

УДК 621.951.02:539.371:534.1

Гусейнова М.Р., Гусейнов Р.В.

РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Guseynova M.R., Guseynov R.V.

SETTLEMENT MODEL OF DYNAMICS OF NONLINEAR SYSTEMS

Разработана расчетная модель динамики процесса резания с учетом нелинейности характеристики силы. Предложена методика построения аппроксимирующей кривой.

Ключевые слова: динамика процесса резания, автоколебания, нелинейные системы.

Developed computational model of the dynamics of the cutting process, taking into account the characteristics of the nonlinearity strength. The method of construction of the approximating curve.

Key words: dynamics of the cutting process, vibrations, nonlinear systems.

В настоящее время при изучении динамики нелинейных систем обычно пользуются аналитическими или графическими методами. Применение аналитического метода исследования требует, чтобы все физические процессы, характеризующие поведение системы, были представлены в виде математических выражений. Для этой цели экспериментальные зависимости, которые, как правило, имеют нелинейный характер, должны быть аппроксимированы. Аппроксимирующее выражение выбирается наиболее простое, так как математический аппарат при сложной характеристике становится громоздким и затрудняет задачу. Однако, упрощая характеристику, необходимо, чтобы математическое выражение отражало основные нелинейные зависимости рассматриваемого процесса. Критерием правильности выбранной аппроксимации является соответствие результатов аналитического исследования экспериментальным данным, полученным при изучении рассматриваемой нелинейной системы.

Основное преимущество аналитического метода - это получение решения в форме, позволяющей оценить всю совокупность явлений, описываемых данным дифференциальным уравнением.

Аналитический метод пригоден для изучения колебаний в автономных и неавтономных системах. Автономной называется такая система, движение которой описывается дифференциальным уравнением. Неавтономной называется система, движение которой описывается уравнением, содержащим время в явном виде. Это возможно при наличии внешнего воздействия, зависящего от времени и влияющего на характер движения системы.

Трудность аналитического исследования объясняется отсутствием регулярных методов интегрирования, способных дать точное решение для любого нелинейного дифференциального уравнения.

Как известно, процесс резания сопровождается автоколебаниями. Для объяснения природы автоколебаний необходимо составить расчетную модель системы СПИД.

Трудность изучения колебаний заключается не только в его многообразии и сложности, но и в том, что процессу резания присущ целый ряд нелинейных зависимостей, например нелинейная зависимость силы резания от скорости. Наличие нелинейных зависимостей приводит к нелинейным колебаниям. Термины «линейные колебания», «нелинейные колебания» определяют вид дифференциального уравнения (линейное или нелинейное), с помощью которого исследуется колебательное движение.

Графические методы дают возможность представить решение в виде интегральных кривых в фазовом пространстве. Применительно к системам с одной степенью свободы, описываемыми дифференциальными уравнениями второго порядка, фазовое пространство вырождается в фазовую плоскость. Основным преимуществом графических методов является большая геометрическая наглядность физической сущности происходящих процессов. Они позволяют наиболее полно учесть все нелинейные зависимости, присущие данной системе. При графическом анализе имеет место качественная и количественная оценка стационарных и переходных режимов. Недостатком графических методов является то, что они дают частные решения для конкретных значений параметров системы.

Составление дифференциального уравнения системы рассмотрим на примере обработки отверстий, хотя рассматриваемая методика подходит для всех видов процесса резания. Считаем, что колебательной системой является система инструмента, которая имеет одну степень свободы. С учетом всех моментов, действующих в крутильной системе, дифференциальное уравнение системы будет иметь вид [5-13]

$$J\ddot{\varphi} + \eta\dot{\varphi} + C\varphi = M(v), \quad (1)$$

где J – приведенный момент инерции инструмента;

η – обобщенный коэффициент сопротивления; C – коэффициент жесткости;

φ – угловая деформация; $\dot{\varphi}$ – угловая скорость; $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение, $M(v)$ – нелинейная характеристика момента резания от скорости v .

Для решения данного уравнения кроме основных параметров системы СПИД необходимо иметь аналитическую зависимость $M(v)$. Эта зависимость имеет нелинейный характер.

Теоретически получить зависимость $M(v)$ не представляется возможным. Поэтому на практике пользуются результатами экспериментального исследования зависимости $M(v)$. Получают гладкую интерполяционную

кривую по набору точек с заданными координатами. Для ее решения предложено много способов. Традиционно используются алгебраические и обобщенные многочлены разных степеней, некоторые из них рассмотрены ниже.

Как известно, характеристика силы резания P_z в зависимости от обрабатываемого материала имеет два вида [4].

Характеристика первого вида нелинейна и в значительном диапазоне по скорости имеет падающий характер. При этом сила резания монотонно убывает с увеличением скорости. Характеристика второго вида также существенно нелинейна и имеет два падающих участка.

Анализ литературных источников показывает, что в настоящее время для аппроксимации характеристики силы используются следующие зависимости:

1. Линейная зависимость [1]

$$P_z = P_{z0} + \eta \frac{dz}{dt}, \quad (2)$$

Линейная аппроксимация характеристики силы резания для исследования установившихся режимов с учетом автоколебательного движения непригодна.

2. Нелинейная степенная функция [2]

$$P_z = C_p / v^{n_v}, \quad (3)$$

где C_p , n_v - коэффициенты, зависящие от параметров режима резания, обрабатываемых материалов и пр.

Данная степенная функция наиболее полно отражает характеристику силы резания первого вида и второй падающий участок характеристик второго рода, однако ее нельзя использовать для высокоскоростных условий резания.

3. Степенная функция [4]

$$P_z = P_{z0} + v^2 / (a_1 v^2 + b_1 v + c_1), \quad (4)$$

где a_1, b_1, c_1 - постоянные величины, зависящие от параметров режима резания.

4. Показательная функция [3]

$$P_z = P_{z0} + a_2 e^{vn_1} - b_2 e^{vn_2}, \quad (5)$$

где a_2, b_2, n_1, n_2 - постоянные величины, зависящие от параметров режима резания.

5. Показательная функция

$$P_z = P_{z0} + a v^b e^{-vn_1}, \quad (6)$$

где a, b, n_1 - постоянные величины, зависящие от параметров режима резания.

Исследования, проведенные автором, показали [5-13], что данная показательная функция наиболее полно отражает характеристику силы резания первого вида и второй падающий участок характеристик второго рода, и в отличие от функции 2 ее можно использовать и для высокоскоростных условий резания.

6. Полином третьей степени [4]

$$P_z = P_{z0} + \eta \left[\frac{dz}{dt} - \frac{d^3z}{dt^3} / (3v_a^2) \right] \quad (7)$$

Приведенные аппроксимации не учитывают две точки перегиба, характерные для характеристики силы второго вида.

Отличительной особенностью аппроксимации 6 является отсутствие постоянных величин в зависимости. Однако как видно из рис. 1, последняя аппроксимация не охватывает участок низких скоростей резания, которые характерны для процессов обработки мерным инструментом, где используются низкие скорости резания.

Таким образом, указанные способы в какой-то степени удобны для практики, но дают худшие результаты, так как аппроксимирующая кривая имеет две точки перегиба.

На рис. 1 показана зависимость крутящего момента от скорости резания при обработке внутренних резьб, полученная автором [5]

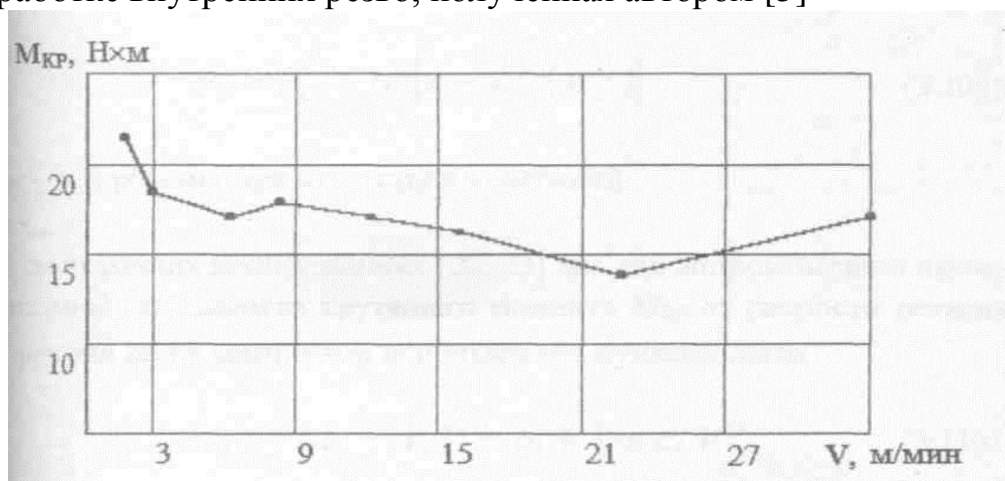


Рисунок 1 - Зависимость крутящего момента от скорости резания М10, обрабатываемый материал ДИ-8, (угол заборного конуса) $\phi_3 = 6^\circ$, (задний угол) $\alpha = 3^\circ$, (передний угол заточки инструмента) $\gamma = 12^\circ$

Как видно из рис. 1, зависимость характеристики силы (момента) для условий обработки внутренних резьб имеет два падающих участка (две точ-

ки перегиба) и данные аппроксимации нельзя считать удачными.

При нахождении аппроксимирующей кривой с точками перегиба удобно пользоваться величиной кривизны k , связанной с производными известным соотношением

$$k = z'' / (1 + z'^2). \quad (8)$$

Можно определить и точки перегиба, в которых кривизна меняет знак. Точки, в которых кривизна имеет нулевой экстремум трудно определить, но достаточно полно отслеживаются участки выпуклости и вогнутости.

Длина кривой определяется как:

$$dl = (1 + z'^2) dx. \quad (9)$$

Таким образом, мы имеем общую длину кривой и кривизну в каждой точке кривой.

При решении задачи построения интерполяционной кривой зависимости по набору экспериментальных точек с заданными координатами, когда еще известны общая длина кривой и кривизна в каждой точке кривой, часто используются функционалы. Воспользуемся такой методикой и используем положительно определенный функционал вида [11]

$$\Phi[z(x)] = \int (a + bk^2) dl, \quad (10)$$

где a, b - коэффициенты, зависящие от текущей длины и кривизны.

Для практических целей их можно считать постоянными.

При такой постановке интерполяционная кривая должна быть такой, чтобы она минимизировала функционал Φ при заданных граничных условиях.

Использование функционала связано с трудностями определения постоянных величин a, b .

Анализ формулы (10) показывает, что эти коэффициенты должны иметь положительный знак.

Если $a = 0$, то решение задачи становится не единственным. Такой вариант нас не устраивает. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы кроме положительности знака он был достаточно большим.

Анализируем влияние коэффициента b на значение Φ .

Если $b=0$, то функционал Φ превращается в длину кривой. Его минимизация просто осуществляется. Он является интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени. Отрезок прямой не может иметь разные наклоны в узлах, и нам не подходит. Отсюда вытекает, что значение b положительно.

Подставим в формулу (10) значения k и l из формул (8) и (9)

$$\Phi = \int (bz''^2 / (1 + z'^2)^{5/2} + a (1 + z'^2)^{1/2}) dx \quad (11)$$

С учетом требования минимальности функции Φ получим

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{2z''}{(1+z'^2)^{5/2}} + \frac{d}{dx} \left(5z''^2 z' / (1+z'^2)^{7/2} - \frac{az'}{((1+z'^2)^{1/2})} \right) = 0 \quad (12)$$

Это уравнение Эйлера.

Отличительной особенностью полученного уравнения является то, что оно - дифференциальное уравнение 4-го порядка. Как известно, такие уравнения не имеют решения в элементарных функциях. Необходимо упростить его так, чтобы по возможности имело решение в элементарных функциях.

Для этого проинтегрируем (12) и получим

$$\frac{d}{dx} \frac{2z''}{(1+z'^2)^{5/2}} + (5z''^2 z' / (1+z'^2)^{7/2} - \frac{az'}{((1+z'^2)^{1/2})}) = C_1 \quad (13)$$

где C_1 - постоянная величина.

Из (13) находим значение C_1

$$C_1 = \frac{2z''}{(1+z'^2)^{5/2}} + (5z''^2 z' / (1+z'^2)^{7/2} - \frac{az'}{((1+z'^2)^{1/2})}). \quad (14)$$

Уравнение (14) явно содержит только первую и вторую производные z .

Перепишем (14) в полных производных. Для этого обе части уравнения (14) умножим на z'' и после небольших преобразований получим

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{z''}{(1+z'^2)^{5/2}} - a(1+z'^2)^{1/2} \right) = C_1 \frac{d}{dx} z'. \quad (15)$$

Отсюда получим второй интеграл

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{5/2}} - a(1+z'^2)^{1/2} = C_1 z' + C_2, \quad (16)$$

где C_2 - постоянная величина.

Для удобства перепишем уравнение (16) в виде

$$z'' = \pm \{ C_1 z' + C_2 + a(1+z'^2)^{1/2} (1+z'^2)^{3/2} \}^{1/2}. \quad (17)$$

В (17) знак плюс соответствует вогнутым участкам, а знак минус - выпуклым.

Таким образом, получено дифференциальное уравнение второго порядка.

Анализ полученной формулы (17) показывает, что выражение в скобке должно быть неотрицательным и обращаться в нуль в точках перегиба. Эти условия накладывают ограничения на значения C_1 и C_2 .

Это уравнение образует задачу Коши и можно решить известными способами.

Вывод:

1. На основе анализа существующих аппроксимирующих кривых характеристики силы показано, что они не в полной мере отражает реальную картину, особенно для условий обработки внутренних резьб.

2. Предложено новое решение построения аппроксимирующей кривой характеристики силы.

Библиографический список:

1. Стрелков С.И. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1964, 437 с.
2. Справочник технолога-машиностроителя. Под ред. Малова А.Н. Т.2.М., «Машиностроение», 1972. 568 с.
3. Каширин А.А. Исследование вибраций при резании металлов. М.-Л., АН СССР, 1954. 234 с.
4. Мурашкин Л.С., Мурашкин С.Л. Прикладная нелинейная механика станков. Л., «Машиностроение»(Ленингр.отд-ние).1977. 192 с.
5. Гусейнов Р.В. Интенсификация технологических процессов обработки труднообрабатываемых материалов путем управления динамическими параметрами системы. Автореферат дисс. - докт. техн. наук. Ленинград, 1998. 23 с.
6. Guseynov R.V., Rustamova M.R. Improving the Machining of small Holes./ Russian Engineering Research/.-2013, T.33, №1. P.29-31.
7. Гусейнов Р.В. Теоретическое исследование динамики сверления/Известия СКНЦ ВШ, Новочеркасск, №1, 1991.
8. Гусейнов Р.В., Рустамова М.Р. Технология нарезания внутренних резьб при наличии радиальных сил//Вестник машиностроения. – 2009.- №5.- С.60-62.
9. Гусейнов Р.В., Рустамова М.Р. Математическая модель процесса обработки отверстий сверлами на основе нелинейной динамики. Ч.1. Постановка задачи/ Вестник ДГТУ. Технические науки.№3(Том 22). 2011.- С.64-68.
10. Гусейнов Р.В., Рустамова М.Р. Совершенствование обработки отверстий небольшого диаметра //Вестник машиностроения.- 2012.-№9. -С.50-52.
11. Гусейнов Р.В., Рустамова М.Р. Исследование процесса обработки отверстий на основе нелинейной динамики//Вестник ДГТУ. Технические науки.- Махачкала.- 2012.-№26.-С.77-80.
12. Гусейнов Р.В., Рустамова М.Р. Инструментальное обеспечение технологии обработки резьб в жаропрочных и титановых сплавах//Вестник ДГТУ. Технические науки.- Махачкала.- 2013.-№ 1(Том 28).- С.57-62.
13. Гусейнов Р.В. Математическое моделирование процесса обработки отверстий сверлами. Материалы за X международна научна практична конференция «Бъдещите изследвания-2014».-Том 43. Математика. София. «Бял ГРАД-БГ» ОДД. С.68-74.
14. Калиткин Н.Н., Рубцов А.Н. Ротационно-инвариантный метод интерполяции//Математическое моделирование. Москва, РАН. Том 4 ,№7,1992.- с.107-120.
15. Гусейнова М.Р., Гусейнов Р.В.//Обоснование базы данных для исследования динамических процессов при резании// Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. Махачкала №35 (4) 2014, С 36-44 стр.