Actes de la XIII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2015) p. 47-53
DOI: 10.2436/10.2006.02.6

EL MÈTODE DE NEWTON-RAPHSON… I SIMPSON: UNA APLICACIÓ D'EINES DE PROGRAMACIÓ PER A ANALITZAR TEXTOS MATEMÀTICS HISTÒRICS

MÒNICA BLANCO
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *mètode de Newton-Raphson, Thomas Simpson, programari matemàtic, textos històrics matemàtics*

The methods of Newton, Raphson… and Simpson: an application of programming tools to analyse historical mathematical texts

Summary: *The Newton-Raphson method is a well-known numerical method for finding approximations to the real roots of a real-valued function. It is named after Isaac Newton (1643-1727) and Joseph Raphson (1668-1715), who, towards the end of the 17th century, elaborated their methods for finding the approximate roots of polynomial equations. However, from the original sources, it is clear that both methods differ not only from each other, but also from the algorithm used at present. The main differences concern the approach, the algorithmical power and the use of differential expressions. It was actually Thomas Simpson (1710-1761) who, in 1740, published the method in its current form. This contribution focuses on the design of a classroom activity concerning the historical development of the so-called Newton-Raphson method. It also explores the application of programming tools to analyse and compare the methods of Newton, Raphson and Simpson, using the original sources.*

Key words: *the Newton-Raphson method, Thomas Simpson, mathematical software, historical mathematical texts*

1. Introducció

El mètode de Newton-Raphson és un mètode numèric per a trobar, de forma aproximada, les arrels reals d'una funció d'una variable, $f(x)$, partint d'una estimació inicial, x_0:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

...

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Porta aquest nom en honor a Isaac Newton (1643-1727) i a Joseph Raphson (1668-1715), qui, a finals del segle XVII, elaboraren sengles mètodes per a trobar de manera aproximada les arrels reals d'equacions polinòmiques (Cajori, 1911; Goldstine, 1977: 64-68). Tanmateix, si consultem les fonts originals de seguida ens adonem que no tan sols els dos mètodes no són idèntics, sinó que també difereixen del mètode tal com el coneixem actualment. Les diferències rauen principalment en l'enfocament, la potència algorísmica i en la presència, o absència, d'expressions diferencials. De fet, fou Thomas Simpson (1710-1761) qui, el 1740, publicà el mètode en la seva forma actual (Kollerstrom, 1992).

L'objectiu principal d'aquesta contribució és presentar una activitat per a analitzar a l'aula el desenvolupament històric de l'anomenat mètode de Newton-Raphson a partir de les fonts originals. Aquesta activitat pretén explorar l'aplicació d'eines de programació informàtica per a analitzar i comparar els mètodes de Newton, Raphson i Simpson, amb el suport de programari matemàtic escaient, com, per exemple, algun *software* orientat a la resolució de problemes matemàtics. A partir de la implementació de rutines que executin els tres mètodes, es poden contrastar aspectes com el grau d'exactitud dels resultats obtinguts, la capacitat iterativa i l'àmbit d'aplicació del mètode emprat. D'altra banda, l'activitat proposada permet discutir i reflexionar sobre la relació entre àlgebra i càlcul, en un moment en què el càlcul encara no estava completament consolidat.

2. Descripció de l'activitat proposada

En principi, l'activitat proposada està dissenyada per a ser desenvolupada en el context de l'assignatura d'Història de les Matemàtiques del Grau de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), amb una durada aproximada de 3 hores. Però també es podria implementar en assignatures de l'àrea de matemàtiques, de nivell avançat, d'altres àmbits. L'activitat s'estructura en les parts següents:

a) *Lectura i anàlisi dels textos originals corresponents als tres mètodes.*
Els estudiants llegiran els textos originals corresponents als mètodes de Newton, Raphson i Simpson. Per a la seva posterior anàlisi, els estudiants es poden guiar per algunes de les preguntes proposades per Wardaugh (2010: 1-20): Què diu el text, i com ho diu? Quins conceptes matemàtics hi apareixen? Es pot traduir el text en termes moderns? Quines són les diferències principals entre la versió moderna i l'original? Quina notació s'utilitza?

b) *Implementació en Maple dels tres mètodes per a trobar de manera aproximada la solució real de l'equació* $y^3 - 2y - 5 = 0$.
En aquesta contribució s'ha utilitzat el programa Maple 18, desenvolupat i distribuït per Maplesoft. Es tracta d'un programa enfocat a la resolució de problemes matemàtics, amb el qual

es poden fer càlculs simbòlics, algebraics i computacionals. S'ha escollit aquest programa perquè es troba disponible a les aules informàtiques del centre de la UPC, on s'ha de desenvolupar part de l'activitat, però es podrien utilitzar altres eines de programació similars.

c) *Discussió i comparació dels tres mètodes.*
Prenent com a referència el treball de Kollerstrom (1992), es proposa als estudiants que, per a discutir i comparar els tres mètodes, tinguin en compte aspectes com la capacitat iterativa de cada mètode, l'àmbit d'aplicació, la presència (o absència) d'expressions diferencials o l'elecció del punt inicial.

d) *Valoració de l'activitat per part dels estudiants.*
Aquesta contribució se centra en la descripció i la discussió de les tres primeres parts.

2.1. *El mètode de Newton*

Un dels problemes matemàtics estudiats en el segle XVI fou la resolució d'equacions polinòmiques, tasca que presentava dificultats enormes quan es tractava d'equacions de grau 3 o superior. Per aquesta raó calia trobar procediments numèrics per a resoldre de manera aproximada les equacions polinòmiques de qualsevol grau. Així, a començaments del segle XVII François Viète (1540-1603) desenvolupà un mètode per a trobar una aproximació numèrica d'una arrel d'una equació polinòmica, mètode sobre el qual van continuar treballant Thomas Harriot (1560-1621) i, més endavant, William Oughtred (1574-1660) (Stedall, 2011: 29-31, 35-42, 153).

En la dècada de 1660, Newton proposà un mètode per a resoldre equacions numèricament, basat en la idea que l'expansió decimal era, essencialment, una sèrie de potències en potències decreixents de 10. Newton il·lustrà el seu mètode amb dos exemples a l'obra *De Analysi* (1669), no publicada fins al 1711 (Stedall, 2011: 153-157). Aquests exemples van ser publicats per primer cop per John Wallis (1616-1703) en el seu tractat d'àlgebra de 1685. En particular, Newton aplicà el seu mètode per a trobar la solució aproximada de l'equació $y^3 - 2y - 5 = 0$, exemple que també es troba a *The Method of Fluxions and Infinite Series* de Newton (1736: 6). Serà aquesta versió la que es treballarà a classe i que, de manera esquemàtica, es mostra a la Figura 1. D'aquesta manera, prenent $y = 2$ com a aproximació inicial i sense fer servir expressions fluxionals, Newton troba la solució aproximada $y = 2.09455148$, amb vuit decimals exactes. A continuació, seguint el text original, s'implementa en Maple una rutina que executi el mètode de Newton (Fig. 2). Tal com s'observa a la Figura 3, els resultats de l'algorisme coincideixen pas a pas amb l'algorisme de Newton. Tanmateix, el procediment no és exactament el mateix. Mentre que Newton a cada pas obté una nova equació, per a poder implementar el mètode en Maple de manera iterativa, al final de cada iteració s'ha de retornar a l'equació inicial.

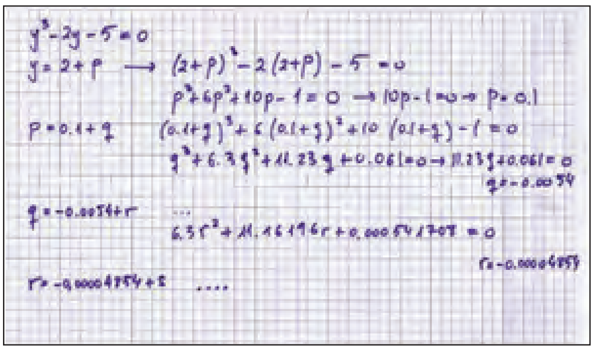

FIGURA 1. Transcripció del mètode de Newton.

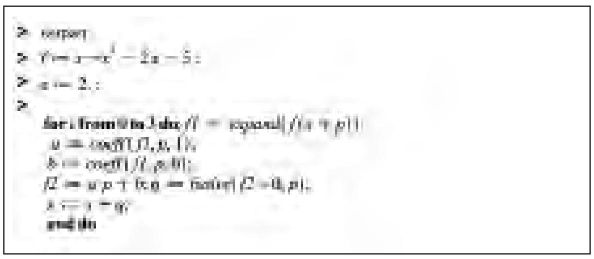
FIGURA 2. Rutina en Maple del mètode de Newton.

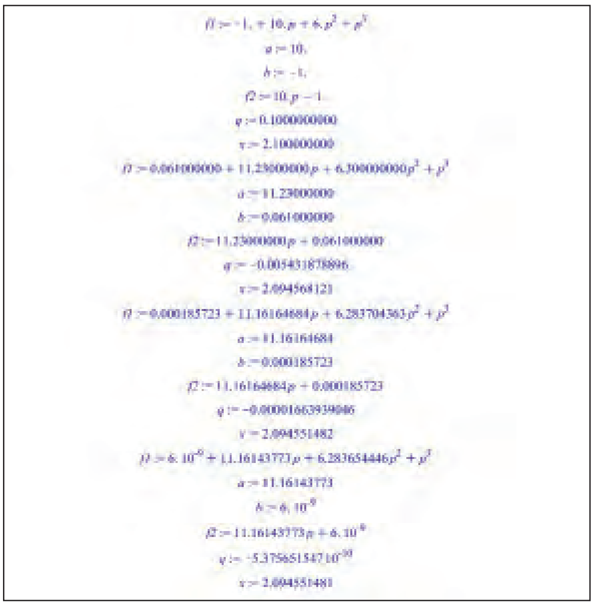

FIGURA 3. Sortida en Maple del mètode de Newton.

2.2. *El mètode de Raphson*

Raphson va publicar el seu mètode a l'*Analysis aequationum universalis* (1690) (Stedall, 2011: 157-159; Bicanic & Johnson, 1978). En aquesta obra, Raphson presentava la resolució numèrica de diversos tipus d'equacions. En particular, el Problema IX s'ocupa del tipus d'equació $aaa - ba = c$, que s'aplica al cas concret $aaa - 2a = 5$. La Figura 4 presenta de manera esquemàtica el procediment seguit per Raphson, també prenent 2 com a aproximació inicial. Resulta evident que el denominador de l'expressió x correspon a la derivada de l'equació, tot i que Raphson no parla explícitament d'expressions fluxionals (diferencials). Però, a diferència de Newton, al final de cada iteració Raphson torna a l'equació original, la qual cosa facilita la implementació de la rutina en Maple (Fig. 5).

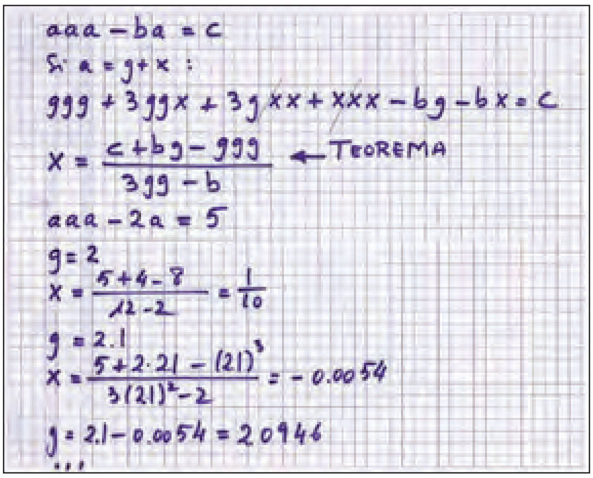

FIGURA 4. Transcripció del mètode de Raphson.

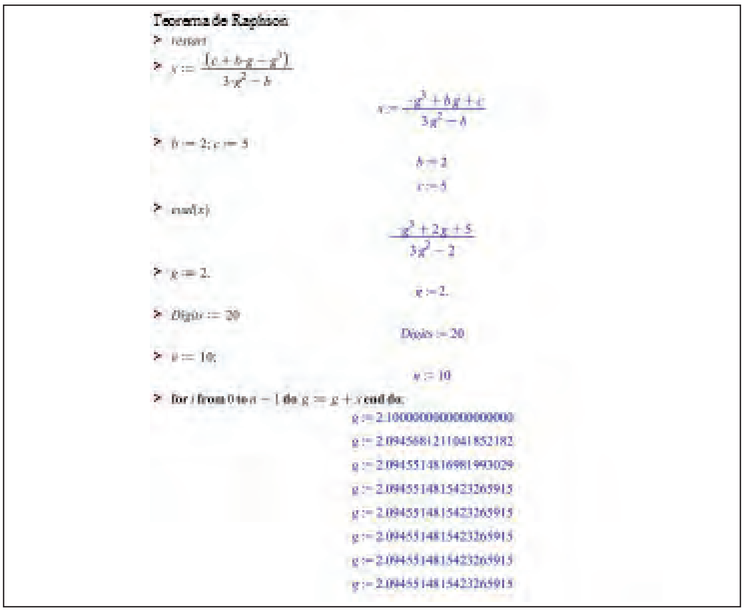

FIGURA 5. Rutina i sortida en Maple del mètode de Raphson.

2.3. *El mètode de Simpson*

El 1740 Simpson publicà el recull *Essays on several curious and useful subjects*, que conté, entre d'altres, un article sobre un nou mètode per a la solució numèrica d'equacions algebraiques. Simpson comença per donar un mètode general, on, de manera explícita, utilitza el mètode de fluxions (l'equivalent actual seria el càlcul diferencial) per a resoldre equacions algebraiques (Fig. 6). A continuació aplica el mètode general per a resoldre l'equació $300x - x^3 - 1000 = 0$. A més de la presència d'expressions fluxionals, del mètode de Simpson cal remarcar que comença discutint la selecció del punt inicial a partir del que ara anomenem mètode de bisecció. Més encara, Simpson també il·lustra el seu mètode amb exemples d'equacions no algebraiques. Per poder tenir la resolució de la mateixa equació emprant els tres mètodes, les Figures 7 i 8 reprodueixen com s'aplicaria el mètode de Simpson a l'equació $y^3 - 2y - 5 = 0$ i la seva implementació i execució en Maple, respectivament, molt similar ja a la forma actual del mètode de Newton-Raphson.

A new Method for the Solution of Equations in Numbers.

CASE I.

When only one Equation is given, and one Quantity (x) to be determined.

TAKE the Fluxion of the given Equation (be it what it will) ſuppoſing, *x*, the unknown, to be the variable Quantity; and having divided the whole by *ẋ*, let the Quotient be repreſented by A. Eſtimate the Value of *x* pretty near the Truth, ſubſtituting the ſame in the Equation, as alſo in the Value of A, and let the Error, or reſulting Number in the former, be divided by this numerical Value of A, and the Quotient be ſubtracted from the ſaid former Value of *x*; and from thence will ariſe a new Value of that Quantity much nearer to the Truth than the former, wherewith proceeding as before, another new Value may be had, and ſo another, &c. 'till we arrive to any Degree of Accuracy deſired.

FIGURA 6. Reproducció del «nou mètode» de Simpson (1740: 81), digitalitzat per Google Books.

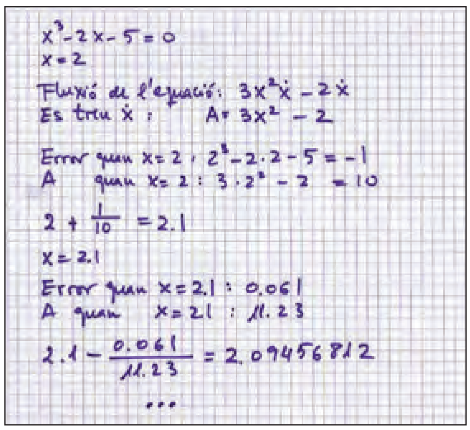

FIGURA 7. Transcripció del mètode de Simpson.

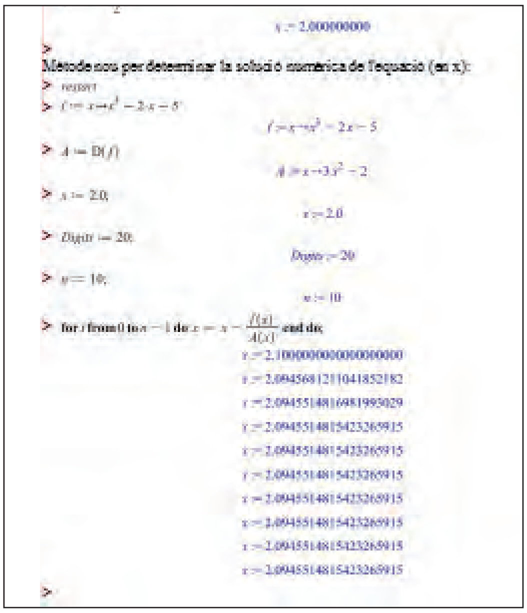

FIGURA 8. Rutina i sortida en Maple del mètode de Simpson.

3. Algunes reflexions finals

De la lectura dels tres mètodes estudiats es dedueix que el mètode de Newton és el que resulta més difícil d'implementar en Maple, a nivell iteratiu. De fet, paradoxalment el mètode de Simpson és el que s'apropa més a la forma actual del mètode de Newton-Raphson. D'una banda, és l'únic que utilitza explícitament expressions fluxionals (diferencials). D'altra banda, a diferència de Newton i Raphson, Simpson presenta un mètode general per a la resolució numèrica d'equacions, tant algebraiques com no algebraiques. A més, abans d'aplicar el seu mètode, Simpson comença amb una discussió sobre l'elecció de l'aproximació inicial. L'anàlisi i la discussió dels tres textos escollits pot ajudar a copsar el desenvolupament històric de l'anomenat mètode de Newton-Raphson. Però la discussió pot anar més enllà d'aquest mètode en concret, afavorint la reflexió sobre l'ús, i abús, de la reinterpretació matemàtica d'un resultat històric des del punt de vista matemàtic actual. Finalment, aquesta activitat pot aportar una nova perspectiva a l'anàlisi dels textos matemàtics estudiats, complementant-la amb les eines de programació emprades.

Agraïments

Vull donar les gràcies a la Dra. Marta Ginovart per haver-me ajudat a revisar la implementació i execució en Maple dels mètodes estudiats.

Referències bibliogràfiques

BICANIC, N.; JOHNSON, K. H. (1978), «Who was '-Raphson'?», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **14** (1), 148-152.

CAJORI, F. (1911), «Historical note on the Newton-Raphson method of approximation», *American Mathematical Monthly*, **18**, 29-32.

GOLDSTINE, H. H. (1977), *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, New York, Springer.

KOLLERSTROM, N. (1992). «Thomas Simpson and 'Newton's method of approximation': an enduring myth», *British Journal for the History of Science*, **25**, 347-354.

NEWTON, I. (1736), *The Method of Fluxions and Infinite Series…* [Traducció i notes de John Colson.] London, imprès per H. Woodfall.

RAPHSON, J. (1690), *Analysis Æquationum universalis seu ad æquationes algebraicas resolvendas methodus generalis et expedita, ex nova infinitarum serierum doctrina deducta, etc.*, London, imprès per A. Swall.

SIMPSON, T. (1740), *Essays on Several Curious and Useful Subjects, in Speculative and Mix'd Matematicks, etc.*, London, imprès per H. Woodfall.

STEDALL, J. (2011), *From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra*, Zurich, European Mathematical Society.

WARDAUGH, B. (2010), *How to Read Historical Mathematics*, Princeton and Oxford, Princeton University Press.