

УДК 664.521.11

Профессор В.А. Афанасьев, ассистент Е.Ю. Желтоухова,
аспирант Д.С. Кочанов

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра технологии жиров, процессов и аппаратов
химических и пищевых производств

тел. (473) 255-35-54

E-mail: reglan2@rambler.ru

Professor V.A. Afanas'ev, assistant E.Iu. Zheltoukhova,
graduate D.S. Kochanov

(Voronezh state university of engineering technology) Department of Technology of fats,
processes and devices for chemical and food industries

phone (473) 255-35-54

E-mail: reglan2@rambler.ru

Математическое моделирование процесса микронизации зерна

Mathematical model of grain micronization

Реферат. В процессе микронизации зерна влага испаряется, в основном, в периоде убывающей скорости сушки. Слой зерна, находящийся на поверхности транспортера микронизатора, будем рассматривать как горизонтальную пластину. Вследствие того, что в процессе микронизации с поверхности зерен испаряется незначительное количество влаги (в пределах 2-7 %) будем считать пластину постоянной толщины. Поскольку в процессе микронизации структура зерна претерпевает изменения, то для достижения точного решения уравнений необходимо учитывать изменения теплофизических, оптических и др. параметров. В уравнение теплопереноса необходимо добавить слагаемое, отвечающее за инфракрасный нагрев. Ввиду малой толщины зерна, пренебрегаем процессами, происходящими на краю зерна, то есть фактически рассматриваем задачу для бесконечной пластины. Для проверки адекватности математической модели процесса микронизации зерна пшеницы необходимо сопоставим функции влагосодержания от времени, полученные из решения системы уравнений, с измеренными экспериментальными данными опыта. Численное решение системы уравнений для периода убывающей скорости сушки осуществим с помощью математического пакета Maple 14, подставляя значения констант в систему. Расчет средней относительной ошибки не превышает 7-10 % и показывает хорошее соответствие расчетных данных с экспериментальными значениями.

Summary. During micronisation grain moisture evaporates mainly in decreasing drying rate period. Grain layer located on the surface of the conveyor micronisers will be regarded as horizontal plate. Due to the fact that the micronisation process the surface of the grain evaporates little moisture (within 2-7 %) is assumed constant plate thickness. Because in the process of micronization grain structure is changing, in order to achieve an exact solution of the equations necessary to take into account changes thermophysical, optical and others. Equation of heat transfer is necessary to add a term that is responsible for the infrared heating. Because of the small thickness of the grain, neglecting the processes occurring at the edge of the grain, that is actually consider the problem of an infinite plate. To check the adequacy of the mathematical model of the process of micronisation of wheat grain moisture content must be comparable to the function of time, obtained by solving the system of equations with the measured experimental data of experience. Numerical solution of a system of equations for the period of decreasing drying rate is feasible with the help of the Maple 14, substituting the values of the constants in the system. Calculation of the average relative error does not exceed 7-10 %, and shows a good agreement between the calculated data and the experimental values.

Ключевые слова: математическая модель, микронизация зерна, пшеница, период убывающей скорости сушки

Keywords: mathematical model, micronization grain, wheat, decreasing drying rate period

В процессе микронизации зерна влага испаряется, в основном, в периоде убывающей скорости сушки [1].

Слой зерна, находящийся на поверхности транспортера микронизатора, будем рассматривать как горизонтальную пластину толщиной $2R$. Вследствие того, что в процессе микронизации с поверхности зерен испаряется незначительное количество влаги

(в пределах 2-7 %) будем считать пластину постоянной толщины.

Начало системы пространственных координат поместим в произвольную точку (рисунок 1). Слой зерна, который рассматриваем как горизонтальную пластину толщиной $2R$, движется горизонтально, а падающий на него лучистый поток примем за перпендикулярный.

© Афанасьев В.А., Желтоухова Е.Ю., Кочанов Д.С., 2014

Ось координаты z направим параллельно потоку инфракрасных лучей, а координатную плоскость (y, x) расположим перпендикулярно оси z и параллельно поверхности зерна (как мы увидим ниже, координаты y и x не участвуют в уравнениях, описывающих процесс сушки).

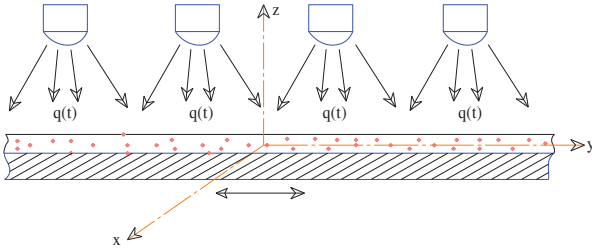


Рисунок 1. Расчетная схема процесса микронизации зерна

Изменение температуры T и влагосодержания U в процессе сушки описывается системой дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = b \nabla U + b \delta \nabla T + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla T + \frac{\varepsilon r}{c} \frac{\partial U}{\partial \tau}. \end{cases} \quad (1)$$

где $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа,

a – коэффициент температуропроводности продукта, m^2/c , b – коэффициент массопереноса (диффузии), m^2/c , δ – термоградиентный коэффициент, ε – коэффициент фазового превращения, r – удельная теплота испарения воды, kJ/kg ; c – удельная массовая теплоемкость вещества, $kJ/(kg \cdot K)$.

Поскольку в процессе микронизации структура зерна претерпевает изменения, то для достижения точного решения уравнений необходимо учитывать изменения теплофизических, оптических и др. (плотности, температуропроводности, теплоемкости) параметров. Значения коэффициента температуропроводности a , коэффициента теплопроводности λ и массовой удельной теплоемкости c учтем при различных значениях температуры и влажности зерна. Коэффициенты поглощения, отражения и пропускания лучистого потока будем считать постоянными.

В связи с доминирующим перемещением влаги вдоль оси z , высоким градиентом влагосодержания, незначительным внутренним влагопереносом по координатам y, x и последующим испарением, температура и влагосодер-

жание не зависят от координат y, x : следовательно, уравнения (1) принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = b \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b \delta \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon r}{c} \frac{\partial U}{\partial \tau}. \end{cases} \quad (2)$$

В уравнение теплопереноса необходимо добавить слагаемое, отвечающее за инфракрасный нагрев. Пусть мощность падающего на вещество лучистого потока равна $q(\tau)$. Тогда мощность поглощенного потока в точке вещества с координатой x равна:

$$\tilde{q}(\tau) \exp(k(R-z)),$$

где k – коэффициент инстинкции (коэффициент ослабления луча); A – коэффициент поглощения.

Ввиду малой толщины зерна ослабление луча в толще продукта можно считать линейным по координате z .

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon r}{c} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{c \rho} A q. \quad (3)$$

При точном решении уравнений необходимо учитывать зависимость коэффициентов от времени. С учетом этой зависимости система уравнений может быть записана так:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, \tau) = b(\tau) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(z, \tau) + b(\tau) \delta(\tau) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, \tau) + \\ + \varepsilon(z, \tau) \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, \tau) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau}(z, \tau) = a(\tau) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, \tau) + \frac{\varepsilon(z, \tau) r}{c(\tau)} \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, \tau) + \\ + \frac{\rho_w + \rho_s U(z, \tau)}{c(\tau) \rho_s \rho_w (U(z, \tau) + 1)} A q(\tau) \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение (5) можно переписать в эквивалентном виде (учитывая, что $\varepsilon(z, \tau) \neq 1$, равенство означало бы, что влага испаряется с поверхности пластины):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, \tau) &= \frac{b(\tau)}{1 - \varepsilon(z, \tau)} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(z, \tau) + \\ &+ \frac{b(\tau) \delta(\tau)}{1 - \varepsilon(z, \tau)} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

В начальный момент процесса микронизации ($\tau = 0$) температура и влагосодержание постоянны:

$$T(z, 0) \equiv T_0, \quad U(z, 0) \equiv U_0. \quad (7)$$

Ввиду малой толщины зерна, пренебрегаем процессами, происходящими на краю зерна,

поэтому граничные условия будем записывать лишь для $z = \pm R$, то есть фактически рассматриваем задачу для бесконечной пластины.

Пренебрегая бародиффузией и теплопроводностью (поскольку их вклад становится заметным лишь при температурах порядка 100 °С, запишем граничное условие для уравнения массопереноса в виде условия третьего рода на поток влаги, испаряющейся через поверхность пластины:

$$-\lambda_m(R, \tau) \frac{\partial U}{\partial z}(R, \tau) = \beta(R, \tau) \cdot \frac{\rho_s \rho_w (U(R, \tau) + 1)}{\rho_w + \rho_s U(R, \tau)} (U(R, \tau) - U_{cp}), \quad (8)$$

где λ_m – коэффициент массопроводности, β – коэффициент массоотдачи, U_{cp} – влагосодержание окружающей среды.

В периоде убывающей скорости сушки коэффициент температуропроводности a меняется незначительно, поэтому в этом периоде значение коэффициента температуропроводности постоянно, т. е. $a \approx a = 15,57 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{с}$. Аналогично, теплоемкость примем равной $c \approx c_1 = 2107,52 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$.

Уравнение теплопереноса (8) содержит слагаемое $\frac{\rho_w + \rho_s U(z, \tau)}{c(\tau) \rho_s \rho_w (U(z, \tau) + 1)} Aq(\tau)$, которое необходимо разложить по степеням z :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_w + \rho_s U(z, \tau)}{c(\tau) \rho_s \rho_w (U(z, \tau) + 1)} Aq(\tau) = \\ & = \frac{Aq(\rho_w + \rho_s (u_0(\tau) + u_2(\tau) z^2))}{\rho_s \rho_w c(\tau) (u_0(\tau) + u_2(\tau) z^2 + 1)} = \\ & = \frac{Aq}{\rho_s \rho_w c(\tau)} \left(\frac{\rho_w + \rho_s u_0(\tau)}{1 + u_0(\tau)} + \frac{\rho_s - \rho_w}{(1 + u_0(\tau))^2} u_2(\tau) z^2 \right) \end{aligned}$$

(мы учли, что $q(\tau) \equiv q = \text{const}$).

После упрощения правой части и отбрасывания слагаемых порядка выше 2, по z уравнение приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{t}_0(\tau) + \dot{t}_2(\tau) z^2 = 2a_1 t_2(\tau) + \frac{Aq(\rho_w + \rho_s u_0(\tau))}{\rho_s \rho_w c_1 (1 + u_0(\tau))} + \\ + 2 \frac{Aa_1 q}{\rho_s \rho_w c_1} \left(\frac{6 \frac{\rho_w + \rho_s u_0(\tau)}{1 + u_0(\tau)} t_4(\tau) +}{+ \frac{\rho_s - \rho_w}{(1 + u_0(\tau))^2} u_2(\tau) t_2(\tau)} \right) z^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z :

$$\begin{cases} \dot{t}_0(\tau) = 2a_1 t_2(\tau) + \frac{Aq(\rho_w + \rho_s u_0(\tau))}{\rho_s \rho_w c_1 (1 + u_0(\tau))} \\ \dot{t}_2(\tau) = 2 \frac{Aa_1 q}{\rho_s \rho_w c_1} \left(\frac{6 \frac{\rho_w + \rho_s u_0(\tau)}{1 + u_0(\tau)} t_4(\tau) +}{+ \frac{\rho_s - \rho_w}{(1 + u_0(\tau))^2} u_2(\tau) t_2(\tau)} \right) \end{cases} \quad (10)$$

Изменения коэффициента теплопроводности λ примем равным приблизительно $\lambda \approx \lambda_1 = 0,294 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$.

В силу симметрии задачи по z (пластина однородна и симметрична, воздействие постоянно по z , то есть тоже симметрично) функции $U(z, \tau)$ и $T(z, \tau)$ четны по z : это означает, что ряды будут содержать только слагаемые с четными степенями z . Подставив эти выражения в систему уравнений и начально-краевых условий, затем отбросим слагаемые степени выше 2 как пренебрежимо малые, то есть функции U и R будем приближенно искать в виде.

Уравнение массопереноса с учетом допущения $\varepsilon(z, \tau) = 0$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_0(\tau) + \dot{u}_2(\tau) z^2 = 2b(\tau)(u_2(\tau) + 6u_4(\tau) z^2) + \\ + 2b(\tau) \delta(\tau) (t_2(\tau) + 6t_4(\tau) z^2) \end{aligned}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях z дает систему:

$$\begin{cases} \dot{u}_0(\tau) = 2b(\tau)u_2(\tau) + 2b(\tau)\delta(\tau)t_2(\tau), \\ \dot{u}_2(\tau) = 12b(\tau)u_4(\tau) + 12b(\tau)\delta(\tau)t_4(\tau). \end{cases} \quad (11)$$

Значения коэффициента массопереноса (диффузии) b и термоградиентного коэффициента δ будем считать постоянными.

Выпишем значения констант, участвующих в системе уравнений тепло- и массопереноса. Мощность теплового потока примем равной $q = 35 \text{ кВт} / \text{м}^2$. Коэффициент поглощения для зерна пшеницы в соответствии с экспериментальными данными примем равным $A \approx 0,75$. Значение плотности влаги примем равным плотности воды: $\rho_w = 1000 \text{ кг} / \text{м}^3$. Зная плотность продукта при исходной влажности 17 % и при влажности 8,9 %, найдем плотность абсолютно сухого вещества $\rho_s = 905 \text{ кг} / \text{м}^3$. Коэффициент диффузии b примем равным $b = 2,71 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{с}$. Как показывают эксперимент, термоградиентный коэффициент δ в периоде убывающей скорости сушки весьма

мал при вышеуказанных значениях влагосодержания, поэтому им пренебрегаем.

Значения температуры T_{cp} и влагосодержания U_{cp} постоянны. Значение $T_{cp} = 95$ °С для процесса микронизации пшеницы.

Подставляя в уравнения (1), (2) и в граничные условия известные значения констант, задача сводится к построению функции влагосодержания. Поскольку температура, в силу нагрева, выравнивается практически по всей

толще продукта, слагаемое, содержащее $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$,

из уравнения массопереноса пропадает, и это уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(z, \tau) = b(\tau) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(z, \tau) + \varepsilon(z, \tau) \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, \tau) \quad (12)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(z, \tau) = \frac{b(\tau)}{1 - \varepsilon(z, \tau)} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(z, \tau). \quad (13)$$

Коэффициент $b(\tau)$ будем считать постоянным и равным $b = 2,71 \cdot 10^{-12}$ м²/с; величину $\varepsilon(z, \tau)$ положим равной 0,3. Коэффициент

$$\frac{b(\tau)}{1 - \varepsilon(z, \tau)} = 3,87 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с} \text{ обозначим } B.$$

Начальное условие приобретает вид

$$U(z, \tau_0) = C_0 + C_2 x^2, \quad (14)$$

где константы C_0, C_2 могут быть найдены из среднего значения $\bar{U}(\tau_0)$, определенного экспериментально, и из граничного условия. Принимая $\bar{U}(\tau_0) = 0,5$ (примерное значение влагосодержания в момент, когда температура продукта постоянна), получаем соотношение

$$C_0 R + \frac{1}{3} C_2 R^3 = 0,5.$$

Граничное условие в данном случае имеет вид

$$\lambda_m(R, \tau) \frac{\partial U}{\partial z}(R, \tau) = \beta(R, \tau) \frac{\rho_s \rho_w (U(R, \tau) + 1)}{\rho_w + \rho_s U(R, \tau)} \cdot (U(R, \tau) - U_{cp}) \quad (15)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial z}(R, \tau) = \frac{\beta(R, \tau)}{\lambda_m(R, \tau)} \frac{\rho_s \rho_w (U(R, \tau) + 1)}{\rho_w + \rho_s U(R, \tau)} \cdot (U(R, \tau) - U_{cp}). \quad (16)$$

Для коэффициентов массопроводности $\lambda_m(R, \tau)$ и массоотдачи $\beta(R, \tau)$ возьмем постоянные значения:

$$\lambda_m(R, \tau) = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с}),$$

$$\beta(R, \tau) = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}/\text{с} [51].$$

При сделанных допущениях граничное условие приобретает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(R, \tau) = KU(R, \tau), \quad (17)$$

где $K = \frac{\beta \rho_w}{\lambda_m} \approx 0,12 \text{ м}^{-1}$.

Запишем задачу массопереноса при сделанных допущениях:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, \tau) = B \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(z, \tau), \\ U(z, \tau_0) = C_0 + C_2 z^2, \\ \frac{\partial U}{\partial z}(R, \tau) = KU(R, \tau). \end{cases} \quad (18)$$

Система уравнений (18) представляет собой начально-краевую задачу третьего рода для уравнения теплопроводности, решение которой хорошо известно. Воспользуемся частным случаем этого решения при $Bi \sim 1$ или $Bi \gg 1$.

$$U(z, \tau) = D_1 \exp(-B\mu^2 \tau) \cos \mu x + D_0,$$

где D_1, μ, D_0 – константы, которые могут быть определены из начального и граничного условия.

Для проверки адекватности математической модели процесса микронизации зерна пшеницы сопоставим теперь функции влагосодержания от времени, полученные из решения системы уравнений, с измеренными экспериментальными данными опыта.

Численное решение системы уравнений для периода убывающей скорости сушки осуществим с помощью математического пакета Maple 14, подставляя значения констант в систему (18). Сравнение результатов расчета с экспериментальными значениями приведено на рисунке 2.

Отразим данные в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Расчетные и экспериментальные значения влагосодержания пшеницы

| Время, с | U^c (расчет), % | U^c (эксперим.), % | Абсолютная разница, % | Относит. погрешность, % |
|----------|-------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|
| 0 | 14,9 | 14,0 | + 0,9 | 6,42 |
| 15 | 13,5 | 13,5 | 0 | 0 |
| 30 | 12,2 | 12,2 | 0 | 0 |
| 45 | 10,8 | 11,3 | - 0,5 | 4,42 |
| 60 | 8,1 | 9,0 | - 0,9 | 10,0 |
| 75 | 6,0 | 7,0 | - 1,0 | 14,28 |
| 90 | 4,3 | 4,9 | - 0,6 | 12,24 |

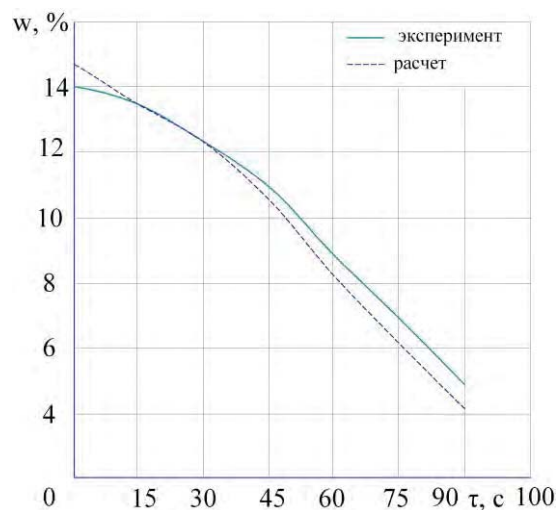


Рисунок 2. Сравнение расчетных и экспериментальных данных изменения влагосодержания пшеницы от времени

Расчет средней относительной ошибки не превышает 7–10 % и показывает хорошее соответствие расчетных данных с экспериментальными значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1 Остриков А.Н., Желтоухова Е.Ю. Производство фруктовых и овощных чипсов с использованием комбинированной радиационно-конвективной сушки: монография. Воронеж: ВГУИТ, 2014. 375 с.

REFERENCES

1 Ostrikov A.N., Zeltoukhova E.Iu. Proizvodstvo fruktovykh i ovoshchnykh chipsov s ispol'zovaniem kombinirovannoi, radiatsionno-konvaktivnoi sushki [Manufacture of fruit and vegetable chips with combined radiation-convection drying]. Voronezh: VGUIT, 2014. 375 p. (In Russ.).