УДК 539.3;534.1

Научный сотрудник В.С. Поленов,
старший научный сотрудник Л.А. Кукарских,
(Воронеж, Военный учебно-научный центр Военно-воздушный сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина») 4 НИО НИЦ (БП и О ВВС).
тел. (473) 244-77-16
E-mail: kukarskih.liubov@yandex.ru
доцент А.Н. Скляров
(Воронеж, Военный учебно-научный центр Военно-воздушный сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина») кафедра ИАО.
тел. (473) 244-77-44
E-mail: alex_skl@rambler.ru

Scientific associate V.S. Polenov,
senior staff scientist L.A. Kukarskikh,
(Voronezh, Military Educational Research Centre of Air Force «Air Force Academy after professor N.E. Zhukovskii and Iu.A. Gagarin») 4 RD dep. res. cent. (battle application and security VVC).
phone (473) 244-77-16
E-mail: kukarskih.liubov@yandex.ru
associate Professor A.N. Skliarov
(Voronezh, Military Educational Research Centre of Air Force «Air Force Academy after professor N.E. Zhukovskii and Iu.A. Gagarin») Department of aerod.-engin. supply.
phone (473) 244-77-44
E-mail: alex_skl@rambler.ru

К распространению звуковых волн в двухкомпонентной наследственно-упругой среде

Acoustic waves emission in the two-component hereditary-elastic medium

Реферат. Вопросам динамики двухкомпонентных сред посвящен ряд работ, в которых рассматриваются упругие волны в однородной, насыщенной жидкостью неограниченной пористой среде. В других работах решаются вопросы диссипативных процессов при гармоническом деформировании наследственно-упругой среды. В данной работе исследуются диссипативные процессы при гармоническом деформировании насыщенной несжимаемой жидкостью вязкоупругой пористой среды, наследственные свойства которой описываются ядром релаксации дробно экспоненциальной функции Ю.Н. Работнова интегро-дифференциальных соотношений Больцмана-Вольтерра. Получены формулы для определения скорости распространения волн, коэффициента поглощения, тангенса угла механических потерь и декремента затухания в зависимости от параметра дробности γ. Построены графики зависимостей от логарифма частоты и температуры при заданном параметре дробности. Представлены зависимости скорости, коэффициента затухания и тангенса угла сдвига фаз от логарифма температуры, а также зависимость коэффициента затухания от логарифма частоты. Зависимости скорости и тангенса угла сдвига фаз от частоты идентичны зависимостям от логарифма температуры.

Summary. On the dynamics of two-component media a number of papers, which address the elastic waves in a homogeneous, unbounded fluid-saturated porous medium. In other studies address issues of dissipative processes in harmonic deformation hereditary elastic medium. In the article the dissipative processes of the viscoelastic porous medium, which hereditary properties are described by the core relaxation fractional exponential function U.N. Rabotnova integro-differential Boltzmann-Volterr ratio, harmonic deformation by the straining saturated incompressible liquid are investigated. Speed of wave propagation, absorption coefficient, mechanical loss tangent, logarithmic decrement, depending on fractional parameter γ, determining formulas received. The frequency logarithm and temperature graph dependences with the goal fractional parameter are constructed. Shows the dependences velocity and attenuation coefficient of the tangent of the phase angle of the logarithm of the temperature, and the dependence of the attenuation coefficient of the logarithm of the frequency. Dependencies the speed and the tangent of the phase angle of the frequency identical function of the logarithm of temperature.

Ключевые слова: звуковые волны, среда, ядро релаксации.

Keywords: sonic wares, medium, relaxation kernel

Вопросам динамики двухкомпонентных сред посвящены работы [1-7], в которых рассматриваются упругие волны в однородной, насыщенной жидкостью неограниченной пористой среде. В [8, 9] решаются вопросы диссипативных процессов при гармоническом деформировании наследственно-упругой среды.

Для одномерного случая систему уравнений движения двухкомпонентной наследственно-упругой среды запишем в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned} \mu u^{(1)}_{,xx} + A_1 u^{(2)}_{,xx} &= \rho_{11}\ddot{u}^{(1)} + \rho_{12}\ddot{u}^{(2)} \\ A_1 u^{(1)}_{,xx} + A_2 u^{(2)}_{,xx} &= \rho_{12}\ddot{u}^{(1)} + \rho_{22}\ddot{u}^{(2)} \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь μ – модуль сдвига; A_1, A_2 – коэффициенты, зависящие от пористости среды и модуля сжимаемости жидкости; ρ_{12} –коэффициент динамической связи скелета и жидкости [1] (ρ_{12}>0); $\rho_{11}=\rho_1/a_1$ и $\rho_{22}=\rho_2/a_2$ – истинные плотности наследственно-упругой компоненты и жидкости в порах; ρ_1, ρ_2 – массы компонент в единице объема среды; a_1, a_2 – величины, характеризующие доли объема смеси, занимаемые каждой компонентой ($a_1+a_2=1$, $a_1>0$, $a_2>0$).

Индексы, стоящие вверху в круглых скобках относятся соответственно: 1 – к наследственно-упругой компоненте, 2 – к жидкости. Точка над буквой означает производную по времени, а индекс внизу, стоящий после запятой, указывает дифференцирование по координате *x*.

Систему (1) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{H}u^{(1)}_{,xx} + \sigma_{12}u^{(2)}_{,xx} = \frac{1}{G^2}\left(\gamma_{11}\ddot{u}^{(1)} + \gamma_{12}\ddot{u}^{(2)}\right) \\ &\sigma_{12}u^{(1)}_{,xx} + \sigma_{22}u^{(2)}_{,xx} = \frac{1}{G^2}\left(\gamma_{12}\ddot{u}^{(1)} + \gamma_{22}\ddot{u}^{(2)}\right) \\ &\sigma_{12} = \frac{A_1}{H},\ \sigma_{22} = \frac{A_2}{H},\ \gamma_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho},\ \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho},\ \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho} \\ &H = \mu + 2A_1 + A_2,\quad \rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22},\quad G^2 = \frac{H}{\rho} \end{aligned} \qquad (2)$$

Решение системы (2) ищем в виде:

$$u^{(\delta)} = \tilde{N}^{(\delta)}\exp(i\omega t - \theta x),\ \theta = a + i\frac{\omega}{c}, \delta = 1{,}2, \qquad (3)$$

где *a* – коэффициент затухания волн; ω – круговая частота; c – скорость волны.

Подставим (3) в (2), после преобразований, получим:

$$\begin{aligned} &\left(\gamma_{11}\omega^2 + \frac{\bar{\mu}}{H}G^2\theta^2\right)C^{(1)} + \left(\gamma_{12}\omega^2 + \sigma_{12}G^2\theta^2\right)C^{(2)} = 0 \\ &\left(\gamma_{12}\omega^2 + \sigma_{12}G^2\theta^2\right)C^{(1)} + \left(\gamma_{22}\omega^2 + \sigma_{22}G^2\theta^2\right)C^{(2)} = 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\bar{\mu}$ – упругий оператор.

Для того чтобы однородная система имела нетривиальное решение, ее определитель, составленный из коэффициентов при $C^{(\delta)}$ $(\delta = 1{,}2)$, должен быть равен нулю.

Раскрывая определитель, будем иметь:

$$\begin{aligned} &\left(\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}^2\right)\omega^{(4)} + (\gamma_{11}\sigma_{22} + \gamma_{22}\frac{\bar{\mu}}{Í} - \\ &- 2\gamma_{12}\sigma_{12})G^{(2)}\omega^2\left(a + i\beta\right)^{(2)} + \\ &+ \left(\frac{\bar{\mu}}{H}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2\right)G^4\left(a + i\beta\right)^4 = 0, \quad \beta = \frac{\omega}{ñ} \end{aligned} \qquad (5)$$

Выразим упругий оператор $\bar{\mu}$ через ядро релаксации – дробно-экспоненциальную функцию Ю.Н. Работнова, имеющую в пространстве Фурье вид [11]:

$$\bar{\mu} = \mu_\infty - \frac{\Delta\mu}{1 + \left(i\omega\tau_\mu\right)^\gamma}, \qquad (6)$$

где τ_μ – время релаксации; $\Delta\mu = \mu_\infty - \mu_0$, μ_∞, μ_0 – нерелаксированное и релаксированное значения модуля; γ – структурно-чувствительный параметр (параметр дробности), $0 \le \gamma \le 1$. При γ=1 наследственные свойства сдвиговой деформации описываются моделью стандартного линейного тела.

Преобразуем (6) к виду:

$$\bar{\mu} = \frac{g}{h} + i\frac{\Delta\mu\sin\frac{\pi\gamma}{2}}{h} \qquad (7)$$

$$g = \frac{\mu_o}{\left(\omega\tau_\mu\right)^\gamma} + \mu_\infty\left(\omega\tau_\mu\right)^\gamma + \left(\mu_o + \mu_\infty\right)\cos\frac{\pi\gamma}{2}$$

$$h = \frac{1}{\left(\omega\tau_\mu\right)^\gamma} + \left(\omega\tau_\mu\right)^\gamma + 2\cos\frac{\pi\gamma}{2}$$

Подставим (7) в (5), получим:

$$\begin{aligned} &\left(\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}^2\right)\omega^{(4)} + \left[\left(\gamma_{11}\sigma_{22} + \frac{g_1}{h}\gamma_{22} - 2\gamma_{12}\sigma_{12}\right) + \right. \\ &\left. + i\gamma_{22}M_\infty\frac{\left(1 - \mu_o/\mu_\infty\right)\sin\frac{\pi\gamma}{2}}{h}\right]G^2\omega^2\left(a + i\beta\right)^2 + \\ &+ \left[\left(\sigma_{22}\frac{g_1}{h} - \sigma_{12}^2\right) + i\sigma_{22}M_\infty\frac{\left(1 - \mu_o/\mu_\infty\right)}{h}\right]G^4\left(a + i\beta\right)^4 = 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

$$g_1 = M_\infty\left[\frac{\mu_o/\mu_\infty}{\left(\omega\tau_\mu\right)^\gamma} + \left(\omega\tau_\mu\right)^\gamma + \left(1 + \frac{\mu_o}{\mu_\infty}\right)\cos\frac{\pi\gamma}{2}\right],\ M_\infty = \frac{\mu_\infty}{H}$$

Из (8) получим квадратное уравнение относительно z:

$$k\omega^4 z^2 + \left(a_1 + ia_2\right)G^2\omega^2 z + \left(d_1 + id_2\right)G^4 = 0 \qquad (9)$$

$$k = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2,\ a_1 = \gamma_{11}\sigma_{22} + \frac{g_1}{h}\gamma_{22} - 2\gamma_{12}\sigma_{12}$$

$$a_2 = \gamma_{22}h^{-1}M_\infty\left(1 - \frac{\mu_o}{\mu_\infty}\right)\sin\frac{\pi\gamma}{2},\ d_1 = \sigma_{22}g_1h^{-1} - \sigma_{12}^2,$$

$$d_2 = \sigma_{22}h^{-1}M_\infty\left(1 - \frac{\mu_o}{\mu_\infty}\right)\sin\frac{\pi\gamma}{2},$$

где z – комплексное число.

Оно находится по формуле:

$$z = \left(a + i\beta\right)^{-2}, \beta = \frac{\omega}{c} \tag{10}$$

Решение уравнения (9) запишем в виде:

$$z = -\frac{G^2}{2k\omega^2}\left(b_1 + ib_2\right) \tag{11}$$

$$b_1 = a_1 \pm \sqrt{r_1}\cos\frac{\varphi_1}{2}, b_2 = a_2 \pm \sqrt{r_1}\sin\frac{\varphi_1}{2}, r_1 = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$$

$$\delta_1 = a_1^2 - a_2^2 - 4kd_1, \delta_2 = 2\left(a_1a_2 - 2kd_2\right),$$

$$tg\varphi_1 = \frac{\delta_2}{\delta_1}, 0 \le \varphi_1 \le \frac{\pi}{2}$$

Из (11) с учетом (10) определим характеристики звуковых волн в насыщенной жидкостью наследственно-упругой пористой среде:

квадрат скорости распространения волн:

$$c_{1,2}^2 = \frac{r_2G^2}{2\left(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2\right)}\sec^2\frac{\varphi_2}{2} \tag{12}$$

$$r_2 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2},\ tg\varphi_2 = \frac{a_2 \pm \sqrt{r_1}\sin\frac{\varphi_1}{2}}{a_1 \pm \sqrt{r_1}\cos\frac{\varphi_1}{2}}$$

коэффициент поглощения [12]:

$$a = \frac{\omega}{c}tg\frac{\varphi_2}{2} \tag{13}$$

логарифмический декремент затухания:

$$\delta = 2\pi \mathrm{tg}\frac{\varphi_2}{2} \tag{14}$$

По формулам (12) и (13) построены графики зависимости скорости и коэффициента затухания от температуры и частоты при следующих данных: $\sigma_{11}=0.85$, $\sigma_{22}=0.25$, $\sigma_{12}=0.05$, $\gamma_{11}=0.95$, $\gamma_{22}=0.05$, $\gamma_{12}=0$, $M_\infty=2$, $\mu_o/\mu_\infty=0.1$, $\omega=1$ или $\tau=1$.

Значения параметра дробности γ указаны на рисунках.

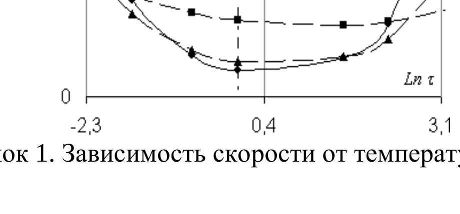

Рисунок 1. Зависимость скорости от температуры

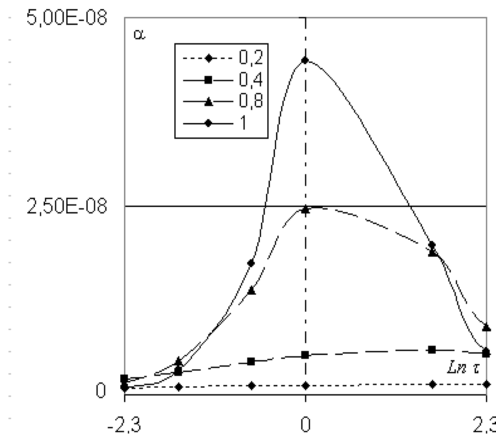

Рисунок 2. Зависимость коэффициента затухания от температуры

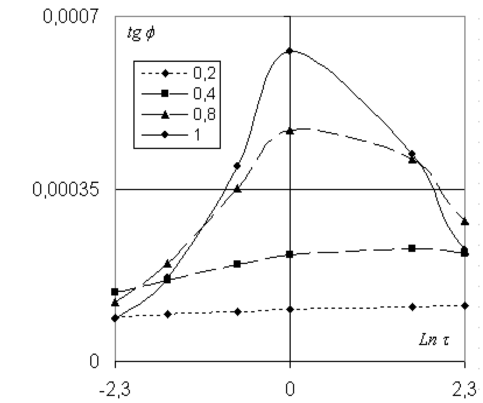

Рисунок 3. Зависимость тангенса угла от температуры

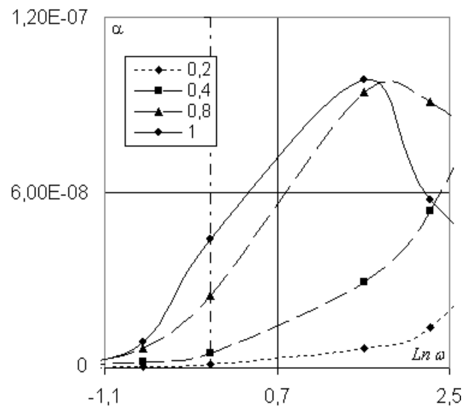

Рисунок 4. Зависимость коэффициента затухания от частоты

Рисунки 1-3 представляют зависимости скорости, коэффициента затухания и тангенса угла сдвига фаз от логарифма температуры, рисунок 4 – зависимость коэффициента затухания от логарифма частоты. Зависимости скорости и тангенса угла сдвига фаз от частоты идентичны зависимостям от логарифма температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1 Био М.А. Теория распространения упругих волн в насыщенной водой пористой среде I. Диапазон низких частот // Акустическое общество. Америка. 1956. Т. 28. № 2. С. 168-178.

2 Био М.А. Теория распространения упругих волн в насыщенной водой пористой среде II. Диапазон высоких частот // Акуст. общество. Америка. 1956. Т. 28. № 2. С. 179-191.

3 Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // ПММ. 1959. Т. 23. № 6. С. 1115-1123.

4 Масликова Т.И., Поленов В.С. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 104-108.

5 Поленов В.С. Нестационарные упругие волны в насыщенной жидкостью пористой среде // Теоретическая и прикладная механика. 2012. № 27. С. 84-90.

6 Поленов В.С., Чигарев А.В. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде // Изв РАН. ПММ. 2010. Т. 74. № 2. С. 276-284.

7 Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.

8 Мешков С.И., Россихин Ю.А. О распространении звуковых волн в наследственно-упругой среде // ПМТФ. 1968. № 5. С. 89-93.

9 Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.

10 Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последействием // ПММ. 1948. Т. 12. № 1. С. 53-62.

11 Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

12 Постников В.С. Внутреннее трение в металлах. М.: Металлургия, 1974. 351 с.

REFERENCES

1 Bio M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range. *Akusticheskoe obshchestvo. Amerika.* [Acoustic society. America], 1956, vol. 28, no. 2, pp. 168-178. (In Russ.).

2 Bio M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid II. Higher Frequency Range. *Akusticheskoe obshchestvo. Amerika.* [Acoustic society. America], 1956, vol. 28, no. 2, pp. 179-191. (In Russ.).

3 Kosachevskii L.Ia. Propagation of elastic waves in two-component medium. *PMM.* [AMM], 1959, vol. 23, no. 6, pp. 1115-1123. (In Russ.).

4 Maslikova T.I., Polenov V.S. Propagation of transitionals elastic waves in homogeneous porous medium. *Izvestiia RAN MTT.* [Bulletin of RAS. RBM], 2005, no. 1, pp. 104-108. (In Russ.).

5 Polenov V.S. Rheonomous elastic waves in a fluid-saturated porous solid. *Teoreticheskaia i prikladnaia mekhanika.* [Theoretical and applied mechanics], 2012, no. 27, pp. 84-90. (In Russ.).

6 Polenov V.S., Chigarev A.V. Propagation waves in a fluid-saturated heterogeneous porous medium. . *Izvestiia RAN MTT.* [Bulletin of RAS. RBM], 2010, vol. 74, no. 2, pp. 276-284. (In Russ.).

7 Nigmatulin R.I. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred [Fundamentals mechanics of heterogeneous environment]. Moscow, Nauka, 1978. 336 p. (In Russ.).

8 Meshkov S.I., Rossikhin Iu.A. Propagation of sonic waves in hereditary-elastic medium. PMTF. [AMTP], 1968, no. 5, pp. 89-93. (In Russ.).

9 Shermergor T.D. Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Theory of elasticity microinhomogeneous medium]. Moscow, Nauka, 1977. 399 p. (In Russ.).

10. Rabotnov Iu.N. Equilibrium of elastic medium with aftereffect. *PMM.* [AMM], 1948, vol. 12, no. 1, pp. 53-62.

11 Rabotnov Iu.N. Polzuchest’ elementov konstruktsii [Creep of structural component]. Moscow, Nauka, 1966. 752 p.

12 Postnikov V.S.Vnutrennee trenie v metallakh [Internal friction in metal]. Moscow, Metallurgiia, 1974. 351 p.