Для цитирования: *Аристова Е.М. Установление взаимосвязи между методами аддитивной свертки и метрики. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017;44 (2):107-117. DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-2-107-117*

For citation: *Aristova E.M. Regulation of the relationship between additive reduction and metrics methods. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2017;44 (2):107-117. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-2-107-117*

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.81
DOI:10.21822/2073-6185-2017-44-2-107-117

УСТАНОВЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ МЕТОДАМИ АДДИТИВНОЙ СВЕРТКИ И МЕТРИКИ

Аристова Е.М.
Воронежский государственный университет,
394018, Воронежская область, г. Воронеж, Университетская пл., д.1, Россия,
e-mail: pmim@yandex.ru

Резюме: Цель. *Определение взаимосвязи между методами обобщенного критерия и целевого программирования.* ***Метод.*** *В работе рассматривается операция агрегирования, лежащая в основе многих процедур принятий решений, используемая в межотраслевом балансе, в нейросетевых технологиях, при исследовании многоцелевых систем. Использование некоторых метрик в рамках целевого программирования может приводить к решениям, которые не являются Парето-оптимальными. Поэтому в целевом программировании значительное место уделяется нахождению условий, при которых использование той или иной метрики заведомо приводит к Парето-оптимальным решениям. Для аддитивной свертки известны необходимые (теорема Карлина) и достаточные условия Парето-оптимальности. Для обобщенного критерия на основе порядковых операторов взвешенного агрегирования представлены доказанные автором теорема о включении множества оптимальных по Парето решений во множество эффективных решений и теорема о Парето-оптимальности полученного решения.* ***Результат.*** *Приведено доказательство теоремы о Парето-оптимальности решения, максимизирующего обобщенный критерий, полученный на основе порядковых операций взвешенного агрегирования, которая обосновывает использование операций данного типа для решения задач векторной оптимизации или многокритериального выбора. Теорема о существовании аддитивной свертки для метрики верна только в частном случае и основана на теореме Карлина, согласно которой подмножество точек Парето-множества максимизирует некоторую аддитивную свертку.* ***Вывод.*** *В статье установлена взаимосвязь между методами аддитивной свертки и метрики. Сформулировано и доказано утверждение о взаимосвязи параметров функции расстояния в методе целевого программирования и весовых коэффициентов аддитивной свертки, которая обеспечивает эквивалентность оптимальных решений по Парето.*

Ключевые слова: *идеальное решение, аддитивная свертка, метрика, метод целевого программирования, набор критериев*

TECHNICAL SCIENCE
COMPUTER SCIENCE, COMPUTER ENGINEERING AND MANAGEMENT

REGULATION OF THE RELATIONSHIP BETWEEN ADDITIVE REDUCTION AND METRICS METHODS

Ekaterina M. Aristova
Voronezh State University,
1 Universitetskaya square, Voronezh 394018, Russia,
e-mail: pmim@yandex.ru

Abstract Objectives *The aim of the work is to determine the relationship between generalised criterion and target programming methods.* ***Methods*** *The paper considers the aggregation operation that underlies many decision-making procedures used in input-output models, in neural network technologies and in the study of multi-purpose systems. The use of certain metrics within the framework of target programming can lead to solutions that are not Pareto-optimal. Therefore, in targeted programming, a significant place is given to finding the conditions under which the use of one or another metric obviously leads to Pareto-optimal solutions. The necessary (Carlin's theorem) and sufficient conditions of Pareto-optimality are known to perform the additive reduction. For a generalised criterion on the basis of order operators of weighted aggregation, two theorems proven by the author (the theorem on the inclusion of the set of Pareto-optimal solutions into a set of effective solutions and the Pareto optimality theorem for the solution obtained) are presented.* ***Results*** *The proof of the Pareto optimality theorem of the solution is given, maximising the generalised criterion obtained on the basis of the order operations of weighted aggregation, which justifies the use of operations of this type for solving the problems of vector optimisation or multicriteria choice. The theorem on the existence of an additive reduction for a metric is true only in the particular case and is based on Carlin's theorem, according to which a subset of Pareto-set points maximises some additive reduction.* ***Conclusion*** *In the paper a relationship between the additive reduction and metrics methods is established. An assertion concerning the relationship between the parameters of the distance function in the target programming method and the weighting coefficients of the additive reduction is formulated and proved, which ensures the equivalence of the optimal Pareto solutions.*

Keywords: *perfect solution, additive reduction, metric, target programming method, set of criteria*

Введение. Практически любой вид человеческой деятельности связан с ситуациями, когда имеется несколько возможностей, и человек волен из этих возможностей выбрать любую, наиболее подходящую ему, т.е. принимает решение.

Под принятием решений (ПР) подразумевается целенаправленный процесс, включающий определение целей ПР, постановку задачи ПР и саму процедуру ПР – выбор одной из имеющихся альтернатив, лучшей в некотором смысле. Основной субъект процесса ПР – лицо, принимающее решение (ЛПР) или группа ЛПР [1-5].

Теория принятия решений позволяет решать задачи наилучшего выбора. С ее помощью можно научиться осуществлять выбор более обоснованно и эффективно, используя имеющуюся в наличии информацию о предпочтениях. Эта теория помогает избежать принятия заведомо негодных решений и учесть возможные отрицательные последствия непродуманного выбора [1,6-11].

Чрезвычайно широкий и крайне важный с практической точки зрения класс задач выбора составляют многоцелевые (многокритериальные) задачи, в которых качество принимаемого решения оценивается по нескольким критериям одновременно [1].

Постановка задачи. Рассмотрим многоцелевую задачу линейного программирования [1]

$$\begin{cases} f_i(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k^i x_k \to max \ (i = \overline{1,p}), \\ x \in X \subseteq R^p, \end{cases} \quad (1)$$

где $f_i(x)$ – i-ая целевая функция, общее число которых равно p,

c_k^i – коэффициент i-ой целевой функции, стоящий на k-месте,

X – множество допустимых значений переменной x.

По существу многоцелевая задача отличается от обычной задачи оптимизации только наличием нескольких целевых функций вместо одной [12-16].

Пусть X – множество вариантов решений в задаче многокритериальной максимизации, а каждой альтернативе $x \in X$ ставится в соответствие векторная оценка $f(x) = \left(f_1(x), .., f_p(x)\right) \in R^p$.

Решение $x^* \in X$ называется *оптимальным по Парето*, если для любого другого решения $x \in X$ для всех частных критериев выполняются неравенства $f_i(x) \le f_i(x^*)$ $(i = \overline{1,p})$ и имеется такой индекс $i_0 \in \{1, .., p\}$, что соответствующее неравенство выполняется как строгое, т.е. $f_{i_0}(x) < f_{i_0}(x^*)$ [1,17-18].

Множество Парето $P(X)$ представляет собой множество попарно несравнимых по предпочтению решений. Для окончательного выбора оптимального решения необходимо привлечение специальных методов.

Парето-оптимальность рассматривает множество значений переменных задачи (решений или альтернатив), в которых значение ни одной из локальных функций полезности не может быть улучшено, не ухудшив при этом величину какой-либо другой функции полезности.

Это множество в терминологии многокритериального выбора называют *множеством эффективных решений* [1,17].

Для решения многоцелевой задачи линейного программирования (1) существует много различных методов. Наиболее популярен – метод, основанный на скаляризации критериев. Идея метода заключается в формировании на основе дополнительной информации, полученной от лица, принимающего решение (ЛПР), функциональной зависимости между $f_1, \dots, f_p$ и построение на ее основе скалярной функции для задачи оптимизации, которая бы сыграла роль нового принципа.

Данная функция называется *обобщенной функцией критериев* или *обобщенным критерием* [1-2, 4-5,14].

Рассмотрим задачи:

$$\begin{cases} \Phi(f_1(x), \dots, f_p(x)) \to max \\ x \in P(X), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \rho(f(x), \dots, f(x^0)) \to min \\ x \in P(X). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\Phi(\cdot)$ – обобщенный критерий, $P(X)$ – множество Парето (множество эффективных решений), $\rho(\cdot)$ – некоторая метрика.

Рассмотрим задачу определения взаимосвязи между методами обобщенного критерия и целевого программирования: если $x^* \in X$ является решением задачи (2), то существует ли метрика ρ такая, что x^* является решением задачи (3), и наоборот, если $x^* \in X$ – решение задачи (3), то существует ли аддитивная свертка, что x^* – решение задачи (2)?

Метод исследования. Проблема агрегирования достаточно активно обсуждается в отечественной и зарубежной литературе [1,7,15-17,19], поскольку лежит в основе многих процедур принятий решений (групповой выбор, многоцелевые модели), используется в межотраслевом балансе, нейросетевых технологиях, при исследовании многоцелевых систем.

В самом общем смысле под *агрерированием* понимается переход от векторной оценки размерности n к векторной оценке размерности m при $m < n$.

Зачастую агрегирование предполагает переход от векторной оценки к скалярной, которая называется *обобщенной* (групповой, комплексной, интегральной).

В основе аналитических приемов такого типа агрегирования лежит понятие оператора агрегирования [1].

Пусть X − заданное множество альтернатив; $A_i(x) = a_i$ − частная оценка альтернативы x, в качестве которой может выступать оценка по i-му критерию (показателю), или оценка, полученная от i-го эксперта; $(a_1, .., a_n)^T$ − векторная оценка альтернативы $x \in X$, тогда ее обобщенная (комплексная, интегральная) оценка может быть получена путем агрегирования компонент векторной оценки в соответствии с определенным принципом.

Как правило, каждый критерий K_i из множества критериев $K = \{K_1, \dots, K_n\}$ имеет свой вес $w_i, i = \overline{1, n}$, определяющий степень важности (значимости) оценки по этому критерию, а каждый эксперт E_j из группы экспертов $E = \{E_1, \dots, E_m\}$ характеризуется коэффициентом компетентности $c_j, j = \overline{1, m}$, позволяющим учитывать значимость его мнения.

Поэтому оператор агрегирования учитывает весовые коэффициенты w_i и/или c_j и имеет вид:

$$\alpha(x) = Agg(W, A),$$

где

$Agg(\cdot)$ – оператор агрегирования, формализующий некоторую стратегию агрегирования; x – альтернатива из заданного множества; $\alpha(x)$ – ее обобщенная оценка, $A = (a_1, \dots, a_n)$ – вектор частных оценок альтернативы; $W = (w_1, \dots, w_n)$ – вектор весовых коэффициентов (w_i определяют степень влияния частных оценок a_i на обобщенную оценку $\alpha(x)$).

Если A – вектор оценок альтернативы по критериям (показателям), а вектор W задает веса критериев, то $\alpha(x)$ – многокритериальная оценка альтернативы. Если компоненты вектора W – коэффициенты компетентности экспертов, а A – вектор оценок, полученных от этих экспертов, то $\alpha(x)$ – групповая (коллективная) оценка альтернативы [7, 19-21].

Заметим, что при формировании обобщенной оценки возможны две схемы агрегирования:

1) $Agg_1(W, A) = Agg_1(g(w_1, a_1), g(w_2, a_2), .., g(w_n, a_n)) = \alpha(x)$;

2) $Agg_2(W, A) = Agg_2(f_1(\mathrm{W}), f_2(\mathrm{A})) = \left(w, \alpha(x)\right)$.

В первом случае вначале строятся агрегаты $g(w_i, a_i)$ для всех $i = \overline{1, n}$, которые затем «сворачиваются» в обобщенную оценку $\alpha(x)$.

Во втором случае – агрегирование весов и частных оценок альтернативы осуществляют отдельно, причем собственно оценкой альтернативы является $\alpha(x)$, а w рассматривается как степень доверия к этой оценке.

Оператор агрегирования позволяет решать задачу наиболее радикальным способом – за счет свертки векторной оценки с соответствующим набором весов в скалярную величину, позволяя тем самым определить отношение линейного порядка на множестве альтернатив.

Исследователи определяют оператор агрегирования исходя из различных наборов свойств, среди которых определяющими являются монотонность, идемпотентность, наличие нейтрального элемента, а также дополнительные условия, накладываемые на обобщенную оценку.

Комбинирование перечисленных свойств порождает различные семейства операторов агрегирования, многие из которых являются параметрическими.

В связи с их многообразием проблема выбора подходящего оператора для конкретной прикладной задачи занимает центральное место, поскольку ее решение влияет на ключевые свойства модели, такие как: адаптивность, эффективность вычислений, учет типа исходных данных и стратегия агрегирования. Большое значение имеет параметрическое представление операторов агрегирования, поскольку именно за счет выбора подходящих значений параметров можно обеспечить гибкость оценочной модели и настроить ее информационную среду.

Информация о частных оценках может учитываться в двух различных аспектах. Если важно акцентировать внимание, прежде всего, на значимости источников информации (критериев, экспертов), то используются классические операторы (взвешенные мультипликативные и аддитивные свертки).

В случаях, когда первичной является важность значений аргументов, применяются порядковые операторы. Они агрегируют компоненты векторной оценки, упорядоченные определенным образом (порядковые операторы). К операторам данного класса относятся OWA-операторы (Ordered Weighted Averaging Aggregation operator) и различные их модификации и обобщения [1,7, 20].

Выбор оператора агрегирования – важнейший этап формирования моделей оценки, который напрямую зависит от качества исходной информации. Заметим, что как веса, так и оценки альтернатив могут быть как количественными, так и качественными [1,7].

Решение задачи (2) основано на формировании обобщенного критерия [1], а задача (3) является основой метода целевого программирования.

В основе этого метода лежит простое эвристическое соображение − стараться в качестве наилучшего выбрать такой возможный вектор, который в критериальном пространстве расположен ближе всех к некоторому «идеальному» вектору.

При этом в качестве «идеального» нередко берется вектор, составленный из максимальных значений компонент векторного критерия, а варьирование метрики для измерения расстояния в критериальном пространстве приводит к целому семейству однотипных вариантов метода целевого программирования, которые, однако, могут приводить к различным конечным результатам [1].

Для обоснованного выбора той или иной метрики никаких четких рекомендаций не выработано; здесь чаще всего исходят из соображений простоты, а именно, − применяют такую метрику, чтобы получающаяся в итоге экстремальная задача приближения была наиболее простой в вычислительном отношении.

Пусть имеется набор критериев $f_1,\dots,f_p$, каждый из которых желательно максимизировать на множестве возможных решений X.

В обозначениях нашей задачи в рамках метода целевого программирования в качестве лучшего, выбирается такое решение $x^* \in X$, для которого вектор $f(x^*) = (f_1(x^*),\dots,f_p(x^*))$ находится на наименьшем расстоянии от некоторого «идеального» вектора $f(x^0) = (\max\limits_{x\in P(x)} f_1(x), \dots, \max\limits_{x\in P(x)} f_p(x))$, составленного из максимальных значений частных критериев [1].

Необходимо отметить, что использование некоторых метрик в рамках целевого программирования может приводить к решениям, которые не являются Парето-оптимальными.

Поэтому в целевом программировании значительное место уделяется нахождению условий, при которых использование той или иной метрики заведомо приводит к Парето-оптимальным решениям [1].

Справедлива теорема Карлина. Если X – выпуклый метрический компакт, $f_i(x)$ вогнуты на нем, а x^0 – оптимальная по Парето альтернатива, то существует такой набор чисел

$$\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

что критерий $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$ достигает своего максимума в точке $x^0 \in X$.

Пусть производится максимизация векторной функции $f(Y) = \big(f_1(Y),..,f_n(Y)\big), Y = (y_1,..,y_m)$ на критериальном пространстве $f(G), G -$ выпуклое замкнутое множество, при ограничениях $g(Y) \geq 0, Y \in G$ (предполагается, что векторные функции f и g вогнутые функции переменной Y).

Допустим, что точка Y^0, удовлетворяющая ограничениям, является эффективной точкой, если не существует другого допустимого вектора Y, для которого $f(Y) \geq f(Y^0)$.

Согласно теореме, если Y^0 является эффективной точкой, то существует такой вектор $a = (a_1,..,a_n)$, $a_i \geq 0$, удовлетворяющими равенству $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, что максимум функции $\Phi(Y) = (\alpha, f(Y))$ на множестве всех Y, удовлетворяющих ограничениям $g(Y) \geq 0, Y \in G$, достигается для $Y = Y^0$.

Для аддитивной свертки известны необходимые (теорема Карлина) и достаточные условия Парето-оптимальности.

Для обобщенного критерия на основе порядковых операторов взвешенного агрегирования [7,12,19,21] в работе [1] приводятся:

Теорема 1. *OWA-оператор является строго монотонным по каждому аргументу.*

Доказательство. Пусть $A = (a_1,..,a_n), w = (w_1,..,w_n)$, $F(W,A) = (W,B) = \sum_{i=1}^{n} w_i b_i$, где вектор B определяется из вектора A путем упорядочения элементов вектора A по невозрастанию.

Рассмотрим вектор $A' = (a_1,..,a_{l-1}, a_l + \delta, a_{l+1},..,a_n)$, который получен из A увеличением компоненты a_l на величину $\delta > 0$.

Предположим, что a_l в векторе B соответствует компоненте b_i, тогда b_i также увеличится на δ, что приведет к переупорядочению вектора B, при этом b_i переместится на k –е место, причем $k < i$.

Компоненты полученного при этом вектора B' определяются следующим образом:

$$b'_j = b_j, j = \overline{1, k-1},$$
$$b'_k = b_i + \delta,$$
$$b'_j = b_{j-1}, j = \overline{k+1, \imath},$$
$$b'_j = b_j, j = \overline{\imath+1, n}.$$

В этом случае

$$F(W,A') = (W,B') == \sum_{J=1}^{n} w_j b'_j = \sum_{j=1}^{k-1} w_j b_j + w_k(b_i + \delta) + \sum_{j=k+1}^{i} w_j b_{j-1} + \sum_{j=i+1}^{n} w_j b_j.$$

Тогда

$$F(W,A') - F(W,A) = \sum_{J=1}^{n} w_j b'_j - \sum_{J=1}^{n} w_j b_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} w_j b_j + w_k(b_i + \delta) + \sum_{j=k+1}^{i} w_j b_{j-1} + \sum_{j=i+1}^{n} w_j b_j - \sum_{j=1}^{n} w_j b_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} w_j b_j + w_k(b_i + \delta) + \sum_{j=k+1}^{i} w_j b_{j-1} +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n} w_j b_j - \sum_{j=1}^{k-1} w_j b_j - w_k b_k - \sum_{j=k+1}^{i} w_j b_j - \sum_{j=i+1}^{n} w_j b_j =$$

$$= w_k(b_i + \delta - b_k) + \sum_{j=k+1}^{i} w_j (b_{j-1} - b_j) > 0,$$

т.к. $b_i + \delta > b_k$ и $\forall i (b_{j-1} \geq b_j)$. Следовательно, $F(W,A') > F(W,A)$, и теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть X – множество вариантов решений; $f_i(x)$ – частная оценка решения $x \in X$ по i-му критерию; $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ – векторная оценка решения x (множество векторных оценок образует критериальное пространство).*

Пусть обобщенная оценка решения $x \in X$ формируется на основе порядкового оператора агрегирования в виде

$$F\big(W, f(x)\big) = \sum_{i=1}^{p} w_i \hat{f}_i(x),$$

где, $\hat{f}(x) = f(x) \downarrow, W = \left(w_1, \dots, w_p\right)$ *– вектор весов, причем* $\forall i = \overline{1, p}$ $\quad (w_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{p} w_i = 1)$.

Тогда справедливо включение

$$X(W) \subset P(X),$$

где, $X(W) = \{arg \max_{x \in P(x)} F(W, f(x))\}$, $P(X)$ *– множество оптимальных по Парето решений.*

Доказательство. Зафиксируем вектор весов $W = \widetilde{W}$, тогда функция $F(W^0, f(x))$ на множестве X достигает своего максимума, т.е. $\exists x^* \in X(\widetilde{W})$.

Покажем, что решение является оптимальным по Парето, т.е. для любого другого решения $y \in X \backslash P(X)$ выполняется соотношение

$$\forall i = \overline{1, n} \; (f_i(x^*) \geq f_i(y)) \text{ и } \exists i_0 \; (f_{i_0}(x^*) > f_{i_0}(y)).$$

Предположим противное: решение x^* не является Парето-оптимальным, т.е. $x^* \notin P(X)$. Это означает, что существует решение $x' \in X(W)$ такое, что

$$\forall i \big(f_i(x^*) < f_i(x')\big).$$

Вычислив обобщенные оценки $F(\widetilde{W}, f(x'))$ и $F(\widetilde{W}, f(x^*))$ для решений x' и x^*, получим, что в силу монотонности порядкового оператора агрегирования, выполняется

$$F\left(\widetilde{W}, f(x')\right) > F(\widetilde{W}, f(x^*)),$$

что противоречит тому факту, что $x^* \in X\big(\widetilde{W}\big)$.

Таким образом, предположение не верно, и $x^* \in P(X)$. Теорема доказана.

В [1] сформулирована и доказана следующая Теорема 3. *Пусть* x^* *– решение задачи (2) для некоторого вектора весов* $\widehat{W} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_p)^T$*, т.е.* $x^* = arg \max_{x \in P(x)} \sum_{i=1}^{p} \widehat{w}_i f_i(x)$*, тогда для всякого целого* m x^* *является решением задачи (3) с метрикой*

$$P_{\widehat{W}}^{(m)}\big(f(x), f(x^0)\big) = \left(\sum_{i=1}^{p} \widehat{w}_i \, |f_i(x) - f_i(x^0)|^m\right)^{1/m}.$$

Доказательство. Доказательство существования метрики сводится к доказательству существования положительных коэффициентов $\widetilde{w}_i$ и чисел $m \in N$.

В силу того, что оптимальная точка x^*, полученная при решении задачи (2), должна минимизировать некоторую метрику на Парето-множестве, имеет место система из m неравенств с p неизвестными $\widetilde{w}_i$, $i = \overline{1, p}$:

$$\begin{cases} \rho(x^*, x^0) \leq \rho(x^k, x^0), \forall k = 1, m, \\ \widetilde{w}_i > 0, i = \overline{1, p}. \end{cases} \tag{4}$$

Из совместности данной системы и следует существование метрики.

Следовательно, необходимо доказать совместность данной системы, и, тем самым будет доказана теорема. Запишем данную систему (4) более подробно:

$$\begin{cases} \widetilde{w}_1 |x_1^* - x_1^0| + .. + \widetilde{w}_p \left|x_p^* - x_p^0\right| \leq \widetilde{w}_1 \left|x_1^k - x_1^0\right| + .. + \widetilde{w}_p \left|x_p^k - x_p^0\right|, \forall k = 1, m, \\ \widetilde{w}_i > 0, i = \overline{1, p}. \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \widetilde{w}_1 |x_1^* - x_1^0| + .. + \widetilde{w}_p \left|x_p^* - x_p^0\right| - \widetilde{w}_1 \left|x_1^k - x_1^0\right| - .. - \widetilde{w}_p \left|x_p^k - x_p^0\right| \leq 0, \forall k = 1, m, \\ \widetilde{w}_i > 0, i = \overline{1, p}. \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \widetilde{w}_1(|x_1^* - x_1^0| - |x_1^k - x_1^0|) + .. + \widetilde{w}_p(|x_p^* - x_p^0| - |x_p^k - x_p^0|) \le 0, \forall k = 1, m, \\ \widetilde{w}_i > 0, i = \overline{1,p}. \end{cases}$$

$$\downarrow$$

Так как x^0 – идеальная точка, то $x^* \le x^0$ и $x^k \le x^0$, и система (4) примет вид

$$\begin{cases} \widetilde{w}_1(x_1^k - x_1^*) + .. + \widetilde{w}_p(x_p^k - x_p^*) \le 0, \forall k = 1, m, \\ \widetilde{w}_i > 0, i = \overline{1,p}. \end{cases}$$

Предположим, что данная система решений не имеет, т.е.

$$\bigcap_k \left\{ (w_1, .. w_p) : \sum_{i=1}^{p} \widetilde{w}_i (x_i^k - x_i^*) > 0 \right\} \bigcap \{ (w_1, .. w_p) : w_1 > 0, .., w_p > 0 \} = \emptyset.$$

Тогда

$$R^n \setminus \left\{ \bigcap_k \left\{ (w_1, .. w_p) : \sum_{i=1}^{p} \widetilde{w}_i (x_i^k - x_i^*) > 0 \right\} \bigcap \{ (w_1, .. w_p) : w_1 > 0, .., w_p > 0 \} \right\} = \\ = R^n$$

или же

$$\bigcup_k \left\{ (w_1, .. w_p) : \sum_{i=1}^{p} \widetilde{w}_i (x_i^k - x_i^*) > 0 \right\} \bigcup \{ (w_1, .. w_p) : w_1 > 0, .., w_p > 0 \} = R^n,$$

из чего следует, что

$$\{ (w_1, .. w_p) : w_1 > 0, .., w_p > 0 \} \subseteq \bigcup_k \left\{ (w_1, .. w_p) : \sum_{i=1}^{p} \widetilde{w}_i (x_i^k - x_i^*) > 0 \right\}.$$

Значит, совокупность неравенств

$$\widetilde{w}_1 (x_1^k - x_1^*) + .. + \widetilde{w}_p (x_p^k - x_p^*) \ge 0, \forall k = \overline{1,m}$$

выполняется для любого набора $w_1 > 0, .., w_p > 0$, в том числе и для набора $\alpha_1 > 0, .., \alpha_p > 0$.

Тогда,

$$\alpha_1 (x_1^k - x_1^*) + .. + \alpha_p (x_p^k - x_p^*) \ge 0, \forall k = \overline{1,m} \to \\ \exists l = \overline{1,m} : \alpha_1 x_1^l + .. + \alpha_p x_p^l > \alpha_1 x_1^* + .. + \alpha_p x_p^*,$$

что невозможно, т.к. точка $(x_1^*, .., x_p^*)$ является точкой максимума линейной свертки. Фактически мы доказали, что набор $(\alpha_1, .., \alpha_p)$ является решением системы (4), что подтверждает ее совместность. Теорема доказана.

Обсуждение результатов. В работе [1] и в настоящей статье приведена и доказана теорема о Парето-оптимальности решения, максимизирующего обобщенный критерий, полученный на основе порядковых операций взвешенного агрегирования, которая обосновывает использование операций данного типа для решения задач векторной оптимизации или многокритериального выбора.

Теорема о существовании аддитивной свертки для метрики верна только в частном случае и основана на теореме Карлина, согласно которой подмножество точек Парето-множества максимизирует некоторую аддитивную свертку.

Для задачи (например, при наличии двух критериев) теорему Карлина нужно понимать следующим образом: если каждые две соседние точки из некоторого подмножества $P' \subset P(X)$ можно соединить отрезками так, что полученная ломаная вместе с осями координат ограничивает выпуклое множество, то любая из этих точек максимизирует некоторую аддитивную свертку.

Из доказательства утверждения следует, что в случае метрики со значением $m = 1$ аддитивная свертка существует всегда.

Также стоит отметить, что обратное верно не всегда: можно привести пример, показывающий, что точка, минимизирующая некоторую метрику, не всегда максимизирует аддитивную свертку.

Вывод. В статье рассматривается связь между множеством Парето и множеством выбора, которое включает решения, максимизирующие некоторую функцию агрегирования.

Сформулировано и доказано утверждение о взаимосвязи параметров функции расстояния в методе целевого программирования и весовых коэффициентов аддитивной свертки, которая обеспечивает эквивалентность оптимальных решений по Парето.

Библиографический список:

1. Аристова Е.М. Учет взаимодействия между целевыми функциями и их агрегирование в задачах оптимизации: дис. канд. физ.-мат. наук. – Воронеж, 2012. – 152 с.
2. Ашманов С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С.А. Ашманов, А.В.Тимохов. – М.: Лань, 2012. – 448 с.
3. Зайцев М.Г. Методы оптимизации, управления и принятия решений. Примеры, задачи, кейсы. Учебное пособие / М.Г. Зайцев, С.Е. Варюхин. – М.:РАНХиГС, 2015. – 640 с.
4. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Физматлит, 2004. – 263 с.
5. Струченков В.И. Прикладные задачи оптимизации. Модели, методы, алгоритмы / В.И. Струченков. – М.: Солон-Пресс, 2016. – 314 с.
6. Кравченко Т.К. Системы поддержки принятия решений / Т.К. Кравченко, Д.В. Исаев. – М.: Юрайт, 2017. – 292 с.
7. Леденева Т. М. Модели и методы принятия решений: учебное пособие / Т. М. Леденева. – Воронеж: ВГТУ, 2004. – 189 с.
8. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях / В.Д. Ногин. – СПб.: Издательство ЮТАС, 2007. – 104 с.
9. Орлов А.И. Теория принятия решений / А.И. Орлов. – М.: Экзамен, 2006. – 573 с.
10. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев / В.В. Подиновский. – М.: Физматлит, 2007. – 64 с.
11. Трофимова Л.А. Методы принятия управленческих решений: учебник для бакалавров / Л.А. Трофимова, В.В. Трофимов. – М.: Юрайт, 2013. – 335 с.
12. Аристова Е.М. Упрощение задачи линейной многокритериальной оптимизации с помощью метода агрегирования // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012. – №2. – С.11-17.
13. Мелькумова Е.М. (Аристова, Е.М.) Один из подходов к решению задачи многокритериальной оптимизации // Вестник ВГУ. Серия Системный анализ и информационные технологии / Е.М. Мелькумова. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2010. – №2. – С. 39-42.
14. Баева Н.Б. Основы теории и вычислительные схемы векторной оптимизации. Учебное пособие / Н.Б. Баева, Ю.В. Бондаренко. – Воронеж: Издательство ВГУ, 2003. – 86 с.
15. Carlsson C. Multiple Criteria Decision Making: The Case for Interdependence / C. Carlsson, R. Fuller // Computers and Operations Research. – №22. – 1995. – pp. 251-260.
16. Sakawa M., Nishizaki I., Katagiri H. Fuzzy stochastic multiobjective programming. New York, NY: Springer; 2011. № XII. 264.
17. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 250 с.

18. Хоменюк В.В. Элементы теории многоцелевой оптимизации / В.В. Хоменюк. – М.: Наука, 1983. – 124 с.
19. Torra V. Modeling Decisions: Information Fusion and Aggregation Operators / V. Torra V, Y. Narukawa. – Springer: Berlin, 2007. – 284 p.
20. Liu X. The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators / X. Lui // International Journal of Approximate Reasoning. – 2007. – №45. – PP. 68-81.
21. Юдин Д.Б. Линейное программирование. Теория, методы и приложения / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Красанд, 2012. – 424 с.

References:

1. Aristova E.M. Uchet vzaimodeystviya mezhdu tselevymi funktsiyami i ikh agregirovanie v zadachakh optimizatsii. Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk. Voronezh; 2012. 152 s. [Aristova E.M. Considering the interaction between target fuctions and their aggregation in optimisation problems. Dissertation of a PhD degree in Physics and Mathematical Sciences. Voronezh; 2012. 152 p. (in Russ.)]
2. Ashmanov S.A., Timokhov A.V. Teoriya optimizatsii v zadachakh i uprazhneniyakh. M.: Lan'; 2012. 448 s. [Ashmanov S.A., Timokhov A.V. Optimisation theory in tests and exercises. Moscow: Lan'; 2012. 448 s. (in Russ.)]
3. Zaytsev M.G., Varyukhin S.E. Metody optimizatsii, upravleniya i prinyatiya resheniy. Primery, zadachi, keysy. Uchebnoe posobie. M.: RANKhiGS; 2015. 640 s. [Zaytsev M.G., Varyukhin S.E. Methods of optimisation, control and decision-making. Examples, tests, cases. Tutorial. Moscow: RANKhiGS; 2015. 640 p. (in Russ.)]
4. Karmanov V.G. Matematicheskoe programmirovanie. M.: Fizmatlit; 2004. 263 s. [Karmanov V.G. mathematical programming. Moscow: Fizmatlit; 2004. 263 p. (in Russ.)]
5. Struchenkov V.I. Prikladnye zadachi optimizatsii. Modeli, metody, algoritmy. M.: Solon-Press; 2016. 314 s. [Struchenkov V.I. Applied tasks of optimisation. Models, methods, algorithms. Moscow: Solon-Press; 2016. 314 p. (in Russ.)]
6. Kravchenko T.K., Isaev D.V. Sistemy podderzhki prinyatiya resheniy. M.: Yurayt; 2017. 292 s. [Kravchenko T.K., Isaev D.V. Decision-making support systems. Moscow: Yurayt; 2017. 292 s. (in Russ.)]
7. Ledeneva T.M. Modeli i metody prinyatiya resheniy: uchebnoe posobie. Voronezh: VGTU; 2004. 189 s. [Ledeneva T.M. Models and methods of decision-making: a tutorial. Voronezh: VGTU; 2004. 189 p. (in Russ.)]
8. Nogin V.D. Prinyatie resheniy pri mnogikh kriteriyakh. SPb.: Izdatel'stvo YuTAS; 2007. 104 s. [Nogin V.D. Decision-making with multiple criteria. Saint-Petersburg: Izdatel'stvo YuTAS; 2007. 104 p. (in Russ.)]
9. Orlov A.I. Teoriya prinyatiya resheniy. M.: Ekzamen; 2006. 573 s. [Orlov A.I. Theory of decision-making. Moscow: Ekzamen; 2006. 573 p. (in Russ.)]
10. Podinovskiy V.V. Vvedenie v teoriyu vazhnosti kriteriev. M.: Fizmatlit; 2007. 64 s. [Podinovskiy V.V. Introduction to criteria importance theory. Moscow: Fizmatlit; 2007. 64 p. (in Russ.)]
11. Trofimova L.A., Trofimov V.V. Metody prinyatiya upravlencheskikh resheniy: uchebnik dlya bakalavrov. M.: Yurayt; 2013. 335 s. [Trofimova L.A., Trofimov V.V. The methods of managerial decision-making: a tutorial for batchelors. Moscow: Yurayt; 2013. 335 p. (in Russ.)]
12. Aristova E.M. Uproshchenie zadachi lineynoy mnogokriterial'noy optimizatsii s pomoshch'yu metoda agregirovaniya. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Sistemnyy analiz i informatsionnye tekhnologii. 2012;2:11-17. [Aristova E.M. The simplification of linear multiple criteria optimisation problem using aggregation method. Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems analysis and information technologies. 2012;2:11-17. (in Russ.)]
13. Mel'kumova E.M. (Aristova E.M.) Odin iz podkhodov k resheniyu zadachi mnogokriterial'noy optimizatsii. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Sistemnyy analiz i informatsionnye tekhnologii. 2010;2:39-42. [Mel'kumova E.M. (Aristova E.M.). One of the approaches to the solution of multiple criteria optimisation problem. Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems analysis and information technologies. 2010;2:39-42. (in Russ.)]
14. Baeva N.B., Bondarenko Yu.V. Osnovy teorii i vychislitel'nye skhemy vektornoy optimizatsii. Uchebnoe posobie. Voronezh: Izdatel'stvo VGU; 2003. 86 s. [Baeva N.B., Bondarenko Yu.V. Theory

fundamentals and calculation schemes of vector optimisation. A tutorial. Voronezh: Izdatel'stvo VGU; 2003. 86 p. (in Russ.)]

15. Carlsson C., Fuller R. Multiple criteria decision making: The Case for Interdependence. Computers and Operations Research. 1995;22:251-260.
16. Sakawa M., Nishizaki I., Katagiri H. Fuzzy stochastic multiobjective programming. New York, NY: Springer; 2011. № XII. 264 p.
17. Podinovskiy V.V., Nogin V.D. Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach. M.: Nauka; 1982. 250 s. [Podinovskiy V.V., Nogin V.D. Pareto-optimal solutions of multiple criteria problems. Moscow: Nauka; 1982. 250 p. (in Russ.)]
18. Khomenyuk V.V. Elementy teorii mnogotselevoy optimizatsii. M.: Nauka; 1983. 124 s. [Khomenyuk V.V. Elements of multi-objective optimisation theory. Moscow: Nauka; 1983. 124 p. (in Russ.)]
19. Torra V., Narukawa Y. Modeling Decisions: Information Fusion and Aggregation Operators. Springer: Berlin; 2007. 284 p.
20. Liu X. The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators. International Journal of Approximate Reasoning. 2007;45:68-81.
21. Yudin D.B., Gol'shteyn E.G. Lineynoe programmirovanie. Teoriya, metody i prilozheniya. M.: Krasand; 2012. 424 s. [Yudin D.B., Gol'shteyn E.G. Linear programming. Theory, methods and applications. Moscow: Krasand; 2012. 424 s. (in Russ.)]

Сведения об авторе:
Аристова Екатерина Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент.
Information about the author:
Ekaterina M. Aristova – Cand. Sci.(Physics and Mathematical), Assoc.Prof.

Конфликт интересов. **Conflict of interest**.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.The author declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 15.05.2017. **Received** 15.05.2017.
Принята в печать 26.06.2017. **Accepted for publication** 26.06.2017.