

**Для цитирования:** Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Применение метода конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейности для расчета предварительно напряженных железобетонных ферм. Технические науки. 2017;44 (1):127-137. DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-4-127-137

**For citation:** Agapov V.P., Aidemirov K.R. Application of finite element method taking into account physical and geometric nonlinearity for the calculation of prestressed reinforced concrete beams. Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences. 2017;44 (1):127-137. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА

УДК 624.74:624.075

DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ФЕРМ

Агапов В.П.<sup>1</sup>, Айдемиров К.Р.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,

129337, Ярославское шоссе, 26, Москва, Россия,

<sup>2</sup>ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный технический университет»,

367015 Махачкала, просп. Имама Шамиля, 70,

e-mail: <sup>1</sup>agapovpb@mail.ru, <sup>2</sup>kyrayd@mail.ru.

**Резюме:** Цель. Современные строительные нормы предписывают проводить расчет строительных конструкций с учетом нелинейности деформирования. Для достижения этой цели поставлена задача разработать методику расчета предварительно напряженных железобетонных ферм с учетом физической и геометрической нелинейности. Методы. В основу методики положены алгоритмы нелинейного расчета, реализованные и апробированные в вычислительном комплексе ПРИНС (программа для расчета инженерных сооружений) для других типов конструкций. В качестве инструмента для решения этой задачи выбран метод конечных элементов. Нелинейный расчет конструкций ведется в вычислительном комплексе ПРИНС шагово-итерационным методом. При этом на шаге нагружения составляется и решается уравнение, с использованием модифицированных лагранжевых координат. Результат. Приведены основные формулы, необходимые как для формирования, так и для решения системы нелинейных алгебраических уравнений шагово-итерационным методом с учетом нагружения, разгрузки и возможного догружения. Описан способ моделирования предварительного напряжения заданием температурного воздействия на напрягаемую арматуру стержней. Рассмотрены способы учета физической и геометрической нелинейности для стержней железобетонных ферм. Приведен пример расчета плоской фермы и проанализировано поведение фермы на различных этапах ее нагружения вплоть до разрушения. Вывод. Составлена программа для расчета плоских и пространственных железобетонных ферм с учетом нелинейности деформирования. Программа адаптирована к вычислительному комплексу ПРИНС и в составе этого комплекса доступна широкому кругу инженерных и научно-технических работников.

**Ключевые слова:** строительные конструкции, фермы, метод конечных элементов, физическая и геометрическая нелинейность, программные комплексы

TECHICAL SCIENCE  
BUILDING AND ARCHITECTURE

APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL  
AND GEOMETRIC NONLINEARITY FOR THE CALCULATION OF PRESTRESSED RE-  
INFORCED CONCRETE BEAMS

Vladimir P. Agapov<sup>1</sup>, Kurban R. Aidemirov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow State University of Civil Engineering (MGSU),  
26, Yaroslavskoye highway, Moscow 129337, Russia,

<sup>2</sup>Daghestan State Technical University,  
70 I. Shamil Ave, Makhachkala 367015, Russia,  
e-mail: <sup>1</sup>agapovpb@mail.ru, <sup>2</sup>kyrayd@mail.ru.

**Abstract. Objectives** Modern building codes prescribe the calculation of building structures taking into account the nonlinearity of deformation. To achieve this goal, the task is to develop a methodology for calculating prestressed reinforced concrete beams, taking into account physical and geometric nonlinearity. **Methods** The methodology is based on nonlinear calculation algorithms implemented and tested in the computation complex PRINS (a program for calculating engineering constructions) for other types of construction. As a tool for solving this problem, the finite element method is used. Non-linear calculation of constructions is carried out by the PRINS computational complex using the stepwise iterative method. In this case, an equation is constructed and solved at the loading step, using modified Lagrangian coordinates. **Results** The basic formulas necessary for both the formation and the solution of a system of nonlinear algebraic equations by the stepwise iteration method are given, taking into account the loading, unloading and possible additional loading. A method for simulating prestressing is described by setting the temperature action on the reinforcement and stressing steel rod. Different approaches to accounting for physical and geometric nonlinearity of reinforced concrete beam rods are considered. A calculation example of a flat beam is given, in which the behaviour of the beam is analysed at various stages of its loading up to destruction. **Conclusion** A program is developed for the calculation of flat and spatially reinforced concrete beams taking into account the nonlinearity of deformation. The program is adapted to the computational complex PRINS and as part of this complex is available to a wide range of engineering, scientific and technical specialists.

**Keywords:** building constructions, beams, finite element method, physical and geometric nonlinearity, program complexes

**Введение.** Проектирование предварительно напряженных железобетонных конструкций, в том числе и железобетонных ферм, в настоящее время ведется с использованием эмпирических и полуэмпирических формул [1]. Эти формулы не учитывают всех особенностей работы предварительно напряженных систем, связанных с нелинейностью деформирования, с нагружением, разгрузкой и возможным догружением (изменением направления деформирования) вследствие резкого перераспределения усилий при выходе из строя того или иного элемента. Рекомендации по учету нелинейности деформирования бетона и арматуры [2], которые приводятся в строительных нормах и правилах и приложениях к ним, носят условный характер. К тому же нормативные документы практически не содержат рекомендаций по учету геометрической нелинейности. Поэтому разработка методик расчета предварительно напряженных железобетонных конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности является актуальной задачей. Предпосылкой для успешного решения этой задачи является общая теория расчета ферм, основы которой были заложены еще в XIX веке [3] и развиты затем в трудах отечественных и зарубежных ученых [4-11].

**Постановка задачи.** Данная работа посвящена расчету предварительно напряженных железобетонных ферм с учетом нелинейности деформирования методом конечных элементов. В основу методики положены алгоритмы нелинейного расчета, реализованные и апробированные в вычислительном комплексе ПРИНС для других типов конструкций [12]. При этом использованы результаты, полученные авторами данной статьи ранее [13-15] и учтен отечественный [16-18] и зарубежный [19-23] опыт разработки нелинейных методик расчета шарнирно-стержневых систем.

**Методы исследования.** Нелинейный расчет конструкций ведется в вычислительном комплексе ПРИНС шагово-итерационным методом. При этом на шаге нагружения составляется и решается уравнение, полученное в работе [12] с использованием модифицированных лагранжевых координат:

$$[K + K_{\sigma} + K_{NL_1} + K_{NL_2}]\{\Delta u\} = \{\Delta P\}, \quad (1)$$

где,  $[K]$ ,  $[K_{NL_1}]$ ,  $[K_{NL_2}]$  – матрицы жесткости нулевого, первого и второго порядков, соответственно;  $[K_{\sigma}]$  – матрица начальных напряжений;  $[\Delta u]$  и  $[\Delta P]$  – векторы приращений узловых перемещений и нагрузок, соответственно.

Матрицы  $[K_{NL_1}]$  и  $[K_{NL_2}]$  зависят от шаговых перемещений в первой и второй степени соответственно. Эта зависимость получена в работе [12] в явном виде.

Матрица  $K$ , элементы которой определяются свойствами материала, также зависит от шаговых значений перемещений, но получить эту зависимость в явном виде не удастся.

Эту матрицу можно вычислить в начале шага с учетом физических свойств материала в рассматриваемый момент времени, и при тех же предпосылках в конце шага.

Обозначим эти матрицы  $K_0$  и  $K_1$ , соответственно. Так как свойства материала на шаге нагружения изменяются, матрицу  $K$  приближенно можно найти как полусумму матриц  $K_0$  и  $K_1$ .

Таким образом,  $K = \frac{1}{2}(K_0 + K_1)$ . Представим матрицу  $K$  в виде:

$$K = K_0 + \Delta K. \quad (2)$$

Из приведенного выше вытекает, что  $\Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2}(K_0 + K_1) - K_0 = \frac{1}{2}(K_1 - K_0)$ .

С учетом формулы (2) уравнение (1) принимает вид:

$$[K_0 + \Delta K + K_{\sigma} + K_{NL_1} + K_{NL_2}]\{\Delta u\} = \{\Delta P\}, \quad (3)$$

Уравнение (3) решается в ВК ПРИНС итерационным способом дополнительной нагрузки, что равносильно применению модифицированного метода Ньютона-Рафсона. При этом уравнение (3) записывается в виде:

$$[K_0 + K_{\sigma}]_j \{\Delta u\}_j^{(i)} = \{\Delta P\}_j - [\Delta K + K_{NL_1} + K_{NL_2}]_j^{(i-1)} \{\Delta u\}_j^{(i-1)}, \quad (4)$$

где  $j$  - номер шага нагружения,  $i$  - номер итерации на данном шаге.

Напряжения в элементах на каждом шаге нагружения вычисляются по формуле:

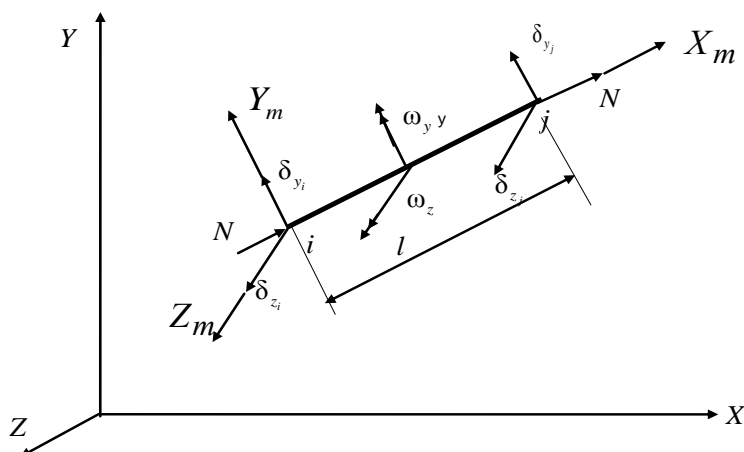
$$\Delta \sigma_x = E_x (\varepsilon'_x + \varepsilon''_x), \quad (5)$$

где  $E_x$  – касательный модуль материала стержня,  $\varepsilon'_x$  и  $\varepsilon''_x$  - линейный и нелинейный компоненты относительного удлинения стержня, соответственно, определяемые по формулам:

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon''_x = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

В формулах (6)  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – перемещения точек стержня в направлении местных осей элемента  $X_m Y_m Z_m$  (см. рис.1).

Окончательные значения усилий и перемещений находятся суммированием результатов, получаемых на каждом шаге нагружения.



**Рис.1. Местная ( $X_m Y_m Z_m$ ) и глобальная ( $XYZ$ ) системы координат**  
**Fig.1. Local ( $X_m Y_m Z_m$ ) and global ( $XYZ$ ) coordinate systems**

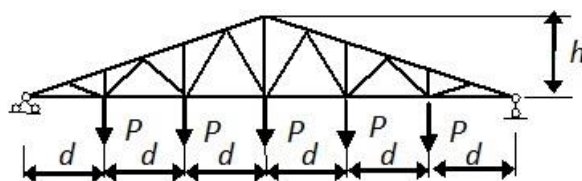
Диаграммы  $\sigma-\varepsilon$  в программе ПРИНС могут задаваться либо в аналитическом, либо в табличном виде.

В настоящее время в программе ПРИНС при расчете железобетонных ферм реализованы два вида диаграмм для бетона, и одна - для арматуры. Для бетона используется либо трехлинейная диаграмма, рекомендованная отечественными строительными нормами [2] и задаваемая в табличном виде, либо криволинейная, рекомендованная Европейским комитетом по бетону (ЕКБ) [24], и задаваемая в аналитическом виде.

Криволинейные диаграммы для сжатого бетона рекомендуются и отечественными нормами [2]. Предварительное исследование, проведенное авторами, показало, что европейские и отечественные нормы дают хорошо совпадающие результаты.

Однако нормы, рекомендованные ЕКБ, более удобны при использовании метода конечных элементов, так как они выражают напряжения в зависимости от деформаций, т.е. даются в виде функции  $\sigma(\varepsilon)$ , а не наоборот, как это рекомендуется отечественными нормами [2]. Для арматуры используется диаграмма Прандтля.

**Обсуждение результатов.** Предложенная методика реализована в вычислительном комплексе ПРИНС. Для проверки разработанной методики рассчитана ферма, изображенная на рис.2.

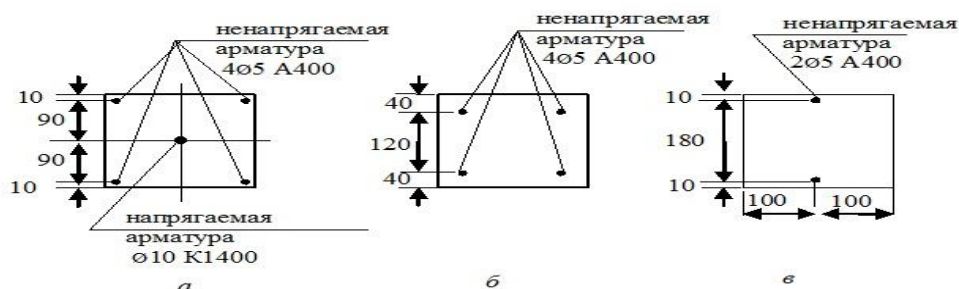


**Рис.2. Расчетная схема фермы**  
**Fig.2. The calculation scheme of the farm**

Расчет проводился при следующих исходных данных.

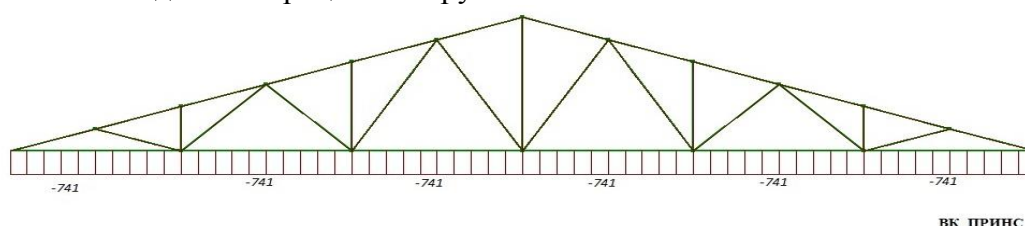
Длина панели  $d = 3$  м, высота  $h = 3$  м; размеры поперечного сечения для всех стержней  $20 \times 20$  см, схемы армирования стержней показаны на рис.3; бетон тяжелый класса В20, ненапрягаемая арматура класса А400, напрягаемая арматура класса К1400; ферма нагружалась сосредоточенными силами  $P=25$  кН в узлах нижнего пояса.

Нагрузка прикладывалась по шагам. На первом шаге осуществлялось предварительное напряжение заданием температурного воздействия на напрягаемую арматуру нижнего пояса.



**Рис.3. Схемы армирования: а – нижний пояс, б – верхний пояс, в - решетка**  
**Fig.3. Reinforcement diagrams: a - lower belt, b - upper belt, в - grating**

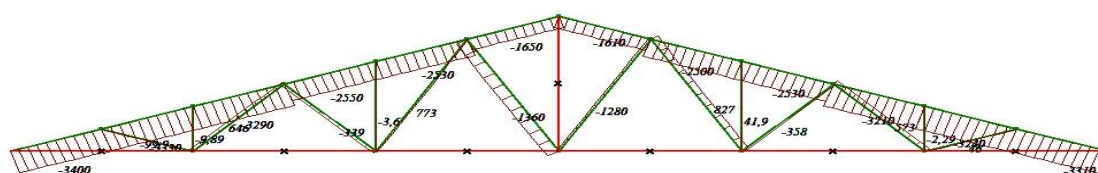
Эпюра напряжений в бетоне на первом шаге нагружения приведена на рис.4. На последующих шагах прикладывалась внешняя узловая нагрузка с множителем, значение которого принималось равным 0,05 для шагов со 2-го по 15-й, и равным 0,025 для остальных шагов. Цель расчета заключалась в определении предельной нагрузки для фермы и исследовании ее поведения в процессе нагружения.



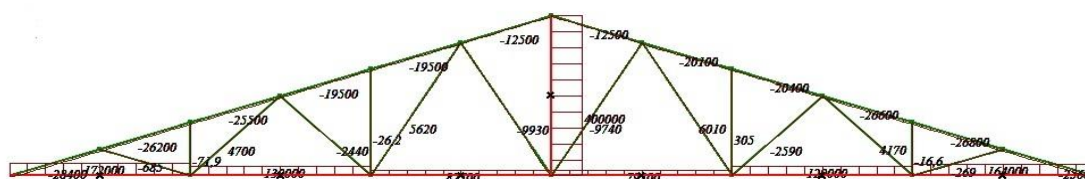
**Рис.4. Предварительные напряжения в бетоне, КПа**  
**Fig.4. Preliminary stresses in concrete, KPa**

Разрушение фермы произошло на 18-м шаге при узловой нагрузке 0,775P. Приводим некоторые результаты расчета, позволяющие понять причины разрушения.

На рис.5 приведена эпюра напряжений в бетоне на 17-м шаге нагружения, а на рис.6 – эпюра напряжений в ненапрягаемой арматуре на том же шаге. Из приведенных рисунков видно, что на 17-м шаге нагружения напряжения в бетоне стержней нижнего пояса и в центральной стойке становятся равными нулю вследствие растрескивания бетона, и при этом напряжения в арматуре центральной стойки достигают предела текучести. Следовательно, на 17-м шаге ферма превращается в механизм, и ее дальнейшее нагружение становится невозможным.

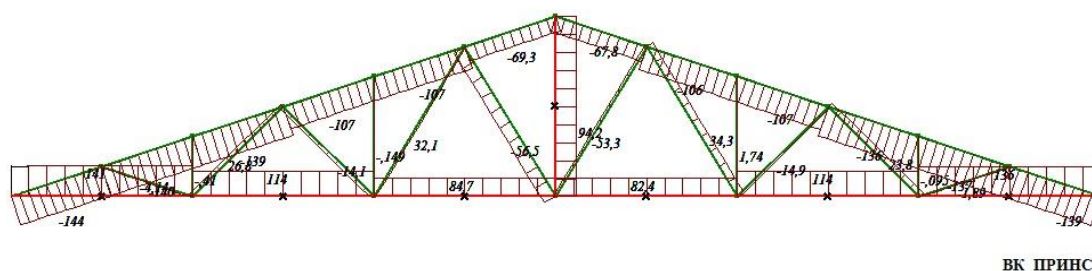


**Рис.5. Напряжения в бетоне на 17-м шаге нагружения**  
**Fig.5. Stresses in concrete at the 17th step of loading**



**Рис.6. Напряжения в ненапрягаемой арматуре на 17-м шаге нагружения**  
**Fig.6. Stresses in non-tensioning reinforcement at the 17th step of loading**

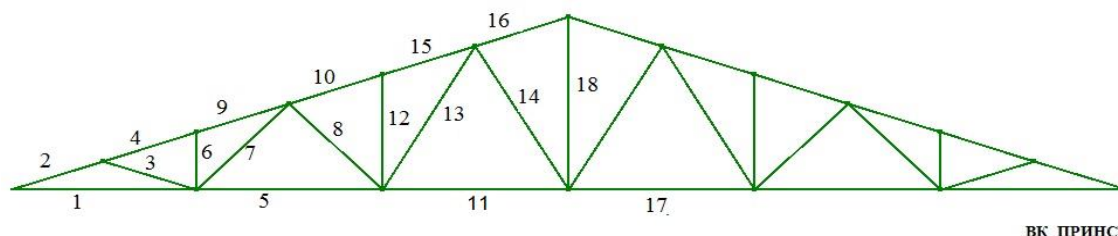
На рис.7 приведена эпюра суммарных значений усилий в стержнях на 17-м шаге нагружения.



ВК ПРИНС

**Рис.7. Эпюра суммарных значений усилий в стержнях на 17-м шаге нагружения**  
**Fig.7. The diagram of the total values of the forces in the rods at the 17th step of loading**

Учитывая, что при автоматическом построении эпюр избежать наложения цифровых данных на графическом изображении не удастся, результаты расчета выводятся также в виде таблиц. Для этого предварительно введя нумерацию элементов фермы, как показано на рис.8, представлен фрагмент таблицы с цифровыми значениями суммарных усилий на 17-м шаге нагружения на рис.9.



ВК ПРИНС

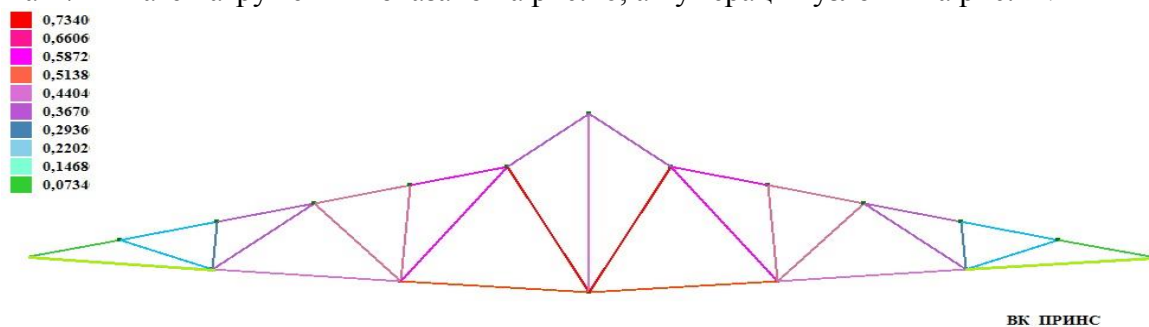
**Рис.8. Нумерация элементов фермы**  
**Fig.8. Numbering of farm elements**

Усилия и напряжения в элементах  
 Задача: 614 25.08.2016 21:58:00  
 Случай нагружения: 17

Модуль	Элемент	Напряжение в бетоне, МПа	Усилие в бетоне, кН	Напряжение в арматуре, МПа	Усилие в арматуре, кН	Напряжение в напрягаемой арматуре, МПа	Усилие в напрягаемой арматуре, кН	Деформация	Суммарное усилие, кН
1	1	0	0	172000	54,1	276000	86,8	0,000962	141
1	2	-3400	-135	-28400	-8,91	0	0	-0,000142	-144
1	3	-99,9	-3,97	-685	-0,161	0	0	-3,43E-06	-4,34
1	4	-3330	-132	-26200	-8,22	0	0	-0,000131	-140
1	5	0	0	130000	40,8	234000	73,5	0,000649	114
1	6	-8,89	-0,393	-71,9	-0,0169	0	0	-3,6E-07	-0,41
1	7	646	25,7	4700	1,11	0	0	2,35E-05	26,8
1	8	-339	-13,5	-2440	-0,575	0	0	-1,22E-05	-14,1
1	9	-3290	-131	-25500	-8,02	0	0	-0,000128	-139
1	10	-2950	-101	-19500	-6,13	0	0	-8,75E-05	-107
1	11	0	0	82700	26	187000	58,7	0,000414	84,7
1	12	-3,6	-0,143	-26,2	-0,00617	0	0	-1,31E-07	-0,149
1	13	773	30,7	5620	1,32	0	0	2,81E-05	32,1
1	14	-1360	-54,2	-9630	-2,34	0	0	-4,97E-05	-56,5
1	15	-2530	-101	-19500	-6,11	0	0	-9,73E-05	-107
1	16	-1650	-65,4	-12500	-3,93	0	0	-6,26E-05	-69,3
1	17	0	0	79100	24,9	183000	57,5	0,000396	82,4
1	18	0	0	400000	94,2	0	0	0,235	94,2
1	19	-1280	-51	-9740	-2,3	0	0	-4,87E-05	-53,3

**Рис.9. Таблица числовых значений суммарных усилий в стержнях фермы**  
**Fig.9. Table of numerical values of total forces in the trusses of a truss**

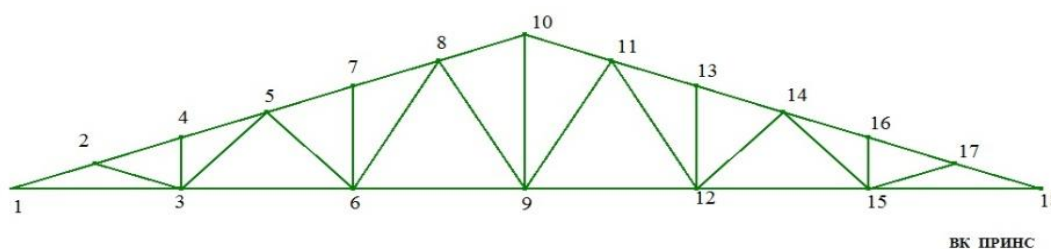
Чтобы убедиться в достоверности полученных результатов, проверим равновесие отдельных узлов и фермы в целом с учетом деформаций фермы. Деформированное состояние фермы на 17-м шаге нагружения показано на рис.10, а нумерация узлов – на рис.11.



**Рис.10. Деформированное состояние на 17-м шаге нагружения (масштаб перемещений 1:1)**

**Fig.10. Deformed state at the 17th step of loading (Displacement scale 1: 1)**

Резкий излом верхнего пояса на рис.11 объясняется тем, что при выходе из строя стойки № 18 (рис.8) центральный фрагмент фермы 8-9-11-10 (рис.11) превращается в шарнирный четырехугольник, в котором становятся возможными перемещения узлов без деформации элементов.



**Рис.11. Нумерация узлов фермы Fig.11. Numbering of farm nodes**

Схема, приведенная на рис.10, дает общее представление о характере деформаций фермы. Числовые значения перемещений выводятся в табличном виде (рис.12).

Перемещения узлов  
 Задача: 614 30.08.2016 15:42:21

Модуль	Узел	Перемещение по X, м	Перемещение по Y, м	Перемещение по Z, м
1	1	0	0	0
1	2	0	0,0421	-0,132
1	3	0	0,000557	-0,254
1	4	0	0,0822	-0,255
1	5	0	0,122	-0,377
1	6	0	0,00176	-0,496
1	7	0	0,161	-0,497
1	8	0	0,201	-0,616
1	9	0	0,00265	-0,734
1	10	0	0,00265	-0,0295
1	11	0	-0,195	-0,616
1	12	0	0,00349	-0,496
1	13	0	-0,156	-0,497
1	14	0	-0,117	-0,377
1	15	0	0,00468	-0,254
1	16	0	-0,0769	-0,255
1	17	0	-0,0368	-0,132
1	18	0	0,0052	0

**Рис.12. Перемещения узлов фермы на 17-м шаге нагружения Fig.12. The displacement of the nodes of the truss at the 17th step of loading**

Из рисунка 10 деформированного состояния фермы вырежем узел 1 (рис.13) и проверим его равновесие. Используя исходные данные и полученные результаты расчета, находим:  $\sin\alpha=0,2383$ ,  $\cos\alpha=0,9712$ ,  $\sin\beta=0,08453$ ,  $\cos\beta=0,9964$ .

Проецируем усилия на ось  $y$ :

$$\sum y = N_{1-2} \cos\alpha + N_{1-3} \cos\beta = -144 \times 0,9712 + 141 \times 0,9964 = -139,85 + 140,49 = 0,6424.$$

Относительная погрешность составляет  $\frac{0,645}{139,85} \times 100\% = 0,461\%$ .

Проецируя усилия на ось  $z$ , находим реакцию  $V_1$ :

$$V_1 = -N_{1-2} \sin\alpha + N_{1-3} \sin\beta = 144 \times 0,2383 + 141 \times 0,08453 = 46,23 \text{ кН.}$$

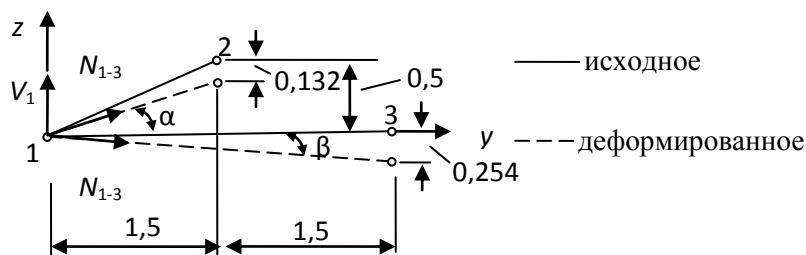
Проделав аналогичные вычисления для узла 18, находим, что условие равновесия узла в виде суммы проекций на ось  $y$  удовлетворяется с погрешностью 0,385%, а вертикальная реакция в узле  $V_{18}=44,62$  кН.

Суммарный параметр узловой нагрузки на 17-м шаге нагружения равняется 0,75. Проецируя узловые нагрузки и опорные реакции на ось  $z$ , находим:

$$V_1 + V_{18} - 5 \times 0,75P = 46,23 + 44,62 - 5 \times 0,75 \times 25 = 90,85 - 93,75 = -2,9 \text{ кН.}$$

Погрешность составляет  $\frac{2,9}{93,75} \times 100\% = 3,09\%$ .

Учитывая приближенный характер решения нелинейных уравнений равновесия, полученную точность следует признать вполне удовлетворительной. Отметим, что при учете геометрической нелинейности первоначально симметричная расчетная схема конструкции несколько искажается, что приводит и к искажению симметрии в напряженно-деформированном состоянии.



**Рис.13. Проверка равновесия узла 1**  
**Fig.13. Checking the balance of node 1**

**Вывод.** Предложенная в настоящей работе методика и составленная на ее основе программа для ЭВМ, реализованная в вычислительном комплексе ПРИНС, дают возможность детально анализировать процессы деформирования предварительно напряженных ферм под нагрузкой вплоть до их разрушения с учетом физической и геометрической нелинейности. Аналогичные подходы к расчету железобетонных ферм в отечественной расчетной практике до сих пор не использовались. Программа ПРИНС доступна широкому кругу специалистов и может быть полезна при расчете и проектировании железобетонных ферм.

#### Библиографический список:

1. Пособие по проектированию предварительно напряженных железобетонных конструкций из тяжелого бетона (к СП 52-102-2004). – Ассоциация «Железобетон» (ЦНИИПРОМЗДАНИЙ, НИИЖБ).
2. СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 - М.: Минрегион России, 2012.
3. Журавский Д.И. О мостах раскосной фермы Гау. – СПб, 1855. –161с.
4. Галеркин Б.Г. К расчету безраскосных ферм и жестких рам.- М.:Гостехиздат, 1926. – 24 с.
5. Филин А.П. Матрицы в статике стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1966. – 438 с.



6. Гофман Ш.М., Агапов В.П. Расчет устойчивости пространственных шарнирно-стержневых систем // ИВУЗ. Строительство и архитектура. – 1972. - № 1, с 31-35.
7. Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. – М.:Стройиздат, 1976. – Ч.1. -248 с.-Ч.2 – 237 с.
8. Байков В. Н., Сигалов Э. Е. Железобетонные конструкции. Общий курс. – М. : Стройиздат, 1991. – 728 с.
9. Железобетонные конструкции. Основы теории, расчета и конструирования / под ред. Т. М. Пецоьлда, В. В. Тура. – Изд-во БГТУ, 2003. – 379 с.
10. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры (к СНиП 2.03.01-84). – М. : ЦИТП, 1989. – 189 с.
11. СП 52-101-2003. Бетонные и железобетонные конструкции из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры. – М., 2005. – 53 с.
12. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. - Изд-во АСВ, М., 2005. - 247 с.
13. Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Расчет железобетонных ферм методом конечных элементов с учетом физической нелинейности. Часть 1// Научное обозрение, 2016 № 2, с.31-34.
14. Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Расчет железобетонных ферм методом конечных элементов с учетом физической нелинейности. Часть 2// Научное обозрение, 2016, № 3, с.22-27.
15. Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство, 2016, № 11, с.4-8.
16. Галишникова В.В. Постановка задач геометрически нелинейного деформирования пространственных ферм на основе метода конечных элементов // Вестник ВолгГАСУ, серия: Строительство и архитектура. – Волгоград 2009. Вып.14(33). – С. 50-58.
17. Хейдари А., Галишникова В.В.. Факторы, влияющие на критическую нагрузку и распространение местной потери устойчивости сетчатых оболочек // Вестник РУДН, 2013, № 1. – С.118-133.
18. Чернов, Ю.Т. К расчету систем с выключающимися связями // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 2010. № 4. – С. 53–57.
19. P. Iwicki, M. Krajewski. 3D Buckling Analysis of a Truss with Horizontal Braces. Mechanics and Mechanical Engineering. Vol. 17, No. 1 (2013) Pp.49–58
20. S. Missoum, Z. Gurdal and W. Gu. Optimization of nonlinear trusses using a displacement-based approach. Struct Multidisc Optim, No.23, Pp. 214–221, 2002
21. Ever Coarita and Leonardo Flores. Nonlinear Analysis of Structures Cable – Truss. IACSIT International Journal of Engineering and Technology, Vol. 7, No. 3, June 2015
22. R. Duriš, J. Murín. A nonlinear truss finite element with varying stiffness. Applied and Computational Mechanics, No 1 (2007) 417 – 426
23. H. Moharrami, M. R. Mazloumi, Analysis of structures including compression-only and tension-only members. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering Ecomas, 2000, Barcelona, 11-14 September 2000.
24. Comitee Euro-International De Beton] .Ceb-Fip\_Model Cod, 1990. Thomas Telford House, London, 1993.

#### References:

1. Posobie po proektirovaniyu predvaritel'no napryazhennykh zhelezobetonnykh konstruksiy iz tyazhelogo betona (k SP 52-102-2004). – Assotsiatsiya «Zhelezobeton» (TsNIIPROMZDANIY, NIIZhB). [Manual on the design of prestressed reinforced concrete structures from heavy concrete (to SP 52-102-2004). - "Zhelezobeton" Association (TsNIIPROMZDANIY, NIIZhB). (in Russ.)]

2. SP 63.13330.2012 Betonnye i zhelezobetonnye konstruksii. Osnovnye polozheniya. Aktualizirovannaya redaktsiya SNIp 52-01-2003. Moscow: Minregion Rossii; 2012. [SP 63.13330.2012 Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions. Updated version of SNIp 52-01-2003. Moscow: Ministry of Regional Development of Russia; 2012. (in Russ.)]
3. Zhuravskiy D.I. O mostakh raskosnoy fermy Gau. Sankt-Peterburg; 1855. 161 s. [Zhuravskiy D.I. About the Howe bracing truss bridges. Saint-Petersburg; 1855. 161 p. (in Russ.)]
4. Galerkin B.G. K raschetu bezraskosnykh ferm i zhestkikh ram. Moscow: Gostekhizdat. 1926. 24 s. [Galerkin B.G. To the calculation of non-bracing trusses and rigid frames. Moscow: Gostekhizdat. 1926. 24 p. (in Russ.)]
5. Filin A.P. Matritsy v statike sterzhnevnykh sistem. Moscow: Gosstroyizdat. 1966; 438 s. [Filin A.P. Matrices in the static of rod systems. Moscow: Gosstroyizdat. 1966; 438 s. (in Russ.)]
6. Gofman Sh.M., Agapov V.P. Raschet ustoychivosti prostranstvennykh sharnirno-sterzhnevnykh sistem. IVUZ. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1972; 1:31-35. [Gofman Sh.M., Agapov V.P. Calculation of the stability of three-dimensional hinged-rod systems. News of higher educational institutions. Construction and architecture. 1972; 1:31-35. (in Russ.)]
7. Aleksandrov A.V., Lashchenikov B.Ya., Shaposhnikov N.N., Smirnov V.A. Metody rascheta sterzhnevnykh sistem, plastin i obolochek s ispol'zovaniem EVM. Moscow: Stroyizdat; 1976. [Aleksandrov A.V., Lashchenikov B.Ya., Shaposhnikov N.N., Smirnov V.A. Methods for calculating rod systems, plates and shells using a computer. Moscow: Stroyizdat; 1976. (in Russ.)]
8. Baykov V.N., Sigalov E.E. Zhelezobetonnye konstruksii. Obshchiy kurs. Moscow: Stroyizdat; 1991. 728 s. [Baykov V.N., Sigalov E.E. Reinforced Concrete Structures. General course. Moscow: Stroyizdat; 1991. 728 p. (in Russ.)]
9. Zhelezobetonnye konstruksii. Osnovy teorii, rascheta i konstruirovaniya. Pod red. Petsol'da T.M., Tura V.V. Minsk: Izd-vo BGTU; 2003. 379 s. [Reinforced concrete structures. Fundamentals of theory, calculation and design. Petsol'd T.M. and Tur V.V. (Eds). Minsk: Izd-vo BGTU; 2003. 379 p. (in Russ.)]
10. Posobie po proektirovaniyu betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksiy iz tyazhelykh i legkikh betonov bez predvaritel'nogo napryazheniya armatury (k SNIp 2.03.01-84). Moscow: TsITP. 1989; 189 s. [Manual for the design of concrete and reinforced concrete structures from heavy and lightweight concrete without prestressing the reinforcement (to SNIp 2.03.01-84). Moscow: TsITP. 1989; 189 p. (in Russ.)]
11. SP 52-101-2003. Betonnye i zhelezobetonnye konstruksii iz tyazhelykh i legkikh betonov bez predvaritel'nogo napryazheniya armatury. Moscow; 2005. 53 s. [SP 52-101-2003. Concrete and reinforced concrete structures from heavy and lightweight concrete without prestressing reinforcement. Moscow; 2005. 53 p. (in Russ.)]
12. Agapov V.P. Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoychivosti konstruksiy. Moscow: 2005. Izd-vo ASV. 247 s. [Agapov V.P. Finite element method in static, dynamics and stability of constructions. Moscow: 2005. Izd-vo ASV. 247 p. (in Russ.)]
13. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Raschet zhelezobetonnykh ferm metodom konechnykh elementov s uchetom fizicheskoy nelineynosti. Chast' 1. Nauchnoe obozrenie. 2016; 2:31-34. [Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of reinforced concrete trusses by finite element method taking into account physical nonlinearity. Part 1. Science Review. 2016; 2:31-34. (in Russ.)]
14. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Raschet zhelezobetonnykh ferm metodom konechnykh elementov s uchetom fizicheskoy nelineynosti. Chast' 2. Nauchnoe obozrenie. 2016; 2:22-27. [Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of reinforced concrete trusses by finite element method taking into account physical nonlinearity. Part 2. Science Review. 2016; 2:22-27. (in Russ.)]

15. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Raschet zhelezobetonnykh ferm metodom konechnykh elementov s uchetom geometricheskoy nelineynosti. Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. 2016; 11:4-8. [Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of reinforced concrete trusses by finite element method taking into account geometrical nonlinearity. Industrial and civil engineering. 2016; 11:4-8. (in Russ.)]
16. Galishnikova V.V. Postanovka zadach geometricheski nelineynogo deformirovaniya prostanstvennykh ferm na osnove metoda konechnykh elementov. Vestnik VolgGASU, seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura. 2009; 14(33):50-58. [Galishnikova V.V. Problem posing in geometrically nonlinear deformation of spatial trusses on the basis of the finite element method. Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture. 2009; 14(33):50-58. (in Russ.)]
17. Kheydari A., Galishnikova V.V. Faktory, vliyayushchie na kriticheskuyu nagruzku i rasprostranenie mestnoy poteri ustoychivosti setchatykh obolochek. Vestnik RUDN. 2013; 1:118-133. [Kheydari A., Galishnikova V.V. Factors influencing the critical load and the spread of local loss of stability of reticulated shells. RUDN Journal of Engineering Researches. 2013; 1:118-133. (in Russ.)]
18. Chernov Yu.T. K raschetu sistem s vyklyuchayushchimisya svyazyami. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2010; 4:53-57. [Chernov Yu.T. To the calculation of systems with switched off connections. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2010; 4:53-57. (in Russ.)]
19. Iwicki P., Krajewski M. 3D Buckling Analysis of a Truss with Horizontal Braces. Mechanics and Mechanical Engineering. 2013; 17(1):49-58.
20. Missoum S., Gurdal Z., Gu W. Optimization of nonlinear trusses using a displacement-based approach. Struct Multidisc Optim. 2002; 23:214-221.
21. Coarita E., Flores L. Nonlinear analysis of structures cable – truss. IACSIT International Journal of Engineering and Technology. 2015; 7(3).
22. Duriš R., Murín J. A nonlinear truss finite element with varying stiffness. Applied and Computational Mechanics. 2007; 1:417-426.
23. Moharrami H., Mazloumi M.R. Analysis of structures including compression-only and tension-only members. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering Eccomas. Barcelona; 2000.
24. Committee Euro-International De Beton. Ceb-Fip\_Model Cod, 1990. London: Thomas Telford House; 1993.

**Сведения об авторах.**

**Агапов Владимир Павлович** – доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной механики и математики.

**Айдемиров Курбан Рабаданович** - доцент, кандидат технических наук, кафедра сопротивление материалов и строительной механики.

**Information about the authors.**

**Vladimir P. Agapov** – Dr. Sc. (Technical), Prof., Department of applied mechanics and mathematics.

**Kurban R. Aidemirov** - Cand. Sc. (Technical), Associate Professor.

Конфликт интересов

**Conflict of interest**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 12.12.2016.

**Received 12.12.2016.**

Принята в печать 28.01.2017.

**Accepted for publication 28.01.2017.**