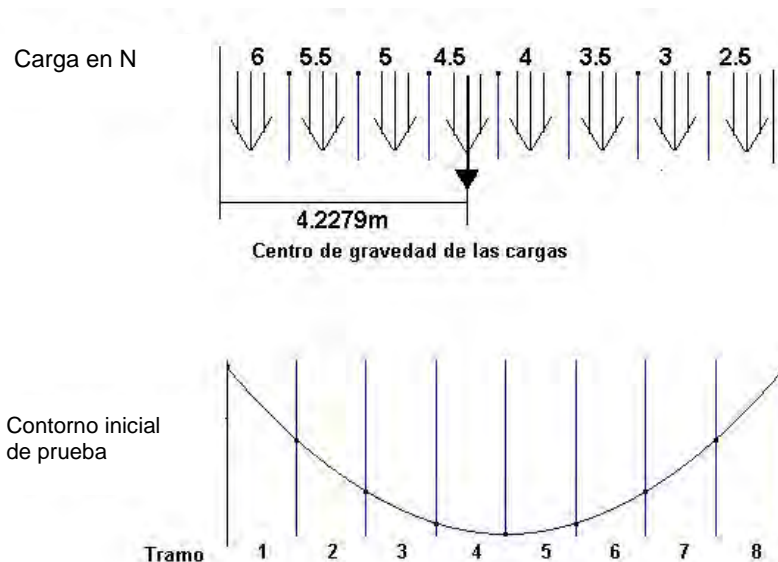


Figura 6.2. Aplicación de las cargas de peso propio sobre el modelo funicular inicial

A dicho trazado inicial se le deben aplicar las cargas de manera distribuida a lo largo de su cuerda. Dicha distribución se realizará acorde con la tabla 6.2.

Tramo	Longitud [m]	Carga distribuida [N/m]
1	1.803	3.327
2	1.560	3.524
3	1.377	3.629
4	1.270	3.542
5	1.270	3.148
6	1.377	2.540
7	1.560	1.922
8	1.803	1.386

Tabla 6.2. Aplicación de las cargas de las dovelas sobre cada tramo del modelo funicular

El resultado del cálculo se muestra en la figura 6.3.

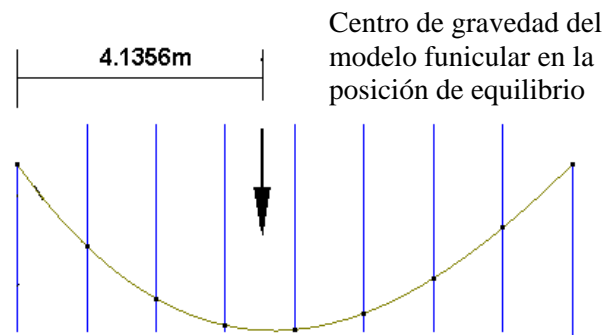


Figura 6.3. Resultado del cálculo

Como es lógico al alcanzar el equilibrio se altera el trazado inicial de prueba y al ser las cargas seguidoras también se modifica la distribución de éstas, por lo que se deberá realizar una nueva iteración tomando como partida este nuevo trazado.

Observemos no obstante que la variación de trazados es pequeña lo que origina que la variación de las cargas no sea demasiado importante. Si se compara el centro de gravedad de las cargas originales y las del modelo veremos que varían menos de un 2.2%.

Para llevar a cabo la nueva iteración de deberán aplicar de nuevo las cargas originales a este nuevo trazado. Dicha redistribución queda reflejada en la siguiente tabla.

Tramo	Longitud [m]	Carga distribuida [N/m]
1	3.107	1.931
2	3.504	1.570
3	3.715	1.346
4	3.577	1.258
5	3.103	1.289
6	2.499	1.401
7	1.939	1.547
8	1.478	1.691

Tabla 6.3. Nueva discretización de las cargas en el perfil obtenido en la primera iteración

Tras calcular de nuevo el modelo funicular se obtiene el siguiente trazado:

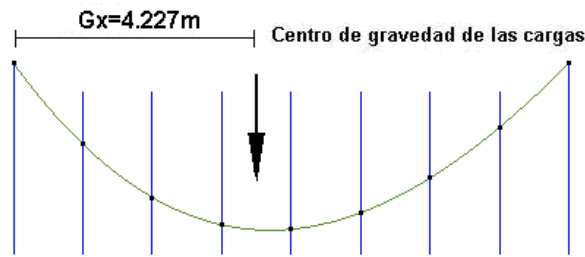


Figura 6.4. Trazado del modelo funicular en la segunda iteración

Este trazado tiene el centro de gravedad a 4.227m del extremo izquierdo del modelo, esto supone una variación en la distribución de cargas de un 0.02% respecto a la distribución real de la estructura.

En la figura 6.5 se puede ver las superposición de modelos calculados.

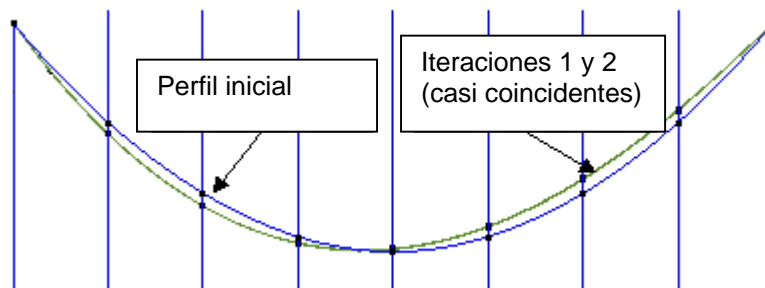


Figura 6.5. Trazados superpuestos

Cabe decidir qué grado de precisión cabe exigir en un análisis en relación a este fenómeno. Para ello se comparará el grado de variación que experimenta la distribución de peso propio cuando se discretiza el mismo arco empleando la técnica de los elementos finitos.

Para determinar un criterio se realizarán dos discretizaciones que a priori geoméricamente aceptables, la primera consiste en una malla muy fina de 8182 elementos y otra más burda con 161 elementos. Dichas mallas se muestran en las figuras siguientes:

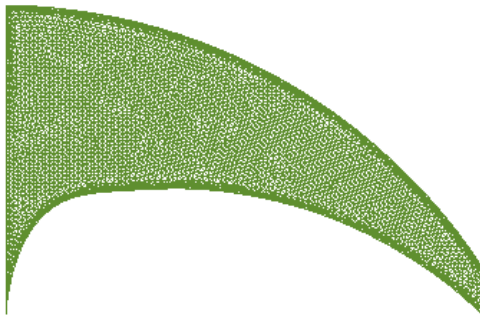


Figura 6.6. Discretización del arco en 8182 elementos finitos triangulares.

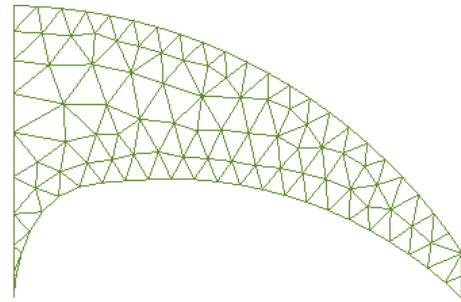


Figura 6.7. Discretización del arco en 161 elementos finitos triangulares.

Comparando dichos modelos se observa que la variación de la posición de los centros de gravedad entre ambos modelos es de un 0.04%. No será éste un factor determinante para descartar el modelo de 161 elementos. En su caso, si se descarta es por otras razones más bien relacionadas por la propia precisión que ofrezca el cálculo antes que no por la falta de precisión en la simulación de la geometría y por tanto de la distribución de masas del arco.

Es por ello que una variación entre el esquema estático de la estructura y su modelo se tomará como aceptable en el caso en que la distribución real y la del modelo funicular en equilibrio esté situada entorno a estos valores pudiéndose aceptar variaciones superiores en función de cada caso.

6.2.2.3 Caso de cargas distribuidas y puntuales.

Para obtener una simulación realista en los casos donde se apliquen cargas puntuales en la estructura, será necesario que una vez encontrada la posición de equilibrio del modelo funicular equivalente el cálculo respete la posición de las cargas exteriores. Es decir, la posición de las cargas puntuales viene fijada como una condición externa del problema a calcular.

Al modelizar la estructura real mediante un modelo funicular se le traspan a éste todas las cargas aplicadas sobre la estructura y por la naturaleza del modelo funicular éstas son cargas seguidoras con lo que su posición se trasladará junto con su punto de aplicación. La variación de la posición del punto de aplicación se producirá de forma natural al encontrar el trazado en equilibrio del modelo inicial, por lo que se variará la posición de la carga y por tanto deberá ser corregida iterativamente de manera que la posición final del punto de aplicación coincida con la posición de la carga en la estructura original. Esto implicará situar la carga en un punto que inicialmente no corresponderá con el punto de aplicación real.

Para analizar dicha problemática se realizará el siguiente ejemplo abalizándose la influencia de las cargas puntuales exteriores en la posición final de sus puntos de aplicación una vez encontrado el equilibrio.

En el siguiente ejemplo se muestra una cable con una rigidez $EA=100.000N/m^2$ compuesta por 2 elementos de catenaria (ab y bc). El cable esta cargado con una carga horizontal uniformemente distribuida de un valor de $10N/m$. Se tiene también una carga puntual de $10N$ a $3.75m$ del extremo izquierdo de la cuerda. Parece claro que la influencia de la carga puntual en la configuración en equilibrio será determinante.

El objetivo es que en la configuración en equilibrio la fuerza puntual aplicada en el modelo funicular se acabe situando a $3.75m$, tal como estaba definida a priori. Para lograrlo se deberá iterar corrigiendo las longitudes y consecuentemente sus pesos distribuidos de manera que se adapten a la carga repartida exterior.

En la figura siguiente se puede la geometría inicial.

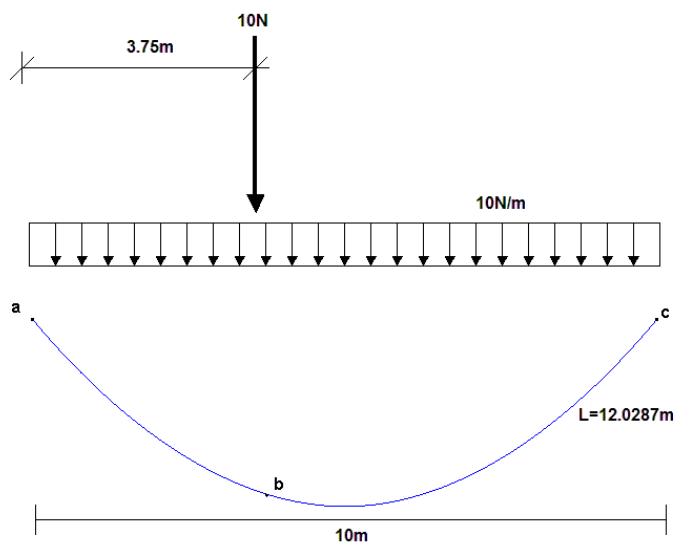


Figura 6.8. Configuración inicial

En el primer cálculo se situará el punto de aplicación de la carga denominado “b” en la figura 6.8 a una distancia de $3.75m$ del borde izquierdo, lo que implica que el tramo a-b medirá $4.74406m$ y el tramo b-c $7.28469m$. En la configuración de equilibrio el punto de aplicación de la carga se sitúa a $3.51m$ del borde izquierdo, produciendo una desviación del 6.24% respecto la posición deseada.

Para obtener la posición del punto de aplicación inicial tal que acabe en la posición deseada se realizarán sucesivas iteraciones (Figura 6.9). Se comprueba que a la tercera iteración el error en la posición es de 0.001% , totalmente aceptable.

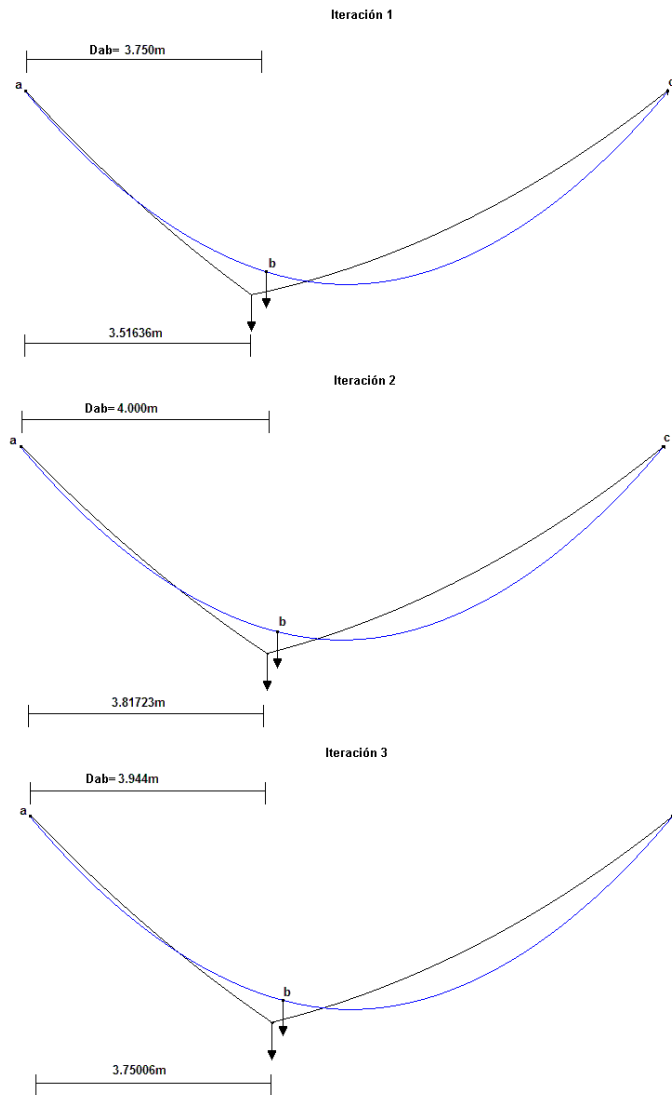


Figura 6.9. Diferentes posiciones obtenidas en cada iteración

La tabla 6.4 refleja los diferentes valores de los parámetros que influyen los sucesivos cálculos.

iteración	L ab [m]	L bc [m]	P ab [N/m]	P bc [N/m]	D ab inicial [m]	D ab final [m]
1	4.744	7.285	0.790	0.858	3.750	3.516
2	5.004	7.025	0.799	0.854	4.000	3.817
3	4.946	7.083	0.797	0.855	3.944	3.750

Tabla 6.4. Valores obtenidos para las diferentes iteraciones

Como conclusiones de la variación de la distribución de carga entre la geometría real y la del modelo funicular equivalente se concluye que:

1. Las cargas aplicadas, tanto puntuales como repartidas, en el modelo funicular son seguidoras es decir, se trasladan acompañando al punto de aplicación de las mismas, por lo que en la situación de equilibrio, se varía la posición de las cargas respecto las cargas exteriores aplicadas en la estructura real.
2. Para obtener un estado de cargas en el modelo funicular en equilibrio representativo del estado de cargas de la estructura original a simular, se requerirá modificar inicialmente la distribución de cargas aplicadas en el modelo funicular para acabar obteniendo la posición inicial .
3. Para obtener la situación inicial de las cargas en el modelo funicular se requerirá un proceso iterativo que requiere pocas iteraciones para converger en la distribución de cargas adecuada.

6.3 Repaso de los teoremas del análisis límite.

Este punto ha sido tratado ampliamente en el punto 5.3.1.3 del estado del conocimiento de la modelización de estructuras de obra de fábrica. No obstante lo anterior se realizará un breve recordatorio para a continuación describir la estrategia adoptada en el presente trabajo para automatizar la búsqueda de soluciones que complan los principios del análisis límite.

Los principios básicos de la teoría del análisis límite aplicada en estructuras de fábrica son:

1. La resistencia a compresión de los elementos que forman la estructura de obra de fábrica es infinita.
2. El colapso por deslizamiento es imposible.
3. La resistencia a tracción es nula.

Generalmente, las tres hipótesis anteriores se cumplen en las estructuras que nos ocupan, aunque una vez realizado el cálculo se deba comprobar que la tensión máxima obtenida no supere la admisible, verificándose así de forma práctica la primera de las hipótesis. También se verificará la segunda hipótesis comprobando que la inclinación de la fuerza resultante no supere la del ángulo de rozamiento interno entre dobelas, o la del propio material. La tercera hipótesis que del lado de la seguridad.

Tomando como ciertos los tres principios anteriores se podrán aplicar los teoremas del análisis plástico aplicados al caso de estructuras de obra de fábrica (Heyman, 1969, 1982, 1983, 1995, 1998). Estos son:

- Primer teorema (de seguridad): El colapso no se producirá si en cada caso de carga que atraviesa la estructura es posible encontrar un estado de equilibrio estáticamente admisible.

En el caso de los arcos, este teorema implica que si se puede encontrar una línea de empujes estáticamente admisible dentro del contorno de la estructura este es estable. Con este teorema podemos determinar una cota inferior de la carga de rotura.

- Segundo teorema (de unicidad): El colapso se producirá si se encuentra una configuración de colapso cinemáticamente admisible. Esto implica que si se producen el número suficiente de rótulas para que la estructura se convierta en un mecanismo, ésta colapsará.

Se considera que se forma una rótula cuando la línea de presiones se hace tangente o corta el contorno de la estructura.

6.4 La estabilidad y la seguridad de la obra de fábrica.

Como se ha descrito en el punto anterior, una estructura de obra de fábrica será segura si se encuentra una línea de presiones en su interior, es por ello que a medida que la línea encontrada se encuentre más alejada del contorno resistente de la estructura el grado de seguridad que ofrezca dicha línea será mayor respecto otras que estén más cercanas ya que la más alejada muestra la existencia de un mayor número de líneas de presión que verifiquen el teorema de seguridad. Esta idea queda reflejada en el coeficiente de seguridad geométrico propuesto por Heyman, que como se ha dicho en el punto 5.3.1.4 del estado del conocimiento de estructuras de obra de fábrica y tal como se muestra en la figura 5.13, compara el contorno que inscribe una determinada línea de presiones con el contorno real de la estructura.

Este coeficiente de seguridad geométrico se puede interpretar también en términos tensionales. Evidentemente a medida que la resultante se separe del contorno y por tanto se acerque al centro de gravedad de la sección, el nivel tensional bajará alejándose de la tensión admisible del material, por lo que el grado de seguridad de la estructura aumentará.

6.5 Optimización de la solución.

6.5.1 Introducción.

A partir del planteamiento anterior se está en condiciones de calcular una red de funicular en el interior de una estructura y verificar tanto el teorema de la seguridad como, en su caso el de unicidad. No obstante, de acuerdo con este teorema de seguridad pueden existir infinitas redes de catenarias que cumplen la condición de equilibrio al estar situadas en el interior del contorno resistente de la estructura objeto de verificación. En este trabajo se ha optado por desarrollar un procedimiento orientado a acotar un conjunto de soluciones y que acabe por encontrar una solución única que maximice el coeficiente de seguridad geométrico de la solución encontrada. En consecuencia dicho proceso estará basado en la maximización del coeficiente de seguridad geométrico o dicho de otra manera, de la maximización de la separación mínima en la sección donde la línea de presiones se aproxime más al paramento resistente.

Como en todo proceso de optimización se tendrán que resolver una serie de cuestiones para abordar dicho problema. En términos generales estas cuestiones son: La discretización de los modelos, la formulación del problema de optimización que implica definir una función objetivo con las restricciones del problema y finalmente definir una estrategia de optimización.

6.5.2 Formulación del problema de optimización.

Como comenta e Gil (2001) es básico a la hora de tener éxito en una estrategia de optimización parametrizar adecuadamente el problema a resolver. Esta “adecuación” implica escoger unas variables representativas de dicho proceso, es decir, que incidan directamente en el comportamiento de la función objetivo, o dicho en términos matemáticos, variables cuyo gradiente sea significativo. Es por ello que se han tomado como variables de diseño del problema de optimización las longitudes de los elementos que forman la red y las coordenadas de los apoyos de la red funicular.

Por tanto, el vector de variables \mathbf{X} estará definido como sigue:

$$\mathbf{X} = \{l_1, \dots, l_i, \dots, l_n, x_1, \dots, x_j, \dots, x_m\} \quad (1)$$

Donde l_i son las longitudes de n-elementos escogidos arbitrariamente de entre los elementos que forman la red y x_j las coordenadas de m-grados de libertad restringidos escogidos arbitrariamente de entre los incluidos entre los apoyos de la red. Dichas variables estarán acotadas dentro de un intervalo definido *a priori* para cada una de ellas. La expresión matemática de la restricción para cada tipo de ij-variable es:

$$\begin{aligned} L_i^{low} &\leq l_i \leq L_i^{up} \\ X_j^{low} &\leq x_j \leq X_j^{up} \end{aligned} \quad (2)$$

Donde L_i^{low} , L_i^{up} , X_j^{low} , X_j^{up} son las cotas superior e inferior para cada variable considerada. De cara obtener estabilidad en la convergencia del proceso de optimización es muy importante acotar adecuadamente las variables de diseño ya que así se controla la posible divergencia del proceso.

La función objetivo a definir tendrá que evaluar la separación entre las líneas de presión y el contorno resistente, de forma que al maximizar dicha distancia se tenderá a separar, de forma global, la línea de presión respecto el paramento resistente, aumentando el grado de seguridad de la solución obtenida. Este proceso llevaría en el límite a una solución única y óptima, dado que sería la solución “más segura” aunque no tendría porque ser la verdadera línea de presiones asociada a un determinado estado de cargas.

Cabe comentar que Winkler formuló para estructuras con comportamiento elástico lineal, un principio basado en la minimización de la energía de flexión de un pieza prismática que permitía encontrar la verdadera línea de presiones asociada a una determinada carga (Timoshenko, S., 1983; Huerta, 1996). Éste dice:

“La verdadera línea de presiones contenida en una pieza prismática será aquélla que minimice el área contenida entre dicha línea de presiones y la línea baricéntrica de la pieza”

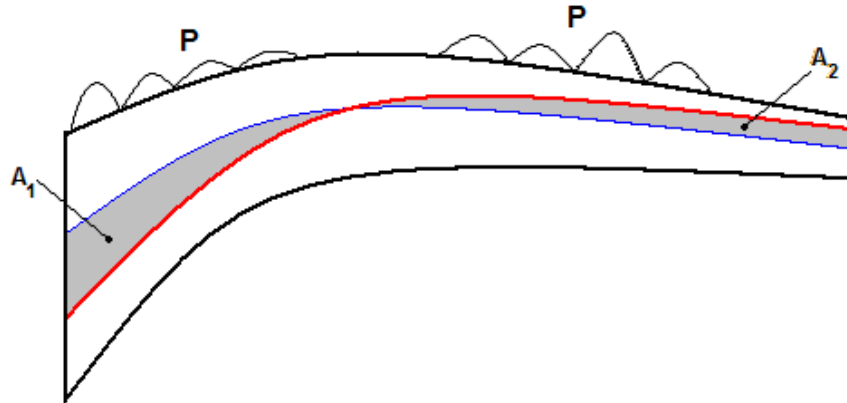


Figura 6.10. Si se considera que la línea roja como la línea baricéntrica del elemento considerado Winkler postula que para el caso en que el material sea elástico y lineal, la verdadera línea de presiones asociada la carga P será la que minimice la suma de áreas A_1 y A_2

Se puede ver que se está adobando una estrategia similar a la que formula el principio de Winkler, puesto que ambas estrategias tienden a separar las posibles líneas de presiones del contorno resistente aunque en nuestro caso no se podrá garantizar que la línea de presión encontrada sea la real puesto que en problema abordado ni tan siquiera se tiene en cuenta la ecuación constitutiva del material que forma la estructura.

La función objetivo consistirá en la evaluación de la distancia mínima de cualquier punto de la red funicular al contorno de la estructura. Para ello será necesario discretizar el contorno de la estructura en una malla para poder evaluar la distancia ente los nodos del contorno resistente de la estructura y los de la línea de presión.

La función objetivo se diseñará teniendo en cuenta la posibilidad de que la red funicular pueda situarse fuera del contorno, asignándole un valor negativo a la distancia en caso de exceder el contorno resistente y positivo en caso contrario. De esta manera el proceso de maximización, primero se forzará a que la red funicular se situé en el interior de la estructura para posteriormente, aumentando el coeficiente de seguridad geométrico al separarse globalmente del contorno

La definición de la función es la siguiente:

$$D_{\min}(X) = \begin{cases} \text{Si la línea de presión esta en el interior del contorno resistente; } D_{\min} = \text{minima}(\text{distancia}(i, j)) \\ \text{Si la línea de presión excede el contorno resistente; } D_{\min} = -\max(\text{minima}(\text{distancia}(i, j))) \end{cases}$$

$\forall i, j \rightarrow i$ puntos contenidos en el contorno; j puntos contenidos en la línea de presión

(3)

Inicialmente se buscará una línea de presiones que se situé en el interior del contorno resistente. En la figura 6.11 se muestra una línea que excede el contorno resistente y por tanto se evalúa la distancia máxima de separación a él.

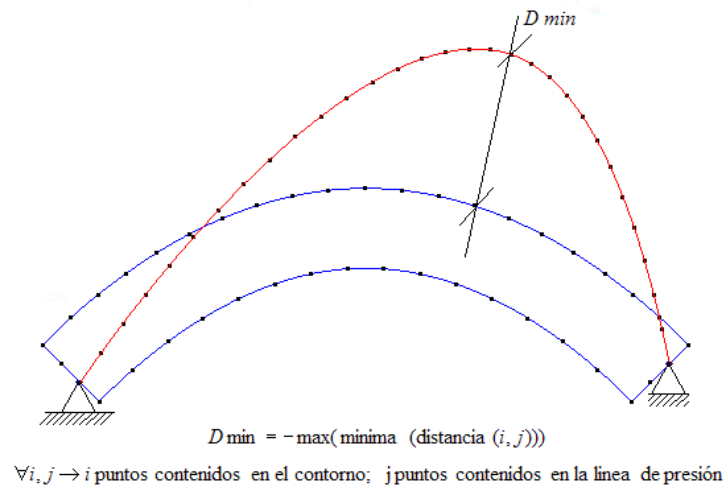


Figura 6.11. Línea de presiones que excede el contorno resistente

Una vez situada la línea de presiones en el interior de la estructura se maximiza la separación al contorno resistente como se muestra en la figura 6.12.

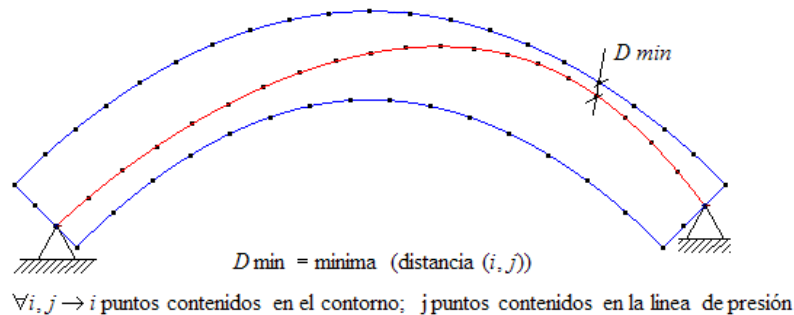


Figura 6.12. Línea de presiones en el interior del paramento resistente

Como se ha dicho, la solución que se obtiene al aplicar este proceso de optimización no tiene porque ser la más realista, simplemente dicho proceso se encarga de automatizar la búsqueda de una configuración funicular que maximice el coeficiente de seguridad geométrico, cumpliendo el teorema de la seguridad. No obstante, cuando la carga aplicada se acerca a la carga de rotura de la estructura, la configuración funicular encontrada por este proceso de optimización reproduce el mecanismo real de rotura, confirmando pues, el teorema de unicidad .

Cabe comentar que la función objetivo que será objeto del proceso de optimización, es simplemente C_0 , es decir, solo se asegura su continuidad pero no la de sus derivadas y puede tener un comportamiento muy diferenciado entre los puntos donde no se pueda definir la pendiente. Este hecho dificultará el proceso numérico de optimización por lo que cabe esperar una gran estabilidad en su convergencia.

6.5.3 Descripción de los algoritmo de optimización.

Se han implementado dos algoritmos de optimización, el método de máximo descenso también denominado método del gradiente y el método del gradiente conjugado también denominado Fletcher-Reeves (Vanderplaats, 1984). Ambos métodos se engloban dentro de los algoritmos de primer orden caracterizados por emplear valores de la función objetivo y sus primeras derivadas.

El método del gradiente toma precisamente como dirección de búsqueda del mínimo de la función objetivo el vector opuesto al gradiente, es decir si S^q es la dirección de búsqueda en la iteración q , empleando este método se toma

$$S^q = -\nabla F(X^q) \quad (4)$$

El algoritmo completo tiene la siguiente forma:

- 1) X^0 punto de partida
- 2) $X^q \leftarrow X^0$
- 3) $S^q \leftarrow -\nabla F(X^q)$
- 4) encontrar $\alpha \forall \min (F(X^q + \alpha S^q))$
- 5) $X^{q+1} \leftarrow X^q + \alpha S^q$
- 6) $q++$
- 7) criterio de parada cumple \rightarrow STOP
- 8) volver a 3)

Teóricamente dicho algoritmo tiene una velocidad de convergencia relativamente baja puesto que no utiliza la información de iteraciones anteriores para acelerar la convergencia. El siguiente algoritmo presenta alguna sofisticación en este sentido que permite acelerar algo la velocidad de convergencia.

El método del gradiente conjugado o Flecher-Reeves emplea como vector de búsqueda S^q el vector siguiente

$$S^q = -\nabla F(X^q) + \beta_q S^{q-1} \quad (6)$$

donde el escalar β_q es definido como sigue:

$$\beta_q = \frac{|\nabla F(X^q)|^2}{|\nabla F(X^{q-1})|^2} \quad (7)$$

empleando así información de las iteraciones anteriores y obteniendo un algoritmo algo más robusto que se muestra a continuación.

- 1) X^o punto de partida
- 2) $X^q \leftarrow X^o$
- 3) $\nabla F^q \leftarrow \nabla F^q(X^q)$
- 4) $a_q \leftarrow \nabla F^q \bullet \nabla F^q$
- 5) $S^q \leftarrow -\nabla F^q$
- 6) encontrar $\alpha \forall \min(F(X^q + \alpha S^q))$
- 7) si $\alpha = 0$ STOP
- 8) $X^{q+1} \leftarrow X^q + \alpha S^q$
- 6) $q++$
- 7) $\nabla F^q \leftarrow \nabla F^q(X^q)$
- 8) $b \leftarrow \nabla F^q \bullet \nabla F^q$
- 9) $\beta = \frac{b}{a}$
- 10) $S^q \leftarrow -\nabla F^q + \beta S^q$
- 11) $a \leftarrow b$
- 12) $S^q \bullet \nabla F^q \geq 0$ ir a 5)
- 13) encontrar $\alpha \forall \min(F(X^q + \alpha S^q))$
- 14) criterio de parada cumple \rightarrow STOP
- 15) ir a 6)

Es este caso el vector de avance S^q tiene la dirección conjugada del gradiente. De hecho si la función fuese cuadrática se encontraría el mínimo en un máximo de n iteraciones. En la realidad esto no se produce puesto los errores de redondeo y propios de truncamiento en los procesos de minimización unidimensional distorsionan el proceso. Cabe mencionar que el comportamiento observado de ambos métodos es muy similar, no ofreciendo ventajas sustanciales de uno sobre el otro.

6.5.4 Tratamiento de las restricciones el problema de optimización

Como ya se ha dicho se han tomado como variables de diseño del problema de optimización las longitudes de los elementos que forman la red y las coordenadas de los apoyos de la red funicular. Por tanto, el vector de variables \mathbf{X} estará definido como sigue:

$$\mathbf{X} = \{l_1, \dots, l_i, \dots, l_n, x_1, \dots, x_j, \dots, x_m\} \quad (9)$$

Donde l_i son las longitudes de los n -elementos que forman la red y x_j las coordenadas de los m -grados de libertad restringidos. Dichas variables estarán acotadas dentro de un intervalo definido *a priori* para cada una de ellas. La expresión matemática de la restricción para cada tipo de ij -variable es:

$$\begin{aligned} L_i^{low} \leq l_i \leq L_i^{up} \\ X_j^{low} \leq x_j \leq X_j^{up} \end{aligned} \quad (10)$$

Dichas restricciones no reflejan más que las propias limitaciones que impone la física del problema. Si estudiamos las restricciones respecto las variables que representan las coordenadas de la posición de los apoyos del modelo funicular éstas deberán estar siempre situadas dentro del contorno resistente de la estructura. Respecto las longitudes de las cuerdas no hay que olvidar que se debe mantener una correspondencia estática entre el modelo y la estructura, en consecuencia para controlar dicha correspondencia

será conveniente restringir dichas longitudes para evitar la obtención de modelos muy dispares respecto al original.

Para favorecer la estabilidad del proceso de convergencia del problema se han limitado las restricciones a las del tipo ortogonal, es decir las variables sólo pueden ser restringida por una cota superior e inferior. Este tipo de restricciones tienen el inconveniente que no permiten actuar sobre dominios que sean función de la variable restringidas, lo que influirá en el caso de pilares con sección no rectangular. Esto se podrá solventar mediante aproximaciones sucesivas, modificando cada vez el dominio de búsqueda adecuándolo al contorno resistente de la sección.

A continuación se muestra un ejemplo cualitativo donde se muestra el procedimiento a seguir para el caso que las variables de diseño estén acotadas por restricciones no ortogonales.

El ejemplo consiste en verificar un arco de sección elíptica. Se parte de un modelo funicular representado por la línea roja situada toda ella en el interior del arco. A dicho modelo funicular se le podrán imponer una serie de limitaciones entre las que deberá figurar la necesidad que la línea de presiones esté situada en el interior de la estructura, lo que exigirá que los apoyos del modelo funicular que simula la línea de presión estén contenidos en las secciones de arranque del arco.

En la siguiente figura se puede ver el esquema del problema que servirá de ejemplo. Como se ha comentado una de las variables del problema podrá ser la posición de los apoyos del modelo funicular, en la figura 6.13 se observa el detalle del apoyo izquierdo, denominado P , donde las variables de diseño serán sus coordenadas x , y . Dichas variables tendrán que cumplir con las condiciones del problema por lo que deberán estar contenidas en la sección de arranque, sombreada en gris.

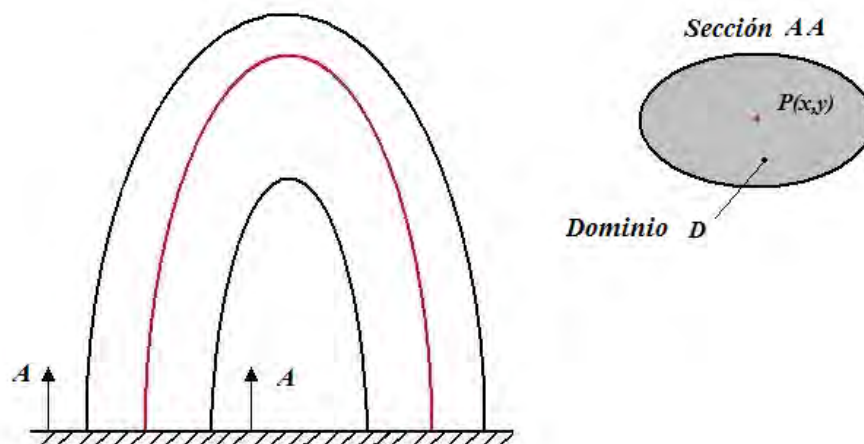


Figura 6.13. Tratamiento de las restricciones en contornos no ortogonales

Para emplear las restricciones ortogonales realizaremos una serie de aproximaciones sucesivas. Inicialmente tomaremos un dominio $D1$. Llegados a este punto pueden ocurrir dos situaciones, que el punto óptimo estuviese situado en el interior de $D1$ o no. En el primer caso el proceso de optimización no estaría influenciado por la definición de

D1 y por tanto podría encontrarse de forma directa el punto óptimo. En el caso que el punto óptimo estuviese en el exterior de D1, el proceso iterativo se detendría en la frontera del dominio D1. A continuación se podría definir un nuevo dominio más concreto y cercano a la solución y así sucesivamente hasta acabar obteniendo una solución suficientemente próxima a la solución real. Esto se detectará puesto que la sucesión de soluciones acabará convergiendo y ya no variará, tal como se muestra en la figura 6.14.

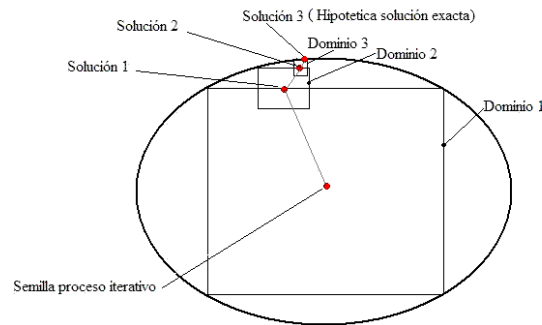


Figura 6.14. Proceso de convergencia para tratar un problema con restricciones no ortogonales

6.5.5 Transformación de un problema con restricciones a otro sin restricciones.

Como muestra la bibliografía existen diversos métodos para transformar problemas de optimización con restricciones a otros equivalentes sin restricciones. Entre las metodologías más usuales se encuentran los multiplicadores de Lagranje, el método del penalti y el de las funciones frontera. Estos métodos podrían abarcar las restricciones anteriormente descritas puesto que son métodos muy generales capaces de tratar restricciones de mayor complejidad que las tratadas en el presente trabajo pero esta potencia queda penalizada por la inestabilidad que pueden presentar en los procesos de convergencia.

Para aumentar las estabilidad del proceso de optimización y aprovechando el tipo de restricciones que nos ocupan, simples acotaciones superiores e inferiores de las variables, se ha implementado una metodología que tiene la peculiaridad de no inestabilizar el proceso de convergencia aunque puede ralentizar el proceso iterativo.

La metodología consiste en realizar un cambio de variable de forma que se pasa de un espacio de variables restringidas a otro sin restricciones mediante el uso de funciones de cambio que deberán tener las siguientes cualidades:

- Deberán ser biyectivas
- Estar definidas en todo \mathfrak{R}
- El espacio de llegada deberá estar acotado superior e inferiormente.

Se han usado funciones trigonométricas tipo como la arco tangente, que cumplen plenamente los requisitos anteriores. A continuación se describe la técnica empleada.

Supongamos una aplicación como la que sigue:

$$x \xrightarrow{Z(x)} z : z \in \mathfrak{R} \quad x \in \Omega^n \quad (11)$$

Donde :

$$\Omega^n = x_1^{\max} \leq x_1 \leq x_1^{\min} \dots x_i^{\max} \leq x_i \leq x_i^{\min} \dots x_n^{\max} \leq x_n \leq x_n^{\min} \quad (12)$$

Se quiere encontrar \bar{x} tal que $Z(\bar{x})$ sea mínimo, lo que define un problema de optimización condicionado. Para transformarlo a un problema no condicionado se realizará la siguiente transformación de variables.

Considérese la siguiente transformación de variables

$$t \xrightarrow{X(t)} x : t \in \mathfrak{R}^n ; x \in \Omega^n \quad (13)$$

Definiendo X como sigue:

$$\begin{bmatrix} X_1(t_1) \\ \dots \\ X_i(t_i) \\ \dots \\ X_n(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{x_1^{\max} - x_1^{\min}}{\pi}\right) \arctg(\alpha_1 t_1) + \left(\frac{x_1^{\max} + x_1^{\min}}{2}\right) \\ \dots \\ \left(\frac{x_i^{\max} - x_i^{\min}}{\pi}\right) \arctg(\alpha_i t_i) + \left(\frac{x_i^{\max} + x_i^{\min}}{2}\right) \\ \dots \\ \left(\frac{x_n^{\max} - x_n^{\min}}{\pi}\right) \arctg(\alpha_n t_n) + \left(\frac{x_n^{\max} + x_n^{\min}}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (14)$$

siendo α_i una constante arbitraria y los $x_1^{\max}, x_1^{\min}, x_i^{\max}, x_i^{\min}, x_2^{\max}, x_2^{\min}, x_i^{\max}, x_i^{\min}$ los parámetros que definen el dominio restringido Ω^n .

La transformación definida es creciente, biyectiva y acotada en el dominio Ω^n .

Empleando la transformación anterior podemos componer la función objetivo z con la aplicación X obteniendo una nueva función $Z = z(X(t))$ definida en todo Ω^n de una manera que permite emplear algoritmos de optimización para funciones sin restricciones puesto que el dominio restringido Ω^n se obtiene mediante el empleo de funciones definidas en todo \mathfrak{R}^n .

De las condiciones del cambio de variables se deduce que :

$$\begin{aligned} \text{Si } Z_{\min} = z(\bar{x}) \text{ es mínimo en } \Omega \text{ existe un unico } \bar{t} \text{ tal que } Z_{\min} = z(X(\bar{t})) \text{ sea mínimo y} \\ \text{Si } Z_{\min} = z(X(\bar{t})) \text{ es mínimo en } \mathfrak{R}^n \text{ existe un unico } \bar{x} \text{ tal que } z(\bar{x}) \text{ sea mínimo} \end{aligned} \quad (15)$$

lo que demuestra la equivalencia entre el problema original con restricciones y el problema sin ellas.

6.5.6 Parámetros que controlan el cambio de variable.

Como se ha explicado la transformación del dominio se realiza mediante la composición de la función objetivo “original” con la función X , que no es más que la función arcotangente aplicada a cada variable del problema.

Dado que la función de cambio de variable está acotada entre los intervalos impuestos a las variables restringidas de la función objetivo. Se puede modificar el comportamiento de dicha transformación mediante un coeficiente α_i que no es más que la pendiente de la función cambio en el punto medio del intervalo donde opera. La manipulación de este parámetro permite influir en el comportamiento del proceso de convergencia mejorando los resultados obtenidos.

En la figura 6.15 se pueden ver las diferentes variables que afectan al cambio de variable propuesto.

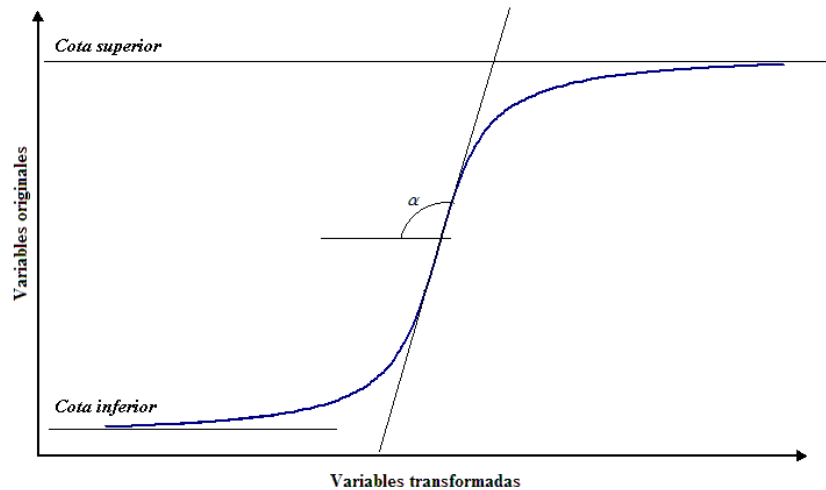


Figura 6.15. Función de cambio de variable para transformar un problema con restricciones a otro sin restricciones

El método empleado deberá contemplar automáticamente las situaciones donde el mínimo sea del tipo local o global. En el primer caso el mínimo de la función objetivo se encontrará en el interior del dominio mientras que en el segundo caso se situará en su frontera.

6.6 Ejemplos de aplicación del cambio de variable

6.6.1 Introducción

Para clarificar el procedimiento empleado se realizarán dos ejemplos unidimensionales donde se aplicará la técnica desarrollada. En el primer ejemplo se solucionará un problema donde el mínimo se encuentra en el interior del intervalo donde se restringe la variable del problema tratándose pues de un mínimo local. En el segundo caso el mínimo local se encontrará fuera del dominio por lo que el método deberá encontrar un mínimo situado en la frontera del dominio de salida, tratándose pues de un mínimo global.

6.6.2 Ejemplo 1. Minimización con restricciones. Mínimo en el interior.

El primer ejemplo que se plantea es el siguiente: Dada la función $z(x)$ definida como sigue:

$$z(x) = 2(x^2 - 5) - 5x - 30 \quad (16)$$

encontrar el punto x_{min} donde $z(x_{min})$ sea mínimo global considerando la siguiente restricción :

$$-2 < x < 7 \quad (17)$$

Gráficamente el problema adopta la siguiente forma:

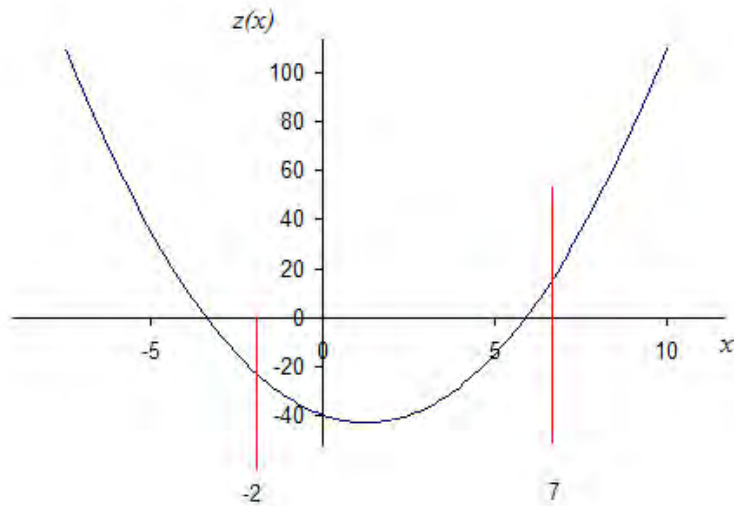


Figura 6.16 Gráfica a minimizar

Fácilmente se puede encontrar el mínimo que se halla para $x_{min}=1.25$ $z_{min}=-43.125$.

Para resolver el problema aplicando la metodología descrita, el primer paso consistirá en realizar el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &\xrightarrow{X(t)} x : t \in \mathfrak{R} \quad x \in \Omega \quad \Omega: -2 < x < 7 \\ X(t) &= \left(\frac{7 - (-2)}{\pi} \right) \arctg(t) + \left(\frac{7 + (-2)}{\pi} \right); \alpha = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

La decisión de tomar $\alpha = 1$ es arbitraria se podrá influir en el proceso de convergencia modificando dicho parámetro.

La representación gráfica del cambio adopta la siguiente forma:

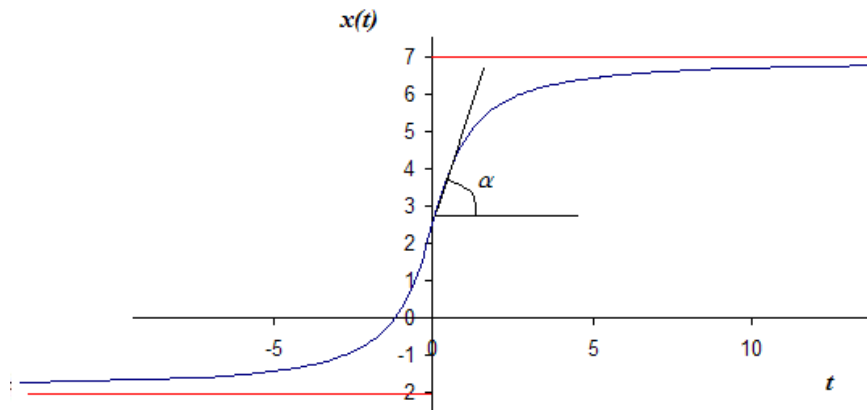


Figura 6.17. Función de cambio de variable.

Y componiendo la función original con dicho cambio se obtendrá la función $Z = z(X(t))$ definida en todo \mathfrak{R} para la que ya se podrá aplicar un algoritmo de optimización sin restricciones. El aspecto que tiene la función compuesta se puede ver en la siguiente figura:

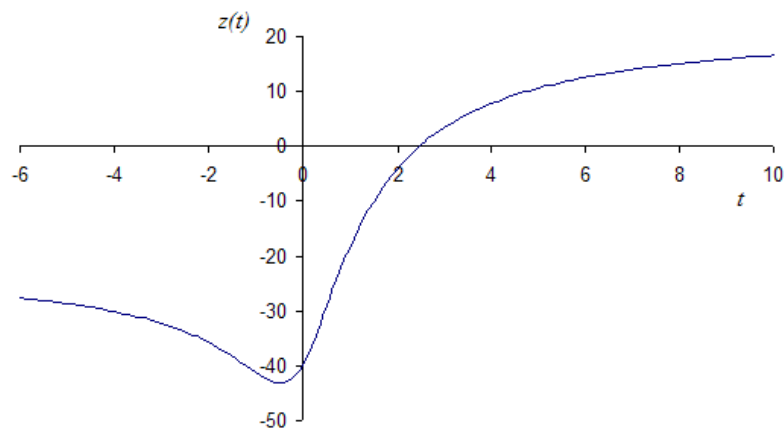


Figura 6.18. Función original transformada

Donde el mínimo se encuentra en el punto $t_{\min} = -0.466$ y deshaciendo el cambio se obtiene $x_{\min} = 1.25$ y $z_{\min} = -43.125$, que se corresponde exactamente con el mínimo buscado.

6.6.3 Ejemplo 2. Minimización con restricciones. Mínimo en la frontera.

El segundo ejemplo consiste en resolver el mismo problema empleando un dominio donde no este contenido el mínimo local de la función, como por ejemplo $3 < x < 8$, por lo que se deberá encontrar un mínimo global de la función. Por simple inspección se puede apreciar en la siguiente figura que en este caso el mínimo de la función $z(x)$ en el dominio planteado es global alcanzándose para el extremo $x_{\min} = 3$ y $z_{\min} = -37$.

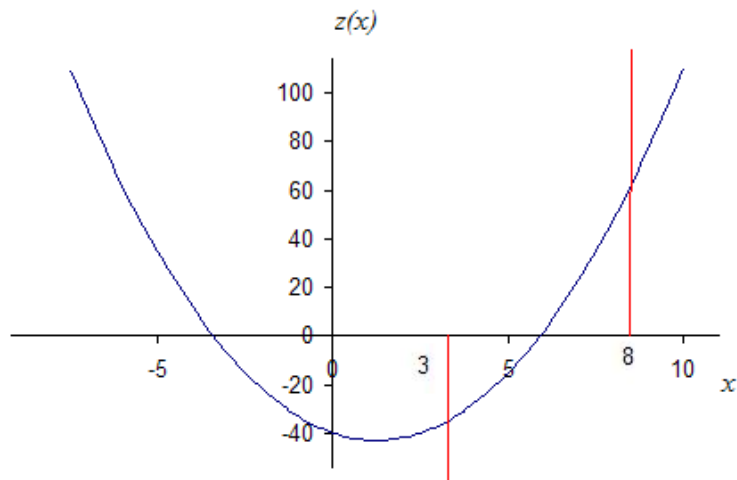


Figura 6.19. Gráfica con las restricciones adoptadas

En este caso el cambio de variable para transformar el problema de optimización restringido a uno sin restricciones adopta la siguiente forma:

$$t \xrightarrow{X(t)} x : t \in \mathfrak{R} \quad x \in \Omega \quad \Omega : 3 < x < 8$$

$$X(t) = \left(\frac{8-3}{\pi} \right) \arctg(t) + \left(\frac{8+3}{\pi} \right); \alpha = 1 \quad (19)$$

Donde su representación gráfica se puede apreciar en la siguiente figura:

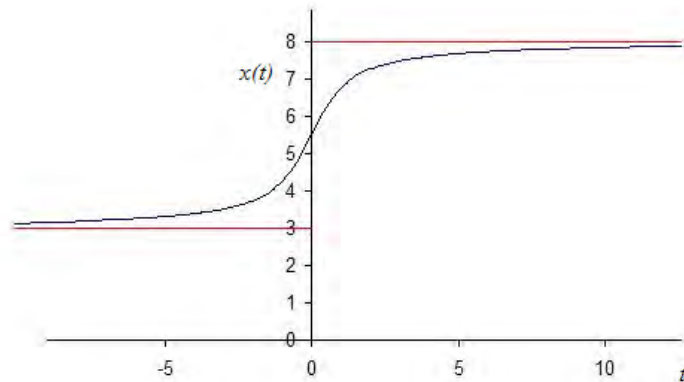


Figura 6.20. Función de cambio de variable

Y componiendo la función original con dicho cambio se obtendrá la función $Z = z(X(t))$ definida en todo \mathfrak{R} para la que ya se podrá aplicar un algoritmo de optimización sin restricciones. El aspecto que tiene la función compuesta se puede ver en la siguiente figura:

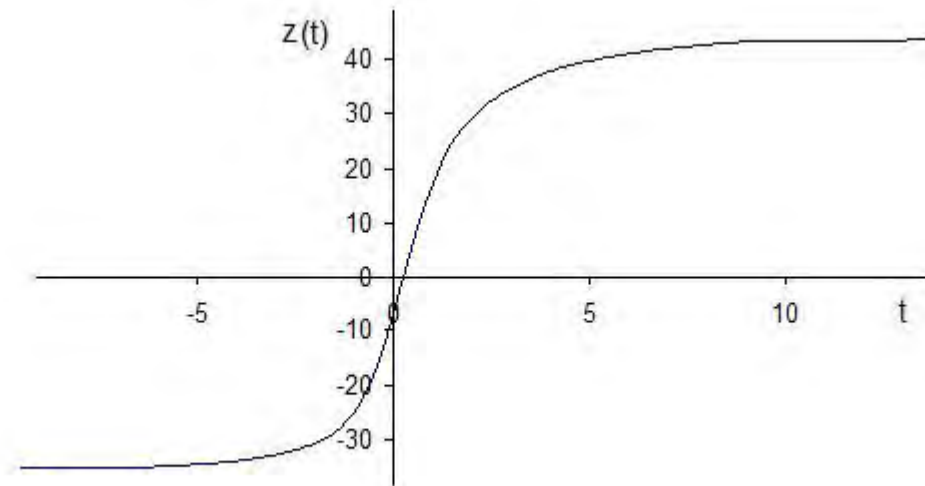


Figura 6.21. Función original transformada

Donde como era de esperar no aparece ningún mínimo local, y el mínimo global se encuentra en una asíntota inferior por lo que el algoritmo de optimización no convergerá por un criterio de parada basado en el avance las ordenadas, sino que se detendrá por la convergencia del avance de las abcisas. Es por ello que se deberá dotar de un doble criterio de parada para poder tratar tanto los casos en que se encuentra tanto un mínimo local como uno de global. En este caso el mínimo se encuentra para $t = -\infty$ por lo que deshaciendo el cambio encontramos el mínimo buscado $x_{\min}=3$ y $z_{\min}= -37$

En el caso que en un mismo intervalo se encontrasen mínimos locales y globales, el algoritmo de optimización encontraría uno u otro dependiendo de la semilla utilizada para arrancar el proceso iterativo.

6.7 Comportamiento de los algoritmos de optimización empleados

Para analizar el comportamiento del algoritmo de optimización implementado se realizarán diversos ejemplos de casos sencillos consistentes en estructuras de arcos en dos y tres dimensiones, sometidos a diversos estados de carga.

6.7.1 Ejemplo 1. Comprobación estabilidad de un arco simétrico 2D.

A continuación se describirá un ejemplo donde se muestra la aplicación del proceso de optimización destinado a encontrar la posición “óptima” de la línea de presiones para un arco simétrico cargado a peso propio, simulada a mediante una estructura funicular.

El problema consistirá en, partiendo de una línea funicular alejada de la solución incluso situada en su exterior, encontrar una línea en el interior del contorno resistente que maximice el coeficiente de seguridad geométrico y por tanto ,mediante la aplicación del primer teorema de Heyman, se pueda justificar que el arco es estable. De esta manera se podrá comprobar la capacidad del algoritmo de optimización para encontrar un trazado

que maximice el coeficiente de seguridad geométrico partiendo de una semilla totalmente alejada de la solución final.

La geometría del arco consiste en un trazado parabólico de 1m de grosor, 7.34m de luz y de 2 metros de flecha en la clave. En este caso se considerará que la densidad es uniforme en todo el arco y que tiene una profundidad de un metro. En la figura 6.22 se puede apreciar la geometría de la estructura a calcular.

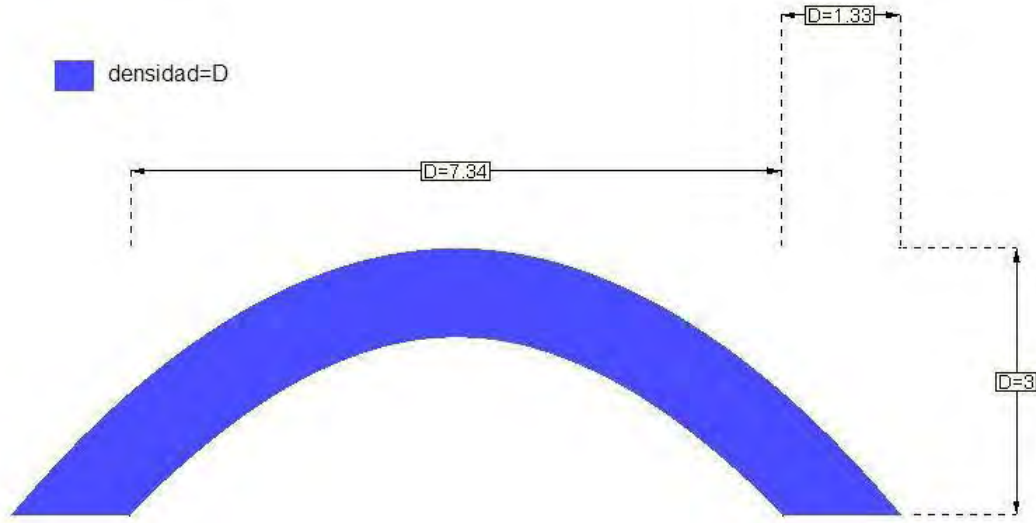


Figura 6.22. Configuración inicial

En la siguiente figura se puede apreciar en azul la inversión del contorno resistente del arco y en verde la línea funicular propuesta inicialmente. Como puede comprobarse a simple vista dicha línea de presiones no verifica el primer principio de Heyman, situándose fuera del contorno resistente.

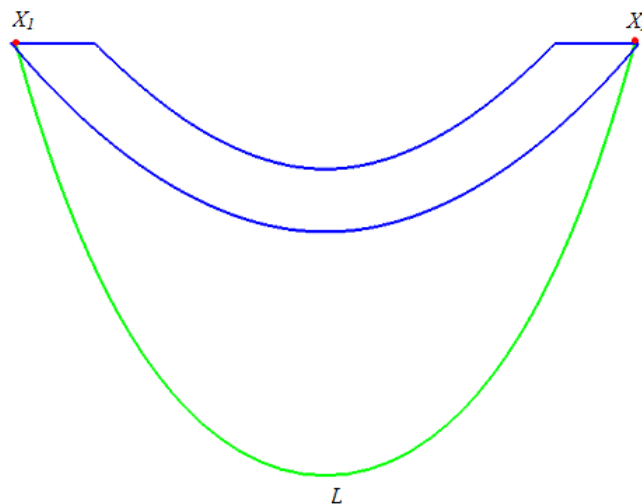


Figura 6.23. Modelo funicular de partida

Se tomarán como variables de diseño las componentes horizontales de los puntos de apoyo X_1 , X_2 así como la propia longitud del elemento funicular L . La posición de los

apoyos se ha restringido de manera que permanezcan en el interior del contorno de los arranques del arco.

Las variables iniciales tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0.0666163\text{m} \\ X_2 &= 9.9333837\text{m} \\ L &= 18\text{m} \end{aligned}$$

La carga repartida que se atribuye al modelo funicular equivalente será:

$$P_0 = \frac{A \cdot D}{18} \quad (20)$$

Donde A corresponde al área del arco y D la densidad del material que la forma que P_0 acaba tomando el valor de 10kN/m. Recordemos que la profundidad del arco es unitaria.

Una vez sometido el problema a un proceso de optimización se obtiene el trazado mostrado en la figura 6.24 para el elemento funicular que representa la línea de presiones:

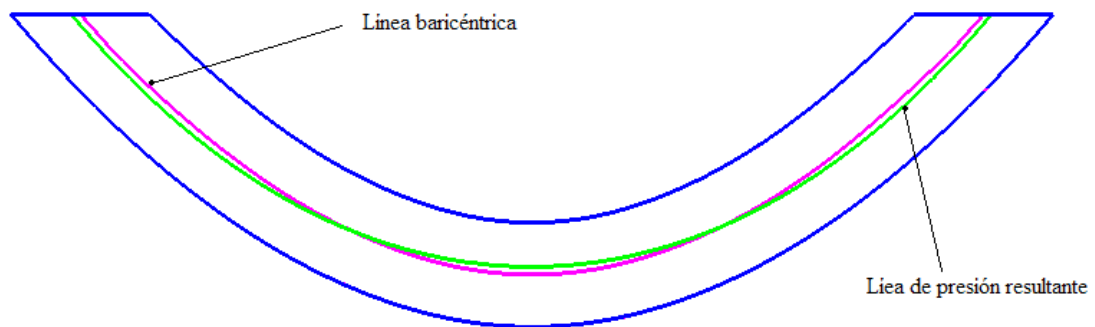


Figura 6.24. Modelo funicular resultante

Se puede apreciar la bondad de la solución obtenida puesto que se obtiene una línea de presiones alejada del paramento resistente casi centrada con el perfil de la línea baricéntrica de la pieza y manteniendo la simetría del trazado. El algoritmo tiende a alejar globalmente la línea de presiones, maximizando el coeficiente de seguridad geométrico. Las variables finales toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0.576178\text{m} \\ X_2 &= 9.41088\text{m} \\ L &= 10,41\text{m} \end{aligned}$$

El peso por unidad de longitud en el modelo funicular acabará siendo de 17.2911kN/m, manteniendo la carga de la estructura original.

Una vez finalizado el proceso de optimización, el punto de la línea de presión más cercano al paramento resistente se encuentra a 0.426m de éste, garantizando la estabilidad del arco.

Teniendo en cuenta que inicialmente el punto de la línea de presión más alejado del paramento resistente se encontraba a 3,82m por fuera del perfil resistente, es evidente la fuerte variación que ha supuesto dicho proceso de optimización. La figura 6.25 muestra la distribución de fuerzas de la correspondiente línea de presiones.

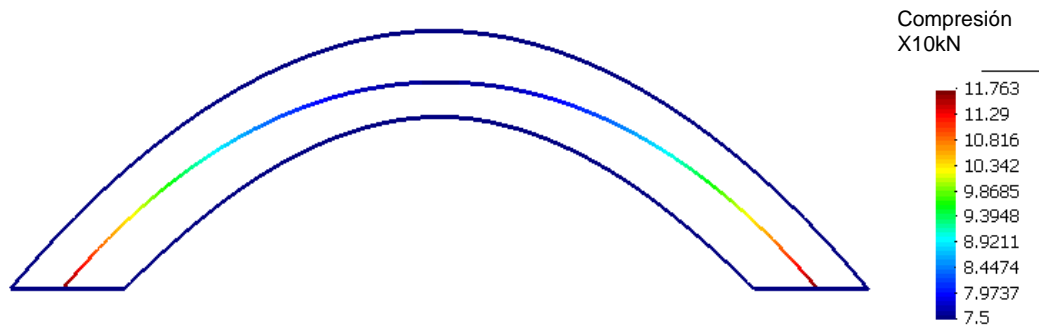


Figura 6.25. Fuerza de compresión en el modelo funicular resultante

La gráfica del proceso de convergencia se puede apreciar en la figura 6.26:

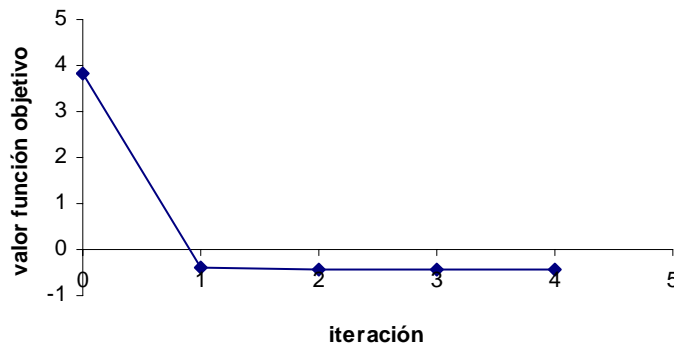


Figura 6.26 Convergencia obtenida

Del aspecto de la gráfica de convergencia del proceso se desprende que dicho algoritmo actúa básicamente en la primera iteración, mejorando levemente el valor de la función objetivo en las iteraciones siguientes. Éste es un comportamiento bastante típico en diversos procesos de optimización (Gil, 2001).

6.7.2 Ejemplo 2. Comprobación estabilidad de un arco no simétrico 2D.

A continuación se describirá un ejemplo donde se repite el análisis del anterior ejemplo pero con una distribución de pesos no simétrica. El problema consistirá en, partiendo de una línea funicular alejada de la solución, encontrar una línea en el interior del contorno

resistente y por tanto, mediante la aplicación del primer teorema de Heyman, justificar que el arco es estable.

Como en el caso anterior la geometría del arco consiste en un trazado parabólico de 1m de grosor, 7.34m de luz y de 2 metros de flecha en la clave. En este caso se considerará que la densidad es uniforme en cada una de las partes a uno y otro lado del eje vertical de simetría y de valor tres veces superior en la parte derecha respecto la izquierda. En la figura 6.27 se puede apreciar la geometría y distribución de cargas de la estructura a calcular.

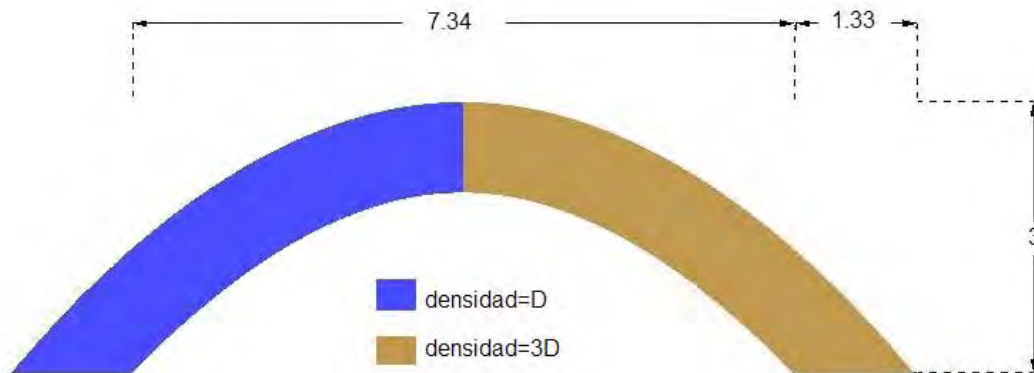


Figura 6.27 Configuración inicial

Para encontrar una línea de presiones que maximice el coeficiente de seguridad geométrico se partirá de un único elemento funicular que excede ampliamente del contorno resistente del arco. En la figura 6.28 se puede apreciar en azul la inversión del contorno resistente del arco y en verde la línea de funicular propuesta inicialmente. Se tomarán como variables de diseño las componentes horizontales de los puntos de apoyo X_1 , X_2 así como la propia longitud del elemento funicular L . La posición de los apoyos se ha restringido de manera que permanezcan en el interior del contorno de los arranques del arco.

Las variables iniciales tienen los siguientes valores:

$$X_1 = 0.666163 \text{ m}$$

$$X_2 = 9.33384 \text{ m}$$

$L = 18\text{m}$, dividida en dos tramos iguales. (Longitud inicial del elemento de catenaria)

Como es lógico, dicha línea funicular tiene que representar fielmente la distribución de pesos de la estructura original, por lo que se asignarán dos densidades correspondientes a cada una de las partes en que se divide la estructura original.

$$P_0^1 = \frac{A/2 \cdot D_1}{18} \quad P_0^2 = \frac{A/2 \cdot D_2}{18} \quad (21)$$

Donde A corresponde al área del arco y D_1 , D_2 son las densidades de los materiales que la forman. Las cargas distribuidas P_0^1 , P_0^2 acaban tomando el valor de 10kN/m y 30kN/m respectivamente. Recordemos que la profundidad del arco es unitaria.

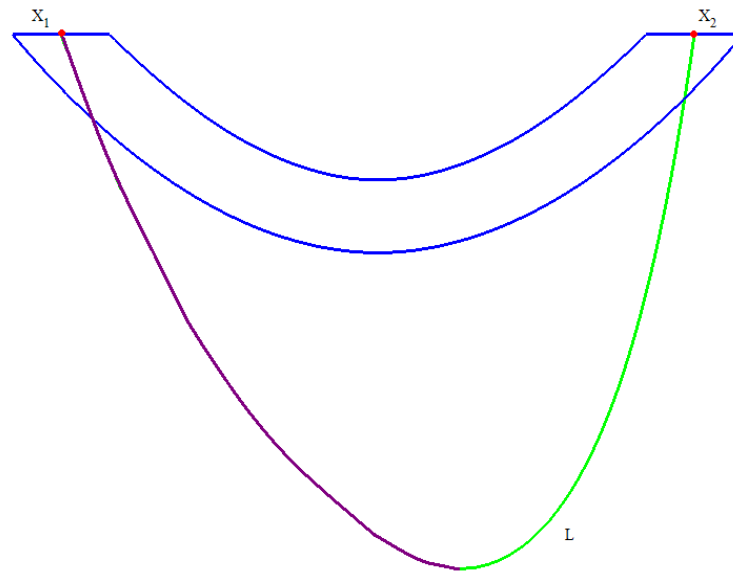


Figura 6.28. Modelo funicular de partida

Debido a la distribución de cargas la línea se desplazará hacia el lado más pesado, ofreciendo el aspecto asimétrico que se muestra en la figura 6.28.

Una vez sometido el problema a un proceso de optimización se obtiene el siguiente trazado.

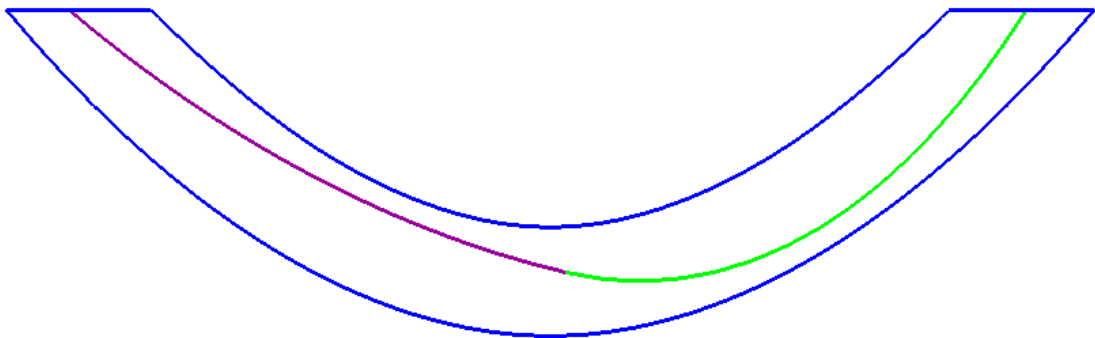


Figura 6.29. Trazado obtenido

Las variables toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0.572672\text{m} \\ X_2 &= 9.376870\text{m} \\ L &= 10.436435\text{m} \end{aligned}$$

Obteniendo una distancia mínima al paramento resistente de 0.22m. Teniendo en cuenta que inicialmente el punto de la línea de presión más alejado al paramento resistente se

encontraba a 4.43m por fuera del perfil resistente, es evidente la fuerte variación que ha supuesto dicho proceso de optimización.

La gráfica de convergencia del proceso de optimización se puede apreciar en la figura 6.30.

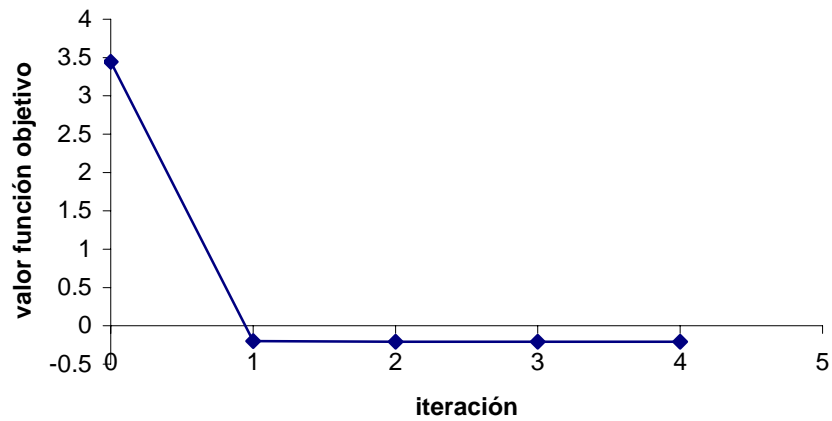


Figura 6.30. Convergencia obtenida

Del aspecto de la gráfica de convergencia del proceso se desprende que dicho algoritmo actúa básicamente en la primera iteración, mejorando levemente el valor de la función objetivo en las iteraciones siguientes.

Cabe comprobar ahora el grado de equivalencia estática entre el modelo real y el modelo funicular resultante. El arco tiene situado el centro de gravedad a 6.17m del extremo izquierdo mientras el modelo funicular lo tiene situado a 6.31m, lo que ofrece una desviación del 2.26% que se considera excesiva.

Para corregir este error bastará trasladar el modelo resultante 0.15m hacia la derecha obteniendo la correspondencia estática con el arco real incluso mejorando la solución puesto que en este caso la distancia mínima es de 0.27m.

La figura 6.31 muestra la distribución de fuerzas de la correspondiente línea de presiones.

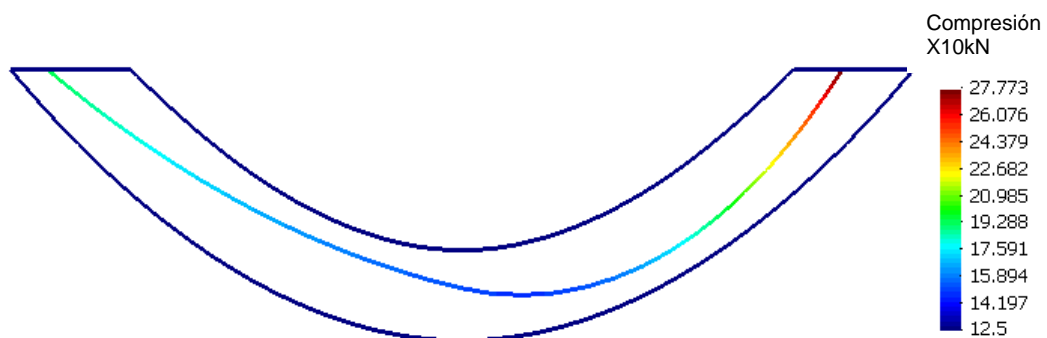


Figura 6.31. Fuerza de compresión en el modelo funicular resultante

A la vista de los resultados se puede considerar el proceso de optimización como una herramienta que permite mejorar los esquemas funiculares mediante la maximización del coeficiente de seguridad geométrico, aunque finalmente la manipulación directa de los parámetros de control del problema puede mejorar los resultados obtenidos como ocurre en el presente caso.

6.7.3 Ejemplo 3. Comprobación estabilidad de un arco 3D.

Hasta ahora se han realizado dos ejemplos que se han podido modelizar en 2D. A continuación se describirá un ejemplo donde se muestra la aplicación del proceso de optimización destinado a encontrar una solución “óptima” para una estructura tridimensional formada por dos arcos que se cruzan en su clave. Como en los casos anteriores el problema consistirá en, partiendo de una línea funicular alejada de la solución, encontrar una línea en el interior del contorno resistente y por tanto, mediante la aplicación del primer teorema de Heyman, justificar que la estructura es estable.

En la figura 6.32 se puede apreciar la geometría del problema. El trazado de los arcos consiste en sendos perfiles parabólicos de 2 metros de flecha en la clave. La densidad del material que los forma se toma uniforme.

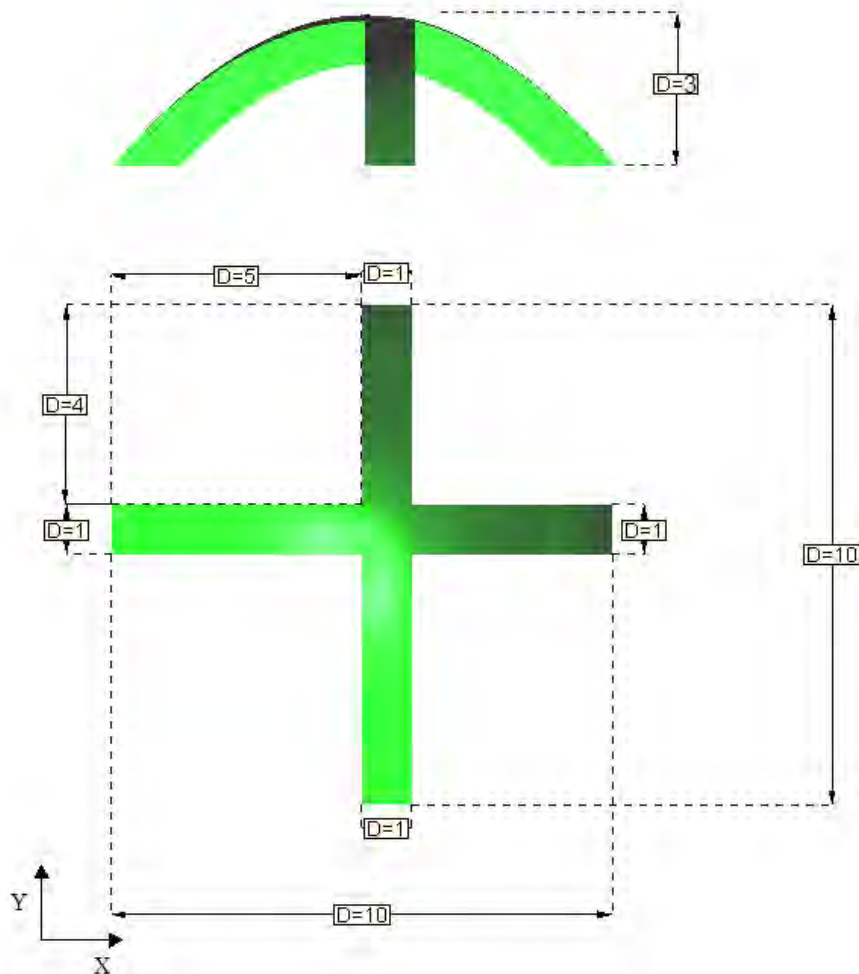


Figura 6.32. Configuración inicial

Para encontrar una línea de presiones que maximice el coeficiente de seguridad geométrico se partirá de cuatro elementos funiculares conectados entre sí que exceden ampliamente el contorno resistente del arco. Se considerarán como variables del problema las longitudes de los elementos así como la posición de los apoyos del modelo funicular, imponiendo que permanezcan en el interior de los arranques de la estructura.

Las variables iniciales tienen los siguientes valores:

Apoyo	X	Y
1	0.067	-0.500
2	5.500	4.330
3	9.933	-0.500
4	5.500	-4.334

Tabla 6.5. Posición apoyos del modelo funicular inicial

La longitud inicial en todos los elementos es de 7m, adoptando una carga por unidad de longitud de 10kN/m

En la figura 6.33 se puede apreciar en verde el contorno resistente la estructura y en azul las líneas antifuniculares iniciales. Como puede comprobarse a simple vista dichas línea de presiones no verifica el primer principio de Heyman, situándose fuera del contorno resistente.

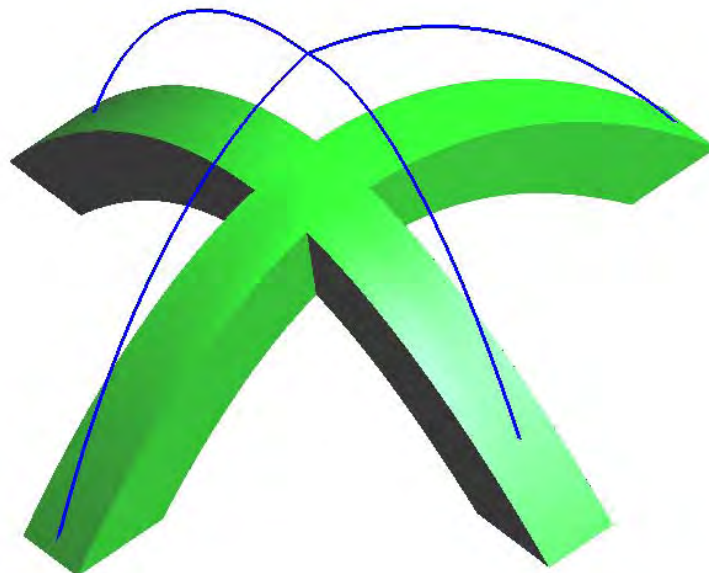


Figura 6.33. Modelo funicular inicial

Una vez sometido el problema a un proceso de optimización se obtiene el siguiente modelo funicular que se ha comprobado que estáticamente se corresponde a la estructura original. Se grafican en color azul las líneas funiculares originales y en rosa el

esquema funicular optimizado, situándose todo él en el interior del contorno resistente de la estructura a una distancia en el lugar más desfavorable de 0.16m

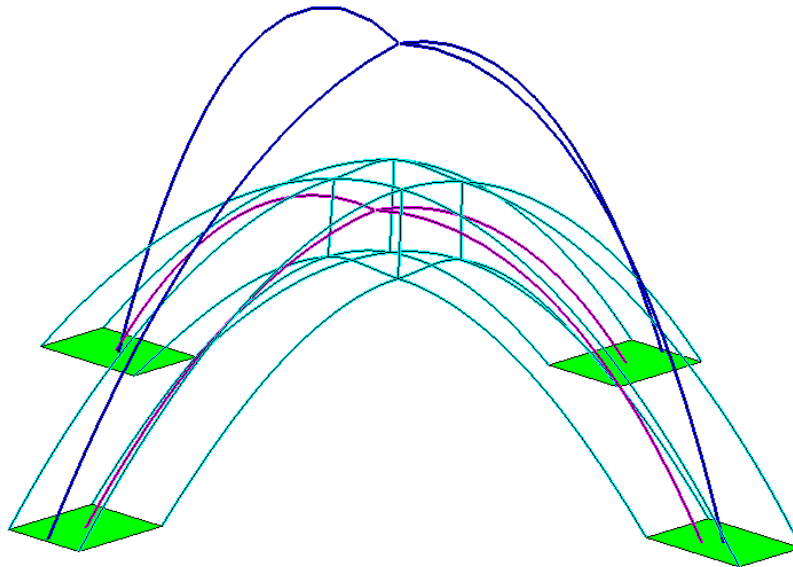


Figura 6.34. Modelo funicular final (líneas en color morado) modelo funicular inicial en azul.

Las variables finales toman los siguientes valores:

En cuanto a la posición de los apoyos del modelo funicular

Apoyo	X	Y
1	0.677	-0.503
2	5.307	4.197
3	9.352	-0.504
4	5.503	-4.376

Tabla 6.6. Posición final de los apoyos del modelo funicular

En cuanto a la longitud de los elementos

$$L1= 5.31956 \text{ m}$$

$$L2= 5.07208 \text{ m}$$

$$L3= 4.92414 \text{ m}$$

$$L4= 5.72257 \text{ m}$$

En el siguiente esquema muestra la variación en la posición de los apoyos del modelo funicular. El proceso iterativo no ha conseguido centrarla posición del apoyo nº2, que a priori parece la mejor posición de para maximizar la función objetivo.

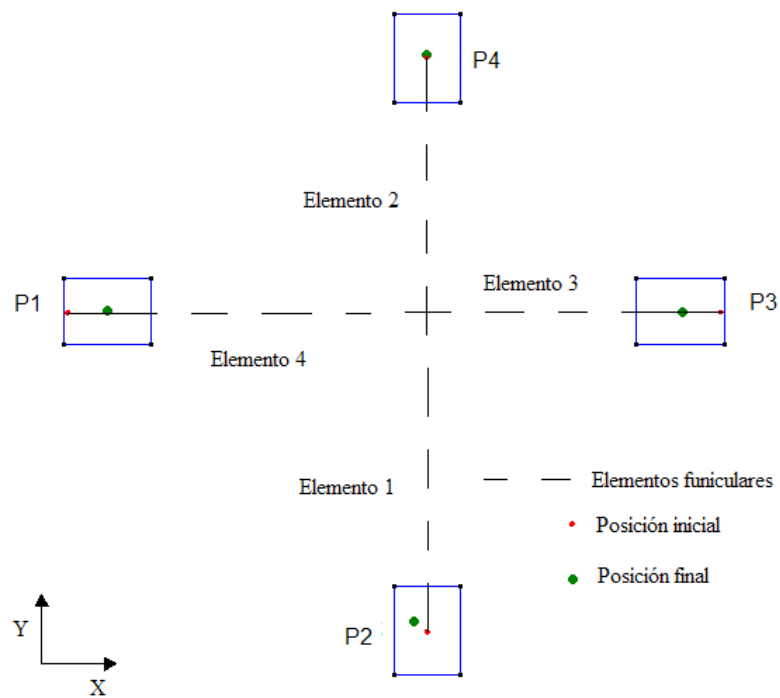


Figura 6.35. Posición de los apoyos del modelo funicular optimizado respecto al inicial

En la figura 6.36 se observa la distribución de compresiones en las líneas funiculares obtenidas, se puede apreciar la forma en que se distribuyen las cargas, puesto que uno de los arcos se apoya en el otro.

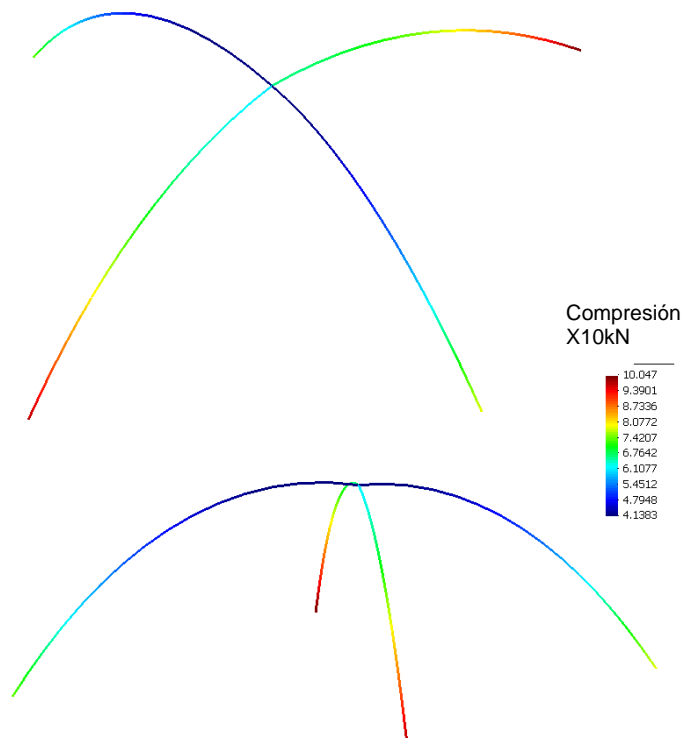


Figura 6.36. Fuerza de compresión en el modelo funicular resultante

Finalmente se puede apreciar en la figura 6.37 la gráfica del proceso de convergencia. Del aspecto de la gráfica de convergencia del proceso se desprende que dicho algoritmo actúa básicamente en la primera iteración, mejorando levemente el valor de la función objetivo en las iteraciones siguientes.

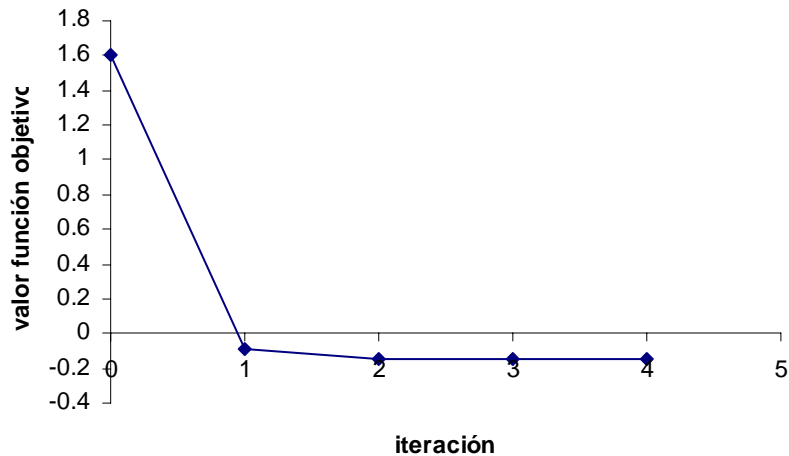


Figura 6.37. Convergencia obtenida

6.8 Conclusiones obtenidas a partir de los ejemplos realizados.

- Se han realizado una serie de ejemplos simples para determinar la capacidad y aplicabilidad de las estrategias orientadas a encontrar modelos funiculares de estructuras reales en dos y tres dimensiones, obtenido unos resultados satisfactorios.
- Por un lado se puede ver que la estrategia de basada en demostrar la estabilidad de estructuras de obra de fábrica mediante la simulación antifunicular es práctica y eficiente si se dispone de una herramienta que permita encontrar complejas redes de líneas de presión que permitan simular estructuras esqueléticas de cierta complejidad.
- El elemento de catenaria específicamente desarrollado y el algoritmo de resolución implementado ha permitido obtener de manera sencilla y rápida la posición de equilibrio de redes de cable que simulan adecuadamente las líneas de presión en estructuras de obra de fábrica.
- Los procesos de optimización orientados a maximizar el coeficiente de seguridad geométrico permiten automatizar la búsqueda de configuraciones funiculares más eficientes desde el punto de vista resistente, aumentando el coeficiente de seguridad para unas cargas determinadas.

- No obstante lo anterior y en general, los procesos de búsqueda de diseños o configuraciones óptimas, basadas en la maximización de una función objetivo y sometiendo el espacio de variables de diseño a unas restricciones determinadas, no puede ser automatizado absolutamente, es decir no puede ser considerado como un proceso que no requiera una cierta manipulación o seguimiento por parte del proyectista o investigador que actúe sobre las variables en determinadas ocasiones, permitiendo así la continuación de un proceso de optimización.
- Concretamente en el caso presentado, el proceso de optimización es altamente no lineal, tanto por la naturaleza de la propia función objetivo, únicamente C_0 , como por las restricciones a las que se someten las variables. En estos casos el proceso de convergencia puede ser irregular y dificultoso. En los ejemplos realizados se observa que el algoritmo de optimización permite mejorar de forma automática los diseños iniciales aunque el proceso de optimización se concentre en las primeras iteraciones. Este hecho podrá requerir que en determinados casos sea conveniente la intervención mediante la manipulación directa de las variables de diseño para permitir continuar con el proceso de optimización.

Capítulo 7

Ejemplos de aplicación

7.1 Introducción

En el presente capítulo se muestra la aplicación de las técnicas descritas en los capítulos anteriores mediante el análisis de cuatro estructuras de obra de fábrica de diferente complejidad geométrica.

El primer caso presentado consiste en un arco simple, ensayado en la realidad hasta rotura y que se puede considerar como un caso de referencia empleado como tal por los diferentes autores para poder contrastar los resultados que ofrecen las diferentes técnicas empleadas en el análisis de estructuras de obra de fábrica.

El segundo ejemplo verifica la estabilidad de una estructura bidimensional de obra de fábrica formada por diversos elementos. Dicho ejemplo también ha sido analizado por diversos autores, permitiendo una cierta comparativa entre los resultados.

El tercer ejemplo presenta un ejemplo de elevada complejidad geométrica, siendo sólo analizable mediante el empleo de un modelo tridimensional. La resolución de este ejemplo desea mostrar la aplicabilidad del método en el análisis de estructuras de elevada complejidad geométrica.

Finalmente se presenta el cálculo del pórtico central de la catedral de Girona. Los resultados obtenidos serán comparados con otros encontrados en la bibliografía.

7.2 Análisis del puente de BridgeMill.

El primer ejemplo que se presentará constituye un clásico en el mundo del análisis computacional de estructuras de obra de fábrica. Se trata de un puente real situado en Girvan, Scotland (U.K.), que fue experimentado hasta la rotura por Hendry et al. (Molins, 1998) hasta la rotura. El citado puente estaba compuesto por una rosca formada por bloques de arenisca y un relleno compuesto por una mezcla de arena y arcilla. El perfil de la rosca es parabólico y se puede expresar mediante la expresión $z(x) = -0.033958x^2 + 0.621104x$.

En la tabla 7.1 se pueden ver los valores de los parámetros que definen la geometría del problema. En la figura 7.1 se haya un esquema del mismo. Una descripción más precisa está en (Molins, 1998).

Luz libre	18300mm
Canto de la rosca	711mm
Altura punto medio	2840mm
Profundidad mínima del relleno	203mm
Densidad relleno	2100Kg/m ³
Densidad rosca	2160Kg/m ³

Tabla 7.1 Datos de La estructura

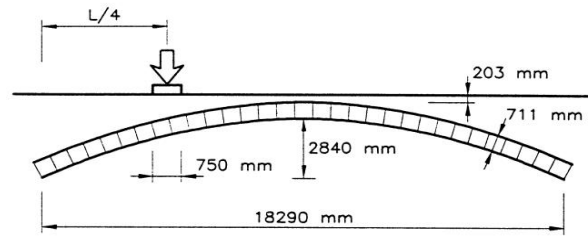


Figura 7.1 Definición del problema

Dado que se trata de un ensayo a escala real proporciona un resultado de referencia adecuado para evaluar el grado de exactitud de la carga última encontrada con las herramientas de cálculo formuladas por diferentes autores.

En el presente ejemplo se modelizará la estructura mediante un modelo funicular y aplicando los principios de la teoría del análisis limite encontrará el valor de la carga última de la estructura. De acuerdo con las hipótesis de Heyman (1969, 1982, 1983, 1995, 1998) el mecanismo de colapso se producirá cuando la línea de presión encontrada mediante la analogía con el modelo funicular se haga tangente al contorno del arco formándose cuatro rótulas plásticas.

Como se ha comentado la estructura consta de una rosca que constituye la parte resistente de la estructura y un relleno que transmite la carga desde la zona de aplicación en la parte superficial del puente a la superficie de contacto entre la rosca y el relleno. Por tanto para verificar la estabilidad del puente primeramente se deberá aproximar la distribución de la carga sobre la rosca. Dicha distribución se obtendrá mediante un análisis simplificado suponiendo que el relleno se comporta como un medio elástico y la rosca es infinitamente rígida (ver figuras 7.2 y 7.3). De esta manera se pasará de una distribución consistente en una faja de 75cm aplicada a un cuarto de la luz, a una distribución que se puede apreciar en la figura 7.4.

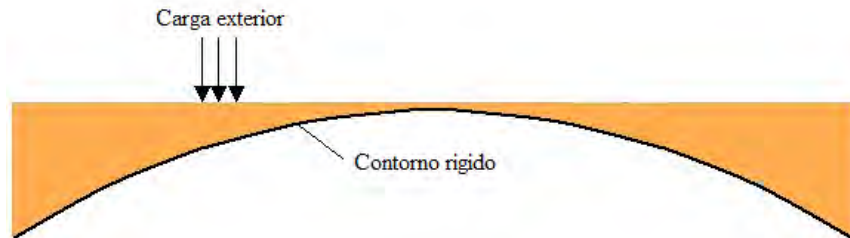


Figura 7.2 Modelo para obtener la distribución de presiones sobre el contorno del arco



Figura 7.3. Bulbo de tensiones obtenido

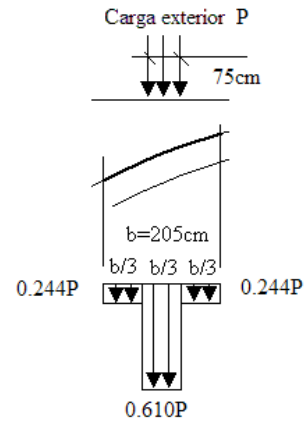


Figura 7.4. Distribución de tensiones considerada sobre la rosca

Por otro lado como la geometría de la sección varía longitudinalmente la distribución del peso propio no es homogénea a lo largo del puente; por lo tanto, la catenaria se ha discretizado en tramos de carga uniformemente distribuida de manera que se refleja el peso propio de la estructura. La distribución de la carga finalmente aplicada se puede ver en la figura 7.5 y consiste en la suma del peso propio y la distribución de la sobrecarga considerada.

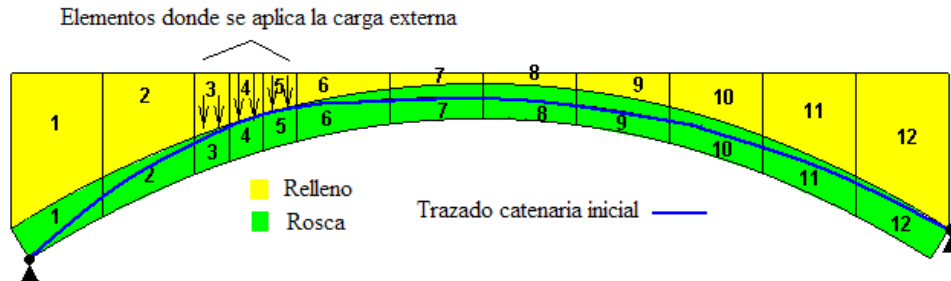


Figura 7.5 Discretización de la estructura

Como a priori se conoce cualitativamente la forma del trazado de la línea de presión crítica se han fijado los extremos de la estructura funicular simplificando el proceso de búsqueda. El apoyo derecho se ha situado en la parte superior de la rosca y en la parte izquierda en la parte inferior. Para encontrar de forma automática el trazado del modelo funicular que maximice la carga de rotura se ha dejado como variable la longitud de la catenaria.

Para encontrar la carga máxima se han ido probando diferentes cargas y para cada una de ellas se ha sometido el modelo funicular resultante a un proceso de optimización que ha consistido en maximizar la distancia del modelo al contorno resistente. Entonces para aquella carga en que el modelo funicular una vez sometido al proceso de optimización sea tangente al contorno resistente se habrá encontrado la carga última que ha resultado

ser de 2.905kN. Se puede comparar el resultado con el obtenido por otros autores en la tabla 7.2.

Método	Carga
Ensayo hasta rotura(Henry et al.,1985)	3.100 kN
Mecanismo tipo. (Page,1993)	2.780 kN
Mecanismo tipo arco (Page,1993)	2.170 kN
Mecanismo (Crisfield et. Al. 1987)	2.830 kN
Mecanismo tipo (Molins et al. 1998)	2.760 kN
Mexe/Pippard minipoint (Page,1993)	2.450 kN
FEM-MAFEA (Page,1993)	2.190 kN
FEM (Crisfield et al.,1985)	2.880-3.200 kN
FEM (Choo et al.,1991)	2.930 kN
Método de la Energía	2.700 kN
Formulación matriz generalizada. Se considera comportamiento no lineal del material si considerar contribución del relleno (Molins,1998)	2.690 kN
Formulación matriz generalizada. Se considera comportamiento no lineal geométrico y material si considerar contribución del relleno (Molins,1998)	1.870 kN
Formulación matriz generalizada. Se considera comportamiento no lineal geométrico y material y además se considera contribución del relleno (Molins,1998)	2.800 kN
Método antifunicular (presente método)	2.905 kN

Tabla 7.2 Cargas últimas obtenidas por diversos autores, a partir de (Molins C.,1998).

La distribución de compresiones por metro de profundidad que aparecen en la rosca se puede apreciar en la figura 7.6. Se han dibujado la posición de las rótulas que aparecen en los puntos de tangencia con el contorno resistente en rotura. Es interesante observar que el trazado obtenido corresponde al mecanismo de rotura real de la estructura, corroborando el primer teorema del análisis plástico.

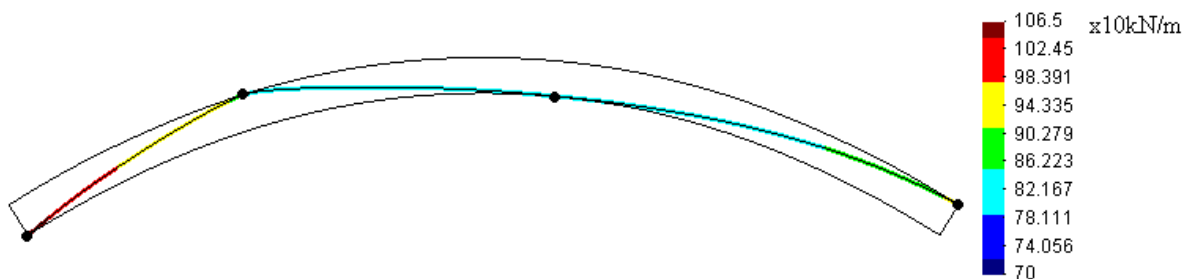


Figura 7.6 Ley de compresiones en la rosca (por metro de profundidad)

Cabe comentar que la carga de rotura ha sido obtenida imponiendo la tangencia de la línea de presiones, modelizada mediante un elemento funicular, con el contorno resistente de la rosca. Se ha asumido por tanto la capacidad de plastificación del material y por tanto se considera que se forman las correspondientes rotulas plásticas características en el estado de rotura cumpliendo así una de las premisas que exige el análisis límite. Este hecho, que no tiene en cuenta la limitación que ofrece la capacidad a compresión del material, parece que tenga que situar el análisis del lado de la inseguridad pero en cambio la carga de rotura obtenida experimentalmente es superior a la teórica, confirmando que las hipótesis realizadas quedan del lado de la seguridad.

También se tiene que tener en cuenta la contribución del propio del relleno en la resistencia a la compresión, ya que éste puede permitir que las líneas de presión pudiesen salirse levemente de la rosca, contribuyendo así al aumento de la carga última del arco.

7.3 Aplicación al análisis bidimensional de estructuras. Estudio del pórtico de la Catedral de Mallorca.

7.3.1 Introducción.

El presente ejemplo tiene un especial interés no sólo por las excepcionales dimensiones que presenta la propia construcción, sino también porque permitirá comparar los resultados obtenidos con los análisis realizados por diversos autores empleando técnicas completamente diferentes .

7.3.2 Breve introducción histórica.

La Catedral de Mallorca (ver figura 7.8) es una de las construcciones que presentan una mayor diafanidad en la Edad Media. Iniciada en 1350 constituye una osada y magnífica construcción gótica como muestran las esbeltas proporciones de los elementos resistentes que la forman y la amplitud de sus espacios libres. Los 44m de altura, sólo superada por el coro de la Catedral de Beauvais y el de la Catedral de Colonia y unos arcos principales con una luz de 17.8m sólo son superados por la nave de la Catedral de Girona que presentan una luz de 22m son muestras de algunas de sus excepcionales dimensiones.

Por lo que respecta a la esbeltez de los elementos estructurales, destaca el caso de los pilares sobre los que se apoyan los arcos de la nave central. Estos pilares tienen una sección transversal octogonal de 1,6 a 1,7 de diámetro circunscrito, y alcanzan una altura de 22,6m. Entendiendo la esbeltez como la relación entre la altura y el grueso, ésta toma un valor de 14,1.



Figura 7.7 Vista de la Catedral de Mallorca

El atrevimiento del diseño de este edificio, en combinación con el hecho que se ha mantenido en pie durante más de 500 años, hace pensar que realmente se concibió un diseño estructural óptimo, entendiendo éste como aquel que permite construir una estructura que resiste unas acciones determinadas empleando la mínima cantidad de material. A pesar de esto no se puede ignorar que algunas de sus bóvedas han sido reconstruidas en repetidas ocasiones, además de haber sufrido importantes daños a causa de un terremoto en el siglo XIX, que derribó la fachada principal y algunas de las bóvedas adyacentes (Maynou, 2002).

Se deben tener en cuenta las alteraciones estructurales que se observan actualmente en dicho edificio, como son las elevadas deformaciones en los pilares (figura 7.9), y las fisuraciones verticales que se encuentran principalmente en la base de algunos de ellos (figura 7.8) aparentemente debidas a un exceso de compresión (Roca y Lodos, 2001). También es destacable la deformación que afecta a algunos de sus arbotantes.



Figura 7.8 Fisura vertical en la base de un pilar

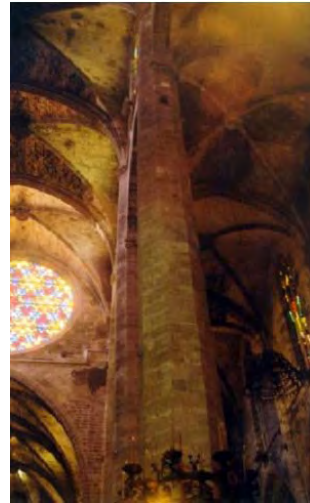


Figura 7.9 Pérdida de verticalidad de un pilar

7.3.3 Estudios previos de la Catedral de Mallorca

7.3.3.1 Introducción

Existe un importante bagaje histórico en el que se recogen diferentes estudios sobre el comportamiento mecánico de la estructura de dicha estructura. Ya en 1912 Rubió, en el contexto de unas obras de rehabilitación dirigidas por Gaudí, analizó con detalle la estructura de la Catedral y empleó la estática gráfica para comprobar su estabilidad. Este trabajo ha sido recientemente revisado y ampliado por Maynou (2002) y Serrallonga (2003). También se ha empleado la técnica del análisis fotoelástico por Mark (1984) y modelos numéricos avanzados como el método los elementos finitos y la formulación matricial generalizada, ambas en su vertiente no lineal (Roca, 2001).

7.3.3.2 Análisis de mediante la estática gráfica.

Después de realizar numerosos tanteos, Rubió pudo llegar a determinar una solución mediante la estática gráfica, que permitía que todos los empujes ocasionados por los diferentes elementos que forman la estructura discurriesen dentro del contorno resistente del edificio. Cabe destacar la enorme dificultad que le supuso encontrar una configuración de fuerzas en equilibrio que le permitiese encajar el trazado dentro de la sección del pilar, ya que los empujes provenientes de la nave central hacen pasar la resultante muy cercana al paramento resistente a la altura de la coronación del pilar, véase la figura 7.12.

A partir de su análisis, Rubió concluye que la Catedral de Mallorca constituye un caso extremo dentro de la construcción Gótica, poniéndose de manifiesto la existencia de una serie de artilugios ocultos dentro de la Catedral (como son enormes pesos situados en las claves de los arcos centrales, véase figura 7.10), necesarios para poder mantener el edificio en equilibrio estable.



Figura 7.10 Macizos situados en las claves de las bóvedas

La solución encontrada por Rubió no es la única posible y él mismo sentencia en su artículo (Rubio, 1912) “*se ha conseguido un resultado que, aunque satisfactorio, como el que se presenta, no por esto deja el espíritu satisfecho del todo, ni la solución es tan indiscutible que no deje lugar a dudas*”. Este hecho ha sido estudiado por Maynou (2002) quien ha desarrollado una aplicación numérica mediante un programa de ordenador que automatiza la búsqueda de soluciones satisfactorias mediante la estática grafica, obteniendo un conjunto de posibles configuraciones de equilibrio (figura 7.11), de entre las cuales se encuentra la obtenida por Rubió demostrándose que ésta constituye una solución muy optimizada, es decir el contorno resistente se ajusta en gran medida al trazado de las líneas de presión, con el correspondiente de ahorro en la cantidad de material empleado en la construcción de la Catedral.

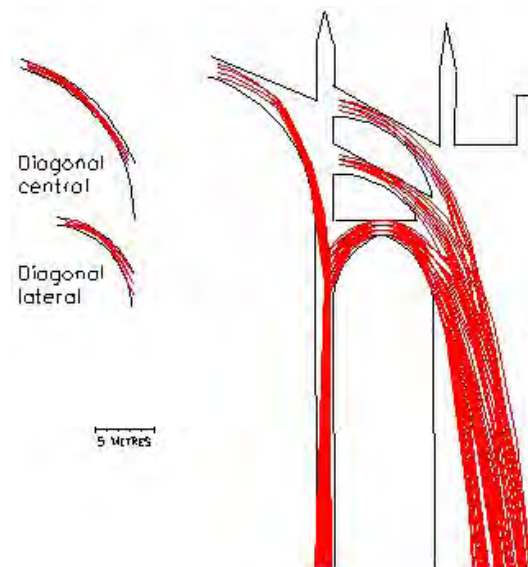


Figura 7.11 Diversas formas de equilibrio obtenidas computacionalmente por Maynou (2002)

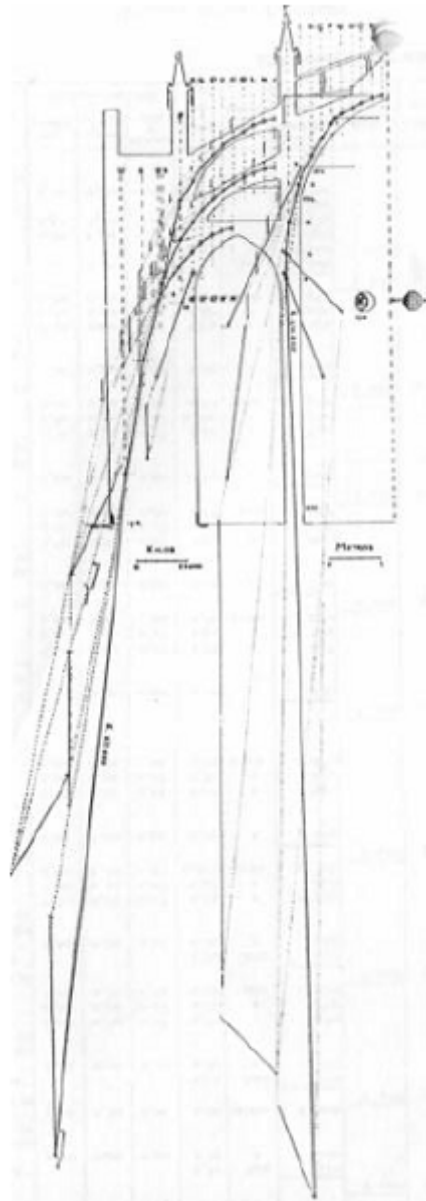


Figura 7.12 Resultado de Rubió (1912)

7.3.3.3 Análisis mediante foto elasticidad.

R. Mark, en la década de los 60, hizo un estudio de diferentes catedrales góticas basado en ensayos de modelos reducidos mediante fotoelasticidad, prestando especial atención a la Catedral de Mallorca.

Las conclusiones que extrajo en su estudio son en algunos casos contrarias a las de Rubió. Por ejemplo en contraposición a la excentricidad de la carga en los pilares centrales que obtuvo Rubió, Mark obtiene una flexión inusitadamente pequeña, en contraste al resto de construcciones góticas estudiadas por él, atribuyendo este hecho a un diseño estructural muy optimizado, en el sentido que se ha comentado anteriormente.

Es discutible la bondad de la solución de Mark dado que emplea técnicas basadas en la elasticidad lineal, no muy apropiada para tratar la estabilidad de estructuras de obra de fábrica. Los diversos análisis realizados mediante el uso de diferentes técnicas, todas ellas orientadas al análisis de estructuras de obra de fábrica, muestran una fuerte excentricidad de la carga en los pilares, cosa que se contrapone con la solución ofrecida por Mark.



Figura 7.13 Modelo fotoelástico de Mark

7.3.3.4 Métodos numéricos avanzados

Roca (2001) una vez calibrados diferentes modelos, procedió a realizar distintos análisis empleando técnicas basadas en el uso de métodos numéricos avanzados.

La primera de las técnicas empleadas ha sido el cálculo matricial generalizado (FMG), aprovechando que los edificios góticos están constituidos en gran medida por piezas unidimensionales de geometría recta o curva y que permiten ser modelados por elementos tipo barra curva. La FGM se basa en la extensión del cálculo matricial convencional para tratar estructuras formadas por barras con geometrías arbitrarias, con sección y orientación cambiantes en el espacio. Esta formulación combinada adecuadamente con ecuaciones constitutivas que modelen el comportamiento de la obra de fábrica ha permitido analizar con notable éxito diversas estructuras (Molins, 1996).

En cuanto al empleo de técnicas basadas en la técnica de los elementos finitos cabe decir que el principal problema consiste en reproducir las complejas y discontinuas formas de rotura de la obra de fábrica mediante la mecánica del medio continuo. La adopción de modelos constitutivos adecuados, que reflejen los principales fenómenos asociados al fallo de elementos pétreos, permite reproducir los mecanismos de colapso que se deducen de la aplicación de la teoría del análisis límite, es decir, se obtienen geometrías en colapso donde se acumulan las deformaciones plásticas en determinados puntos de la estructura (rotulas plásticas) y se producen movimientos de sólido rígido en los elementos situados entre las rotulas plásticas. En el presente caso los autores emplearon modelos basados en la teoría de daño (Cervera, 1998).

Una vez tarados los modelos numéricos se procedió a cargar los modelos con un factor multiplicador de peso propio que produjera el colapso del pórtico. El factor alcanzado ha variado según el modelo entre 1.7 y 2. Este valor apunta un grado suficiente, aunque no muy holgado, de seguridad en la estructura que nos ocupa.

Se puede observar que en los resultados obtenidos por ambos modelos (figuras 7.14 y 7.15), que la zona donde se producen mayores compresiones son en la parte exterior de la cabeza del pilar y en la parte interior de la base del pilar, indicando la fuerte compresión desviada que sufre. Este hecho se reproduce también en la solución de Rubió (1912) y Maynou (2002)

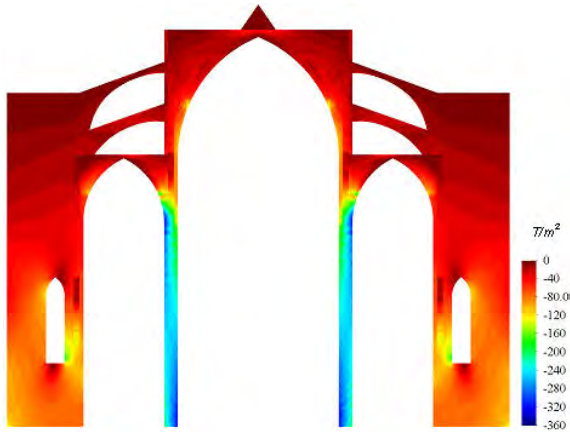


Figura 7.14 Vista frontal del modelo

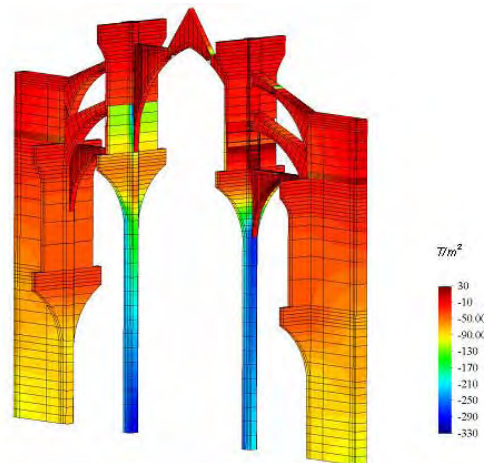


Figura 7.15 Vista lateral del modelo

En la siguiente figura se puede apreciar la deformada ampliada 100 veces. Concretamente se puede apreciar la deformación del pilar y como se verá más adelante dicha deformación es coherente con el trazado de la línea de presión que ofrece la modelización funicular, es decir la zona comprimida en la coronación y en la base del pilar encontradas con éste análisis coincide con la obtenida mediante el análisis limite.

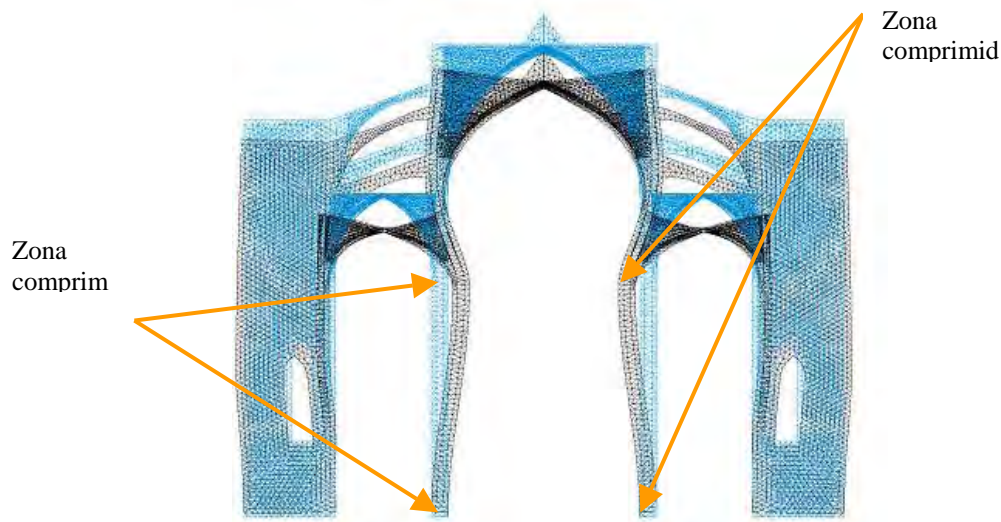


Figura 7.16 Deformada ampliada x100.

7.3.4 Verificación de la estabilidad estructural mediante la técnica del análisis funicular.

A continuación se pasará a aplicar la técnica descrita en el presente trabajo para verificar la estabilidad del pórtico central de la Catedral de Mallorca. Dicho análisis consistirá en encontrar el trazado de las líneas de presión que maximicen la separación

de éstas al contorno resistente mediante la aplicación del algoritmo de optimización descrito en el capítulo 6 del presente trabajo.

Dada la geometría del pórtico central de la Catedral se realizará una hipótesis que simplifica el análisis. La hipótesis simplificará la geometría real y adobará un modelo bidimensional considerando que el pórtico está contenido en un plano vertical, considerando un grosor contributivo según el elemento considerado, es decir, para el contrafuerte y el pilar se ha considerado todo su grosor y para el resto de los elementos se ha considerado la mitad de cada módulo de la nave a cada lado del plano medio del pórtico.

La distribución de los pesos de la estructura se ha tomado directamente del artículo de Rubió, y se han asignado a los diferentes tramos del modelo funicular desarrollado con el objetivo que éste represente fielmente la estática del problema.

La contribución del peso del contrafuerte se ha contemplado de diferente manera a la que realizó Rubió y se aproxima más a la realizada por Maynou (2002). El elemento funicular que representa el contrafuerte se ha cargado con la parte del miso que gravita sobre ella. Esta manera de considerar la contribución del peso del contrafuerte en la estabilidad de la estructura se considera que se encuentra del lado de la seguridad puesto que así se elimina la posibilidad de que aparezcan tracciones en el interior del contrafuerte. Realmente se tendría que considerar el peso de la parte del contrafuerte situado en la parte superior de la hipotética grieta que se formaría en caso de rotura y esta situación ofrecería una carga mayor que la considerada para la zona del contrafuerte y por tanto redundaría un aumento de la estabilidad del modelo.

La manera de considerar el peso del contrafuerte, así como el propio desplazamiento que experimenta el modelo funicular entre la posición inicial, en base a la cual se representa el peso de la estructura y la posición final de equilibrio, ha obligado a realizar dos iteraciones para actualizar la distribución de pesos en el modelo funicular para que éste se asemeje a la distribución real de pesos de la estructura.

Se puede ver en las figuras 7.17, 7.18 la distribución de peso adoptada, así como el modelo funicular con las correspondientes condiciones de contorno.

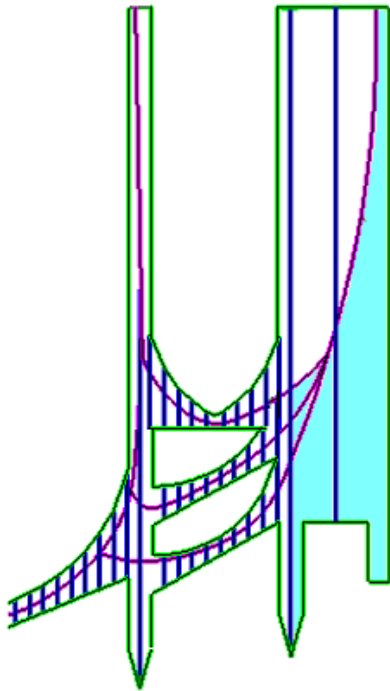


Figura 7.17 Discretización de la estructura. Nótese que en el peso del contrafuerte sólo se considera la parte que queda “colgando” de la línea del modelo funicular

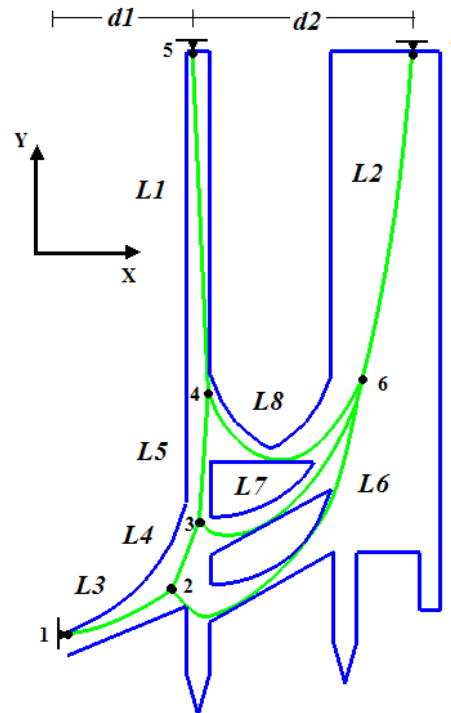


Figura 7.18 Modelo funicular adoptado inicialmente y variables consideradas en el problema de optimización

Se ha realizado un primer cálculo y se ha obteniendo una configuración con una geometría sustancialmente diferente de la inicial. Como se describe en el punto 6.2.2, al obtener esta segunda distribución de líneas de presión, los pesos atribuidos a cada segmento de la catenaria han dejado de ser estáticamente equivalentes a la discretización de la geometría inicial, además de tener que asignar un peso diferente en los elementos que representan al contrafuerte. Se ha redefinido el trazado de acuerdo a la nueva distribución y se ha calculado el modelo funicular. Para esta segunda iteración la forma del modelo ya ha variado muy poco, respetando la distribución de pesos de la estructura original.

Las variables consideradas en el procesos de maximización de la separación entre las líneas de presión y el contorno resistente han sido las posiciones de los puntos fijos del modelo funicular (d_1 , d_2) así como las diferentes longitudes de los elementos que lo forman (L_1 - L_8), ver figura 7.18.

En la figura 7.19 se puede observar el trazado de las dos iteraciones realizadas.

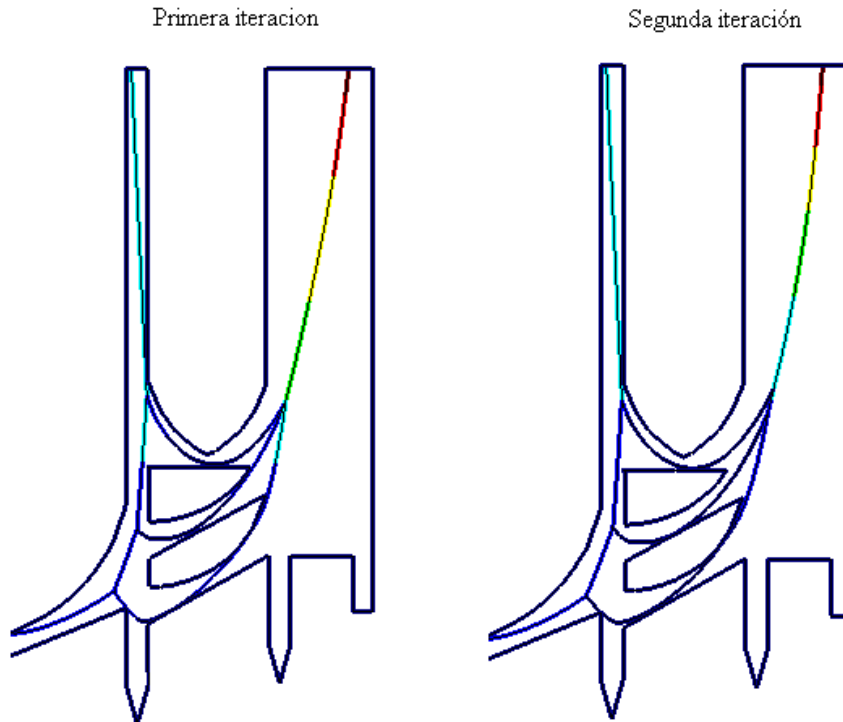


Figura 7.19 Resultados de las dos primeras iteraciones.

Hay que destacar que en la segunda iteración se ha intercalado un nuevo elemento en la zona de encuentro entre el arco lateral y el contrafuerte para dar más libertad al comportamiento del modelo. También es destacable el aumento de carga que experimenta el modelo en la segunda iteración dado que elemento que simula el contrafuerte varía su posición situándose en una posición que hace contribuir una mayor parte del contrafuerte (véase figura 7.21)

Con el objetivo de maximizar la separación entre el modelo funicular y el contorno resistente para aumentar el coeficiente de seguridad geométrico, se han realizado diversos procesos de optimización. Para aumentar la eficiencia del proceso de maximización se han reducido el número de variables consideradas empleando finalmente las que más influyen en el proceso de optimización. Esta estrategia es empleada también en otros procesos de optimización por ejemplo en la optimización de formas en el diseño de celosías (Gil, 2001)

Las variables finalmente adoptadas han sido las longitudes de los elementos que representan los arcos y la coordenada horizontal del apoyo del elemento situado en el contrafuerte. Este proceso de refinamiento final de la solución ha afectado levemente al trazado sin que dicha variación haya afectado apreciablemente a la distribución de pesos del modelo resultante. Cabe destacar que la herramienta de optimización ha permitido automatizar en gran medida la búsqueda de la configuración que maximice el coeficiente de seguridad geométrico, sin esta ayuda la búsqueda se hubiese sido altamente tediosa.

El resultado final se puede apreciar en la figura 7.20.

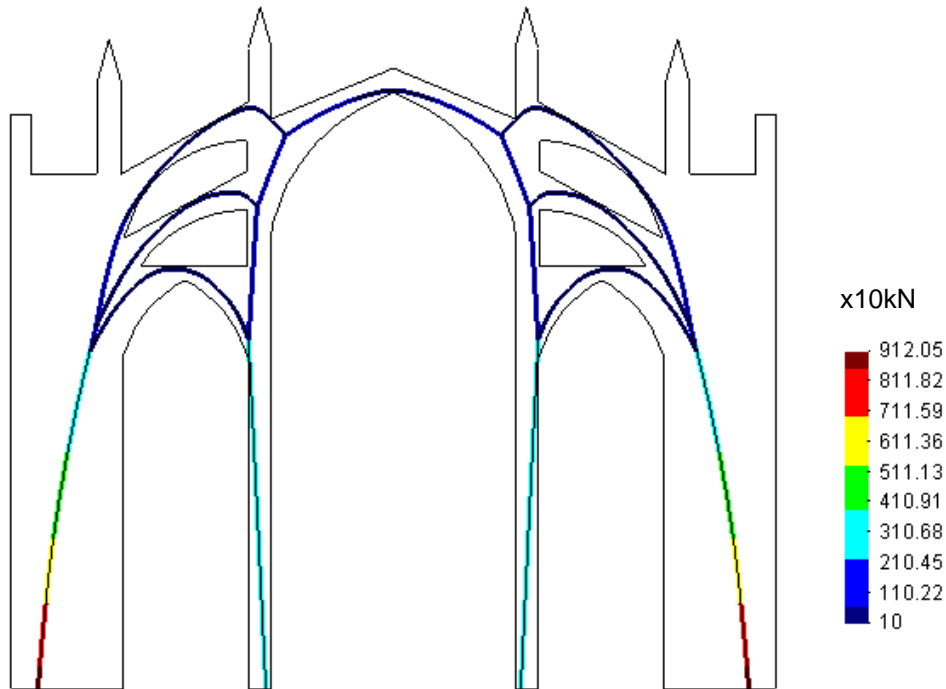


Figura 7.20 Esquema funicular resultante (valores x 10 kN)

El resultado final verifica la estabilidad de la nave central confirmando que el diseño de la catedral es estricto, como ya se ha concluido en los análisis realizados por diversos autores. En las figuras 7.21 y 7.22 se puede apreciar con mayor precisión el trazado obtenido.

Cabe insistir en lo ajustado de la solución obtenida. Las líneas de presión se adaptan de una forma muy ajustada al contorno resistente. Ésta es una muestra que el diseño adoptado en los diferentes elementos que forman la estructura se ajustan estrictamente a las solicitaciones de los mismos lo cual es una muestra de el grado de optimización geométrica de dicha estructura.

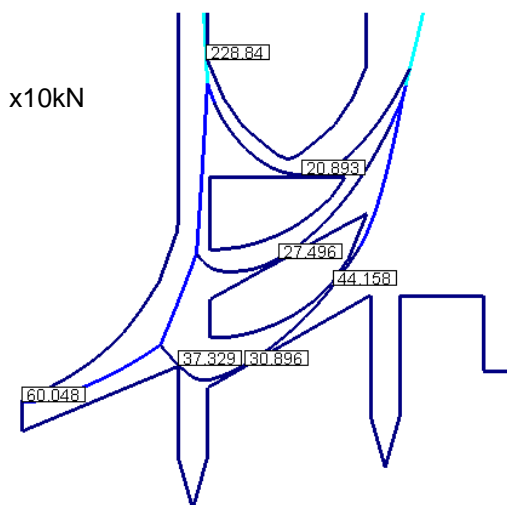


Figura 7.21 Esfuerzos obtenidos en el modelo funicular (valores x 10 kN)

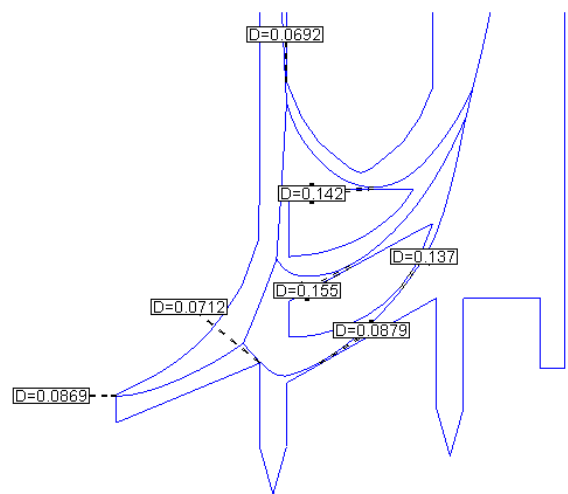


Figura 7.22 Separaciones mínimas en del modelo funicular con el paramento resistente (valores x 1000 mm)

La solución encontrada parece bastante más restrictiva que la de Rubió puesto las líneas de presiones están más cerca del paramento de la estructura y ofreciendo un coeficiente de seguridad geométrico de 1,094. A la vista de este escaso margen y las elevadas compresiones en este punto se puede decir que en esta zona se forma una rotula plástica sin que esto afecte a la estabilidad global de la estructura.

No obstante esto, la solución encontrada muestra la estabilidad de la Catedral puesto que el modelo funicular encontrado se inscribe en el interior de la estructura sin que se produzca un mecanismo cinemáticamente admisible. Es destacable el hecho que a diferencia de la estática gráfica, este procedimiento de cálculo no necesita de hipótesis adicionales sobre reparto de empujes en nudos para poder establecer el equilibrio y las correspondientes líneas de presión. Aquí el modelo funicular muestra el camino natural de las cargas gravitatorias hacia la cimentación, estableciendo el equilibrio de fuerzas real en cada nudo del modelo funicular.

7.4 Aplicación al análisis tridimensional de estructuras. Cálculo de las torres de la fachada de la Catedral de Barcelona

7.4.1 Introducción

En los siguientes apartados se realizará un análisis de la estabilidad de las torres de la fachada de la Catedral de Barcelona mediante el empleo de la simulación computacional de un modelo funicular que la represente estáticamente. Dicha simulación permitirá encontrar el trazado de las líneas de presión necesarias para poder aplicar los teoremas que ofrece el análisis límite.

Este ejemplo tiene una serie de características que lo hacen especialmente interesante. Uno de ellos es la propia complejidad de la geometría de la estructura. En modelos simples y bidimensionales se pueden hallar las líneas de presión de una forma manual sin necesidad de disponer de procedimientos informáticos que faciliten su búsqueda. En este caso la complejidad de la geometría a tratar exige una herramienta informática adecuada para poder encontrar el trazado de las líneas de presiones. También el tipo de construcción de la estructura, compuesta por sillares y zunchos, permitirá comprobar la aplicabilidad del método antifunicular, mostrando sus virtudes y analizando sus limitaciones.

7.4.1 Breve introducción histórica.

Las obras de la actual catedral gótica, se iniciaron el 1 de mayo de 1298 y exceptuando el actual cimborio y la fachada principal, la catedral se terminó en ciento cincuenta años. En su construcción se podrían destacar tres etapas características:

En la primera se planeó todo el edificio: dos puertas laterales con estructuras arcaicas de factura italiana, la planta de tres naves con la misma altura, un solo ábside, un deambulatorio y 10 capillas radiales, el presbiterio con su altar mayor, la cripta y el falso crucero.

La segunda etapa se caracteriza por la prolongación de las tres naves con las capillas laterales hasta llegar a la altura del trascoro. Estas tienen una tribuna superior, con tal disposición que parecen dos naves más dando la sensación de amplitud y una iluminación que son propias del gótico catalán.

La tercera etapa se debe fundamentalmente al obispo de Barcelona, denominado el Patriarca Saperca (muerto en 1430); se construyó la parte inferior del cimborio, que será cubierto por un artesonado de madera, y a la vez se abrieron -con unos arcos más amplios- las capillas de la iglesia. Ésta fue cerrada con un simple muro (a.1417) esperando la construcción de la fachada definitiva.

La fachada principal es la obra más reciente de la catedral construida entre finales del siglo XIX y principios del XX. Esta fachada había estado proyectada de antemano por el maestro Carlí (Carles Galtés de Ruan) el 27 de abril de 1408, según consta en el pergamino que actualmente se conserva en la sala denominada «de la traça» (del trazado); Carlí la diseñó con 111 figuras, más la central que representaba la *Maiestas Domini*, y en el que se puede adivinar lo que después proyectó y construyó el arquitecto José O. Mestres, gracias al mecenazgo de Jordi Girona y de sus hijos a finales del siglo XIX. El cimborio y las dos torres laterales fueron terminadas en el año 1913.



Figura 7.23 Vista de la fachada principal de la Catedral de Barcelona.

7.4.2 Modelización de la estructura. Descripción del modelo funicular

7.4.2.1 Introducción

La estructura objeto del presente cálculo está formada básicamente por obra de fábrica que no podrá asumir ninguna resistencia a tracción. No obstante hay que mencionar que hay diversos elementos capaces de movilizar tracciones y que influyen decisivamente en el comportamiento del conjunto estructural como son la existencia de zunchos y recuadros que arriostran y zunchan la aguja, otorgándole un elevado grado de monolitismo. A priori se realizará un análisis conservador sin tener en cuenta estos factores, por lo que el modelo que se presentará a continuación sólo contendrá elementos de catenaria.

El modelo funicular está constituido por una serie de cables que representan cada uno de los elementos de la estructura, pilares y traviesas de la aguja piramidal superior, base intermedia y base inferior (figura 7.24). Cada uno de estos elementos de cable simulará la línea de presiones contenida en cada elemento estructural y aplicando la metodología descrita en apartados anteriores, permitirá el estudio de la estabilidad del conjunto de la estructura.

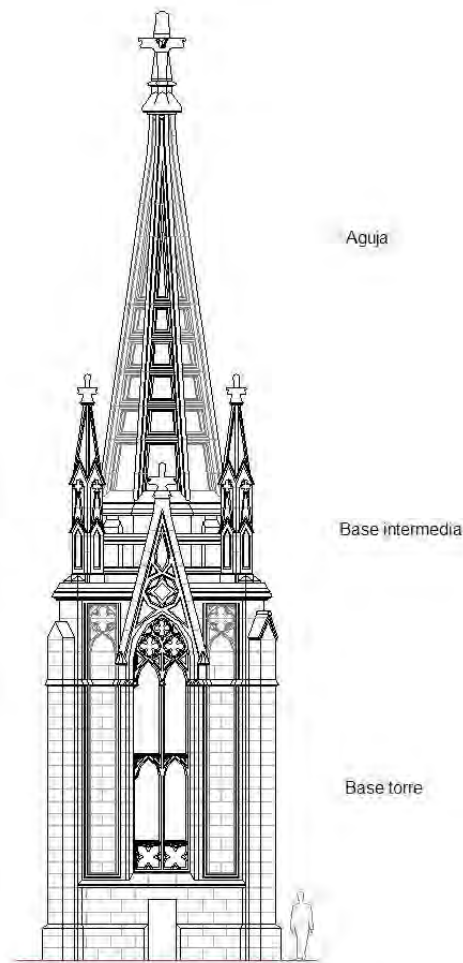


Figura 7.24 Esquema de la torre de la aguja.

En la modelización se han obviado los elementos que no tienen influencia en el comportamiento estructural de la torre como pueden ser la cruz superior, fornituras, vidrieras, pináculos, etc., pero sí se han contado a la hora de atribuir el peso a los elementos funiculares, dado que este factor puede influir decisivamente en la estabilidad de la torre, especialmente la cruz superior y los pináculos.

7.4.2.2 Descripción de los elementos de la aguja.

La aguja está constituida por 8 pilares que convergen en la parte superior formando una estructura cónica. En la parte superior de la aguja se encuentra la cruz que actúa como un peso muerto que centra las líneas de presión que originan las cargas de peso propio de los pilares, por lo que simplemente se contemplará como una carga puntual en la parte superior del modelo.

Los pilares se hallan arriostrados por unos marcos rígidos de forma cuadrangular que a su vez se hallan zunchados por unos anillos metálicos. En definitiva, la estructura que forma la aguja se halla confinada por los zunchos formados por las traviesas horizontales y marcos rígidos y los anillos metálicos que la rodean. La combinación de estos elementos ofrecen un efecto de zunchado que hace que la estructura tenga un comportamiento netamente monolítico, pudiéndose asimilar incluso al de una estructura reticulada. Como se ha comentado anteriormente en un primer análisis no se considerará este efecto y simplemente se modelarán como si de una estructura con el comportamiento clásico de la obra de fábrica por lo que no se tendrán en cuenta el arriostamiento que ofrecen los recuadros y los anillos metálicos.

En las figuras 7.25, 7.26 y 7.27 se pueden observar el detalle del modelo geométrico adoptado, así como el modelo unifilar que lo representa. En la imagen se ha asignado un color a cada elemento según el peso contributivo que tiene en función de la pieza que representa, esto es, pilares, traviesas y zona superior de los pilares con el incremento de peso que aporta la cruz superior.

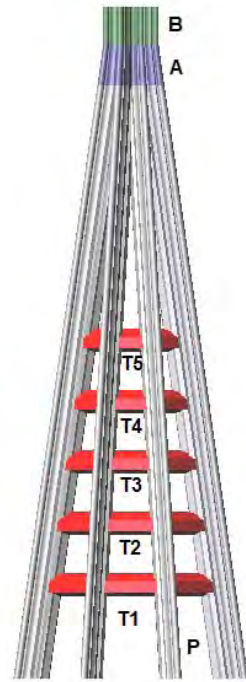


Figura 7.25 Diferentes piezas que componen la aguja

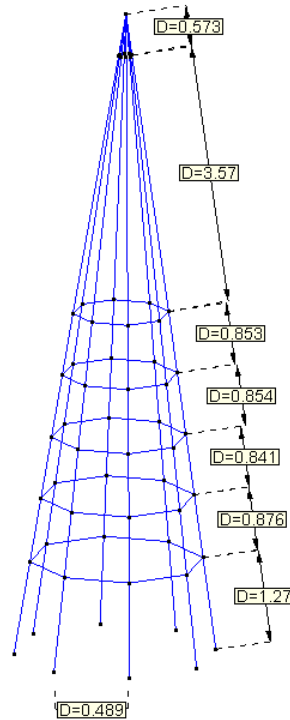


Figura 7.26 modelo funicular de la aguja

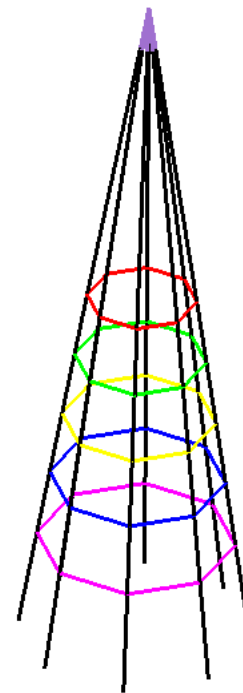


Figura 7.27 Elementos de cable según sus propiedades materiales

7.4.2.3 Descripción de la base intermedia (Tambor).

La estructura de la aguja se apoya sobre una base intermedia (denominada también tambor), de transición que transmitirá las cargas de la estructura superior a la torre, denominada base inferior. Dicha base intermedia tiene en planta forma octogonal, siendo cada esquina la base donde apoya cada columna de la aguja. El tambor está formado por piezas de mampostería con mortero en sus juntas, zunchada también mediante sendos anillos metálicos que le confieren mayor estabilidad.

Para modelizar dicha estructura se emplearán diferentes elementos de cable distribuidos adecuadamente, para permitir simular adecuadamente el peso del tambor y para dar libertad al modelo de manera que se establezca una transmisión natural de cargas. Es decir, el modelo funicular debe disponer de un número suficiente de grados de libertad para poder modelar adecuadamente los trazados de las líneas de presiones de manera que tengan en cuenta los huecos existentes, formando los correspondientes arcos de descarga que permitan transmitir correctamente los pesos que gravitan sobre ellos hacia la cimentación.

Dicho elemento estructural se ha descompuesto en tres partes para asignar su peso a los elementos de cable que las modelan. Estas piezas son la parte superior donde se apoyan los pilares de la aguja, los recuadros macizos y los recuadros aligerados con los huecos en forma de arco. En las figuras 7.28, 7.29 y 7.30 se puede observar el modelo adoptado.

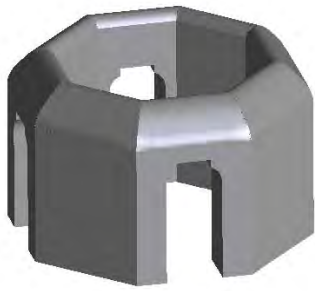


Figura 7.28 Modelo geométrico del tambor

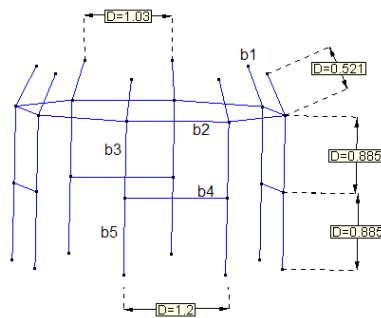


Figura 7.29 Modelo funicular del tambor

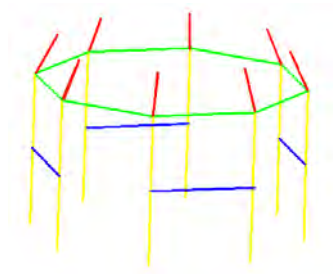


Figura 7.30 Elementos de cable según sus propiedades materiales

7.4.2.4 Descripción de los elementos de la base.

El tambor es soportado por una torre coronada por cuatro pináculos. La misión de dichos pináculos es la de aportar una carga vertical justo en la parte superior de la torre donde se produce la entrega de las cargas superiores. De esta forma se logra centrar en el interior del cuerpo de la torre los empujes horizontales que provienen de la aguja a través del tambor.

Las cuatro esquinas de la torre son cuerpos muy masivos que hacen la función de contrafuertes, es decir, verticalizan las líneas de presión aportando estabilidad al conjunto estructural. En las figuras 7.31, 7.32 y 7.33 se puede observar el modelo adoptado.

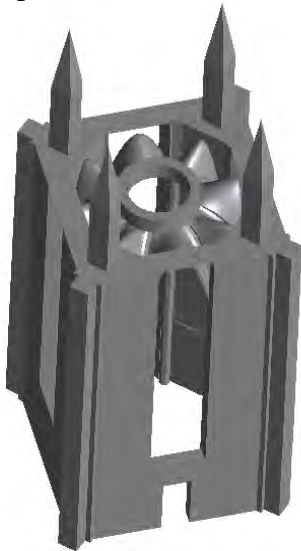


Figura 7.31 Modelo de la base

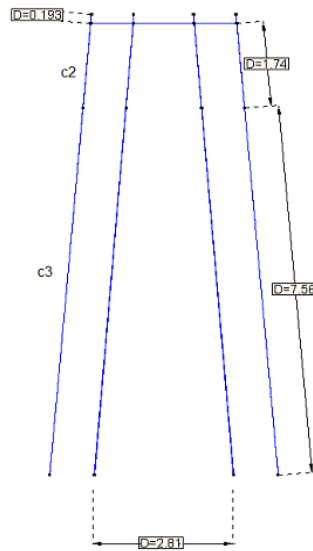


Figura 7.32 Modelo funicular



Figura 7.33 Elementos de cable según sus propiedades materiales

Finalmente ensamblando las tres partes de la estructura modelizadas por los esquemas unifilares descritos, se obtiene el esquema unifilar global que será el que se empleará para calcular la estabilidad de la estructura bajo diferentes hipótesis de cargas. En la

figura 7.43 se muestra el modelo funicular global con las condiciones de contorno adoptadas. En la figura 7.35 se muestra el modelo geométrico.

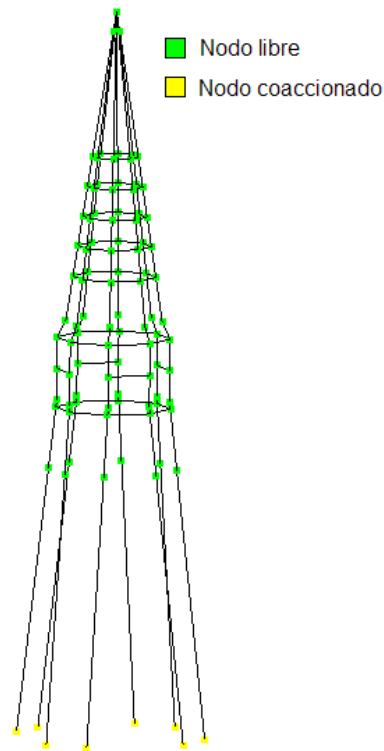


Figura 7.34 Condiciones de contorno en el modelo funicular global

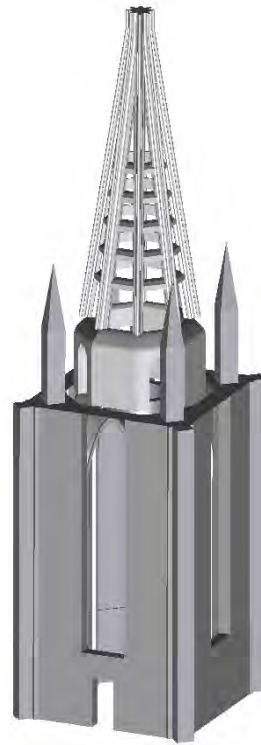


Figura 7.35 Modelización geométrica de la estructura

7.4.2.5 Propiedades de los materiales.

Determinadas propiedades de la piedra (peso específico, resistencia a compresión uniaxial y módulo de deformación) se conocen, de manera aproximada, a partir de los ensayos mecánicos sobre testimonios realizados por el Laboratori de Tecnologia d'Estructures de la Universitat Politècnica de Catalunya (Roca et al, 2005). En la Tabla 7.4 se indica los valores medios obtenidos para los tres tipos de piedra de la fachada, de los cuales que se han ensayado testimonios.

Es importante hacer notar que las resistencias de compresión medidas presentan una dispersión muy importante (motivo por lo que se ha considerado conveniente mostrar el rango de variación en la tabla 2). En cambio el peso específico y el módulo de deformabilidad han resultado muy constantes o uniformes.

A partir de la información obtenida y según diversos criterios (fundamentalmente el Eurocódigo 6), se propone adoptar los valores de cálculo reflejados en la tabla 7.3. El paso esencial estriba en estimar las propiedades medias de la obra de fábrica, como material formado por piedra y mortero, a partir de la información disponible, exclusivamente relativa a la piedra.

	Piedra tipo A		Piedra tipo B		Piedra tipo C		Valor medio
	Rango	Valor medio	Rango	Valor medio	Rango	Valor medio	
Peso específico (kN/m ³)		21,8		21,9		22,4	22,0
Resistencia a Compresión (MPa)	44,5-59,8	50,9	30,5-42,1	37,6	53,6-60,3	54,9	47,8
Módulo de deformación (GPa)		11,0		8,2		13,0	10,7

Tabla 7.3 Resumen de las propiedades mecánicas de la piedra medidas en laboratorio (Roca et al., 2005).

Propiedad	Valor estimado
Peso específico (kN/m ³)	22
Resistencia a compresión (MPa)	8
Módulo de deformación (GPa)	2

Tabla 7.4 Propiedades mecánicas de la obra de fábrica propuestas para el cálculo

El peso específico de la obra de fábrica se mantiene igual al valor medio obtenido para la piedra, debido a la limitada influencia de las juntas de mortero, muy delgadas y porcentualmente poco voluminosa. La resistencia a compresión se ha estimado mediante una extrapolación realizada a partir de la fórmula del Eurocódigo 6, donde la resistencia característica de la obra de fábrica (f_k) se estima a partir de las resistencias a compresión de los bloques de mampostería (f_b) y del mortero (f_m). En el presente caso se ha tomado la resistencia de los bloques de mampostería partir de la resistencia de los bloques de piedra.

$$f_k = K f_b^{0,65} f_m^{0,25} \quad (1)$$

con

$$f_m \leq 20N/mm^2, f_m \leq 2f_b \quad (2)$$

donde $K=0,6$.

Para emplear la fórmula (1), y a partir de la información experimental disponible, se han tomado valores conservadoramente bajos para las resistencias de la piedra y del mortero. Para la piedra, vista la alta dispersión que presenta la resistencia a compresión, se ha tomado 30 MPa. Esta resistencia corresponde al límite inferior del conjunto de las resistencias medidas. Para el mortero se ha tomado un valor arbitrario de 5MPa, el cual se considera conservadoramente inferior al realmente esperable dado que se trata de un

mortero de cal endurecida largo plazo (>100 años); conviene hacer notar que en la fórmula, la influencia de la resistencia a compresión del mortero es relativamente baja dado el exponente que lo afecta. Empleando la expresión (1) resulta un valor de 8Mpa (Roca et al, 2005).

PIET 70 (“Prescripciones del Instituto Eduardo Torroja-Obras de Fábrica”, 1970) propone un valor muy similar para el caso de piedra arenisca quartosa o de cal dura con bloques de piedra de 30cm o más de canto y otro de resistencia mínima de 8 Mpa. Concretamente, el valor resultante en términos de resistencia característica (es decir sin estar afectada por el coeficiente de seguridad) es de 7.5MPa.

Atendiendo al trato conservador aplicado, es muy posible que la resistencia real a compresión de la obra de fábrica resulte sensiblemente superior, pudiendo llegar incluso superar el valor de 10MPa.

7.4.3 Acciones de cálculo

7.4.3.1 Peso propio

Las cargas debidas al peso propio se derivan directamente de las propiedades de los materiales descritas en el punto 7.3.2.5. La densidad considerada se muestran en la tabla 7.4 y se considera homogénea para el conjunto de la estructura.

7.3.3.2 Acciones de viento

La acción del viento se ha caracterizado como una carga equivalente de acuerdo con la norma NBE-AE-88 para unas condiciones como se describen en la tabla 7.5.

Situación	Altura	Velocidad viento	Presión dinámica	Fuerza distribuida
Expuesto	Superior a de 30m	161 km/h	1,25 kPa	1,5 kPa

Tabla 7.5 Presión de viento.

La fuerza horizontal distribuida es el resultado de sumar la presión sobre los paramentos expuestos con la succión sobre los paramentos de sotavento, por lo que se deberán aplicar unos coeficientes correctores sobre la presión dinámica de 0.8 y 0.4 respectivamente, tal como se muestra en las figuras 7.37 y 7.38.

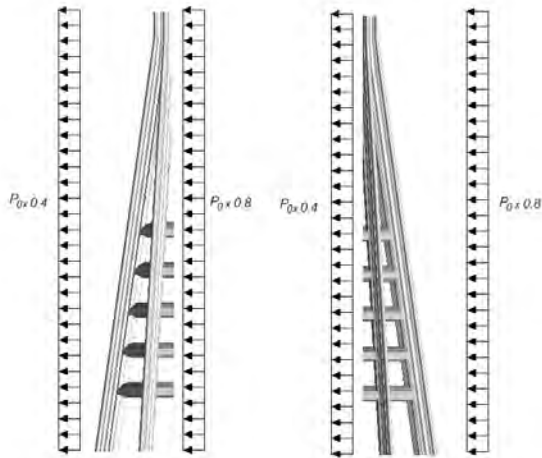


Figura 7.36 Distribución de la carga de viento en la aguja

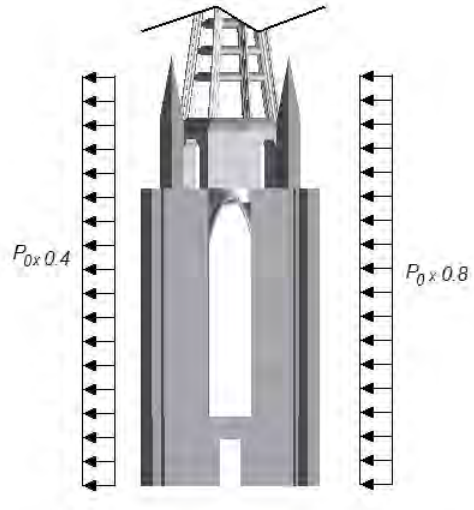


Figura 7.37 Distribución de la carga de viento en la base

En la zona de la aguja se han descontado los huecos que ofrecen los recuadros entre traviesas y pilares en la superficie contributiva donde se aplica la presión dinámica del viento, por otra banda, se ha considerado que en el interior de ésta existen también zonas a barlovento y sotavento, intentando simular las presión que puede originar en su interior. Se ha simplificado la aplicación de las cargas, considerándolas totalmente horizontales y aplicadas en la proyección vertical de la aguja.

La carga de viento, aplicada sobre las superficies contributivas (figura 7.39) se ha repartido y transformado en cargas puntuales para transferirlas a los nudos del modelo funicular. Para simular mejor los efectos de la presión del viento se han añadido nudos intermedios entre los elementos funiculares más largos.

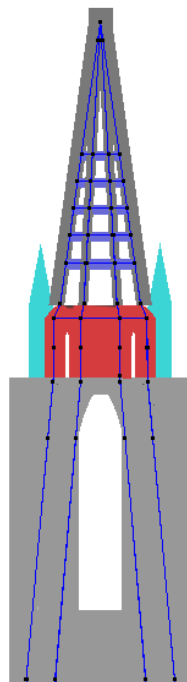


Figura 7.38 Superficies contributivas donde se aplica la carga de viento

7.4.3.3 Acciones sísmicas.

La acción del sismo ha sido determinada a partir de la norma NSCR-02. De acuerdo con esta norma, en Barcelona corresponde una aceleración sísmica básica de 0,04g. Teniendo en cuenta que los edificios del patrimonio arquitectónico son de una importancia especial, cabe tomar un coeficiente de riesgo igual a 1,3. Por otra banda se considera que el edificio se halla cimentado sobre un suelo tipo III (granular de compacidad media o cohesivo muy firme) de manera que el coeficiente C del terreno vale 1,6 i el coeficiente S de amplificación de terreno toma el valor

$$S = C/1,25 = 1,28. \quad (3)$$

La aceleración de cálculo resultante es de 0.067g. Teniendo en cuenta que los periodos propios esperables en la aguja, dada su forma y su constitución monolítica gracias a los zunchos y recuadros de arriostramiento, son muy reducidos e inferiores a la coordenada T_B del espectro de respuesta, el coeficiente sísmico a emplear en el cálculo de las fuerzas estáticas equivalentes será:

$$s = 2,5 \times 0,067 = 0,17 \quad (4)$$

En este cálculo, de carácter simplificado, no se considera ni la ductilidad ni el factor de distribución. Es conveniente recordar que la norma empleada ofrece la aclaración de caculo referente a un periodo de retorno de 475 años.

Para realizar el cálculo mediante el empleo del modelo funicular se inclinará la geometría de la torre de manera que la tangente del ángulo que forma con la horizontal alcance el valor de 0.17. Para no infravalorar el peso de la estructura, se deberá dividir la gravedad por el coseno del ángulo formado entre el vector gravedad y el de aceleración sísmica. Este simple procedimiento permite analizar el comportamiento del modelo sometido a una aceleración horizontal. La figura 7.39 describe el procedimiento.

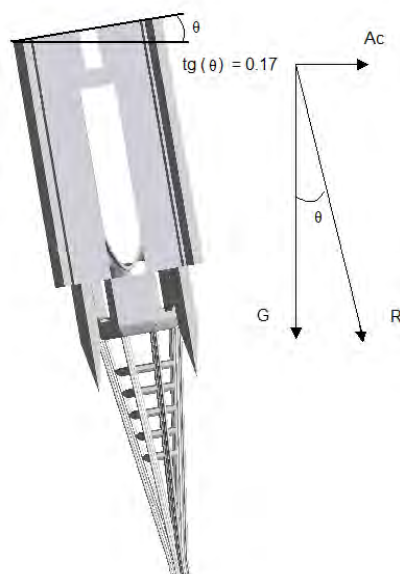


Figura 7.39 Esquema equivalente para simular la acción sísmica.

7.4.3.4 Casos de carga considerados.

En el análisis de la estructura se han tenido en cuenta los siguientes hipótesis de carga :

1. Carga de peso propio.
2. Carga de peso propio más valor mayorado de las fuerzas de viento (coeficiente 1,5)
3. Carga gravitatoria y sismo

La hipótesis (1) tiene como finalidad determinar si el diseño de la estructura es adecuado, y determinar su grado de estabilidad en condiciones de carga normales. Las hipótesis (2,3) revisarán la estabilidad frente acciones ocasionales y de carácter horizontal.

7.4.4 Resultados del análisis

7.4.4.1 Cálculo de la estructura sometida a cargas de peso propio

Primeramente se ha estudiado el equilibrio de la estructura frente a la acción de su peso propio. Para la resolución del sistema de ecuaciones no lineales generado se ha adoptado la estrategia incremental-iterativa descrita en el capítulo III empleando tres incrementos de carga. Las tolerancias adoptadas tanto en el criterio de convergencia en desplazamientos como en fuerzas ha sido de $2.92e-5$, suficiente para obtener unos resultados con una precisión adecuada.

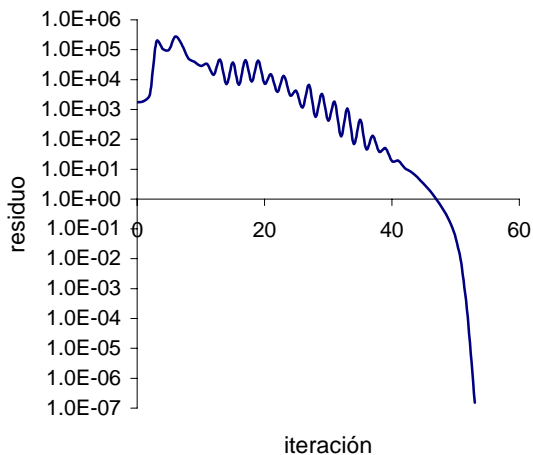


Figura 7.40 Evolución del residuo

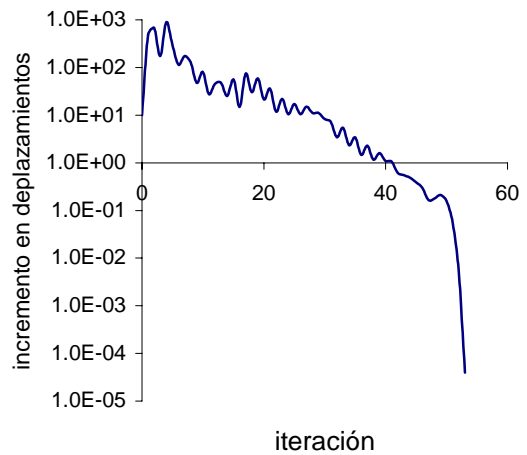


Figura 7.41 Evolución módulo del avance

En las gráficas mostradas en las figuras 7.41 y 7.42 se puede observar la estabilidad y el buen comportamiento del proceso de convergencia, mostrando la eficiencia del método desarrollado para la resolución de modelos funiculares complejos. Se puede observar en dichas graficas que la convergencia es cuadrática, resultado de la implementación de

método Newton-Rapson y que la matriz tangente analítica empleada es analítica y se actualiza en cada iteración.

En las figuras 7.43 y 7.44 se puede ver la forma que adopta el modelo funicular una vez hallada su posición de equilibrio. Se puede observar que la configuración de la torre es adecuada para la distribución de su peso propio. En este caso no ha sido necesario emplear el algoritmo de optimización de la solución obtenida puesto que el resultado ya es satisfactorio. Las diferentes líneas de presión se encuentran todas ellas en el interior del contorno resistente de la estructura, por lo que, empleando el teorema de seguridad de Heyman, se puede afirmar que la estructura es estable frente a las cargas gravitatorias.

Debe recordarse que el modelo no incluye los elementos que monolitizan la estructura por lo que los recuadros que arriostran la estructura y de las anillas metálicas que la zunchan no son estrictamente necesarios desde el punto de vista de equilibrio del conjunto frente a la acción del peso propio. Desde luego sí lo serán para garantizar el monolitismo de la estructura, asegurando el encaje de las diferentes piezas que la forman. Además como se verá más adelante, estructuralmente dichos anillos están plenamente justificados para asegurar la estabilidad frente a acciones horizontales como el viento o el sismo.

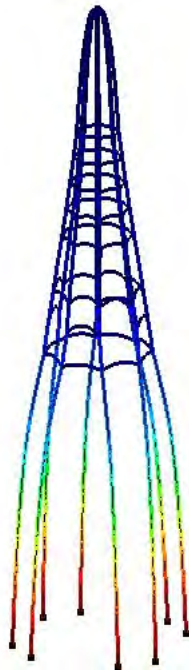


Figura 7.42 Modelo funicular resultante

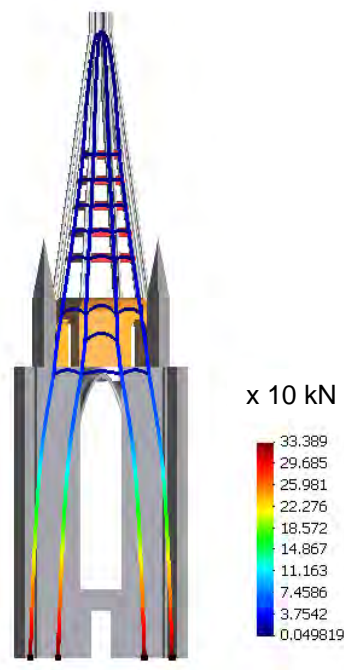


Figura 7.43 Modelo funicular superpuesto a la geometría de la estructura. (valores x 10 kN)

La zona de la estructura donde las líneas de presión se acercan más al contorno resistente es el de la aguja. Se puede observar en las figuras 7.45 y 7.46 la forma que adoptan las diferentes líneas de presión, tanto en los pilares verticales como en las traviesas.

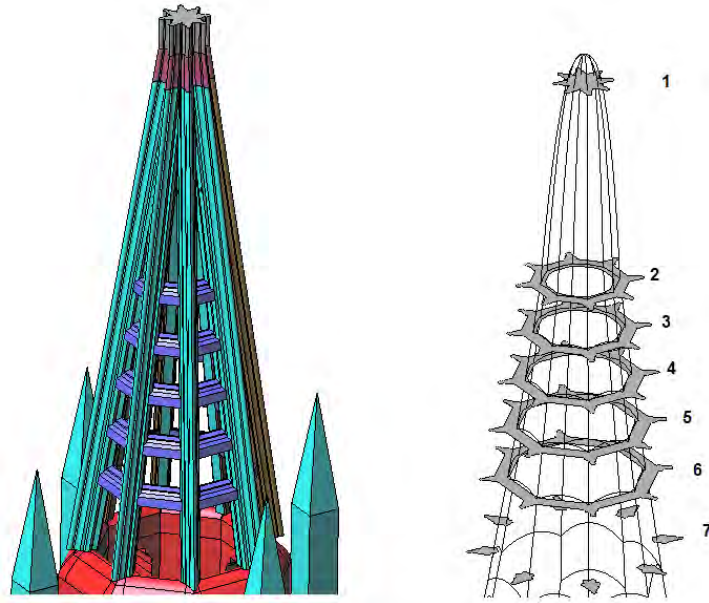


Figura 7.44 Modelo geométrico y funicular de la aguja.

Las secciones transversales se pueden ver con mayor detalle a continuación (figuras 7.45-7.46).

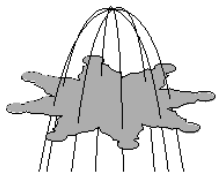


Figura 7.45a Sección 1

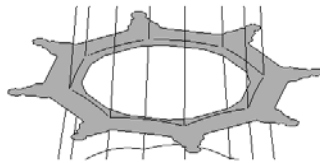


Figura 7.46b Sección 2

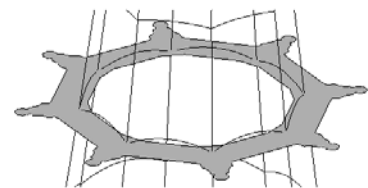


Figura 7.46c Sección 3

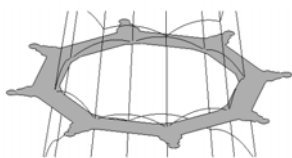


Figura 7.46d Sección 4

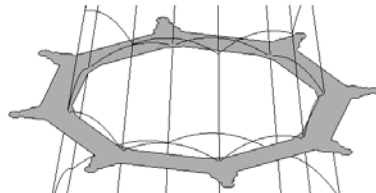


Figura 7.46e Sección 5

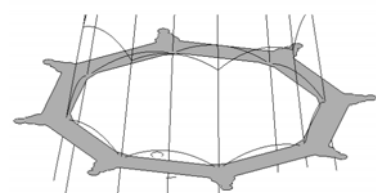


Figura 7.46f Sección 6

La distancia entre el punto más cercano de una línea de presión al contorno resistente se halla en la base de los pilares de la aguja en la sección de unión con el tambor que le sirve de soporte (ver figuras 7.46 y 7.47). La distancia es de 5.8cm y el coeficiente de seguridad geométrico, dado que el canto de las columnas es de 50cm es de 1.13. En dicho punto la línea de presiones produce una compresión de 23100N, lo que adoptando un esquema de distribución de tensiones plástico en una hipotética sección cobaricéntrica se obtiene una tensión en la piedra de:

$$23100\text{N}/0.0240\text{m}^2 = 0.96\text{Mpa} < 8\text{Mpa} \quad (5)$$

plenamente admisible.

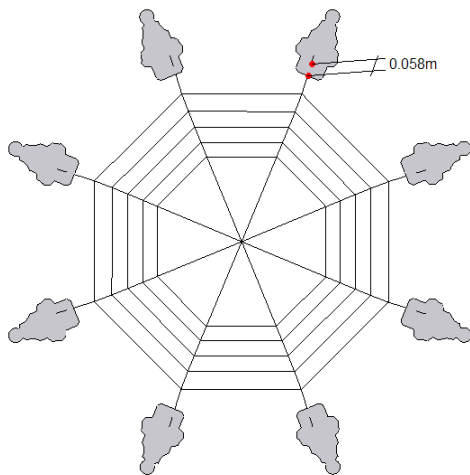


Figura 7.46 Sección 7

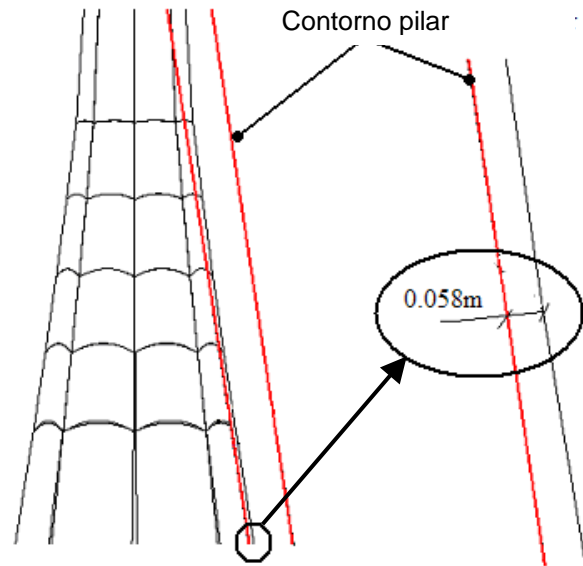


Figura 7.47 Vista lateral, en rojo la línea de presión.

En la zona de la base octogonal intermedia las líneas de presión adoptan una geometría diagonal descendente atravesando toda la base, transmitiendo perfectamente la carga que le llega de los pilares de la aguja superior hacia la base masiva formada por la estructura de la torre inferior. En este caso, tampoco serían necesarios los zunchos metálicos puesto la composición tridimensional de las líneas de presión sin considerar tales elementos permite obtener solución en el interior del tambor. Véase figuras 7.48a y 7.48b.

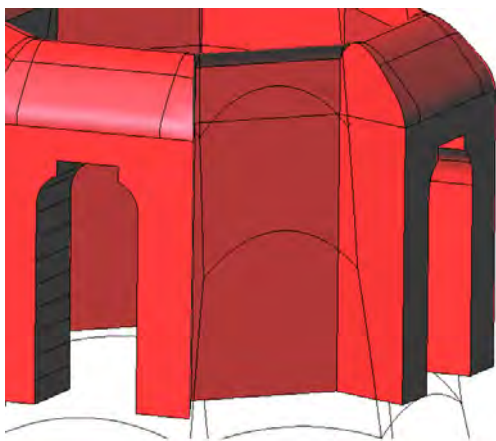


Figura 7.48a Modelo funicular en el tambor

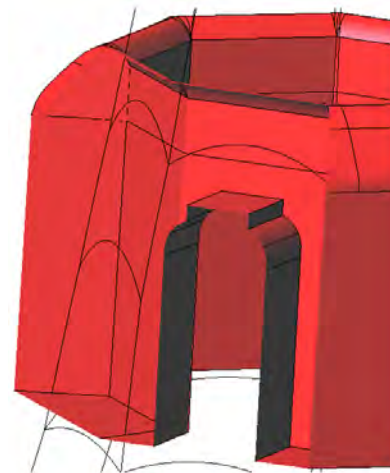


Figura 7.48b Modelo funicular en el tambor

En la parte inferior de la estructura las líneas de presiones en la zona de la base de la torre se adaptan perfectamente a la geometría de las cúpulas y nervios que la forman. En la figura 7.49a y 7.49b se puede ver el margen de separación existente en la zona de los nervios entre el contorno resistente y la línea de presiones obtenida.

Cabe destacar la verticalidad de las reacciones en la base inferior de la torre dado que la componente vertical de la línea de presiones es de 335000N mientras que la

composición de fuerzas horizontales es de 14000N lo que ofrece una inclinación de la resultante respecto la vertical en la base de 2.45° . Dicho valor es muy inferior al ángulo de rozamiento entre los elementos que forman la interfase entre la torre y el elemento portante inferior (no representado en el presente modelo), lo que asegura la capacidad de absorción de dichas fuerzas horizontales por las fuerzas de rozamiento generadas.

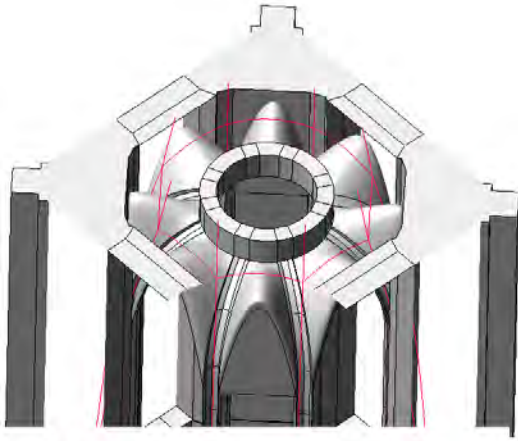


Figura 7.49a Modelo funicular al paso por los nervios de la cúpulas

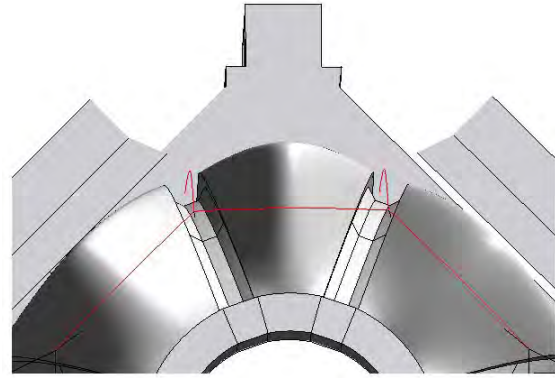


Figura 7.49b Modelo funicular al paso por los nervios de la cúpulas

Las conclusiones del cálculo de la torre de la Catedral de Barcelona bajo el peso propio se pueden resumir en los siguientes puntos:

- La aplicación del teorema de seguridad que ofrece la teoría del análisis límite no garantiza que el trazado de las líneas de presión encontradas sea el real, no obstante como se ha encontrado un trazado en el interior del contorno resistente de la estructura se puede garantizar la estabilidad de la estructura con un coeficiente de seguridad geométrico de 1.13.
- El diseño de la torre, tanto desde el punto de vista geométrico como de distribución de pesos propios es adecuado puesto que la forma adoptada por el modelo funicular se adecua fielmente a la forma de la estructura sin salirse en ningún punto de su contorno resistente.
- Se ha podido demostrar la estabilidad del conjunto empleando un modelo funicular sin que se haya considerado la contribución resistente de elementos estructurales como zunchos metálicos y recuadros resistentes en la aguja. Se ha considerado que la estructura está compuesta a base de mampostería, sin ninguna resistencia a tracción, por lo que dicho cálculo está claramente del lado de la seguridad, puesto que la contribución de dichos elementos (zunchos metálicos y recuadros resistentes) ofrecen un comportamiento monolítico aumentando las garantías de estabilidad.
- La resolución numérica del modelo funicular planteado ha sido plenamente satisfactoria, obteniendo una convergencia uniforme y rápida del sistema de ecuaciones no lineales planteado, confirmando la bondad de la formulación numérica desarrollada.

7.4.4.2 Cálculo de la torre bajo carga de viento.

Tratándose de una estructura de cierta altura y siendo la zona de la aguja francamente esbelta, el análisis frente acciones horizontales es necesario. Se empleará el mismo modelo que se ha empleado anteriormente añadiéndole las acciones horizontales originadas por el viento.

Para la resolución del sistema de ecuaciones no lineales generado se ha adoptado la misma estrategia incremental-iterativa empleada para el caso anterior, es decir se han realizado tres incrementos de carga. Las tolerancias adobadas tanto en el criterio de convergencia en desplazamientos como en fuerzas ha sido de $2.92e-5$, suficiente para obtener unos resultados adecuados.

El comportamiento del algoritmo empleado en la resolución del modelo funicular ha sido muy similar al caso de carga de peso propio. Dicha similitud se puede apreciar en sendas graficas de convergencia que se muestran en las figuras 7.50 y 7.51.

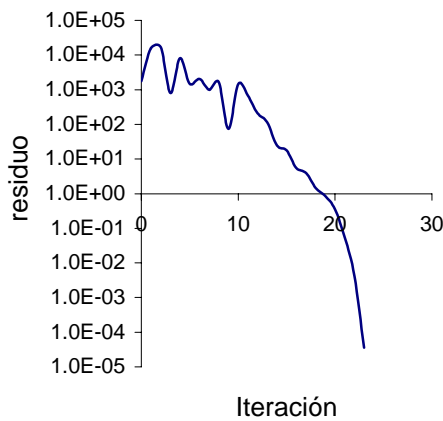


Figura 7.50 Evolución del residuo

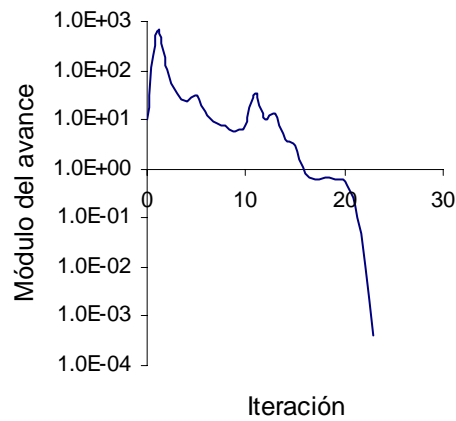


Figura 7.51 Evolución módulo del avance

La estabilidad y buen comportamiento del proceso de convergencia que se hacen evidentes en las gráficas anteriores y como en el caso anterior muestran la eficiencia del método desarrollado para la resolución de modelos funiculares.

Los resultados obtenidos muestran un modelo funicular que pierde absolutamente la forma de la estructura original. Por lo tanto no es posible encontrar una configuración del modelo funicular. En el interior del contorno resistente de la estructura. Se puede apreciar el desplazamiento horizontal provocado por la aplicación de la carga de viento en las figuras 7.52-7.55. El desplazamiento de las líneas de presión se hace especialmente evidente en los elementos de la aguja.



Figura 7.52 Vista frontal del modelo funicular

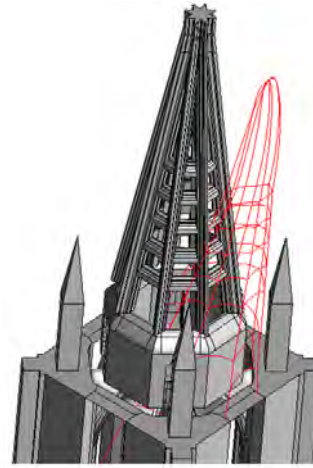


Figura 7.53 Perspectiva del modelo funicular

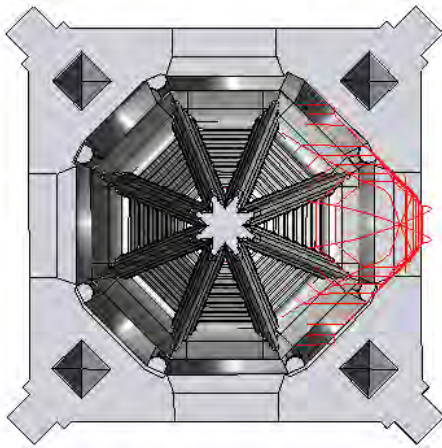


Figura 7.54 Vista cenital del modelo funicular

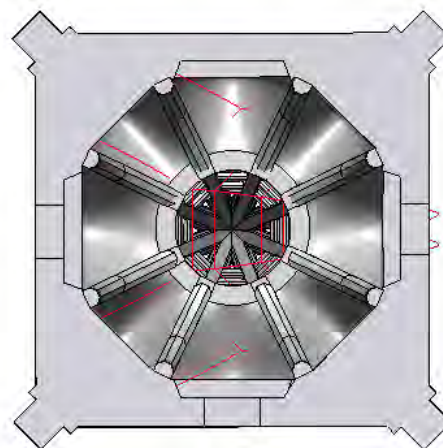


Figura 7.55 Vista inferior del modelo funicular

En este caso no es posible encajar una configuración funicular en el interior del contorno resistente de la estructura. En consecuencia, es preciso considerar los zunchos metálicos si cumplen una función esencial en la estabilidad del conjunto, por lo que cabe considerar un esquema estructural distinto al planteado.

A la vista de los resultados y comprobada la necesidad de arriostramiento y zunchado de la estructura para garantizar al su monolítismo y en consecuencia permitir la estabilidad frente a las acciones horizontales se ha realizado un modelado alternativo, de carácter cualitativo, donde se han hecho intervenir elementos que permitan la movilización de compresiones en el modelo funicular, lo que simula de forma global los efectos de zunchado y arriostrado.

En el modelo considerado para simular la capacidad de movilización de tracciones en la estructura real gracias a la existencia de zunchos metálicos y recuadros rígidos se han incorporado bielas que forman cruces de San Andrés precisamente en las zonas donde se ubican los recuadros situados en la aguja. Dichas bielas permitirán la simulación de compresiones en el modelo antifunicular. Las compresiones representan las tracciones que aparecen en la estructura real. En las figuras 7.56, 7.57 y 7.58 se observa el modelo inicial y el resultado del cálculo .

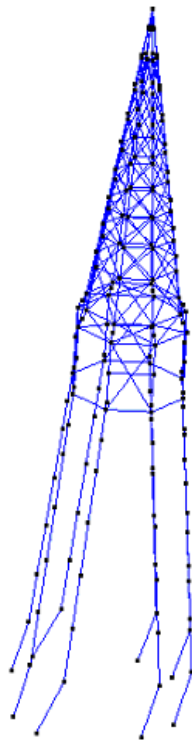


Figura 7.56 Modelo funicular con bielas en los recuadros de la aguja



Figura 7.57 Modelo arriostrado resultante

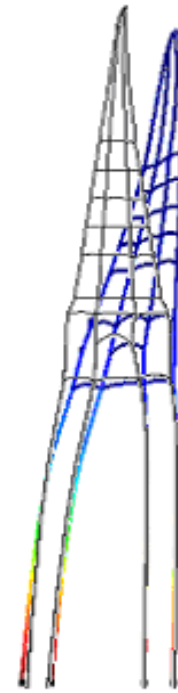


Figura 7.58 Superposición de modelos funiculares

Se puede observar en las figuras anteriores el diferente comportamiento que se experimenta entre el modelo con bielas y el que sólo dispone de elementos de catenaria. Se aprecia que la existencia de elementos que permiten el arriostramiento y zunchado de la estructura influyen decisivamente en el trazado de las líneas de presión, fijándolas en el interior del contorno resistente de la estructura y garantizando por tanto su estabilidad.

7.4.4.3 Cálculo frente acciones sísmicas.

La imposibilidad de modelar adecuadamente el comportamiento de la estructura original mediante un modelo funicular sin bielas en el caso de la acción del viento permite prever que la simulación de la acción sísmica tampoco podrá ser modelada adecuadamente mediante un modelo puramente antifunicular. La estabilidad de la estructura frente acciones horizontales exigirá de la movilización de mecanismos de flexión por lo que sería necesario introducir en el modelo elementos que permitan la aparición de estados tracción- compresión. A continuación se comprobó la imposibilidad de obtener una solución basada únicamente en un mecanismo antifunicular.

Como en los dos casos anteriores, en la resolución del sistema de ecuaciones no lineales generado se ha adoptado una estrategia incremental-iterativa descrita en el capítulo 3, empleado tres incrementos de carga. Las tolerancias adoptadas tanto en el criterio de convergencia en desplazamientos como en fuerzas ha sido de $2.92e-5$.

El comportamiento del algoritmo empleado en la resolución del modelo funicular ha sido muy similar al caso de carga de peso propio y carga de viento. Dicha similitud se puede apreciar en sendas graficas de convergencia que se muestran en las figuras 7.59 y 7.60.

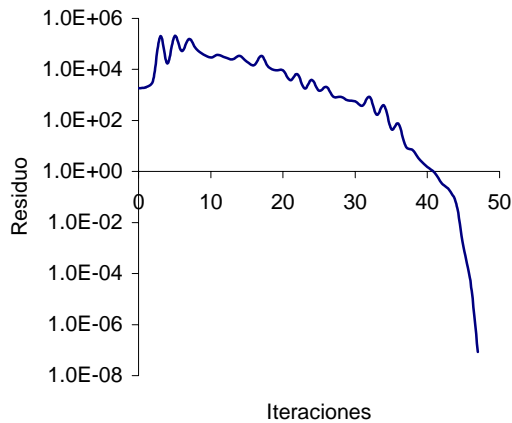


Figura 7.59 Evolución del residuo



Figura 7.60 Evolución módulo del avance

Tal como sucedía en el caso de carga horizontal debida al viento, el esquema de líneas de presiones sale totalmente del contorno resistente de la estructura. Este resultado hace evidente, tal como sucedía en el caso anterior, que el modelo empleado para simular el comportamiento de la estructura no sea el adecuado, debido a que la no consideración de los efectos de zunchado y arriostramiento que ofrecen los recuadros y anillas, hacen que el modelo sea excesivamente conservador, hasta tal punto que lo inhabilitan para abordar el problema que nos ocupa.

La existencia de anillos que zunchan la estructura y de recuadros rígidos entre las traviesas horizontales y los pilares, confiere a la torre un comportamiento monolítico más próximo al de una estructura reticulada que al de una estructura compuesta por obra de fábrica.

A la vista de los resultados , ver figura 7.61, no se ha considerado someter el esquema funicular obtenido a un proceso de optimización para intentar introducir el trazado de las líneas funiculares obtenidas en el interior de la estructura.

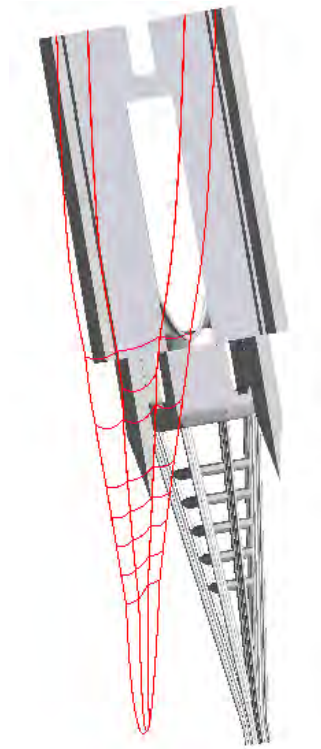


Figura 7.61 Resultado del cálculo sísmico

7.4.4.4 Conclusiones referentes al cálculo de la torre bajo cargas horizontales.

El gran desplazamiento obtenido en el modelo funicular para casos de carga horizontal, alejándose del perfil resistente de la estructura ofrece, mediante la aplicación del principio de seguridad de la teoría del análisis límite, la conclusión que la estructura no es estable bajo las cargas consideradas.

Esto sería así si la estructura tuviese el comportamiento de una estructura constituida únicamente por obra de fábrica y no se pudiesen asumir tracciones en ningún punto de la estructura. Realmente la estructura que nos ocupa tiene una serie de dispositivos (tirantes que zunchan la estructura, marcos rígidos, trabas pasantes entre juntas...) que le confieren cierta resistencia a tracción, por lo que globalmente se puede asumir que dicha construcción tiene un comportamiento similar al de una estructura reticulada y por tanto, se pueda considerar la aparición de cierto grado de tracciones entre las uniones de las piezas de la estructura.

Este hecho hace que considerar la estructura exclusivamente como de obra de fábrica, conduzca a un análisis situado excesivamente del lado de la seguridad. Por lo que no es posible analizar el comportamiento resistente de esta estructura bajo cargas horizontales mediante el empleo únicamente de modelos funiculares, es decir mediante la utilización de líneas de presión.

Se concluye pues que los sistemas que le confieren cierto grado de monolitismo y resistencia a tracción en las uniones, en definitiva transfieren a la estructura un comportamiento ciertamente reticular y por lo tanto son imprescindibles para asegurar la estabilidad de la construcción frente las cargas horizontales como lo son las de viento.

Se han realizado diferentes cálculos analizando la sensibilidad del modelo funicular frente diferentes niveles de carga de viento. En todos ellos se ha observado la imposibilidad de encajar el modelo funicular dentro del perfil resistente de la estructura. Es por ello que el hecho que el modelo funicular exceda ampliamente el contorno resistente de la estructura no se atribuya a la supervaloración de las acciones horizontales sino a la propia modelización de la estructura.

La incorporación de bielas que permiten la aparición de compresiones en los modelos funiculares permiten la simulación cualitativa de efectos de zunchado y arriostrado de las estructuras reales.

7.5 Estudio del pórtico central de la Catedral de Girona.

7.5.1 Introducción.

La Catedral de Girona constituye un caso único dentro de la casuística de las construcciones góticas. Esta es la Catedral con la nave central más ancha que se ha construido a lo largo de la historia. La nave mide 22.98m de anchura y tiene una altura e 35.2m. Toda una muestra de osadía para los constructores de la época. De hecho el atrevimiento se le puede atribuir al maestro constructor Bofill, que fue quien propuso en 1419 un plan para terminar la construcción de dicha Catedral que consistía en edificar una sola nave en lugar de las tres en las que se solía dividir el espacio interior de la catedral, para que cubriera todo el ancho de la Catedral.

Nunca hasta entonces se había propuesto una nave de crucería de tales dimensiones por lo que los promotores de la obra sometieron a consulta dicha propuesta por lo que se creó una comisión de expertos que debían dictaminar sobre la viabilidad del proyecto. El resultado de la consulta fue favorable a la tesis de Bofill por lo que se llevo a cabo dicha construcción. La bóveda se termino en 1579 y sigue en pie más de 400 años después de haber cerrado dicha bóveda de crucería.

La realización de este ejemplo permitirá la comparación de los resultados obtenidos con la metodología funicular, concretamente el valor de las reacciones en los contrafuertes, con análisis realizados con anterioridad por otros autores. Entre los análisis previos nos encontramos el realizado por Mendoza (2002) en el contexto de una tesina de especialidad donde se emplea un modelo tridimensional de elementos finitos y se aplica un modelo constitutivo visco-plástico de daño. El mismo autor emplea una técnica desarrollada por Heyman (1969, 1982, 1983, 1995, 1998) que permite encontrar el empuje total que ofrece la bóveda con lo que se podrá comparar el resultado del valor del empuje horizontal de la bóveda obtenida mediante un análisis funicular y el que obtiene Medoza utilizando las dos técnicas expuestas anteriormente.

7.5.2 Modelo del simplificado del pórtico central.

Para analizar el esquema estático del pórtico central mediante un modelo funicular plano se partirá de un modelo completo de la nave central de dicha catedral para posteriormente simplificarlo eliminando los elementos que distorsionan la semejanza con un pórtico plano. Dicha transformación queda del lado de la seguridad pues no tiene

en cuenta los muros laterales y contrafuertes secundarios que sin duda colaboran a centrar los empujes horizontales.

En la figura 7.62 se muestra el modelo geométrico de un pórtico tipo. En la figura 7.63 se puede apreciar el modelo simplificado del pórtico central que permitirá ser modelado mediante un sólo elemento de catenaria con una distribución de pesos a lo largo de su directriz que refleje adecuadamente la distribución de masas de la estructura.

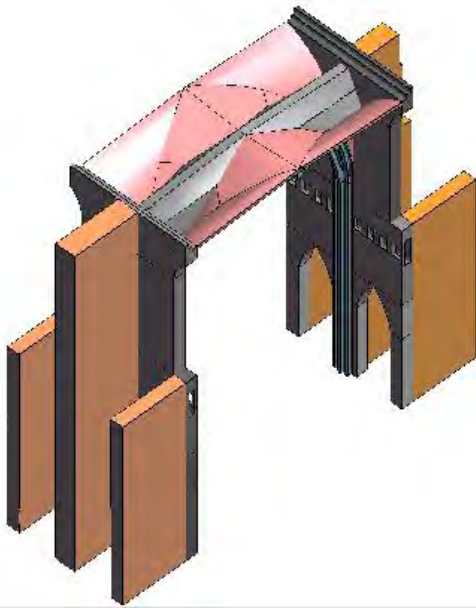


Figura 7.62 Modelo del pórtico central original

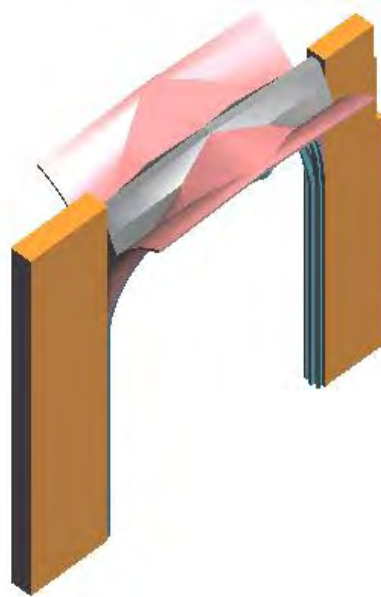


Figura 7.63 Modelo del pórtico central simplificado

Para realizar dicho análisis se definirá el contorno resistente de la estructura. Dicho contorno está formado por los arcos torales de la nave y los contrafuertes. Se han eliminado los contornos de la argamasa, que solo aportan peso, y las laminas de mampostería que forman la bóvedas. Se considera que el contorno propuesto queda del lado de la seguridad puesto en las bóvedas se pueden adoptar esquemas estáticos autoportantes que permitan su propia sustentación formado arcos de descarga en el espacio que se apoyen directamente en los contrafuertes.

Con la configuración propuesta se considera que el peso de las bóvedas gravita completamente sobre los arcos torales, cosa que hace que el cálculo sea del lado de la seguridad. En la figura 7.64 se puede apreciar el contorno propuesto.

Este arco-pórtico resistente se dividirá en 16 tramos (ver figura 7.65) para obtener así una discretización adecuada de la distribución del peso de la estructura para aplicarlo a cada uno de los tramos a la catenaria que servirá para obtener la correspondiente línea de presiones. La densidad considerada es de 24KN/m^3 en las bóvedas, arcos y contrafuertes y de 21KN/m^3 en la argamasa.

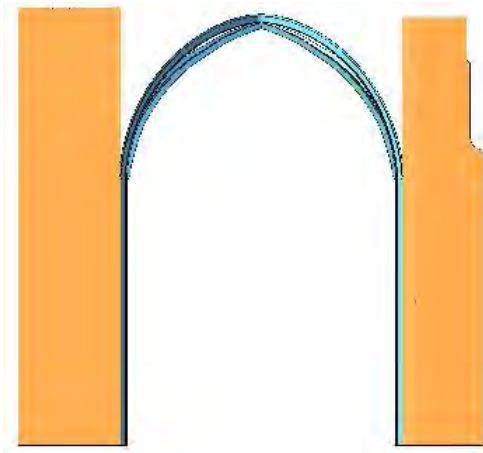


Figura 7.64 Contorno resistente propuesto

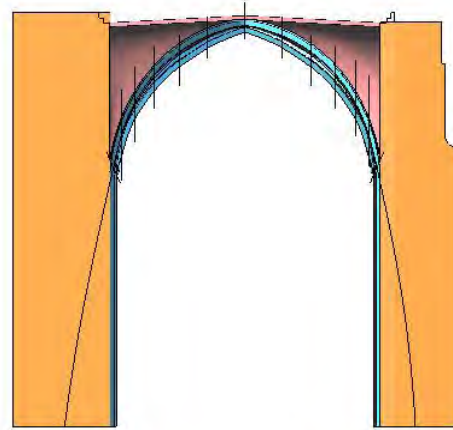


Figura 7.65 Contorno del pórtico simplificado con las subdivisiones para discretizar su peso. Se aprecia también el contorno de la catenaria propuesta.

Después de adecuar la posición de los apoyos de la catenaria para encajarla en el contorno resistente se obtiene el trazado que se puede observar en la figura 7.66. El punto de partida se establece a 1.7m del centro de la base del contrafuerte mayor esto se hace para obtener una línea de presiones que ofrece mayor nivel de seguridad.

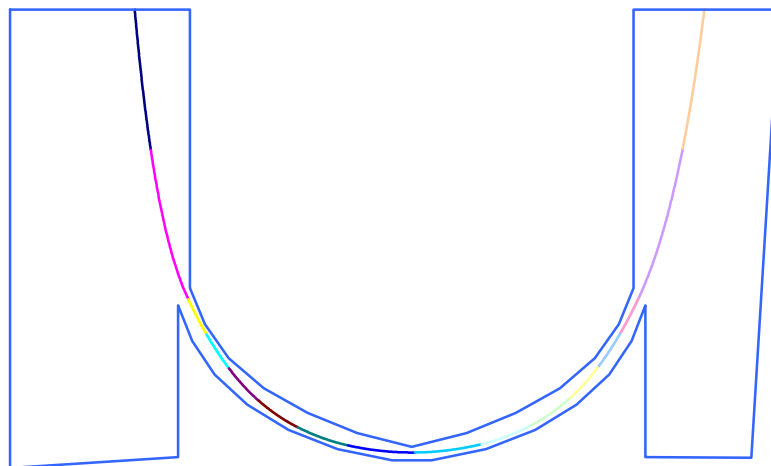


Figura 7.66 Contorno invertido del pórtico principal (azul) y de la catenaria resultante sometida a carga de peso propio.

También se han realizado otras dos simulaciones en las que se somete el pórtico central por un lado a una carga puntual horizontal de 300KN y en otro al de una carga vertical en el ceno de la clave de 500KN. Se puede observar en las figuras 7.67 y 7.68 el resultado de ambos cálculos donde se aprecia el desplazamiento de la línea de presión que se acerca al contorno resistente pero se sigue manteniendo en el su interior.

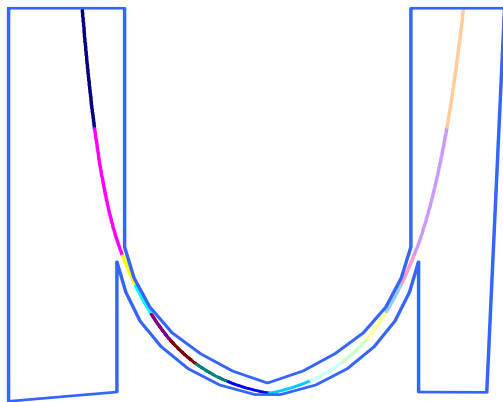


Figura 7.67 Línea de presiones resultante al aplicar una carga vertical puntual en el centro de la bóveda de 500KN

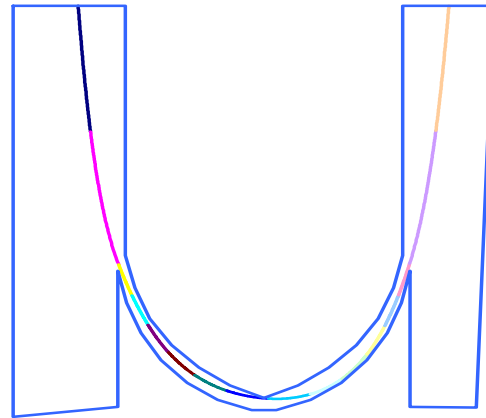


Figura 7.68 Línea de presiones resultante al aplicar una carga vertical puntual en el centro de la bóveda de 300KN

7.5.3 Comparativa de resultados de la reacciones por diversos autores

En la siguiente tabla se comparan los valores de las reacciones en los contrafuertes obtenidas por Mendoza, tanto empleando un análisis por MEF como por una metodología clásica ofrecida por Heyman, con los valores obtenidos con la simulación funicular.

Modelo	$H_{derecha} \times 10^4 N$	$H_{izquierda} \times 10^4 N$	$V_{derecha} \times 10^4 N$	$V_{izquierda} \times 10^4 N$
Funicular	106.5	106.5	1869.03	1334.2
MEF (Medoza, 2002)	109	109	1850	1850
Cálculo clásico (Medoza, 2002)	114.9	114.9	1835.14	1367.85

Tabla 7.6 Comparativa de las reacciones obtenidas en el caso de cargas de peso propio.

Cabe decir que el análisis por MEF que realiza Mendoza tiene en cuenta los elementos que se han eliminado en la simplificación efectuada para realizar el análisis funicular. La similitud de los resultados muestra la bondad tanto de la simplificación confirmando como correcta la primera hipótesis de este trabajo consistente en la modificación del modelo original eliminando los muros y contrafuertes secundarios pues como se ha comprobado su influencia es irrelevante.

Los resultados confirman la hipótesis de que el equilibrio en las estructuras de fábrica está controlado básicamente por su geometría y en definitiva por la distribución de las masas en su interior.

7.5.4 Estudio cualitativo de las bóvedas según un modelo funicular tridimensional.

A continuación se realizará un modelo de hilos tridimensional sometido al peso propio de la estructura para observar la forma que adopta y compararlo con el contorno de las bóvedas construidas.

Cabe decir que este es un análisis más cualitativo que cuantitativo puesto el estudio de laminas de obra de fabrica mediante el análisis limite no esta resuelto. En el capítulo 9 se muestra un ejemplo en el que se establece como una línea futura de investigación que generalice la actual teoría del análisis limite definida sólo en estructuras esqueléticas, con el objetivo de poder aplicarla en el estudio de la estabilidad de elementos superficiales.

A continuación se muestra en las figuras 7.69 y 7.70 el esquema funicular resultante. Se puede observar que los esfuerzos se concentran en la línea intersección de las bóvedas.

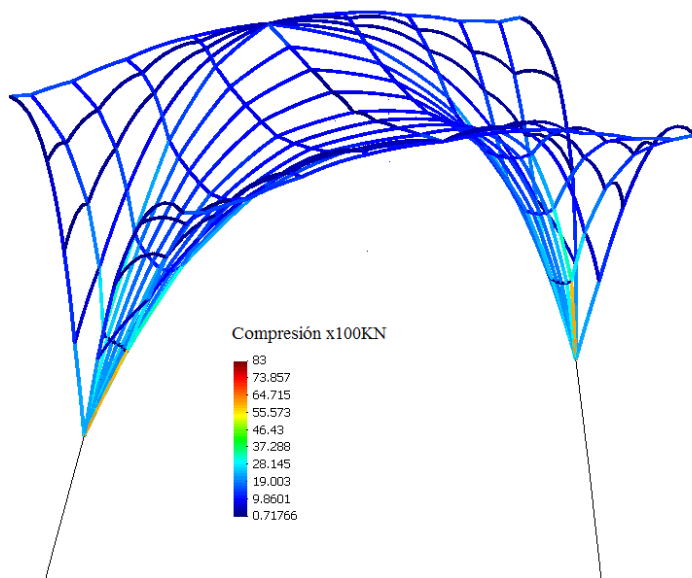


Figura 7.69 Modelo funicular resultante de la bóveda

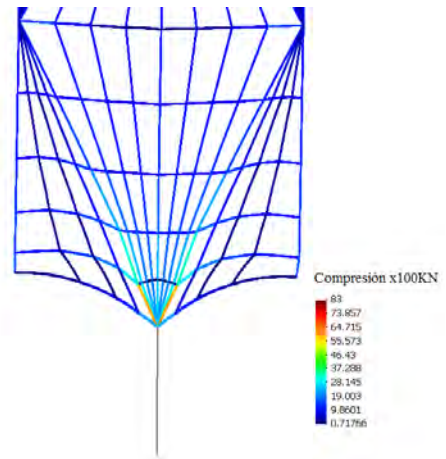


Figura 7.70 Modelo funicular resultante de la bóveda

En la figura 7.71 se puede comparar mejor el contorno resultante y el contorno real de la bóveda. La gran similitud entre los contornos permite percibir, a falta de un análisis más preciso, que su diseño es adecuado y estable.

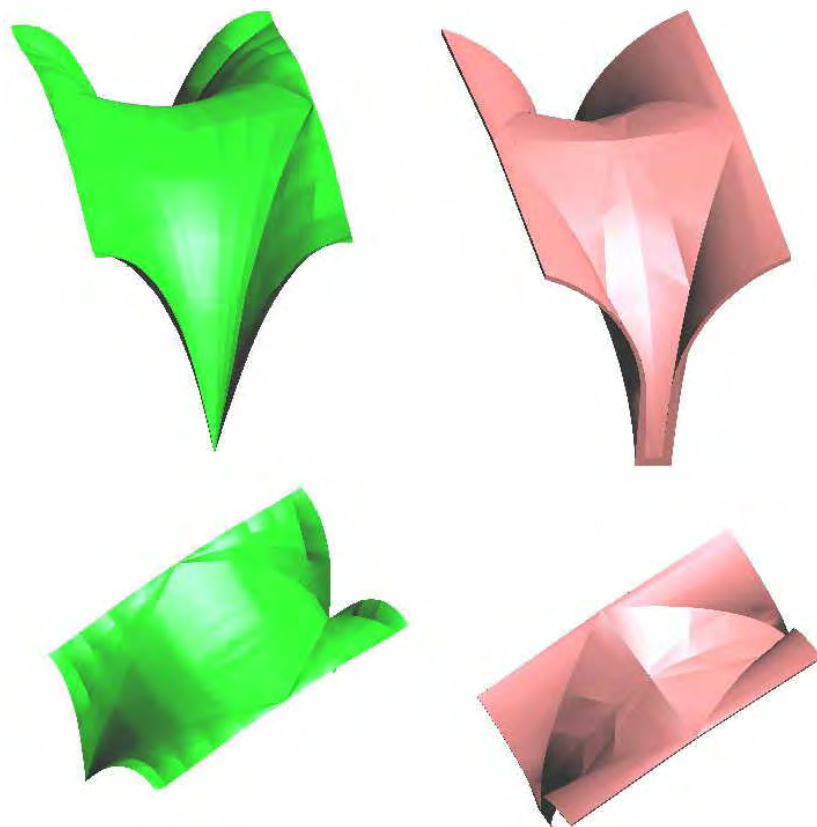


Figura 7.71 Comparativa de contornos, en verde el modelo funicular y en rosado el contorno real de las bóvedas. Se puede observar su gran similitud.

Parte III

Otras aplicaciones, conclusiones y
líneas futuras de investigación

Capítulo 8

Otras aplicaciones basadas en el elemento de cable desarrollado

8.1 Introducción

Seguidamente se presentan otras posibles aplicaciones, para cuyo desarrollo se deberían llevar a cabo estudios específicos ya que exceden la aplicación presentada. Entre los principales campos de aplicabilidad cabe citar:

- Aplicación de la técnica desarrollada en la verificación de la estabilidad de estructuras de obra de fábrica de tipo no esquelético.
- Aplicación en el modelado de estructuras textiles.
- Combinación del elemento desarrollado con otros elementos (barra a flexión)
- Aplicación al cálculo de estructuras tipo tensegrity
- Modelado de procesos de hinchado
- Aplicación al diseño asistido por ordenador
- Aplicación al diseño estructural

A continuación se presentan a modo introductorio y mediante ejemplos prácticos y de carácter cualitativo algunos de los campos de aplicación mencionados en los puntos anteriores.

8.2 Aplicación de la modelización funicular en estructuras de obra de fábrica no esqueléticas.

La generalización de la técnica desarrollada para el estudio de la estabilidad de estructuras formadas por elementos de carácter superficial o masivos de obra de fábrica, como cúpulas, cubiertas o puentes con cargas no cilíndricas entre otros casos, no es

trivial dado que la aplicación de los teoremas plásticos en los que se sustenta el análisis límite no son de directa aplicación en estos tipos estructurales. Para establecer una teoría equivalente a la formulada por el análisis límite aplicable a dichas estructuras sería necesario el estudio específico de la cinemática de colapso de estas estructuras por lo que sería necesario llevar a cabo una campaña experimental para observar como se produce la rotura en modelos de estructuras de obra de fábrica a escala reducida.

Como se ha comentado ya existen trabajos teóricos en esta línea de investigación como es el caso de O'Dwyer (1999)

A continuación se muestra un ejemplo con mero interés cualitativo que pretende aplicar la técnica desarrollada en el estudio estructuras no esqueléticas.

El caso consiste en la determinación de la carga última de un puente biempotrado cuyo perfil es parabólico de 0.8m de flecha y 0.20m de grosor. La luz es de 5.14m y presenta una profundidad de 5m. La zona cargada está constituida por un rectángulo de $0.20 \times 0.50 \text{m}^2$ situado a 3.75m del extremo izquierdo del arco. Tratándose de un ejemplo genérico se ha tomado una densidad arbitraria de 10000N/m^3 . Ver figura 8.1.

El tipo de carga considerado obliga a realizar un análisis tridimensional de la estructura donde los principios del análisis límite deberían ser comprobados experimentalmente.

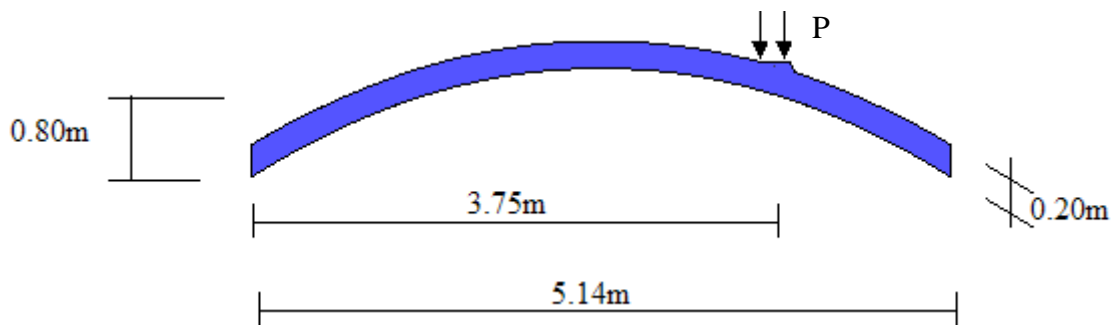


Figura 8.1 Datos geométricos del arco a modelizar

La vista tridimensional se muestra en la figura 8.2.

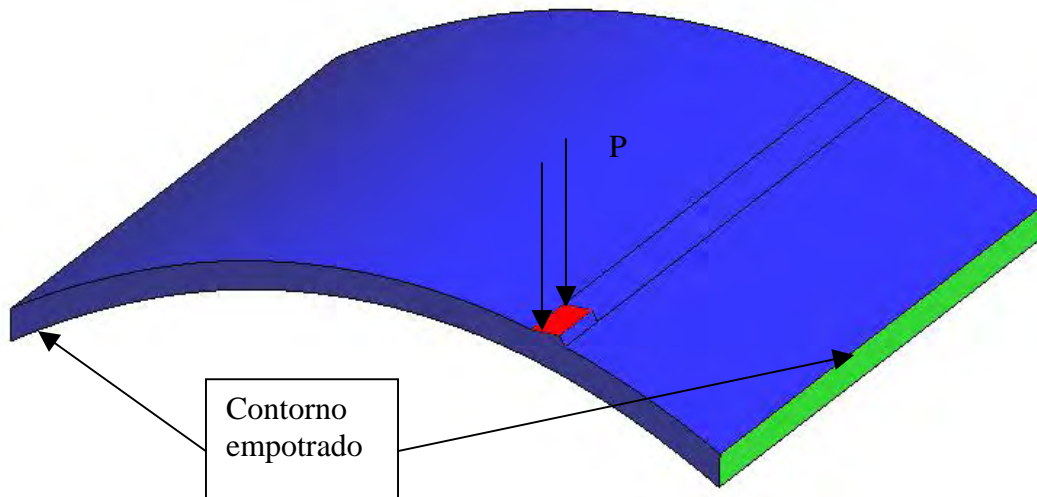


Figura 8.2 Imagen tridimensional del arco

Para determinar el valor de la posible carga última se aplicará el principio de seguridad en la teoría del análisis límite, por lo que se considerará que la estructura es estable siempre que se encuentre una red de líneas de presiones contenida en el interior de la estructura, hipótesis que como se ha comentado, no está suficientemente justificada para el caso que nos ocupa.

Se realizarán dos tipos de modelos funiculares para comprobar en que grado afecta la modelización realizada a la carga última obtenida. En el primer caso se realizará una malla formada por células cuadradas en la que se distribuye el peso propio del puente. Se puede apreciar en la figura 8.3 la malla considerada así como los nodos que serán cargados para simular la zona cargada de la estructura original.

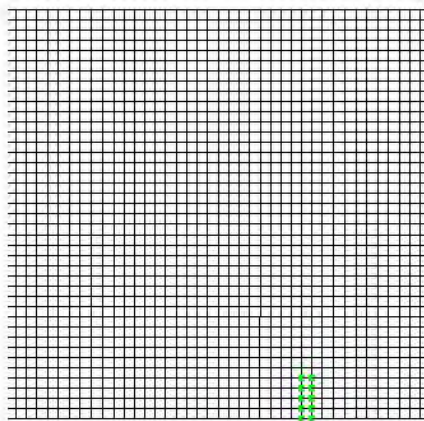


Figura 8.3 Modelo funicular constituido por celdas cuadradas

El modelo funicular adopta la forma que se aprecia en la figura 8.4 así como las reacciones en el contorno. Para una carga externa superior a 3500N el modelo funicular excede el perfil considerado resistente. Se toma pues este valor como el de la carga última de dicha estructura, puesto para mayores cargas no se puede encontrar un modelo que se pueda inscribir en el interior de la estructura.

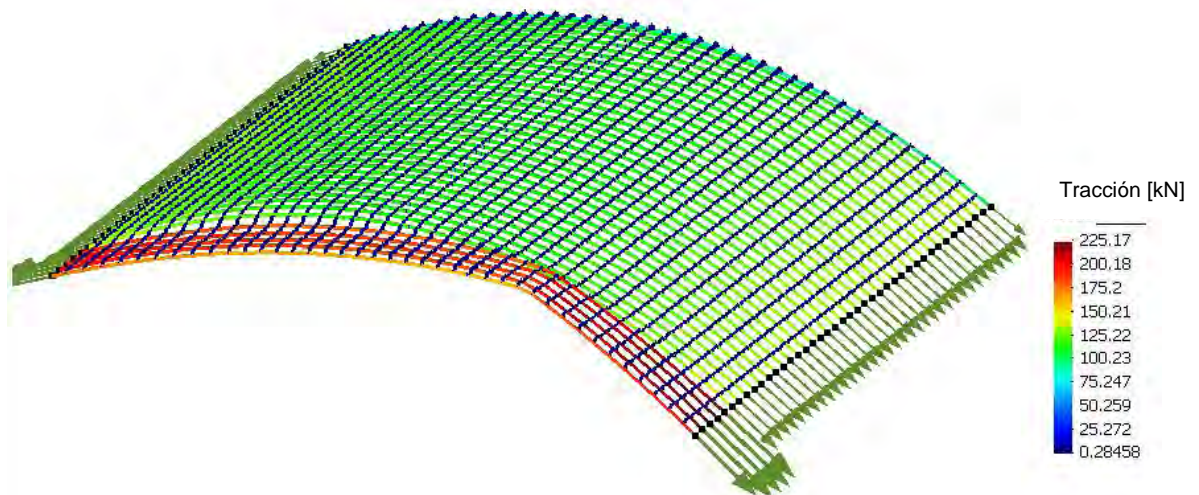


Figura 8.4 Resultado del cálculo. Fuerzas experimentadas por los cables.

Se muestra en la figura 8.4 que con esta malla se obtiene un reparto de cargas que diferencia claramente la zona de la red afectada por las cargas puntuales de la que sólo esta afecta por el peso propio del arco.

En la figura 8.5 s encuentra un detalle del modelo funicular generado como si de una tela se tratase. Se observa que el comportamiento es muy similar en toda la profundidad del modelo, modificándose ligeramente en la zona cargada.

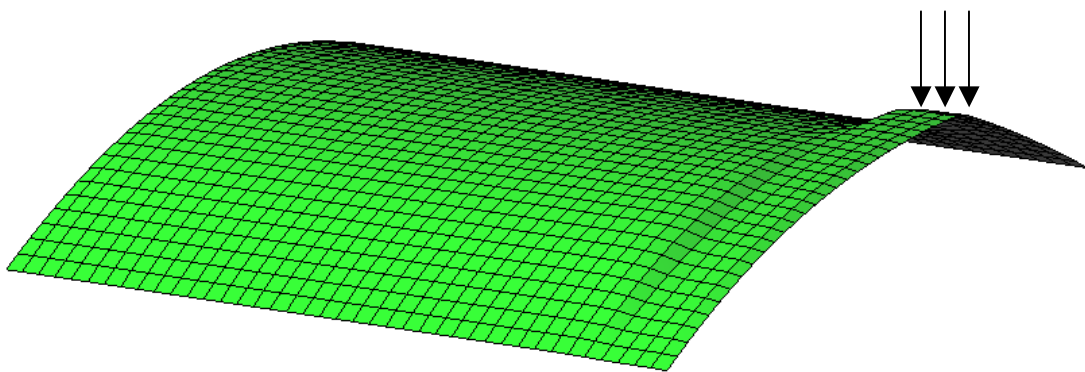


Figura 8.5 Detalle de la zona cargada

Seguidamente se presenta otro modelo formado por células triangulares en vez de las cuadrangulares del caso anterior. Se puede ver en la figura 8.6 la red de partida. Se puede apreciar también que el número de nodos cargados aumenta puesto la malla es más tupida.

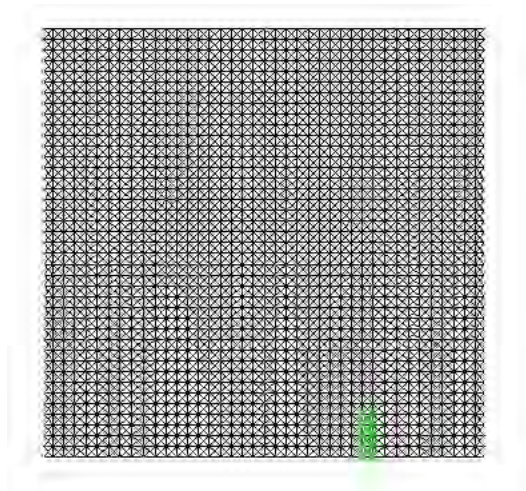


Figura 8.6 Modelo funicular constituido por celdas triangulares

El modelo funicular resultante se puede apreciar en la figura 8.7. Puede verse el diferente comportamiento que origina una u otra malla funicular. En este caso el comportamiento del modelo funicular reacciona frente al peso propio de una forma muy diferente al caso anterior, tensado diferentemente diversas zonas del modelo. No obstante esto, también para una carga externa superior a 3500N el modelo funicular no excede el perfil resistente considerado en la figura 8.2 , adoptando ésta como la carga última que ofrece el modelo funicular desarrollado, tanto en una como en otra configuración.

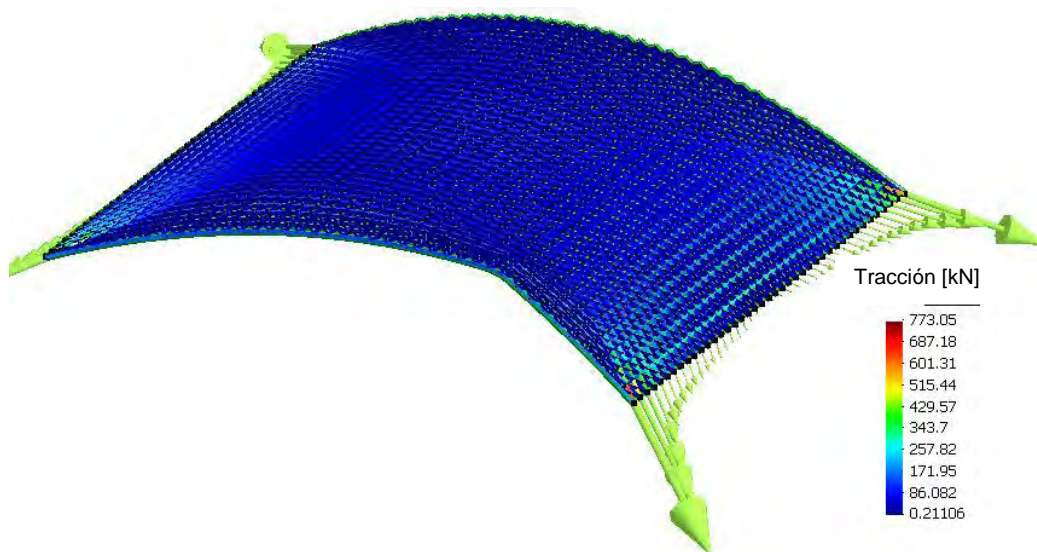


Figura 8.7 Resultado del segundo modelo funicular. Tacción en kN.

En la figura 8.8 se puede apreciar un detalle del modelo funicular generado. El comportamiento esta claramente controlado por los efectos esquina que tensan la tela según las diagonales del modelo.

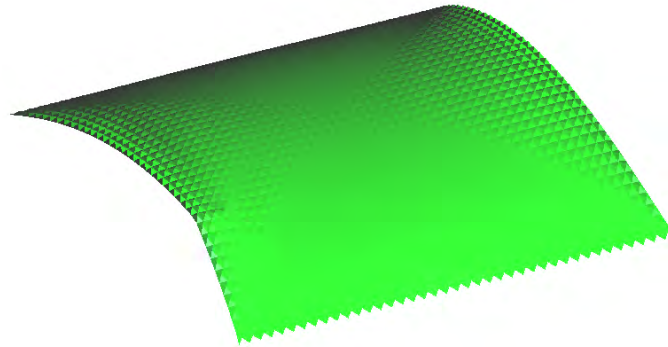


Figura 8.8 Representación fotorealística del modelo funicular. Puede apreciarse el diferente grado de tensión en el en diferentes zonas.

Como se puede ver se ha extrapolado el primer teorema del análisis plástico, para determinar la carga última de la estructura, hecho que se tendría que comprobar experimentalmente dado que la teoría límite sólo es de aplicación para el caso de estructuras esqueléticas.

8.3 Aplicación en el cálculo de tensoestructuras.

Dada la naturaleza del elemento desarrollado cabría pensar en la posibilidad de aplicar éste en el cálculo de estructuras formadas por membranas, telas o en general elementos textiles, combinadas o no con otros tipos estructurales como barras que formen celosías.

Dada que la modelización de las membranas se realizaría mediante su discretización en elementos lineales cabría estudiar la capacidad del elemento de cable desarrollado para modelar adecuadamente este tipo estructural.

A continuación se presentan algunos ejemplos de estructuras calculadas empleando el algoritmo de cálculo de redes desarrollado combinando elementos de catenaria y de barra a compresión.

En las figuras 8.9 y 8.10 se presenta un cálculo de una carpa donde se modela la membrana superior mediante elementos tipo cable. Cabe decir que en este ejemplo se combinan elementos tipo barra con elementos de cable obteniendo unos resultados bastante satisfactorios. Se puede observar que la flexión en los pilares provoca las arrugas correspondientes en la carpa superior. En el caso de modelar elementos superficiales mediante cables es necesario profundizar en el estudio para obtener reglas que permitan extrapolar los resultados de esfuerzos en forma de axiles obtenidos en el modelo de cables al correspondiente tensor de tensiones característico de los elementos bidimensionales.

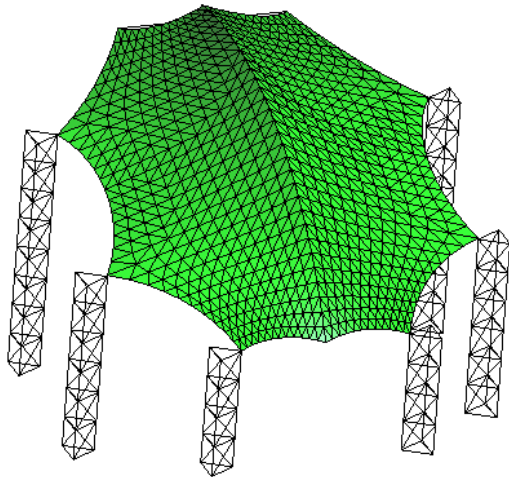


Figura 8.9 Configuración inicial

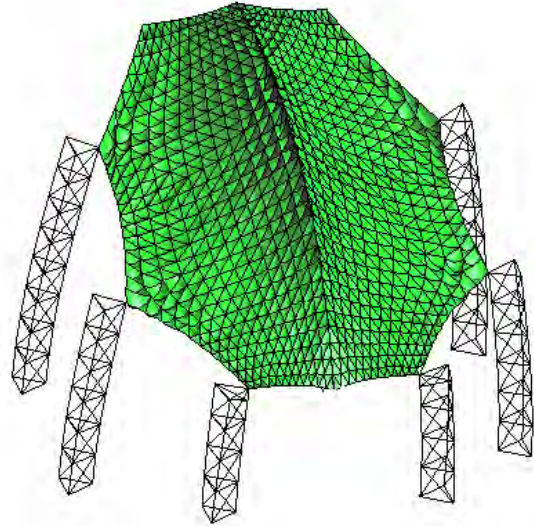


Figura 8.10 Configuración final

La aplicación de la técnica desarrollada para el cálculo de estructuras tipo tensigrity es bastante directo. Dichas estructuras tienen la característica de estar formada exclusivamente por elementos tipo barra y cable, por lo que para encontrar la configuración de equilibrio es necesario el cálculo mediante algoritmos como el desarrollado permitiendo modelar grandes desplazamientos en los nodos que forman el modelo.

Este tipo de estructuras se caracterizan por su gran ligereza por lo que han sido aplicados para cubrir grandes espacios como pabellones deportivos y auditorios así como son empleados profusamente en la ingeniería aeroespacial (Tibert, 1999)

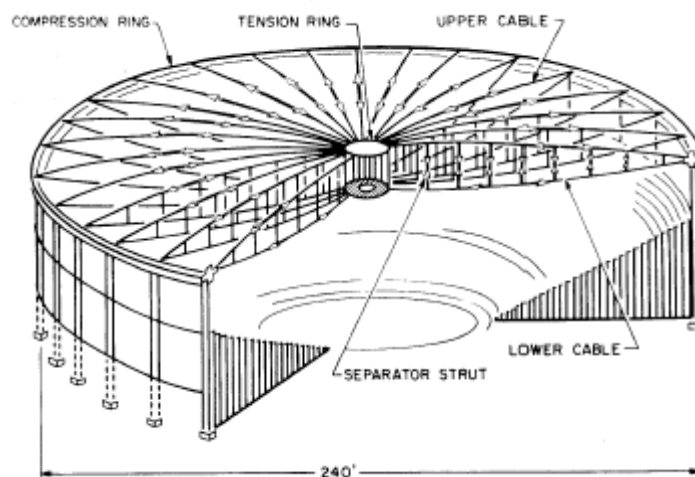


Figura 8.11 Esquema estructural de la cubierta del auditorio de Utica, U.S.A. (Tibert, 1999)

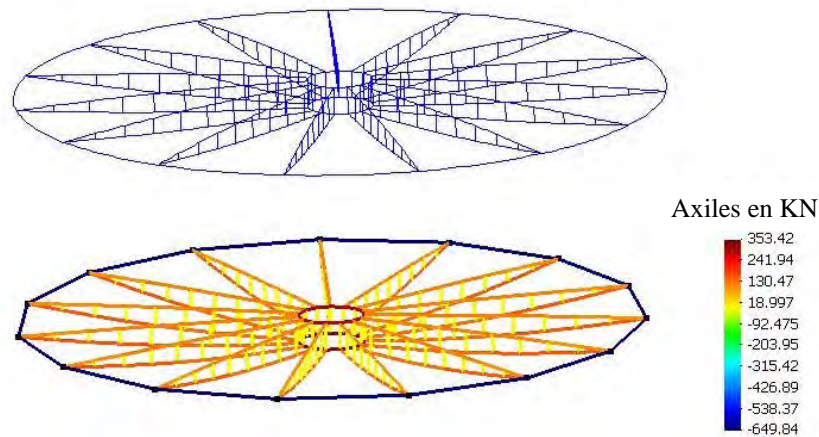


Figura 8.12 Ejemplo de estructura tensigrity.

8.4 Aplicación en estructuras hinchables.

Finalmente mediante la implementación de un tipo de carga que permita modelizar la presión que puede ejercer un gas sobre la membrana será posible analizar el comportamiento de estructuras inflables. Cabe destacar la alta no linealidad de este tipo de problemas dado que no solo el comportamiento estructural es no lineal sino que la propia naturaleza de la carga hace aumentar de forma considerable la no linealidad el problema ya que el termino independiente del sistema no lineal resultante es dependiente de las variables del problema.

Cabe decir que a la jacobina del sistema se le deberá añadir una matriz proveniente precisamente del termino de las cargas que se puede demostrar que es antisimetrica (Palisoc, 1996), por lo que la matriz jacobiana resultante perderá algunas cualidades como la simetría limitando el tipo de solver lineal a emplear en la resolución de los sistemas lineales resultantes.

También aparece la necesidad de realizar un remallado adaptativo dado que a medida que la geometría de la estructura cambia, es necesario readaptar la malla de cálculo para poder modelar adecuadamente todo el proceso de hinchado. En la figura 8.13a, 8.13b se muestra el proceso de hinchado de un globo a partir de un patronaje inicial en forma de cono. Se puede observar en la figura 8.13b la forma que adopta el globo cuando se alcanza la presión crítica, es decir, la máxima presión que puede soportar la estructura antes de entrar en un proceso de divergencia que llevaría a una deformación que crecería indefinidamente.

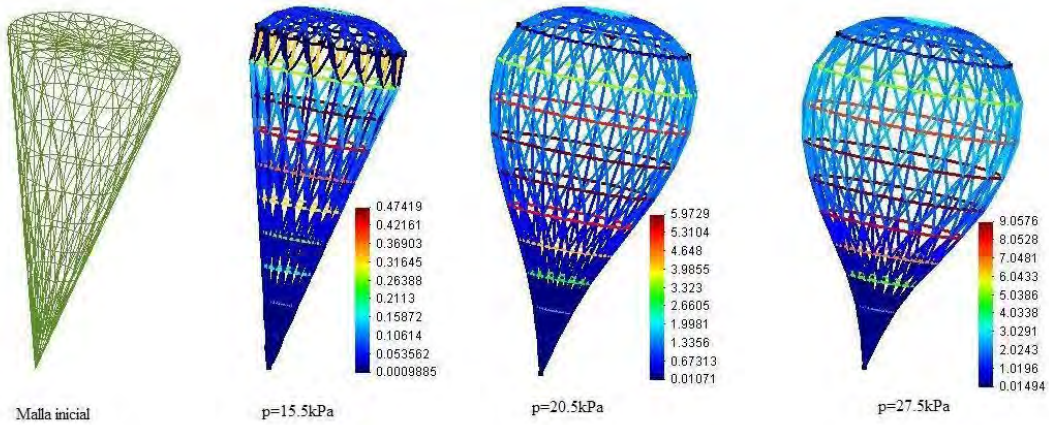


Figura 8.13a Proceso de hinchado de un globo aerostático. Tracción en los cables en kN.

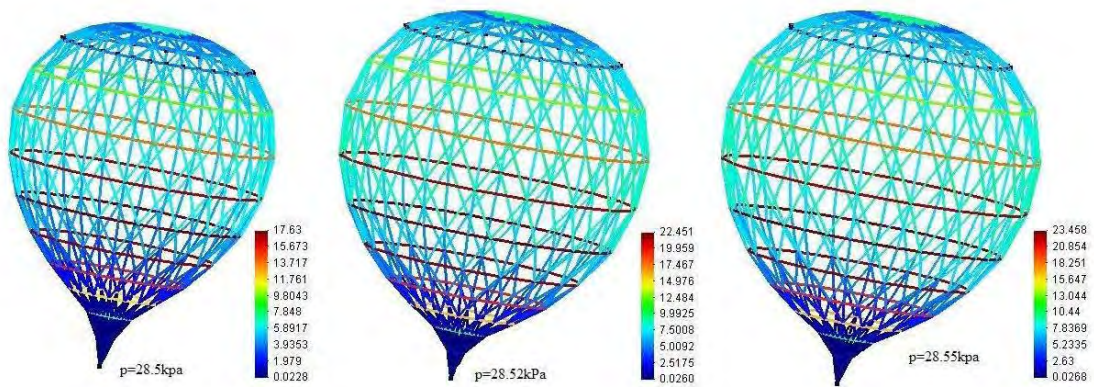


Figura 8.13b Proceso de hinchado de un globo aerostático. Tracción en los cables en kN. Estado final

Se muestran algunos ejemplos sencillos en las figuras 8.14-8.16 que han servido para comprobar la capacidad del algoritmo desarrollado para simular paracaídas (figuras 8.14, 8.15) o modelar procesos de hinchado 8.16.

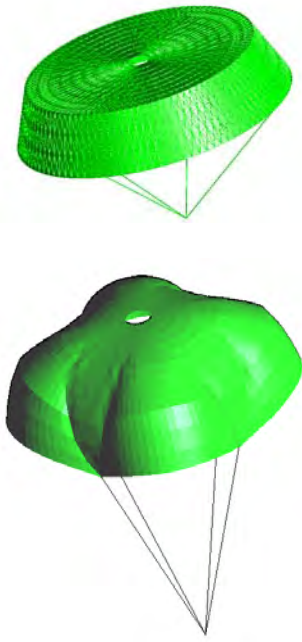


Figura 8.14 Forma que adopta un paracaídas a partir de un patronaje dado.

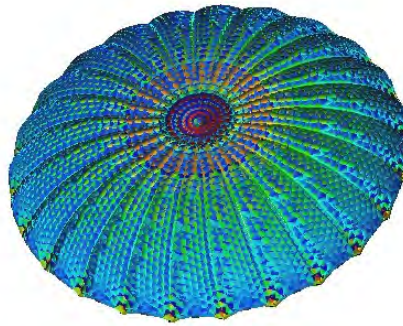


Figura 8.15 Tensiones en un paracaídas



Figura 8.16 Proceso de hinchado de un cilindro neumático.

Como estructura textil que es, la aplicación orientada al cálculo de velas es bastante directa. Cabría estudiar la interacción entre el flujo del viento y la forma que adopta la vela. Es por ello que sería muy interesante llevar a cabo estudios específicos orientados a acoplar el cálculo flujo-dinámico y el cálculo de estructuras textiles. En las figuras 8.17 y 8.18 se muestra un ejemplo.

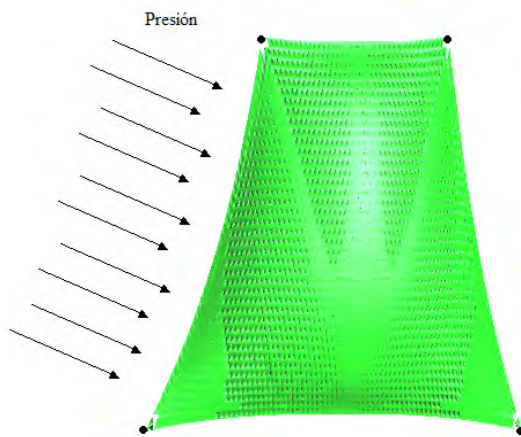


Figura 8.17 Tela trapezoidal sometida a presión de viento

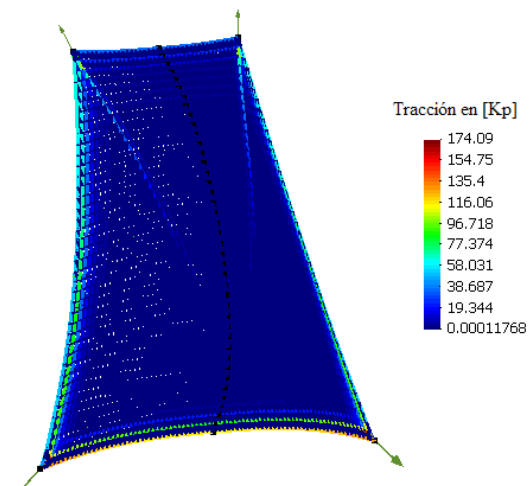


Figura 8.18 Reacciones y tensiones

8.5. Aplicación al diseño asistido por ordenador

Otra posible aplicación consiste en la obtención de superficies mínimas ya que partiendo de un contorno predeterminado es posible obtener el trazado de la superficie

cuya área sea mínima. Ya han sido empleados algoritmos basados en el cálculo de estructura solo tracción para obtener el contorno de superficies mínimas (Montcrieff, 1990) pero el tiempo de resolución empleado limitaba su aplicabilidad.

Esta aplicación puede tener un campo de aplicación en el diseño asistido por ordenador dado la capacidad en obtener superficies regulares a partir de una red formada por elementos desarrollados en el presente trabajo.

El procedimiento consistiría simplemente en hacer pasar una red de cables arbitraria por el contorno impuesto y posteriormente tensar dicha red mediante la disminución de la longitud inicial de cada elemento con lo que de forma automática se determina una superficie cuya forma es independiente del grado de pretensión que se aplique en la red y solamente depend del contorno escogido.

Una posible línea de investigación futura consistiría en desarrollar algoritmos que automatizasen dicho proceso y lo independizasen de la topología del contorno de partida considerado.

A modo de ejemplo se presenta un ejemplo clásico, la aproximación a la superficie de Shreck (P.do Carmo, 1990). Consiste en hacer pasar una superficie por el contorno formado por las aristas de un cubo, tal como se muestra en la figura 8.19. Se puede comparar el resultado obtenido con la superficie generada mediante una Nurb, empleada usualmente en el modelado gráfico asistido por ordenador.

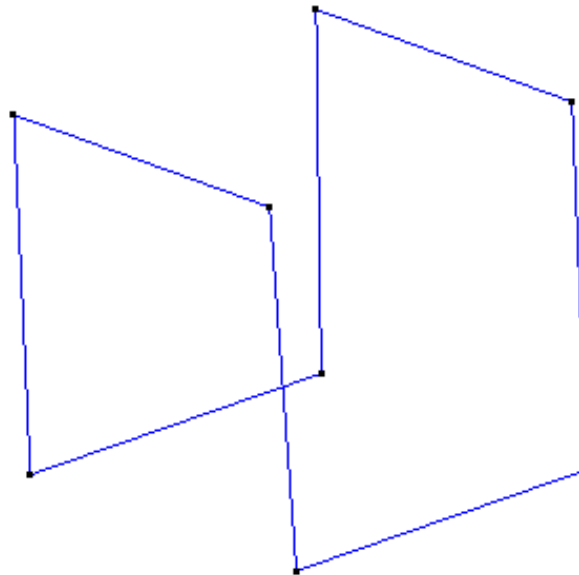


Figura 8.19 Bastidor que soportará la superficie

En las figuras 8.20-8.23 se puede apreciar la mejora substancial que se puede obtener en cuanto a la regularidad de la superficie obtenida.

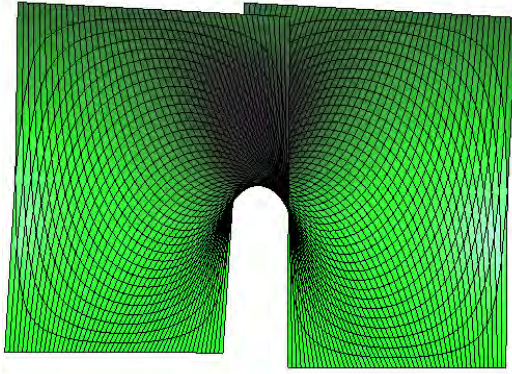


Figura 8.20 Superficie mínima obtenida. El valor del área es 6271,9m²

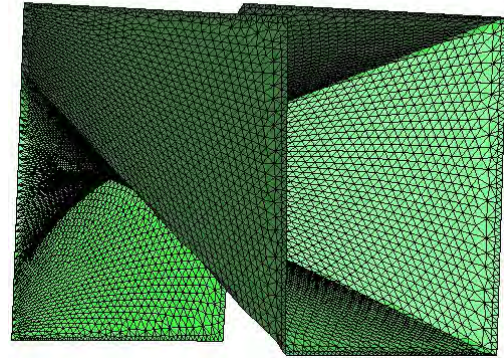


Figura 8.21 Superficie Nurb obtenida. El valor de área es 7754,17m²

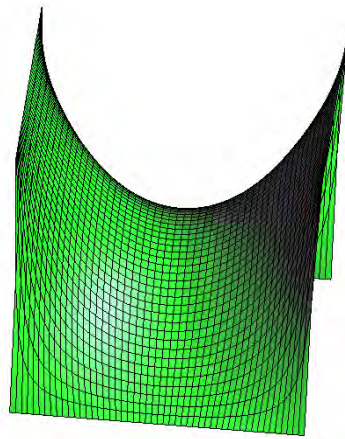


Figura 8.22 Vista de la superficie mínima obtenida

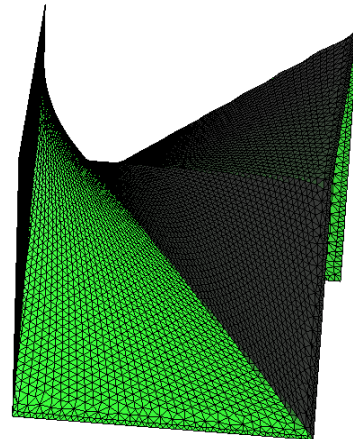


Figura 8.23 Vista de la superficie Nurb obtenida.

8.6 Aplicación al diseño estructural-arquitectónico.

Como se ha expuesto a lo largo del presente trabajo, la técnica antifunicular se ha empleado a lo largo de la historia de la construcción como una herramienta para realizar diseños estructurales. Es por ello que de forma natural se puede emplear la simulación computacional de redes de cables en el modelado computacional de estructuras. Ya existen trabajos en esta línea de investigación (Kai-Uwe, 2005)

En la figura 8.24 se presentan algunos ejemplos en los que se obtienen diferentes geometrías para la formación de cúpulas. Es destacable la influencia de la topología de la malla de partida en el perfil resultante obtenido.

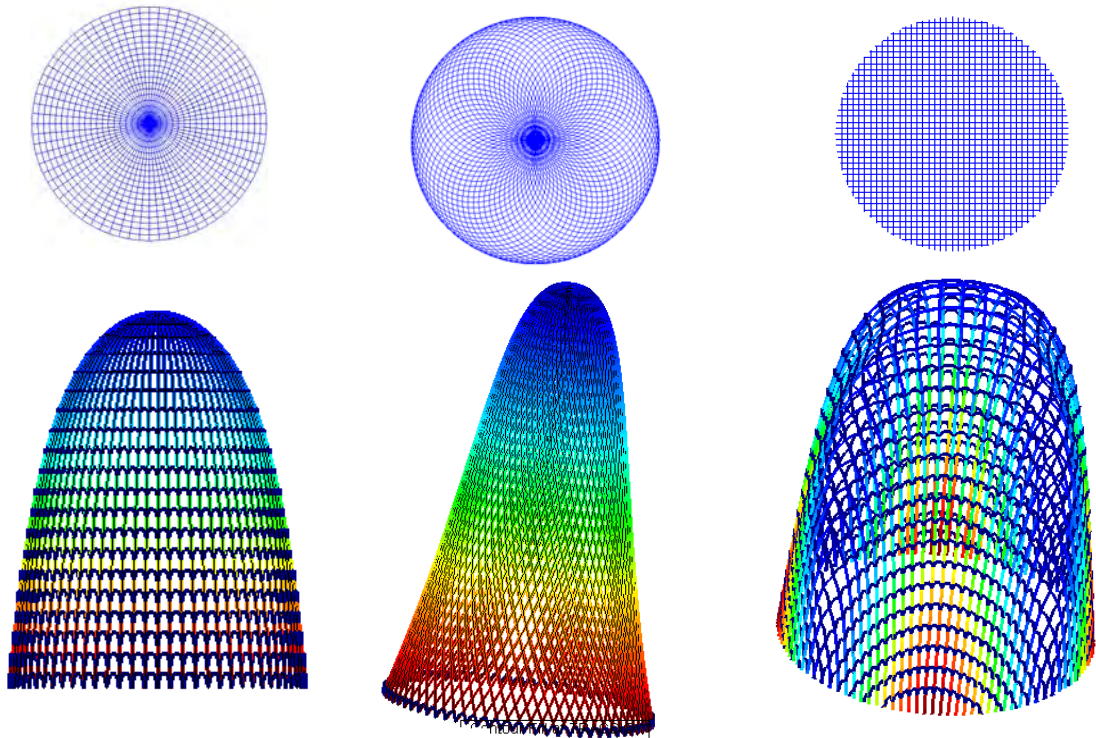


Figura 8.24 Diferentes formas de una cubierta antifunicular en función de la configuración de la malla adobada.

Sería interesante desarrollar aplicaciones que facilitasen el diseño arquitectónico basadas en la técnica antifunicular, ya que la estética de las formas obtenidas sumada con la bondad del comportamiento estructural resultante, confieren a estos diseños cualidades que combinadas con técnicas constructivas apropiadas podrían favorecer el resurgimiento de la arquitectura modernista.

Se muestran en las figuras 8.25-8.29 otras formas antifuniculares generadas con la aplicación desarrollada.

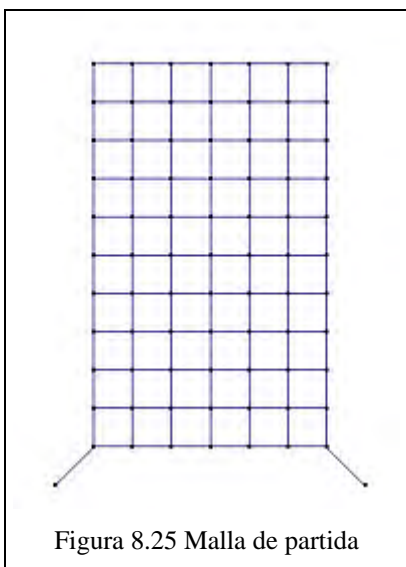


Figura 8.25 Malla de partida

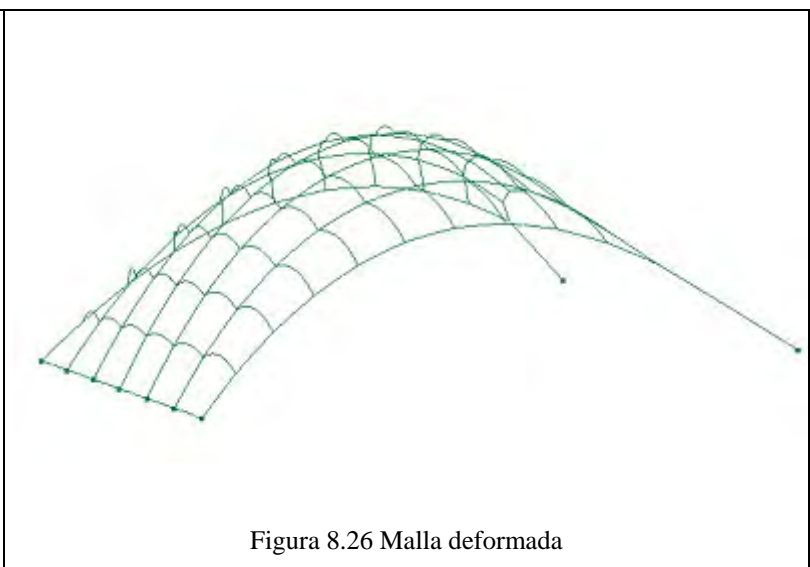
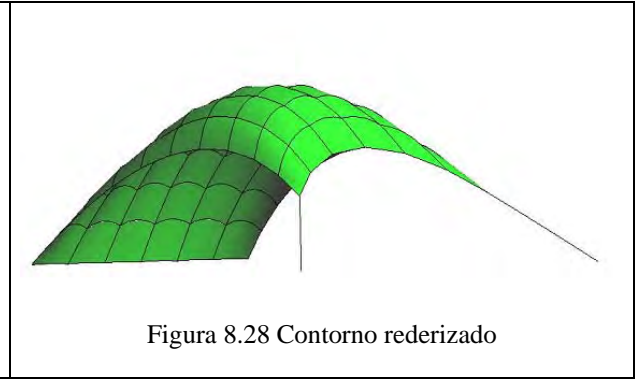
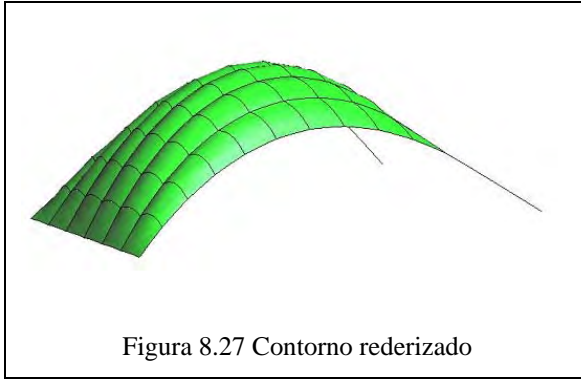


Figura 8.26 Malla deformada



Capítulo 9

Conclusiones y líneas futuras de desarrollo

9.1 Introducción

El objetivo esencial de este trabajo es el estudio de la aplicación de las técnicas basadas en el análisis límite para el estudio de la estabilidad de estructuras esqueléticas de obra de fabrica mediante el empleo de la analogía de las líneas de presiones que ofrecen los modelos funiculares consistentes en redes de cables. Por tanto el trabajo se ha dividido básicamente en el desarrollo de una estrategia numérica de modelización de redes de cables y en el estudio de su aplicación para el análisis de estructuras de obra de fabrica.

Para poder comprobar la bondad de la metodología desarrollada se han analizado diferentes estructuras ya estudiadas con anterioridad permitiendo comparar los resultados que ofrecen diferentes técnicas de análisis. También han estudiado estructuras complejas no modelizadas anteriormente y se ha obtenido conclusiones útiles para realizar de una forma más acertada los trabajos de rehabilitación de dichas estructuras.

A continuación las conclusiones más relevantes extraídas de los estudios realizados directamente relacionados con los objetivos planteados.

9.2 Conclusiones respecto la metodología de cálculo de redes desarrollada

- El elemento de cable desarrollado ofrece unos resultados altamente satisfactorios en relación a la simulación del comportamiento de redes de cables reales. También se ha podido establecer una estrategia numérica altamente estable que permite abordar el problema de la inversión de las expresiones cinemáticas del elemento, expresadas en términos de flexibilidad para transformarlas numéricamente en términos de rigidez.
- Se ha mostrado en el trabajo realizado la posibilidad de encontrar el trazado tridimensional de líneas de presiones mediante la analogía funicular

empleando redes de cables. El objetivo de representar dichas líneas de presiones mediante el empleo de líneas funiculares ha justificado el desarrollo de un nuevo elemento de cable. Dicho elemento tiene la peculiaridad de repartir la carga distribuida inicial respecto la longitud deformada. Esto permite representar con mayor precisión la carga del elemento estructural que representa una vez se ha variado la longitud del cable debido a su estiramiento elástico que experimenta.

- Se ha desarrollado también la expresión de la matriz tangente en términos de rigidez lo que ha permitido el aumento substancial tanto de la estabilización del proceso de convergencia como de su velocidad de resolución. La utilización de la matriz tangente desarrollada ha sido una cuestión estratégica a la hora de poder abordar la resolución de redes de cierta complejidad, puesto que el empleo de aproximaciones numéricas de dicha matriz, basadas en la técnica de las diferencias finitas, limitaba enormemente las dimensiones y complejidad del problema a abordar.
- La combinación de algoritmos siempre convergentes de orden cero y algoritmos de segundo orden tipo Newton-Rapson ha permitido obtener un comportamiento equilibrado obteniendo una alta estabilidad con una adecuada velocidad de convergencia permitiendo, abordar la resolución de problemas complejos invirtiendo un tiempo de CPU razonable. Los métodos siempre convergentes se han aplicado en la resolución de los sistemas de ecuaciones originados por la inversión de las expresiones cinemáticas, transformado un esquema explícito de flexibilidad a otro implícito de rigidez.
- Aprovechando el desarrollo analítico de la matriz tangente local se ha implementado un algoritmo tipo Newton-Rapson que ha resultado altamente eficiente, mostrándose altamente veloz y estable. Los esquemas de almacenaje y métodos de resolución de los sistemas lineales generados iterativamente han cobrado una importancia determinante para minimizar el tiempo de CPU, puesto que al optimizar el comportamiento de todos los procesos no lineales la influencia porcentual en el tiempo de resolución de los sistemas lineales ha aumentado considerablemente.
- La metodología desarrollada para la resolución de redes de cables ha mostrado una alta eficiencia y es claramente competitiva respecto otras con técnicas empleadas por otros autores. Se ha mostrado capaz de abordar simulaciones que requieren un gran número de grados de libertad, permitiendo incluso la resolución de problemas físicos que no guardan relación con el cálculo de estructuras de obra de fábrica y en las que es necesario el empleo de un gran número elementos para una correcta simulación, como pueden ser las estructuras textiles, estructuras inflables, tensygrits o simplemente se puede emplear como herramienta de CAD ya que mediante la utilización de la técnica desarrollada se pueden encontrar superficies mínimas apoyadas en contornos arbitrarios.

9.3 Conclusiones respecto la aplicación de modelos funiculares en el cálculo de estructuras de obra de fábrica.

- Los fundamentos teóricos de este trabajo nacen de la línea histórica del análisis de estructuras de obra de fábrica y materiales pétreos donde se exige el equilibrio estático de los elementos resistentes. A partir del concepto de línea de presiones como funicular de las cargas y su analogía antifunicular de cables colgantes, se ha propuesto una formulación que incorpora los postulados del análisis límite de Heyman y conceptos de optimización para encontrar una solución única.
- A partir del análisis límite se obtienen soluciones estática y cinemáticamente admisibles que son cotas inferiores de la carga última. Dicho análisis tiene el inconveniente que no permite determinar la línea de presión real que provoca una carga determinada en una estructura. Es posible asociar un grado de seguridad a cada línea de presión en función del coeficiente de seguridad geométrico de la misma. Para obtener una única solución que maximice el coeficiente de seguridad geométrico se ha incluido un proceso de optimización en la formulación. La optimización, de tipo geométrico, fuerza a la línea de presiones a estar lo más alejada posible del contorno a lo largo de todas las piezas. Este concepto asegura que el coeficiente geométrico de Heyman es máximo en cada sección y en consecuencia es máximo de forma general para toda la estructura.
- El empleo de algoritmos de optimización no lineal en el proceso de maximización del coeficiente de seguridad geométrico ha permitido automatizar un proceso de mejora de soluciones, aunque dada la naturaleza propia del proceso de optimización es difícil imaginar que el proceso se automatice absolutamente. Actualmente es necesario ir redirigiendo dicho proceso una vez se obtiene la convergencia, cambiando el conjunto de soluciones o modificando sus restricciones, de esta manera se mejora secuencialmente la solución obtenida.
- Las restricciones del problema de optimización se han abordado con una técnica muy distinta a las que usualmente se emplean como pueden ser la técnica de la penalización, funciones frontera o multiplicadores de Lagrange. La transformación de dominios restringidos a otros de libres mediante un adecuado cambio de variable ha permitido solventar el problema sin añadir una inestabilización adicional al ya complicado proceso de convergencia del problema de optimización. En situaciones donde las variables restringidas sean ortogonales entre sí (es decir sean independientes entre sí) la técnica empleada puede ser competitiva frente otras técnicas que tienden a aportar una gran complejidad a la función objetivo y por tanto a inestabilizar el proceso de convergencia.
- Se ha desarrollado un nuevo instrumento de cálculo computacional que permite el diseño y evaluación de estructuras tridimensionales de obra de fábrica. La validez de la formulación se ha probado con ejemplos contrastados de la literatura y se han obtenido resultados acordes a los datos

experimentales. La carga última del BridgeMill es muy cercana al valor medido 'in situ'. Se han encontrado resultados de la Catedral Mallorca similares a los encontrados en la bibliografía. También se ha aplicado dicha técnica para analizar el comportamiento de las torres de la fachada de la Catedral de Barcelona facilitando la comprensión de su adecuación geométrica y resistente. Finalmente se ha analizado el comportamiento de la Catedral de Girona y se han comparado las formas obtenidas con un modelo funicular que representa sus bóvedas de crucería obteniendo un perfil muy similar al realmente construido.

- Se ha comprobado mediante la modelización de las agujas de la Catedral de Barcelona que la simulación frente a cargas horizontales mediante modelos funiculares no es representativa del comportamiento real de la estructura. Este hecho permite determinar la necesidad de la existencia de mecanismos resistentes que no están basados en el simple equilibrio de las diferentes piezas mediante esfuerzos de compresión, sino que requieren de la existencia de mecanismos que aporten un comportamiento reticular a la estructura. Dichos mecanismos se concretan en los zunchos metálicos y recuadros resistentes en la aguja que le confieren un comportamiento más similar al de una estructura reticulada con una cierta capacidad de absorción de flectores por lo tanto de tracciones, que al de una estructura de obra de fábrica.
- La metodología desarrollada se puede considerar como una extensión de la técnica del análisis límite que permite la modelización de estructuras esqueléticas tridimensionales de obra de fábrica, cuyo análisis mediante el empleo de técnicas convencionales basadas en encontrar las líneas de presiones mediante métodos convencionales (gráficos o mediante el empleo de la mecánica clásica) presenta una gran dificultad de orden práctico.

9.4 Conclusiones respecto los recursos informáticos empleados en el desarrollo de la metodología computacional.

- La técnica desarrollada requiere del empleo de un pre y postprocesador para gestionar la gran cantidad de datos e información que se requiere a la hora de modelar una estructura por sencilla que sea. El preprocesador actúa en la preparación de la información que requiere el módulo de cálculo. Sus funciones básicas son la realización de un modelo geométrico de la estructura a calcular, la discretización del contorno resistente y la imposición de las condiciones de contorno y definición de otras variables necesarias para el cálculo. El volumen de información que aporta el cálculo mediante la metodología propuesta es mucho menor que las que ofrecen otras técnicas como la de los elementos finitos, no obstante para facilitar su comprensión es conveniente el empleo de un postprocesador que presente adecuadamente los resultados obtenidos y facilite su comprensión.
- El empleo del pre y postprocesador GID[®] ha sido de gran utilidad y ha facilitado el trabajo de desarrollo del presente trabajo puesto que ha permitido concentrar los esfuerzos en el desarrollo de la formulación y en la

verificación de la misma, siendo de gran utilidad tanto a la hora de introducir los datos para realizar las simulaciones como en el momento de su visualización y estudio. Los ejemplos presentados son una muestra de ello.

- El lenguaje de programación empleado ha sido el C++ mostrándose muy versátil. No sólo es destacable su capacidad de facilitar la estructuración de los datos y de las funciones de una manera coherente sino también su capacidad a la hora de operar directamente con los registros de la memoria del ordenador consiguiendo una buena gestión de los recursos informáticos disponibles.
- Concretamente se ha empleado la Programación Orientada a Objetos (POO) facilitando una programación muy sencilla de los algoritmos de cálculo basados en métodos matriciales como el que nos ocupa. La metodología de cálculo empleada tiene unas unidades de información muy claras y diferenciadas que permiten una aplicación directa de la filosofía de la POO. En casos como éste, donde la gestión de los datos se convierte en una prioridad dentro del programa, para poder mantenerlo y aprovecharlo en investigaciones futuras, las ventajas de la POO se vuelven más evidentes y en consecuencia se convierte en una herramienta muy válida para desarrollar estos códigos. Este tipo de programación no ofrece especiales ventajas respecto a la programación convencional a la hora de desarrollar programas donde se implementan algoritmos matemáticos puros y la gestión de los datos no es compleja (por ejemplo, a la hora de programar solvers lineales y no-lineales, métodos de búsqueda de ceros de funciones...)

9.5 Líneas futuras de desarrollo.

El trabajo realizado ha permitido identificar aspectos todavía no resueltos y abre una serie de futuras líneas de investigación, que se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Una de las líneas de desarrollo más interesantes que se derivan del presente trabajo ya se ha apuntado en el capítulo 8. Consiste en formular una teoría que extrapole los principios de la teoría del análisis límite, aplicable en estructuras de carácter esquelético, para el estudio de la estabilidad de estructuras de tipo laminar como cúpulas o cualquier tipo estructural que se pueda modelar geoméricamente mediante superficies. Para llevar a cabo dicha investigación sería conveniente realizar un estudio numérico-experimental que permitiese identificar comportamientos característicos de la cinemática de la rotura de estos elementos para establecer las correspondientes hipótesis generales que permitan asentar una teoría del análisis límite generalizada.
- Como se ha mostrado a lo largo del presente trabajo la aplicación de la teoría del análisis límite implica la asunción de una serie de hipótesis sobre el comportamiento del material (imposibilidad de colapso por deslizamiento de las dovelas, imposibilidad de rotura a compresión y resistencia a tracción nula) que según el caso puede imposibilitar la aplicación de la teoría. Sería

interesante desarrollar una línea de investigación que integrase la posibilidad de colapso por deslizamiento entre elementos o por aplastamiento del material para superar las limitaciones que impone la teoría del análisis límite.

- Otra línea de investigación consistiría en la adaptación de la técnica antifunicular para la modelización del comportamiento de estructuras formadas por materiales compuestos como por ejemplo la cerámica armada. Sería interesante desarrollar herramientas numéricas específicas basadas en la técnica de bielas y tirantes propuesta por la Normativa de Hormigón (EHE) donde los elementos de bielas se simulasen mediante elementos de barra convencional y los tirantes mediante elementos de cable.
- La simulación de elementos de hormigón postesado mediante la analogía antifunicular requeriría una investigación específica aunque la analogía es bastante directa mediante el empleo de la metodología de las cargas equivalentes. Ya existen algunos trabajos de carácter práctico basados en esta línea de investigación aunque se requeriría un estudio más teórico para asentar dicha aplicación.
- En el capítulo 8 se han mostrado diferentes aplicaciones del elemento de cable desarrollado que nada tienen que ver con el cálculo de la estabilidad de estructuras de obra de fábrica. Concretamente el análisis del comportamiento de membranas mediante su discretización en elementos de cable exige un estudio teórico y experimental específico que permita establecer el procedimiento para llevar a cabo una correcta simulación cinemática y mecánica.

REFERENCIAS

Ahmadi-Kashani, (1983), "Development of cable elements y their applications in the analysis of cable structures." PhD thesis, University of Manchester Institute of Science y Technology (UMIST).

Ali, S.S. y Page, A.W. (1988), "Finite element model for masonry subjected to concentrated loads", Journal of Structural Engineering , ASCE, 114, (8), 1761-1784.

Alwar R.S., N.Ramachandra Rao y M.Subba Rao, (1975) "An alternative procedure in dynamic relaxation." Computers y Structures n°5, p. 271-276

Anthoine, A., (1992) "In plane behaviour of masonry: a literature review." Comission of the European Communities, Industrial processes, Luxemburgo.

Andres, O.A. y Ortega, (1993) "Extensión de la técnica funicular de Gaudí a la concepción y génesis de superficies estructurales." N.F. Vol. 44 n° 424

Argyris, J. H., Angelopoulos, T., y Bichat, B. (1974) "A general method for the shape finding of lightweight tension structures." Computer Methods in Applied Mechanics y Engineering Vol. 3, p. 135-149.

A.S. Day y J. H. Bunce (1970) "Analysis of cable networks by dinamic relaxation" Civil Engng Public works rev. 4,p. 383-386

Barnes M.R.(1974), "Dynamic relaxation analysis of tension networks." Int. Conf. Tension Roof Structures, London

Bazant, Z.P. (1979), "Plastic fracturing theory of concrete", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 105.

Bläcklund, J. (1976), "Large deflection analysis of elasto-plastic beams y frames", Int. J. Mechanical Science, 18, p. 269-277.

Bernoulli, Jacques (1691) "Acta Eruditorum", Leizpig.
http://www.schillerinstitute.org/fid_97-01/011_catenary.html

Buchholdt, H. A. (1985) "An introduction to cable roof structures." Cambridge University Press, Cambridge,

Cervera, M., Oliver, J. y Prato, T. (1998) "A thermo-chemo-mechanical model for the hydratation y aging of concrete". Computational Modelling of Concrete Structures, Balkema, Rotterdam.

Crisfield, M. A. (1991) "Non-linear Finite Element Analysis of Solids y Structures." John Wiley y Sons, Ltd.

Crisfield, M.A., Packham, A.J.A. (1979) "A mechanism program for computing the strength of masonry arch bridges", TTRL, Crowthorne, Report 124.

Crisfield, M.A. y Wills, J. (1985), "Nonlinear Analysis of Concrete y Masonry Structures", Proc. of the Europe-US Symposium on Finite Element Methods for Nonlinear Problems, IV.

Coyotte JP y Gisset P. (1988) "Cable network analysis by non linear Prgraming technique." Engineering Structues :10: p. 41-46

Croci, G. (1998) "La Basílica de San Francisco de Asís después del terremoto de septiembre de 1997". Primer Congreso Europeo sobre Catedrales Góticas, Diputación Foral de Alava, Vitoria.

Croci, G., Carluccio y G., Viskovic, A. (1998) "Análisis estructural de la Catedral de Santa María Vieja de Vitoria". Primer Congreso Europeo sobre Catedrales Góticas, Diputación Foral de Alava.

Croci, G., D'Asdia, P. y Viskovic, A. (1995), "Methods for the analysis y safety evaluation of masonry structures subjected to seismic actions", Structural Analysis of Historical Buildings IV, 1, Computational Mechanics Publications, Southampton.

Croci, G. y Sabbadini, F. (1988) "El comportamiento estructural de las catedrales góticas". Primer Congreso Europeo sobre Catedrales Góticas, Diputación Foral de Alava, Vitoria.

Croci, G., Taupin, J. L., Viskovic, A. (1998) "Análisis matemático del derrumbamiento de bóvedas en la catedral de San Pedro de Beauvais". Primer Congreso Europeo sobre Catedrales Góticas, Diputación Foral de Alava, Vitoria.

Croci, G. y Viscovik, A. (1993) "Causes of failures of Colosseum over the centuries y evaluation of the safety levels". Public Assembly Structures. From Antiquity to the Present. IASS-Mimar Sinan University, Istanbul.

Croci, G., Viskovic, A., Sabbadini, F. (1995) "Some aspects related to the structural behaviour of gothic cathedrals". Spatial Structures: Heritage, Present y Future, SGE Editoriali, Padua.

Chiostrini, S. y Vignoli, A. (1989), "Application of a Numerical Method to the Study of Masonry Panels with Various Geometry under Seismic Loads", Structural Repair y Maintenance of Historical Buildings, Computational Mechanics Publications, Southampton.

Choo, B.S., Coutie, M.G., Gong, N.G. (1991), "Finite-element analysis of masonry arch bridges using tapered elements", Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2, 91, p. 755-770.

Ensidesa (1993) "Acero para estructuras de edificación." Vol. 2, Ed. Ensidesa.

Ernst, H.-J. (1965), "Der E-modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges." Der Bauingenieur Vol. 40, No. 2 ,p. 52-55. (en alemán).

Escolano Tercero, E. et al. (2002), "GID reference manual", Ed. Cimne.
<http://www.gidhome.com/>

Eurocódigo 6. (1996) "Proyecto de estructuras de Mampostería". Ed. AENOR.

Galilei, Galileo (1638) "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze".

Gambhir ML y de Batchelor BV, (1977) "A finite element 3D prestressed cablenets", International Journal of Numerical Methods in Engineering: (11) p. 1699-718.

Gil Ruiz, Antonio (2001) "Métodos numéricos para el diseño de estructuras traccionadas: membranas y redes de cables" Ed. Miguel losada

Gil, LL. y Andreu, A. (2001) "Shape y cross-section optimization of truss structure" Computers y structures, Ed. Pergamon, N° 79 p.681-689.

Gong, N.G. Choo, B.S. y Coutie, M.G. (1993), "Crack y contact problems in masonry arch bridges", Proceedings of the V I CCCBE, ASCE, Editor L.F. Cohn, p. 801-808.

Gonzalez, J. y Casals, A. (2002) "Estructuras y espacio en la arquitectura de Gaudi." PO Ingeniería y territorio. N°59 p. 66-74, Barcelona

Gründig, L., y Bahndorf, J. (1988) "The design of wide-span roof structures using micro-computers" Computers & Structures Vol. 30, No. 3 495-501

Heyman, J. (1969) "The safety of masonry arches", Int. J. Mech. Sci., 11, p. 363-385.

Heyman, J. (1982) "The masonry arch" Ed. Ellis horwood, Chichester

Heyman, J. (1983) "Defectos crónicos en las bóvedas de fábrica: las grietas de Sabouret", artículo reeditado dentro de la compilación titulada: Teoría, historia y restauración de estructuras de obra de fábrica. CEHOPU, Madrid.

Heyman, J. (1995) "The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture", Cambridge University Press, Cambridge

Heyman, J. (1995) "Teoría, historia y restauración de estructuras de fabrica" Ed. Santiago Huerta, Madrid

Heyman, J. (1998) "Mechanical behaviour of arches y vaults". Structural Analysis of Historical Constructions II. CIMNE, Barcelona.

Hohberg, J. (1993), "Planes of weakness in finite element analysis", Proceeding of IABSE Symposium Remaining structural capacity, Copenhagen, p. 157-165.

Hsii wang, Pao (2001) "Study nonlynear analysis of a higly redudndant cable stayed bridge" Computers & Structures N°80 p. 165-182

- Huerta, Santiago** (2001) "Mechanism of masonry vaults: the equilibrium approach Historical constructions" Ed. P.B. Lourenco, P. Roca Barcelona
- Huerta, Santiago** (1998) "Mecanica de las obedas de la Catedral de Girona" Las grandes bobedas hispanas. CEHOPU, Madrid
- Huerta, Santiago** (1996) "La teoría del arco de fabrica: desarrollo histórico" PO Ingeniería y territorio. N° 38 p. 18-29, Barcelona
- Huerta, Santiago** (1990) "Diseño estructural de arcos, Bovedas y Cupulas en España. Ca. 1500-ca.1800" Tesis doctoral, UPM, Madrid
- ICOMOS** (2001) "Recomendations for the analysis, conservation y structural restoration of architectural heritage " Paris.
- Irvine, Max** (1981) "Cable structures" Ed. MIT press, Massachussets.
- Jayaraman, H. B., y Knudson, W. C.** "A curved element for the analysis of cable structures". Computers & Structures Vol. 14, No. 3/4 (1981), p. 325-333.
- Kai-Uve Bletzinger et al.,** (2005) "Computantional Methods for form finding y optimization of shells y membranes", Computer methods in applied mechanics y engineering, ed. Elsevier, 194, p. 3438-3452
- Karantoni, F. V. y Fardis, M. N.** (1992) "Effectiveness of seismic strengthening techniques for masonry buildings." J. Struct. Engrg. ASCE, 118 (7), p.1884-1902.
- Karoumi, Raid** (1998) "Some modeling aspects in the non linear finite elements analysis cable supported bridges" Computers & Structures N°71 p.397-412
- Kim, Ki-seok y Lee, Hae Sung.** (2001) "Analysis of target configurations under dead loads for cable supported bridges." Computers & Structures N°79 p.681-2692
- Krishna, P** (1978) "Cable suspended roofs. New York. McGrawHill
- Kwan, A. K.H.** (1992) "Analysis of Buildings Using Strain-Based Element with Rotational DOF's." Journal of Structural Engineering, 118(5) p. 1191-1213 .
- Kwan, A.K.H.** (1991) "Analysis of Coupled Wall/Frame Structures by Frame Method with Shear Deformation Allowed.", Proc. Instn Civ, Engrs., 91, p. 273-297.
- Kwan, A.S.K.** (1998) "A new approach to geometrica non linearty of cable structures" Computers & Structures, Ed. Pergamon, N°67 p. 243-258
- Lazzari, Massimiliano et al.** (2000) "Non linear dinamic analysis of suspended structures subjected to wind actions." Computers & Structures N° 79 p. 963-969
- Leonard, J. W.** (1988) "Tension structures." McGraw-Hill, New York.

León, J., Casati, M. J. “Variables que determinan el comportamiento estructural de las bóvedas altas de la Catedral de León”. Primer Congreso Europeo sobre Catedrales Góticas, Diputación Foral de Alava, Vitoria.

Lewis W.J. (1982), “Investigation in to the structural characteristics of pretressed membrane.” PhD Thesis CNAA, Wolwerhampton Polytechnic

Lewis W.J. (1998) "Convertible Car Hoods-the problem of form-finding y relates aero.structures problems", Space Structures 5, ed. GAR Parke, P Disney.

Lewis W.J. (1987), “A comparative study of numerical methods for the soluton of pretensioned cable networks”. Proceedings of the international Conference on Design and Construction of Non-Conventional Structures. Edinburgh: Civil-Comp Press, Vol.2

Lewis W.J. y Rushton K.R. (1984) “Dynamic relaxation análisis of the non-linear static response of pretnsioned cable roofs.” Computers & Structures n°18(6) p. 989-997

Lewis W.J., Shan J. (1987) “Numerical Modelling of the non-linear static response of clad cable net structures.” Computers & Structures (35) p. 15-22

Loo, Y. (1995), “Collapse load analysis of masonry arch bridges”. Arch bridges. Thomas Telford, London, p. 167-174.

Loo, Y., Yang, Y. (1991), “Cracking y failure analysis of masonry arch bridges”, Journal of Structural Engineering ASCE, 117, (6), p. 1641--1659.

Lopez, Gema (2001) “Teoría de estructuras y restauración en el siglo XVIII” PO Ingeniería y territorio” Barcelona N°57 p.48-57

López, J., Oller, S., Oñate (1998) "Cálculo del comportamiento de la mampostería mediante elementos finitos." Monografía CIMNE n. 46, CIMNE, Barcelona.

Lourenço P. B. (1998) “Experimental y numerical issues in the modelling of the mechanical behaviour of masonry”. Structural analysis of historical constructions II, CIMNE, Barcelona.

Lourenço, P. B. (1997) “An anisotropic plasticity model for quasi-brittle composite shells”. Computational Plasticity: Fundamentals y Applications. Pinteridge Press, Londres.

Lourenço, P. B., Rots J. G. (1997b) “A multi-surface interface model for the analysis of masonry structures.” J. Engrg. Mech., ASCE, 123 (7), p. 660-668.

Lourenço, P. B., de Borst, R. y Rots J. G. (1997a) “A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials.” Int. J. Numer. Methods in Engrg., 40, p. 4033-4057.

Lourenço, P. B., Rots, J. G., Blaauwendraad, J. (1998) “Continuum model for masonry: Parameter Estimation y Validation.” J. Struct. Engrg., ASCE, 1(6), p. 642-652.

- Lourenço, P.B.** (1994) "Analysis of masonry structures with interface elements: Theory and applications." Delft University of Technology, Report no. 03-21-22-0-01, Delft,
- Macchi, G., Ruggeri, M., Eusebio, M., Moncecchi, M.** (1993) "Structural assessment of the leaning tower of Pisa". Structural Preservation of the Architectural Heritage, IABSE, Zürich.
- Mark, R.** (1982) "Experiments in Gothic Structure." The Massachusetts Institute of Technology Press, Massachusetts, USA, y Londres, UK.
- Maynou, Josep** (2002) "Estudi de la catedral de Mallorca per estàtica gràfica" ,UPC, Barcelona.
- Meli, R., Sánchez-Ramírez, A. R.** (1997) "Structural aspects of the rehabilitation of the Mexico City Cathedral". Structural analysis of historical constructions I, CIMNE, Barcelona.
- Mendoza, Javier** (2002) "Análisis estructural de los pórticos tipo de la Catedral de Girona" ,UPC, Barcelona
- Michalos, J., y Birnstiel, C.** (1960) "Movements of a cable due to change in loading." Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 86, No. ST12 p. 23–38.
- Mitsugi J.** (1994) "Static analysis of cable networks y their supporting structures" Computers & Structures (1) 47-56.
- Mola, F., Vitaliani, R.** (1997) "Analysis, diagnosis y preservation of ancient monuments: The St. Mark's Basilica in Venice". Structural analysis of historical constructions I, CIMNE, Barcelona.
- Molins, Climent y Roca, Pere.** (1998) "Capacity of masonry arches and spatial structures". Journal of Structural Engineering Division ASCE, 124, (6), pp. 653-663.
- Molins Climent** (1998) "Numerical simulation of the ultimate response of arch bridges" Structural analysis of historical construction II ,CIMNE Barcelona
- Molins Climent et al.** (1996) "Elementos para el análisis resistente de construcciones antiguas" PO Ingeniería y territorio, Barcelona, N° 38 p. 42-49
- Molins, C.** (1996), "Un modelo para el análisis del comportamiento resistente de construcciones de obra de fábrica." Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Molins, C., Roca P.** (1998) "Capacity of masonry arches y spatial frames" J. Struct. Engrg., ASCE, 1(6), p. 653-663.
- Molins, Climent** (1996) "Un model per l'anàlisi del comportament resistant de construccions de maconeria" ,UPC ,Barcelona

- Møllmann, H.** (1974) "Analysis of hanging roofs by means of the displacement method." PhD thesis, Technical University of Denmark,
- Montcrieff, E. Y Topping, B.H.V.** (1990) "Computer methods for the generation of membrane cutting patterns", *Computers & Structures*, Ed. Pergamon, 37, p.441-450.
- O'Brien, W. T., y Francis, A. J.** "Cable movements under two-dimensional loads." *Journal of the Structural Division, ASCE* Vol. 90, No. ST3 (June 1964), p. 89–123.
- O'Dwyer, D.** (1999) "Funicular analysis of masonry vaults", *Computers & Structures*, Ed. Pergamon, 73, p. 187-197.
- Oñate, E., Hanganu, A., Barbat, A., Oller, S., Vitaliani y R., Saetta, A.** (1995), "Structural analysis y durability assesment of historical constructions using a Finite Element Damage Model", *Structural Analysis of Historical Constructions*, CIMNE, Barcelona.
- Otter, J. R. H.** , (1965) "Computations for Prestressed Concrete Reactor Pressure Vessels Using Dynamic Relaxation." *Nucl. Struct. Engrg.*1, p. 61-75
- P.do Carmo, Manfredo** (1990) "Geometría diferencial de curvas y superficies" Ed. Alianza editorial, Madrid.
- Page, A.W.** (1978), "Finite Element Model for Masonry", *Journal of the Structural Division ASCE*, 104, (ST 8), p. 1267-1285.
- Page, J.** (1988) "Load tests on two arch bridges at Torksey y Shinafoot." Department of Transport, TRRL Research Report 159, Crowthorne, UK
- Page, J.** (Editor) (1993), "Masonry Arch Bridges. State of the Art Review." Transport Research Lab., HMSO Publications Centre, Londres.
- Palisoc, Athr L. y Huang, Yuli** (1996) "Design tool for inflaables space strucures." L'Garde, Inc. AIM-974, p. 2922-2930.
- Peregrino S.** (1993) "Structural computations with the singular value descoposition of the equilibrium matrix"; *International Journal of solids y structures* 30(21): p. 3025-35.
- Poleni, G.** (1743) "Stato dé diffetida considerarsi nella cupola di S. Pietro in Vaticano, rilevato da Giovanni Poleni nel maggio dell' anno 1743, e presentato alla Santità di nostro signiore pp. Beedetto XIV"
- Rafols, Jose F.** (1929) "Gaudi" Ed.Canosa, Barcelona
- Ralston, Anthony** (1986) "Introducción al análisis numerico" ed. Limusa, Mexico D.F.
- Roca, P. Molins, C.** (1998) "Seminario internacional sobre análisis estructural de construcciones históricas" OP, nº38, Barcelona .

- Roca, P, Pellegrini, L., Oñate, E., Hanganu, A.** (1998) "Analysis of Gothic constructions". Structural Analysis of Historical Constructions II. CIMNE, Barcelona.
- Roca, P. Molins, C.** (2000) "Análisis de construcciones de obra de fabrica mediante técnicas computacionales" CIMNE Barcelona .
- Roca, Pere** (2001) " Análisis estructural de catedrales góticas" PO Ingeniería y territorio. N° 56 p.38-47, Barcelona
- Roca, P. Et al.** (2002) "Consideraciones sobre la dimensión estructural de la obra de Antoni Gaudi" PO Ingeniería y territorio Barcelona N° 38 p. 50-63
- Roca, Pere** (2002) "Reflexiones a propósito del estudio de la iglesia de la Colonia Guell" PO Ingeniería y territorio. N°59 p. 58-64, Barcelona
- Roca, Pere et al.** (2005) "Anàlisi dels pínacles de façana anàlisi de la torre est de la catedral d barcelona". Informe.
- Rosso, Franco** (1977) "Alessandro Antonelli e la mole di torino" Ed. Stampari, Torino
- Rubió, J.** (1912) "Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca" Anuario de la Asociación de Arquitectos de Catalunya, Barcelona
- Saad Youdef** (2000) "Iterative Methods for sparse linear systems" Ed. Yousef Saad
- Saafan, S. A.** (1970) Theoretical analysis of suspension roofs. Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 96, No. ST2 , p. 393–404.
- Serra Isabel** (1996) "Estudio experimental del comportamiento de vigas de hormigón armado descimbradas a tempranas edades" , GEHO, Barcelona.
- Serrallonga i Gasch, Jaume** (2003) " Geometria i mecànica en els models de Gaudí" Tesis doctoral. UPC, Barcelona.
- Shan W. et al.** (1999) "Analysis of Frame-Cable Structures". Computers & Structures (47) p. 673-682
- Stefanou GD et al.** (1993) "Conjugate gradients method for calculating the response of large cable nets to static loads." Computers & Structures. 43 (5); p. 843-848.
- Sfuian FMA, Tempelman AB.** (1992) "On the non-linear analisis of pretensioned cable net strctures" 4(2) p. 147-58.
- Siev, A. y Eidelman, J.** (1964) "Stress analysis of prestressed suspended roofs" Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 90, No. ST4 pp. 103–121.
- Talvik I.**(2001) "Finite element modelling of cable networks with flexible supports" Computers & Structures n° 79 p. 2443-2450.

Tibert, Gunnar (1999) "Numerical Analyses of Cable Roof Structures" EKNISKAFÖR BYGGKONSTRUKTION TRITA-BKN. Bulletin 46, ISSN 1103-4270, ISRN KTH/BKN/EX--46--SE

Timoshenko, S.P. (1983) "History of Strength of Materials". Ed. NY, Dover.

Toslow, Tom (2002) "La evolución de la innovación estructural de Gaudi", PO Ingeniería y territorio, N°59 p. 48-57, Barcelona

Vanderplaats, Garret N. (1984) "Numerical optimization techniques for engineering design" ed. McGraw-hill, New York.

Vinlay O. y Rogers P. (1992) "Statical y dynamical response of cable nets". International Journal of Solids y Structures. 26(3): p. 299-312

Vinasithamby, Ragavan et al. (2001) "An algorithm for no linear stability analysis of an expandable self-erectig structure" Computers & Structutres Ed. Pergamon, n°79 p. 2587-2593

Winkler, E. (1879-80). "Zur theorie der Stützlinie im gewölbe." Deutche Bauzeitung, Vols 13 y 14 pp 117-119, 127-128, 130 (1879); p. 58-60 (1880). (en alemán).

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo 1.- INTRODUCCIÓN		Página
Figura 1.1.	Primer puente metálico de la Historia (1777-1779), obra de Abraham Darby. (http://www.virtual-shropshire.co.uk)	3
Figura 1.2.	Vista inferior del primer puente metálico de la Historia. (http://www.virtual-shropshire.co.uk)	4
Figura 1.3.	Esquema de Galileo del libro “Diálogos sobre dos nuevas ciencias” (Galilei, 1638)	5
Figura 1.4.	Reproducción del grabado original de la curva catenaria obtenida por Leibniz en 1691. (http://www.schillerinstitute.org/fid_97-01/011_catenary.html) .	7
Figura 1.5.	Maqueta antifunicular (polifunicula según Ràfols) utilizada por Gaudí (Ràfols, 1929) .	8
Capítulo 2.- ESTADO DEL CONOCIMIENTO SOBRE EL CÁLCULO DE MODELOS FUNICULARES		
Figura 2.1.	Catenaria inextensible	15
Figura 2.2.	Catenaria inelástica 3D sometida a la fuerza de la gravedad G .	16
Figura 2.3.	Elemento de cable suspendido por los nodos extremos .	18
Figura 2.4.	Comportamiento mecánico de una catenaria elástica e inelástica	18
Figura 2.5.	Catenaria elástica	19
Figura 2.6.	Comparativas realizadas por Karoumi (1998).	21
Figura 2.7.	Elemento de barra	22
Figura 2.8.	Variación del módulo equivalente con la tensión, tomado de Pao Hsii et al. (2001) .	24
Figura 2.9.	Comparativa entre el perfil de una catenaria (azul) y una parábola	26
Figura 2.10.	Paracaídas modelado por B. Zhou et al. Donde se aprecia el efecto del elemento deslizante. Zhou, Accorsi y Leonard,(2004)	28
Figura 2.11.	Detalle del elemento deslizante. (Zhou, Accorsi y Leonard, 2004) .	28
Figura 2.12.	Esquema del método simplificado de la red (Tibert, 1999) .	35

Capítulo 3.- DESCRIPCIÓN DEL MODELO PROPUESTO PARA EL ANÁLISIS DE REDES DE CABLES

	Página
Figura 3.1. Esquema de un sistema discreto de masas vinculadas entre sí.	38
Figura 3.2. Catenaria inextensible en un espacio 3D.	40
Figura 3.3. En un elemento inextensible a distancia $AB < \text{long cuerda } AB$	42
Figura 3.4. Catenaria inextensible.	42
Figura 3.5. Trazados de la catenaria en función de la fuerza aplicada en extremos de nudos .	43
Figura 3.6. Relación entre la distancia entre nudos y la fuerza horizontal aplicada.	43
Figura 3.7. Influencia de la variación de la longitud en la distribución del peso propio del elemento	45
Figura 3.8. Catenaria en el espacio 3D .	46
Figura 3.9. Comparativa de comportamiento entre elementos elásticos	48
Figura 3.10. Contornos para diferentes rigideces.	49
Figura 3.11. Comparativa entre la reacción horizontal obtenida con el elemento de cable convencional y el desarrollado en el presente trabajo.	49
Figura 3.12. Diferencia porcentual del valor de las reacciones .	50
Figura 3.13. Reducción de ecuaciones mediante el abatimiento del plano que contiene la catenaria .	51
Figura 3.14. Diagrama de flujo del algoritmo de inversión del sistema (3.3)	53
Figura 3.15. Diagrama de flujo del algoritmo para los valores iniciales del algoritmo de inversión anterior.	54
Figura 3.16. Elemento de catenaria	55
Figura 3.17. Resultado del cálculo	55
Figura 3.18. Evolución del residuo.	56
Figura 3.19. Convergencia del valor de la reacción horizontal	56
Figura 3.20. Elemento en la posición inicial. ejemplo 1.	65
Figura 3.21. Trazados según el grado de tensión [N]	65
Figura 3.22. Esquema ejemplo 2	67
Figura 3.23. Trazados resultantes en función del peso propio considerado.	67
Figura 3.24. Trazados resultantes en función del peso propio considerado.	68
Figura 3.25. Red de cuatro elementos conectados entre sí en el nudo o	69
Figura 3.26. Sistema de referencia en cada nudo de la red.	70

	Página
Figura 3.27. Evaluación de la matriz tangente del elemento i	72
Figura 3.28. Solución directa del sistema 3.71.	72
Figura 3.29. Proceso de relajación de las cargas ficticias.	74
Figura 3.30. Algoritmo incremental-iterativo de resolución del problema no lineal 3.71.	75

Capítulo 4.- VALIDACIÓN DEL ELEMENTO DE CABLE PROPUESTO

Figura 4.1. Esquema ejemplo 1, (Vanderplaats, 1984)	76
Figura 4.2. Configuración final en equilibrio	78
Figura 4.3. Evolución del residuo	78
Figura 4.4. Evolución del módulo del avance	78
Figura 4.5. Evolución del residuo empleando el elemento de barra	79
Figura 4.6. Evolución del avance empleando el elemento de barra	79
Figura 4.7. Evolución del residuo empleando el elemento de barra	80
Figura 4.8. Evolución del avance empleando el elemento de barra	80
Figura 4.9. Gráfica de convergencia función del elemento y matriz tangente empleada	80
Figura 4.10. Geometría inicial	82
Figura 4.11. Geometría final	82
Figura 4.12. Evolución del residuo	83
Figura 4.13. Evolución del avance	83
Figura 4.14. Configuración inicial, (Kwan, 1998)	84
Figura 4.15. Resultados obtenidos N.	85
Figura 4.16. Evolución de la convergencia	85
Figura 4.17. Geometría inicial	86
Figura 4.18. Geometría resultante	87
Figura 4.19. Configuración inicial	87
Figura 4.20. Geometría resultante	88
Figura 4.21. Esquema del ejemplo 6, cotas en [mm].	89

	Página
Figura 4.22. Tensiones obtenidas por Kwan (1998) y Lewis (1987). Tensión en [N].	90
Figura 4.23. Tensiones obtenidas, en rojo los elementos más traccionados. Tensión en [N].	91
Figura 4.24. Comparación de los desplazamientos [mm] obtenidos.	91
Figura 4.25. Evolución del residuo del avance.	92
Figura 4.26. Condiciones de contorno y geometría inicial. (1 indica movimiento coaccionado y 0 indica movimiento libre)	93
Figura 4.27. Malla deformada.	93
Figura 4.28. Vista lateral de la malla.	94
Figura 4.29. Vista frontal.	94
Figura 4.30. Malla sometida a peso propio y suspendida por sus extremos.	95
Figura 4.31. Mapa de tensiones del modelo formado aprovechando las simetrías del modelo inicial	95
Figura 4.32. Mapeado de tracciones acotado inferiormente	96
Figura 4.33. Reacciones en el modelo generado por simetría del inicial	96
Figura 4.34. Reacciones horizontales. Se observa su concentración en el punto de apoyo a.	97
Figura 4.35. Gráfica de convergencia.	97

Capítulo 5.- ESTADO DEL CONOCIMIENTO SOBRE EL CÁLCULO DE OBRA DE FÁBRICA

Figura 5.1. Polígonos funiculares empleados por Stevin en 1586 (Serrallonga, 2003)	100
Figura 5.2. Maqueta antifunicular de la Colonia Güell	101
Figura 5.3. Modelo computacional de la maqueta funicular mostrada en la figura 1.5.	102
Figura 5.4. Cubiertas del estadio olímpico de Munich, reproducida de (Tibert, 1999).	102
Figura 5.5. Modelo fotoelástico de la nave central de la Catedral de Mallorca (Mark, 1982)	103
Figura 5.6. Trazado de la línea de presiones (línea azul) y línea de inclinaciones (línea verde) en una estructura formada por sillares (Huerta, 1996).	106
Figura 5.7. Equivalencia entre la línea de presiones y el trazado de una curva catenaria.	107
Figura 5.8. Diferentes modelos funiculares adecuados a las estructuras que representan.	108
Figura 5.9. Esquema de la cúpula de San Pedro donde se muestran las grietas.	108

	Página
Figura 5.10. Análisis funicular de la cúpula de San Pedro de Roma. (Poleni, 1743).	109
Figura 5.11. Contorno ideal de una cúpula cargada arbitrariamente (O'Dwyer, 1999)	110
Figura 5.12. Criterio de deslizamiento entre dovelas	111
Figura 5.13. Coeficiente de seguridad geométrico obtenido como la relación entre el grosor del arco y el grosor del mínimo arco que inscribe una línea de presiones (O'Dwyer, 1999).	111 112
Figura 5.14. Modelo funicular realizado por O'Dwyer (1999).	113
Figura 5.15. Conjunto de líneas de presiones encontradas por Maynou en el análisis del pórtico central de la Catedral de Mallorca.	113
Figura 5.16. Aspectos del modelo de la Casa Botines representado en volumen	119
Figura 5.17. Tensiones normales producidas por un sismo, en rojo zonas con tracciones superiores a 1,0 MPa; en verde zonas comprimidas.	119

**APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE REDES FUNICULARES EN
Capítulo 6.- LA DETERMINACIÓN DE LA ESTABILIDAD DE
ESTRUCTURAS ESQUELÉTICAS DE OBRA DE FÁBRICA**

Figura 6.1. Arco descompuesto en dovelas.	120
Figura 6.2. Aplicación de las cargas de peso propio sobre el modelo funicular inicial	123
Figura 6.3. Resultado del cálculo	124
Figura 6.4. Trazado del modelo funicular en la segunda iteración	125
Figura 6.5. Trazados superpuestos	125
Figura 6.6. Discretización del arco en 8182 elementos finitos triangulares	126
Figura 6.7. Discretización del arco en 161 elementos finitos triangulares.	126
Figura 6.8. Configuración inicial	127
Figura 6.9. Diferentes posiciones obtenidas en cada iteración	128
Figura 6.10. Postulado de Winkler	132
Figura 6.11. Línea de presiones que excede el contorno resistente	133
Figura 6.12. Línea de presiones en el interior del paramento resistente	133
Figura 6.13. Tratamiento de las restricciones en contornos no ortogonales	136
Figura 6.14. Proceso de convergencia para tratar un problema con restricciones no ortogonales	137

	Página
Figura 6.15. Función de cambio de variable para transformar un problema con restricciones a otro sin restricciones	139
Figura 6.16. Gráfica a minimizar	140
Figura 6.17. Función de cambio de variable.	141
Figura 6.18. Función original transformada	141
Figura 6.19. Gráfica con las restricciones adoptadas	142
Figura 6.20. Función de cambio de variable	142
Figura 6.21. Función original transformada	143
Figura 6.22. Configuración inicial	144
Figura 6.23. Modelo funicular de partida	144
Figura 6.24. Modelo funicular resultante	145
Figura 6.25. Fuerza de compresión en el modelo funicular resultante	146
Figura 6.26. Convergencia obtenida	146
Figura 6.27. Configuración inicial	147
Figura 6.28. Modelo funicular de partida	148
Figura 6.29. Trazado obtenido	148
Figura 6.30. Convergencia obtenida	149
Figura 6.31. Fuerza de compresión en el modelo funicular resultante	149
Figura 6.32. Configuración inicial	150
Figura 6.33. Modelo funicular inicial	151
Figura 6.34. Modelo funicular final (líneas en color morado) modelo funicular inicial en azul.	152
Figura 6.35. Posición de los apoyos del modelo funicular optimizado respecto el inicial	153
Figura 6.36. Fuerza de compresión en el modelo funicular resultante	153
Figura 6.37. Convergencia obtenida	154

Capítulo 7.- EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Figura 7.1. Definición del problema	157
Figura 7.2. Modelo para obtener la distribución de presiones sobre el contorno del arco	157

	Página
Figura 7.3. Bulbo de tensiones obtenido	158
Figura 7.4. Distribución de tensiones considerada sobre la rosca	158
Figura 7.5. Discretización de la estructura	158
Figura 7.6. Ley de compresiones en la rosca (por metro de profundidad)	159
Figura 7.7. Vista de la Catedral de Mallorca	161
Figura 7.8. Fisura vertical en la base de un pilar	161
Figura 7.9. Pérdida de verticalidad de un pilar	161
Figura 7.10. Macizos situados en las claves de las bóvedas	162
Figura 7.11. Diversas formas de equilibrio obtenidas computacionalmente por Maynou (2002)	163
Figura 7.12. Resultado de Rubió (1912)	164
Figura 7.13. Modelo fotoelástico de Mark	165
Figura 7.14. Vista frontal del modelo	166
Figura 7.15. Vista lateral del modelo	166
Figura 7.16. Deformada ampliada x100.	166
Figura 7.17. Discretización de la estructura.	168
Figura 7.18. Modelo funicular adoptado inicialmente y variables consideradas en el problema de optimización	168
Figura 7.19. Resultados de las dos primeras iteraciones.	169
Figura 7.20. Esquema funicular resultante (valores x 10 kN)	170
Figura 7.21. Esfuerzos obtenidos en el modelo funicular (valores x 10 kN)	170
Figura 7.22. Separaciones mínimas en del modelo funicular con el paramento resistente (valores x 1000 mm)	170
Figura 7.23. Vista de la fachada principal de la Catedral de Barcelona.	172
Figura 7.24. Esquema de la torre de la aguja.	173
Figura 7.25. Diferentes piezas que componen la aguja	175
Figura 7.26. Modelo funicular de la aguja	175
Figura 7.27. Elementos de cable según sus propiedades materiales	175
Figura 7.28. Modelo geométrico del tambor	176
Figura 7.29. Modelo funicular del tambor	176
Figura 7.30. Elementos de cable según sus propiedades materiales	176

	Página
Figura 7.31. Modelo de la base	176
Figura 7.32. Modelo funicular	176
Figura 7.33. Elementos de cable según sus propiedades materiales	176
Figura 7.34. Condiciones de contorno en el modelo funicular global	177
Figura 7.35. Modelización geométrica de la estructura	177
Figura 7.36. Distribución de la carga de viento en la aguja	180
Figura 7.37. Distribución de la carga de viento en la base	180
Figura 7.38. Superficies contributivas donde se aplica la carga de viento	180
Figura 7.39. Esquema equivalente para simular la acción sísmica.	181
Figura 7.40. Evolución del residuo	182
Figura 7.41. Evolución módulo del avance	182
Figura 7.42. Modelo funicular resultante	183
Figura 7.43. Modelo funicular superpuesto a la geometría de la estructura. (valores x10 kN)	183
Figura 7.44. Modelo geométrico y funicular de la aguja.	184
Figura 7.45. Secciones	184
Figura 7.46. Sección 7	185
Figura 7.47. Vista lateral, en rojo la línea de presión.	185
Figura 7.48. Modelo funicular en el tambor	185
Figura 7.49. Modelo funicular al paso por los nervios de la cúpulas	186
Figura 7.50. Evolución del residuo	187
Figura 7.51. Evolución módulo del avance	187
Figura 7.52. Vista frontal del modelo fuicular	188
Figura 7.53. Perspectiva del modelo fuicular	188
Figura 7.54. Vista cenital del modelofunicular	188
Figura 7.55. Vista inferior del modelo funicular	188
Figura 7.56. Modelo funicular con bielas en los recuadros de la aguja	189
Figura 7.57. Modelo arriostrado resultante	189
Figura 7.58. Superposición de modelos funiculares	189

Figura 7.59. Evolución del residuo	190
Figura 7.60. Evolución módulo del avance	190
Figura 7.61. Resultado del cálculo sísmico	191
Figura 7.62. Modelo del pórtico central original	193
Figura 7.63. Modelo del pórtico central simplificado	193
Figura 7.64. Contorno resistente propuesto	194
Figura 7.65. Contorno del pórtico simplificado con las subdivisiones para discretizar su peso. Se aprecia también el contorno de la catenaria	194
Figura 7.66. Contorno invertido del pórtico principal (azul) y de la catenaria resultante sometida a carga d peso propio.	194
Figura 7.67. Línea d presiones resultante al aplicar una carga vertical puntual en el centro de la bóveda de 500KN	195
Figura 7.68. Línea de presiones resultante al aplicar una carga vertical puntual en el centro de la bóveda de 300KN	195
Figura 7.69. Modelo funicular resultante de la bóveda	196
Figura 7.70. Modelo funicular resultante de la bóveda	196
Figura 7.71. Comparativa de contornos, en verde el modelo funicular y en rosado el contorno real de las bóvedas.	197

Capítulo 8.- OTRAS APLICACIONES BASADAS EN EL ELEMENTO DE CABLE DESARROLLADO

Figura 8.1. Datos geométricos del arco a modelizar	199
Figura 8.2. Imagen tridimensional del arco	200
Figura 8.3. Modelo funicular constituido por celdas cuadradas	200
Figura 8.4. Resultado del cálculo. Fuerzas experimentadas por los cables.	201
Figura 8.5. Detalle de la zona cargada	201
Figura 8.6. Modelo funicular constituido por celdas triangulares	202
Figura 8.7. Resultado del segundo modelo funicular. Tacción en kN.	202
Figura 8.8. Representación fotorealística del modelo funicular. Puede apreciarse el diferente grado de tensión en el en diferentes zonas.	203
Figura 8.9. Configuración inicial	204
Figura 8.10. Configuración final	204
Figura 8.11. Esquema estructural de la cubierta del auditorio de Utica, U.S.A. (Tibert, 1999)	204

	Página
Figura 8.12. Ejemplo de estructura tensigrity.	205
Figura 8.13. Proceso de hinchado de un globo aerostático. Tracción en los cables en kN.	206
Figura 8.14. Forma que adopta una paracaídas a partir de un patronaje dado.	207
Figura 8.15. Tensiones en un paracaídas	207
Figura 8.16. Proceso de hinchado de un cilindro neumático.	207
Figura 8.17. Tela trapezoidal sometida a presión de viento	207
Figura 8.18. Reacciones y tensiones	207
Figura 8.19. Bastidor que soportará la superficie	208
Figura 8.20. Superficie mínima obtenida.	209
Figura 8.21. Vista de la superficie Nurb obtenida	209
Figura 8.22. Vista de la superficie minima obtenida	209
Figura 8.23. Vista de la superficie Nurb obtenida	209
Figura 8.24. Diferentes formas de una cubierta antifunicular en función de la configuración de la malla adobada.	210
Figura 8.25. Malla de partida	210
Figura 8.26. Malla deformada	210
Figura 8.27. Contorno rederizado. Vista 1	211
Figura 8.28. Contorno rederizado. Vista 2	211

ÍNDICE DE TABLAS

Capítulo 3.-	DESCRIPCIÓN DEL MODELO PROPUESTO PARA EL ANÁLISIS DE REDES DE CABLES	Página
Tabla 3.1.	Submatrices K_{22} según el grado de tesado.	66
Tabla 3.2.	Caso para $F=0.1$ evaluada con la aproximación mostrada en (3.65)	66
Tabla 3.3.	Comparativa de matrices tangentes en función del peso distribuido	68
Capítulo 4.- VALIDACIÓN DEL ELEMENTO DE CABLE PROPUESTO		
Tabla 4.1.	Resultados ejemplo 1	77
Tabla 4.2.	Resultados empleando elemento de barra convencional	79
Tabla 4.3.	Resultados usando la matriz tangente para el caso de pesos propio nulo	79
Tabla 4.4.	Comparativa de resultados, desplazamientos en [mm]	84
Tabla 4.5.	Comparativa de resultados. Desplazamientos en [mm]	87
Tabla 4.6.	Características geométricas y mecánicas. Ejemplo 4.6	88
Tabla 4.7.	Comparativa de resultados. Desplazamientos en metros. Ejemplo 4.6	88
Capítulo 6.- APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE REDES FUNICULARES EN LA DETERMINACIÓN DE LA ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS ESQUELÉTICAS DE OBRA DE FÁBRICA		
Tabla 6.1.	Discretización del arco mostrado en la figura 6.1	123
Tabla 6.2.	Aplicación de las cargas de las dovelas sobre cada tramo del modelo funicular	124
Tabla 6.3.	Nueva discretización de las cargas en el perfil obtenido en la primera iteración	124
Tabla 6.4.	Valores obtenidos para las diferentes iteraciones	128
Tabla 6.5.	Posición apoyos del modelo funicular inicial. Ejemplo 6.7.3	151
Tabla 6.6.	Posición final de los apoyos del modelo funicular. Ejemplo 6.7.3	152

Capítulo 7.-**EJEMPLOS DE APLICACIÓN**

	Página
Tabla 7.1. Datos de La estructura. Ejemplo 7.1	157
Tabla 7.2. Cargas últimas obtenidas por diversos autores, a partir de (Molins C.,1998). Ejemplo 7.2	159
Tabla 7.3. Cargas últimas obtenidas por diversos autores, a partir de (Molins C.,1998). Ejemplo 7.3	178
Tabla 7.4. Propiedades mecánicas de la obra de fábrica propuestas para el cálculo. Ejemplo 7.3	178
Tabla 7.5. Presión de viento. Ejemplo 7.3	179
Tabla 7.6. Comparativa de las reacciones obtenidas en el caso de cargas de peso propio. Ejemplo 7.4	195

