УДК 539.3

Баламирзоев А.Г., Зербалиев А.М., Селимханов Д.Н.

О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Balamirzoev A.G., Zerbaliev A.M., Selimkhanov D.N.

ON THE SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF FILTRATION

В условиях применения закона Дарси рассматривается задача построения комплексных потенциалов фильтрационных течений с границами раздела в виде концентрических окружностей, а также в областях фильтрации с границами в виде квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника. Используется метод изображения особых точек (метод отражений).

Ключевые слова: *фильтрация, скорость фильтрации, жидкость, коэффициент проницаемости, комплексный потенциал.*

In terms of the application of the law Darcy considered the problem of constructing complex potentials filtration flows with discontinuities in the form of concentric circles, and filtration areas with boundaries in the form of a square and isosceles rectangular triangle. The method of images singular points (the method of reflections).

Key words: *filtration, filtration rate, liquid, permeability coefficient, complex potential.*

Введение. Рассмотрим плоско-параллельную фильтрацию несжимаемой жидкости в условиях закона Дарси [1]:

$$V = -\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}p\,,$$

где V - скорость фильтрации жидкости, p - гидродинамическое давление, μ- вязкость жидкости, k - коэффициент проницаемости грунта, причем $0 \le k < \infty$. При $k = 0$ область непроницаема для жидкости, при $k = \infty$, область заполнена свободной жидкостью. Для исследования данного течения жидкости используется аналитическая функция:

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y),$$

называемая комплексным потенциалом гидродинамического течения. Нахождение комплексного потенциала фильтрационного течения заменяет решение уравнения Лапласа относительно потенциала скорости фильтрации $\varphi(x,y)$ или функции тока $\psi(x,y)$.

Рассмотрим кусочно-однородные среды, т.е., среды в которых, коэффициент проницаемости изменяется скачкообразно при переходе из одной области в другую. В каждой из областей течение описывается комплексным потенциалом, а на границе раздела областей выполняются условия непрерывности давления и сохранения массы жидкости. Для двух областей с коэффициентами проницаемости k_1 и k_2 условия на границе h имеют вид

$$\left[\frac{\varphi_1}{k_1}=\frac{\varphi_2}{k_2}\right]_h,\quad \left[\frac{1}{k_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial n}=\frac{1}{k_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right]_h,\quad \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2}\right]_h,\quad \left[\psi_1=\psi_2\right]. \qquad (1)$$

Если известен комплексный потенциал фильтрационного течения, то с помощью функции φ (или ψ) можно определить поле скоростей и поле давлений. В настоящей работе для определения комплексных потенциалов фильтрационных течений в кусочно-однородных средах используется метод изображения особых точек (метод отражений). Этот метод используется при решении задач электричества, магнетизма, теплопроводности, гидродинамики. Основы этого метода заложены в трудах Кельвина, Томсона, Максвелла, Зоммерфельда.

Метод позволяет решить задачу для случаев, когда границами поля являются плоские или цилиндрические поверхности. Сущность метода заключается в замене влияния границы на приложенное поле системой зарядов, расположенных сзади граничной поверхности. В случае плоскости или прямой, особые точки-изображения помещаются симметрично относительно границы, а в случае окружности или сферы – инверсно, относительно границы. Результирующее поле находят путем суммирования приложенного и отраженного полей.

Метод изображений был применен для случаев, когда границами раздела являются две параллельные прямые или две концентрические окружности [3]. Для данной действительной особой точки путем зеркального отражения (или инверсии) строятся точки - изображения. Затем записываются комплексные потенциалы в виде бесконечных рядов с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты определяются с помощью граничных условий (1). Таким же образом были определены комплексные потенциалы течений для среды с границами раздела в виде параллельных прямых для частного случая, когда размеры полос имеют общую меру [4].

Однако метод изображений в указанном виде имеет серьезные трудности. Например, в случае, когда границами раздела областей являются несколько прямых и окружностей, построить точки-изображения и выделить действительную или мнимую части комплексных потенциалов оказывается весьма сложно. Преодолеть эти трудности позволяют две теоремы гидродинамики: теорема об окружности и теорема о прямой. Эти теоремы, полученные для случая идеальной жидкости Милн-Томсоном [4], позволяют по аналитической функции, описывающей течение в отсутствие границ, выписывать комплексные потенциалы течения, если в поток внесены непроницаемая окружность, или непроницаемая стенка. Позже теоремы были обобщены О.В. Голубевой на фильтрационные течения [5]. Имея в виду дальнейшие приложения, сформулируем две упомянутые выше теоремы.

Теорема об окружности. Пусть окружность $|z|=a$ является границей раздела однородных областей с коэффициентами проницаемости k_1 ($|z| > a$) и k_2 ($|z|<a$). Тогда фильтрационные течения вне и внутри круга будут описываться соответственно комплексными потенциалами

$$W_1(z)= f(z)-\lambda \overline{f}\left(\frac{a^2}{z}\right), \qquad W_2(z)=(1+\lambda)f(z), \qquad \lambda=\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}, \tag{2}$$

где $W = f(z)$ - комплексный потенциал течения в неограниченной плоской среде с коэффициентом проницаемости k_1, причем особые точки функции $f(z)$ находятся в области $|z| > a$. Если же функция $f(z)$ описывает течение в неограниченной плоской среде с коэффициентом проницаемости k_2 и особые точки находятся в области $|z| < a$, то комплексные потенциалы течения в заданной неоднородной среде имеют вид

$$W_1(z)=(1-\lambda)f(z), \quad W_2(z)= f(z)+\lambda \overline{f}\left(\frac{a^2}{z}\right).$$

Теорема о прямой. Пусть ось OY является границей раздела однородных областей с коэффициентами проницаемости k_1 (при Re $z < 0$) и k_2 (при Re $z > 0$). Тогда фильтрационное течение в левой и правой полуплоскостях будут описываться соответственно комплексными потенциалами

$$W_1(z)= f(z)-\lambda \overline{f}(-z), \qquad W_2(z)=(1+\lambda)f(z) \tag{3}$$

где $W = f(z)$ - комплексный потенциал течения, определенный выше в теореме об окружности. Особые точки функции $f(z)$ находятся в области Re $z < 0$. Если же особые точки функции $f(z)$ находятся в области Re $z > 0$, то комплексные потенциалы течения в заданной неоднородной среде имеют вид

$$W_1(z)=(1-\lambda)f(z), \;\; W_2(z)= f(z)+\lambda \overline{f}(-z).$$

Эти теоремы замечательны тем, что они справедливы для различных особых точек, с их помощью описываются различные течения (поступательный поток, диполь, вихрь, источник и т.д.) При этом, могут быть взяты различные коэффициенты проницаемости. В частности, если k_2 =0 (λ = -1), то из (2) и (3) следуют теоремы Милн-Томсона об окружности и прямой для идеальной жидкости. В [6] предложен метод построения комплексных потенциалов фильтрационных течений, названный методом последовательного применения теорем об окружности и прямой.

Метод позволяет строить комплексные потенциалы течений для сред с границами раздела в виде произвольного числа параллельных прямых или концентрических окружностей, неконцентрических окружностей, произвольной совокупности непересекающихся окружностей и прямых и т.д. Применяя последовательно теорему об окружности или прямой, можно почленно строить ряды, образующие комплексные потенциалы. Это удобно, так как на практике берут конечное число членов ряда с необходимой точностью. Далее рассмотрим несколько задач на основе метода последовательного применения теорем об окружности и прямой. При этом будут выделены случаи, когда решения выражаются через тэта-функции Якоби.

Фильтрационные течения в среде с границами раздела в виде двух концентрических окружностей. Пусть область фильтрации разделена окружностями $|z|=a_1$ и $|z|=a_2$ ($a_2 < a_1$) на три области. Область $|z|>a_1$ имеет коэффициент проницаемости k_1, область $a_2 < |z|< a_1$ имеет коэффициент проницаемости k_2 и область $|z|< a_2$ имеет коэффициент проницаемости k_3 . Необходимо определить комплексные потенциалы фильтрационных течений $W_1(z)$, $W_2(z)$, $W_3(z)$, если задана аналитическая функция $f(z)$, описывающая течение в однородной среде на всей комплексной плоскости при отсутствии границ. Применяя последовательно теорему для окружностей $|z|=a_1$ и $|z|=a_2$, получаем следующие три случая:

а) Особые точки функции $f(z)$ находятся в области $|z|>a_1$, тогда

$$\begin{aligned} &W_1(z)= f(z)-\lambda_1^2\overline{f}\left(\frac{a_1^2}{z}\right)+\left(1-\lambda_1^2\right)\{1\},\\ &W(z)=\left(1+\lambda_1\right)\left(\{1\}+\{2\}\right),\\ &W_3(z)=\left(1-\lambda_1\right)\left(1+\lambda_2\right)\{2\}. \end{aligned} \tag{4}$$

б) Особые точки функции $f(z)$ находятся в области $a_2 < |z|< a_1$ тогда

$$\begin{aligned} &W_1(z)=\left(1-\lambda_1\right)\left(\{1\}+\{3\}\right),\\ &W_2(z)= f(z)+\{1\}+\{2\}'+\{3\}'+\{4\},\\ &W_3(z)=\left(1-\lambda_2\right)\left(\{2\}+\{4\}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

в) Особые точки функции $f(z)$ находятся в области $|z|< a_2$, тогда

$$\begin{aligned} &W_1(z)=\left(1-\lambda_1\right)\left(1+\lambda_2\right)\{3\},\\ &W_2(z)=\left(1+\lambda_2\right)\left(\{3\}+\{4\}\right),\\ &W_3(z)= f(z)-\lambda_2\overline{f}\left(\frac{a_2^2}{z}\right)+\left(1+\lambda_2^2\right)\{4\}. \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\{1\}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^{k-1}\lambda_2 k\overline{f}\left(\frac{q^{2k}a_1^2}{z}\right),\qquad \{2\}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^k\lambda_2^k f\left(q^{2k}z\right),$$

$$\{3\}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^k\lambda_2^k f\left(q^{-2k}z\right),\qquad \{4\}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^{k+1}\lambda_2^k\overline{f}\left(\frac{a_1^2}{q^{2k}z}\right).$$

$$\lambda_1=\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2},\qquad \lambda_2=\frac{k_2-k_3}{k_2+k_3},\qquad q=\frac{a_2}{a_1},$$

причем выражения, обозначенные как {2}' и {3}', отличаются от {2} и {3} только тем, что суммирование ведется не от нуля, а от единицы.

Формулы (5) и (6) не содержат решения для случая, когда точечный источник находится в области $|z| < a_2$ или в области $a_2 < |z| < a_1$. Дело в том, что функция $\ln(z - z_0)$ помимо особой точки $z = z_0$ имеет еще особую точку на бесконечности. Пусть точечный источник находится в области $a_2 < |z| < a_1$. Записываем общие решения (5) для функции $f(z) = \ln(z - z_0)$ и, добавляя к каждому комплексному потенциалу слагаемое

$$\left(1-\lambda_2\right)\sum_{л=0}^{\infty}\lambda_1^{k+1}\lambda_2^{k}\ln z\,,$$

получаем $W_1(z)$, $W_2(z)$ и $W_3(z)$. Запишем один из полученных комплексных потенциалов:

$$\begin{gathered}W_2(z)=\ln\left(z-z_0\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^k\lambda_2^k\ln\left(\frac{z}{q^{2k}}-z_0\right)+\\+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^k\lambda_2^k\ln\left(q^{2kz}-z_0\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^{k+1}\lambda_2^k\ln\left(\frac{a_1^2}{q^{2k}z}-\overline{z_0}\right)+\\+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^{k-1}\lambda_2^k\ln\left(\frac{q^{2k}a_1^2}{z}-\overline{z_0}\right)+\left(1-\lambda_2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^k\lambda_2^k\ln z.\end{gathered}\tag{7}$$

Исследуем комплексный потенциал (7) для различных граничных условий:

а) пусть области $|z| > a_1$ и $|z| < a_2$ заполнены свободной жидкостью. В этом случае $k_1 = k_3 = \infty$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Тогда ряды в (7) будут расходящимися, но они регуляризуются добавлением к их членам подходящих констант. Выражение (7) принимает вид

$$\begin{gathered}W_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z_0}{z}q^{2k-2}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z_0}{z}q^{2k}\right)-\\-\sum_{k=0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z\overline{z_0}}{a_1^2}q^{2k-2}\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{a_1^2}{z\overline{z_0}}q^{2k}\right)+C,\end{gathered}$$

где $C = \ln\left(-z_0\right) - \ln\left(-\overline{z_0}\right) - \ln a_1^2$.

Далее получим

$$\begin{gathered}W_2(z)=\ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_1z_0}{a_2z}q^{2k-1}\right)\left(1-\frac{a_2z}{a_1z_0}q^{2k-1}\right)-\\-\ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z\overline{z_0}}{a_1a_2}q^{2k-1}\right)\left(1-\frac{a_1a_2}{z\overline{z_0}}q^{2k-1}\right).\end{gathered}\tag{8}$$

Используем выражение для тета-функции Якоби [7]:

$$\upsilon_0(\nu) = H_0 \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - q^{2k-1}e^{2\pi i\nu}\right)\left(1 - q^{2k-1}e^{-2\pi i\nu}\right) \tag{9}$$

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - q^{2k}\right), \qquad |q| < 1 \cdot$$

С учетом (9) выражение (8) принимает вид

$$W_2(z) = \ln\left(\frac{\upsilon_0(\nu)}{\upsilon_0\left(\nu^e\right)}\right),$$

где

$$\nu = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{z_0}{zq}\right), \qquad \nu^e = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{z\overline{z_0}}{a_1^2 q}\right).$$

б) Пусть внутренняя область $|z| < a_2$ непроницаема, а область $|z| > a_1$ заполнена свободной жидкостью. В этом случае $\lambda_1 = —1$; $\lambda_2 = 1$ и выражение (7) преобразуется к виду

$$W_2(z) = \ln\left(\frac{\upsilon_0(\nu)}{\upsilon_0\left(\nu^e\right)}\right).$$

в) Для случая, когда внешняя и внутренняя области непроницаемы ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) рассмотрим физически реальный случай, когда в точке z_0 находится источник, а в точке z_1 - сток. В этом случае

$$f(z) = \ln\left(z - z_0\right) - \ln\left(z - z_1\right). \tag{10}$$

Записывая выражение (7) для (10) и проводя преобразования, аналогичные указанным, получаем

$$W_2(z) = \ln\left(\frac{\upsilon_0(\nu)\upsilon_0\left(\nu^e\right)}{\upsilon_0\left(\nu_1\right)\upsilon_0\left(\nu_1^e\right)}\right),$$

где

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{z_1}{zq}\right), \qquad \nu_1^e = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{z\overline{z_0}}{a_1^2 q}\right).$$

Полученные решения удобны благодаря тому, что тэта-функции Якоби представлены в виде быстро сходящихся рядов.

Таким образом, общие решения (4)-(6) оказались универсальными, т.е. они справедливы для различных течений, различных коэффициентов проницаемости и, следовательно, для различных граничных условий.

Фильтрационные течения в области, ограниченной прямоугольником. Пусть область фильтрации представляет собой прямоугольник со сторонами $x = a$ и $y = b$.

а) Рассмотрим случай, когда область фильтрации окружена свободной жидкостью, т.е. рассматривается течение на прямоугольном острове.

Для определения комплексного потенциала течения, вызванного особыми источниками функции *f(z),* воспользуемся теоремой о прямой в четырех вариантах, полагая, что $k_2 = \infty$ ($\lambda = 1$). Для четырех границ теорема имеет вид

$$
\begin{aligned}
x = 0:\ & W = f(z) - \overline{f}(-z),\\
x = a:\ & W = f(z) - \overline{f}(-z + 2a),\\
y = 0:\ & W = f(z) - \overline{f}(z),\\
y = b:\ & W = f(z) - \overline{f}(z + 2bi).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Применяя последовательно теоремы (11) относительно сторон прямоугольника, получаем

$$
\begin{aligned}
W(z) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \big[& f(z + 2ka + 2mbi) + f(-z + 2ka + 2mbi) - \\
& - \overline{f}(z + 2ka + 2mbi) - \overline{f}\, f(-z + 2ka + 2mbi)\big]
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Рассмотрим течение источника, т.е. полагаем $f(z) = \ln(z — z_0)$. В этом случае комплексный потенциал (12) принимает вид

$$
\begin{aligned}
W(z) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \Big[& \ln\left(z - z_0 - T\right) + \ln\left(z + z_0 - T\right) - \\
& - \ln\left(z - \overline{z_0} - T\right) - \ln\left(z + \overline{z_0} - T\right)\Big],
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $T = 2ka + 2mbi$.

Преобразуем (13), используя сигма-функцию Вейерштрасса, представленную в виде [7]

$$\sigma(я) = z \prod_{k,m} \left(1 - \frac{z}{T}\right) \exp\left[\frac{z}{T} + \frac{z^2}{2T^2}\right].$$

Преобразуем комплексный потенциал (13), с учетом структуры сигма-функции:

$$W(z) = \ln \frac{\sigma\left(z - z_0\right)\sigma\left(z + z_0\right)}{\sigma\left(z - \overline{z_0}\right)\sigma\left(z + \overline{z_0}\right)}.$$

Аналогичный результат получен в [8] для электрического поля точечного заряда, расположенного внутри прямоугольника.

б) Пусть прямоугольная область фильтрации окружена непроницаемой стенкой (k=0). Зададим в области фильтрации точечный источник и сток одинаковой мощности,

$$f(z) = \ln\left(z - z_0\right) - \ln\left(z - z_1\right).$$

Поступая так же, как в предыдущем случае, имеем

$$W(z) = \ln \frac{\sigma\left(z - z_0\right)\sigma\left(z + z_0\right)\sigma\left(z - \overline{z_0}\right)\sigma\left(z + \overline{z_0}\right)}{\sigma\left(z - z_1\right)\sigma\left(z + z_1\right)\sigma\left(z - \overline{z_1}\right)\sigma\left(z + \overline{z_1}\right)}.$$

Аналогично определяются комплексные потенциалы течения источника при других граничных условиях.

Сигма-функцию Вейерштрасса можно выразить через тета-функцию Якоби [7].

Фильтрационные течения в области, ограниченной квадратом.

Пусть область фильтрации представляет собой квадрат со стороной $x = y = a$. В этом случае справедливы все решения, полученные в п.3, где $b = a$.

Покажем, как можно выразить потенциал точечного источника через тэта-функцию Якоби.

Пусть область фильтрации представляет собой полосу $0 < y < a$.

Предположим, что в областях $y < 0$ и $y > a$ находится свободная жидкость. Течение в области фильтрации задано функцией $f(z)$.

Применяя последовательно теорему о прямой относительно границ $y = 0$ и $y = a$ получаем комплексный потенциал течения в полосе $0 < y < a$:

$$W(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z+2kai)-\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{f}(z+2kai). \tag{14}$$

Пусть в полосе находится точечный источник, т.е.

$$f(z)=\ln(z-z_0). \tag{15}$$

Записывая (14) для функции (15) и преобразуя полученное выражение, имеем

$$W(z)=\ln\sin\left(\frac{\pi(z-z_0)}{2ia}\right)-\ln\sin\left(\frac{\pi(z-\overline{z_0})}{2ia}\right).$$

Для полученной функции применяем последовательно теорему относительно прямых $x = 0$ и $x = a$. Получаем комплексный потенциал течения источника в квадрате:

$$\begin{aligned} W(z)=&\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ln\sin\left(\frac{\pi(z+2ka-z_0)}{2ai}\right)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ln\sin\left(\frac{\pi(z+2ka+z_0)}{2ai}\right)-\\ &-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ln\sin\left(\frac{\pi(z+2ka-\overline{z_0})}{2ai}\right)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ln\sin\left(\frac{\pi(z+2ka+\overline{z_0})}{2ai}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Используя представление тэта-функции (9), выражение (16) приводим к виду

$$W_2(z)=\ln\left(\frac{\upsilon_0(\nu_1)\upsilon_0(\nu_2)}{\upsilon_0(\nu_3)\upsilon_0(\nu_4)}\right), \tag{17}$$

где $k = 0, 1, 2, 3$ и

$$\nu_k=\frac{z-z_0-2a}{2ai}, \quad z_1=-z_0, \quad z_2=\overline{z_0}, \quad z_3=-\overline{z_0}.$$

Фильтрационные течения в области, ограниченной равнобедренным

прямоугольным треугольником.

Пусть область фильтрации представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $x = y = a$. Полагаем, что область фильтрации ограничена свободной жидкостью, т.е. имеется треугольный остров. Для определения комплексных потенциалов различных течений, описываемых функцией $f(z)$, воспользуемся теоремой о прямой в трех вариантах, полагая, что $k_2 = \infty$ ($\lambda = 1$). Для трех границ треугольника теорема имеет вид

$$W = f(z) - \overline{f}(-z), \tag{18}$$

$$W = f(z) - \overline{f}(z), \tag{19}$$

$$W = f(z) - \overline{f}\left[(z-a)e^{2ia} + a\right], \tag{20}$$

Причем выражения (18), (19) относятся к катетам x=0 и y=0, а (20) – к гипотенузе. Применяя последовательно (18) – (20) к сторонам треугольника, получаем

$$\begin{aligned} W(z) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \Big[& f(z+T') + f(-z+T') - \overline{f}(z+T') - \overline{f}(-z+T') + \\ & + f(z+T'') + f(-z+T'') - \overline{f}(z+T'') - \overline{f}(-z+T'') \Big] \end{aligned} \tag{21}$$

где $T' = 2a(k+mi), T'' = (2k+1)a + (2m+1)ai$.

Сравнивая (21) с (13), взятым при $b = a$, заключаем, что комплексный потенциал (21) можно также получить из (13), если положить, что функция $f(z)$ имеет две особые точки. К точке z_0 добавляется точка, симметричная точке z_0 относительно диагонали квадрата. Следовательно, для получения комплексного потенциала течения в области, ограниченной сторонами прямоугольного равнобедренного треугольника, на основании решения (17) имеем

$$W_2(z) = \ln\left(\frac{\upsilon_0(\nu_1)\upsilon_0(\nu_2)\upsilon_0(\nu_1')\upsilon_0(\nu_2')}{\upsilon_0(\nu_3)\upsilon_0(\nu_4)\upsilon_0(\nu_3')\upsilon_0(\nu_4')}\right)$$

ν_1 ,ν_2 ,ν_3 ,ν_4 определены в п.4.

$$\nu_k' = \frac{z - z_k i - a(i+1) - a}{2ai},$$

где k = 0, 1, 2, 3 а z_k определены в п. 4.

Вывод.

Применение двух теорем теории фильтрации жидкости – теоремы об окружности и прямой дает возможность определить комплексные потенциалы различных течений в кусочно-однородных средах с границами в виде прямых и окружностей. Применение метода конформных отображений с использованием многолистных римановых поверхностей дает возможность строить комплексные потенциалы течений со сложными границами. При отображении дробно-линейной функцией кривых второго порядка получается широкое многообразие кривых четвертого и третьего порядков, среди которых такие замечательные кривые, как кардиоида, лемниската, улитка Паскаля и др..

Таким образом, метод изображения особых точек, совместно с методом конформных отображений, дает возможность проводить теоретические исследования влияния неоднородностей в пористых средах на фильтрационные течения. Полученные в работе результаты могут быть использованы для решения практических задач не только в теории фильтрации, но и в теории теплопроводности, электричества и магнетизма.

Библиографический список:

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. – М.: 1972.
2. Баламирзоев А. Г. Нестационарная концентрация солей в трещине произвольного сечения. Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. н. 2006, Прил. № 2, с. 53–57.
3. Баламирзоев А.Г., Зербалиев А.М., Иванов В.В. Математическое моделирование нестационарной фильтрации упругой жидкости в неоднородном пласте// Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки, 2013.- № 4, с.50-54
4. Костицына Л. И. К вопросу о движении фильтрационного потока в кусочно-однородной пористой среде // Уч. зап. МОПИ им. Н.К. Крупской, Тр. каф. теор. физики. 1966, т. 164, вып. 2.
5. Milne-Thomson. Proc. Camb. Phil. Soc, 1940, v.36.
6. Голубева О.В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966, №1.
7. Шпилевой А.Я. О последовательном применении теоремы об окружности // Проблемы теоретической гидродинамики. - Тула: изд-во ТГПИ, 1977, с.39-44.
8. Ахиезер Н.Н. Элементы теории эллиптических функций. - М.: Наука, 1970.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1965.

УДК 621.951.02:539.371:534.1

Гусейнова М.Р., Гусейнов Р.В.

ОБОСНОВАНИЕ БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РЕЗАНИИ

Guseynova M.R., Guseinov R.V.

RATIONALE FOR RESEARCH DATABASE DYNAMIC PROCESSES IN CUTTING

Произведен расчет основных параметров системы СПИД для исследования динамики процесса резания.

Ключевые слова: *динамика процесса резания, автоколебания, момент инерции, декремент затуханий.*