Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 2, 147 – 171

Оценки вращения при конформных и квазиконформных отображениях

В. Я. Гутлянский, О. Мартио

Аннотация. В классе S однолистных аналитических функций в единичном круге дано решение экстремальной задачи о точных оценках произвольного функционала, зависящего от аргумента производной и углового смещения в фиксированной точке. Решение основано на дифференциальном уравнении Левнера и редукции задачи в известный класс Каратеодори. Установлены новые оценки типа Ф. Джона–П. П. Белинского для вращения радиальных сегментов при квазиконформных отображениях на плоскости.

2000 MSC. 30C55, 30C60.

Ключевые слова и фразы. Вращение, угловое смещение, конформные и квазиконформные отображения.

1. Введение

Оценки углового смещения и вращения при конформных и более общих отображениях играют важную роль в геометрической теории функций и являются предметом интенсивных исследований, см., например, [3], [6], [7], [14], [17], [21], [24].

Пусть S обозначает семейство функций $f(z)$, однолистных и аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ с центром в начале координат и нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

В 1919 году Л. Бибербах [5] установил первоначальную форму теоремы вращения доказав, что в классе S при фиксированном $z \in \mathbb{D}$ справедливо неравенство

$$|\arg f'(z)| \leq 2 \log \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

Статья поступила в редакцию 1.12.2003

ISSN 1810 – 3200.

где рассматривается ветвь $\arg f'(z)$, принимающая в начале координат нулевое значение. Название теоремы происходит от хорошо известного геометрического смысла аргумента производной однолистной аналитической функции. Однако эта оценка оказалась не наилучшей. Спустя почти 17 лет, Г. М. Голузин [7] получил окончательное решение проблемы вращения, доказав для функций класса S, ставшие теперь классическими, следующие точные оценки:

$$|\arg f'(z)| \le \begin{cases} 4 \arcsin |z|, & |z| \le 1/\sqrt{2} \\ \pi + \log \frac{|z|^2}{1-|z|^2}, & 1/\sqrt{2} \le |z| < 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Следует отметить, что полный анализ знаков равенства был выполнен И. Е. Базилевичем [2]. Решение было получено на основе дифференциального уравнения К. Левнера [22] и явилось одним из первых ярких примеров эффективности параметрического метода в теории функций и приложениях.

В 1932 году Х. Грунский [10] установил точное неравенство в классе S

$$\left|\log \frac{f(z)}{z} + \log(1-|z|^2)\right| \le \log \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

где под $\log(f(z)/z)$ понимается непрерывная ветвь, стремящаяся к нулю при $z \to 0$, и, как следствие, получил следующую точную оценку углового смещения при конформном отображении

$$\left|\arg \frac{f(z)}{z}\right| \le \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Оценки угловых смещений, вращений и различных их комбинаций играют важную роль при исследовании геометрических свойств конформных отображений. Например, точные оценки функционала на классе S

$$|\arg f'(z) - \arg(f(z)/z)| \le \log \frac{1+|z|}{1-|z|}, \tag{1.2}$$

доказанные в работе [10], позволили определить так называемый радиус звездности

$$r^* = \frac{e^{\pi/2}-1}{e^{\pi/2}+1} = 0.655...$$

для функций класса S. Последнее означает, что образ любого круга $|z| < r < r^*$ при отображении любой функцией класса S представляет собой область звездообразную относительно начала координат. Точные оценки функционала

$$|\arg f'(z) - 2\arg(f(z)/z)| \le -\log(1-|z|^2), \quad f \in S, \tag{1.3}$$

привели к решению проблемы вращения в классе Σ, состоящим из всех мероморфных и однолистных функций $F(z)$ в области $|z| > 1$ с разложением в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ вида $F(z) = z + a_0 + a_1/z + \ldots$, см. [21]. Оценки других функционалов в классах однолистных аналитических функций, содержащих $\arg f'(z)$ и $\arg(f(z)/z))$, и их приложения к изучению геометрии конформного отображения, можно найти, например, в работах [13], [16] и [19].

Задачи вращения несколько иного рода возникают при изучении более общих отображений, чем конформные. Одна из таких задач, из нелинейной теории упругости, восходит к Ф. Джону [17] и сводится к следующему. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определяет $(1+\varepsilon)$ — билипшицеву деформацию некоторого упругого тела на плоскости. Каковы пределы роста напряжения внутри кольца $a < |z| < b$, если круг $|z| < a$ жестко повернуть на угол θ, а область $|z| > b$ оставить неподвижной? Ф. Джон, привлекая созданную им и Л. Ниренбергом [18] теорию функций с ограниченным средним колебанием, доказал, что

$$|\theta| \le C\,(1 + \log(b/a))\,\varepsilon.$$

Точное решение этой проблемы в равномерной и интегральной метрике получено в [14] на основе погружения класса билипшицевых деформаций в более общий класс квазиконформных отображений.

Другой пример относится к оценкам вращения при квазиконформных отображениях. Хорошо известно, что квазиконформное отображение является регулярным, то есть дифференцируемым с отличным от нуля якобианом, лишь почти всюду в области определения. Например, гомеоморфизм комплексной плоскости вида

$$f(z) = ze^{i\log|z|}$$

является билипшицевым, и стало быть, квазиконформным. Это отображение не дифференцируемо в точке $z = 0$ и преобразует радиальные лучи, выходящие из начала координат, в бесконечно навивающиеся вокруг начала координат логарифмические спирали. Таким образом, для квазиконформных отображений не следует ожидать локальных оценок вращения, подобных тем, которые имеют место в конформном случае. Здесь актуальными являются оценки угловых смещений и вращений радиальных сегментов. Одним из первых результатов в этом направлении является следующая лемма П. П. Белинского [3], см. также [4], с. 47. Пусть двусвязная область G, ограниченная кривыми Γ_1 и Γ_2, лежащими соответственно в кольцах $r/(1+\varepsilon) \le |z| \le r(1+\varepsilon)$ и $1/(1+\varepsilon) \le |z| \le (1+\varepsilon)$, отображается посредством функции $w = f(z)$ квазиконформно на кольцо $R \le |w| \le 1$,

$f(1) = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\min_{|z|=r} \left|\arg \frac{f(z)}{z}\right| - \max_{|z|=1} \left|\arg \frac{f(z)}{z}\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{G} \frac{K_f(z) - 1}{|z|^2}\, dx\, dy + 2\varepsilon \left(1 + \frac{\log r}{\log R}\right),$$

где $K_f(z) = (1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|)$ — локальный коэффициент искажения отображения f в точке z, и под $\arg(f(z)/z)$ понимается та ветвь аргумента, которая получается при непрерывном переходе от точки $z = 1$ и соответственно ее образа в плоскости w, причем $\arg 1 = 0$. Отметим, что приведенное выше неравенство явилось одним из ключевых при доказательстве классической теоремы Тейхмюллера–Виттиха–Белинского о конформной дифференцируемости квазиконформного отображения в фиксированной точке, см. [20], с. 232. Она гласит, что если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ — квазиконформное отображение с комплексной дилатацией $\mu(z)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{|\mu(z)|}{|z|^2}\, dx\, dy < \infty,$$

то существует

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0) \neq 0, \infty.$$

В данной работе дано решение общей задачи вращения и углового смещения в классе S и некоторых его подклассах на основе дифференциального уравнения Левнера и редукции задачи в известный класс Каратеодори. Установлены новые теоремы о вращении радиальных сегментов при квазиконформных и более общих гомеоморфизмах плоских областей. На основе этих теорем получены интегральные оценки в задаче вращения Ф. Джона, зависящие от модуля и аргумента комплексной дилатации $\mu(z)$.

2. Вращение при конформных отображениях

Пусть $I(f) = J(\arg(f(z_0)/z_0), \arg f'(z_0))$ — произвольный непрерывный функционал, зависящий от углового смещения $\arg(f(z_0)/z_0)$ и вращения $\arg f'(z_0)$ отображения $f \in S$ в фиксированной точке $z_0 \in \mathbb{D}$. Обозначим через Ω^* множество значений комплекснозначного функционала

$$Z(f) \equiv \arg \frac{f(z_0)}{z_0} + i \arg f'(z_0) = U + iV, \ f \in S,$$

где $z_0 \in \mathbb{D}$ и фиксировано. Тогда

$$\max_S J(\arg(f(z_0)/z_0), \arg f'(z_0)) = \max_{\Omega^*} J(U, V),$$

и для решения общей задачи достаточно определить множество Ω^*. Очевидно, что вместо функционала $Z(f)$ можно рассмотреть любой другой линейный комплекснозначный функционал, зависящий от $\arg(f(z_0)/z_0)$ и $\arg f'(z_0)$, например,

$$W(f) \equiv \arg \frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + i \arg f'(z_0) = X + iY,\ f \in S.$$

Действительно, если обозначить через Ω множество значений функционала $W(f)$, то мы определим и Ω^* как образ Ω при линейном отображении вида

$$\begin{cases} U = -\frac{1}{2}\,[X - Y] \\ V = Y. \end{cases}$$

В заметке [11] был предложен новый подход к исследованию экстремальных задач для однолистных аналитических функций, основанный на дифференциальном уравнении Левнера и редукции задач в класс $\mathcal{C}$ - Каратеодори аналитических функций $p(z)$ в круге $\mathbb{D}$ с положительной вещественной частью и нормировкой $p(0) = 1$. Ниже мы исследуем этим методом задачу об определении множества Ω, геометрия которого, как мы увидим ниже, особенно простая.

Напомним, что по теореме Рисса–Герглотца, класс $\mathcal{C}$ имеет интегральное представление

$$p(z) = \int\limits_{|\eta|=1} \frac{1 + z\eta}{1 - z\eta} d\mu(\eta),$$

где μ — вероятностная мера на единичной окружности. Этот класс функций является компактным в топологии локально равномерной сходимости в $\mathbb{D}$ и выпуклым подмножеством в пространстве всех аналитических функций в единичном круге. Далее, пусть $\mathcal{C}(0, T)$ обозначает класс функций $p(z, t)$, $z \in \mathbb{D}$, $t \in [0, T)$, измеримых по t при фиксированном z и таких, что $p(\cdot, t) \in \mathcal{C}$ для почти всех $t \in [0, T)$.

Предложение 2.1. *Определим линейное отображение $L : \mathcal{C}(0, 1) \to$ $\to \mathbb{C}$ по формуле*

$$L(p) = \int\limits_0^{|z_0|} \operatorname{Im}\left(\frac{\rho}{1 - \rho^2} p'_z(0, \rho) - p(\rho, \rho)\right) \frac{d\rho}{\rho} +$$

$$+\,i\int\limits_0^{|z_0|}\mathrm{Im}\left(\frac{\rho}{1-\rho^2}p'_z(0,\rho)+p(\rho,\rho)\right)\frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.1)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *Для любого отображения $f\in S$ существует функция $p\in\in\mathcal{C}(0,1)$ такая, что $W(f)=L(p)$;*

2) *Для каждой функции $p\in\mathcal{C}(0,1)$ существует единственное конформное отображение $f\in S$, такое что $L(p)=W(f)$. При этом f определяется по формуле*

$$f(z)=\lim_{t\to\infty}e^t\omega(z,t;h),$$

где $\omega(z,t;h)$ — решение дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{d\omega}{dt}=-\omega h(\omega,t)\quad \textit{для п.в. } t\in[0,\infty) \quad (2.2)$$

с начальным условием

$$\omega|_{t=0}=z,\ \ z\in\mathbb{D}, \quad (2.3)$$

и правой частью вида

$$h(\omega,t)=\frac{p\left(\frac{\rho-\omega e^{-i\theta}}{1-\rho\omega e^{-i\theta}},\,\rho\right)-i\mathrm{Im}\,p(\rho,\rho)}{\mathrm{Re}\,p(\rho,\rho)}. \quad (2.4)$$

Здесь ρ и θ, как функции параметра t, определяются из уравнений

$$t=\int\limits_0^r\mathrm{Re}\,\frac{p(\rho,\rho)d\rho}{\rho},\quad \theta=\arg z_0+\int\limits_0^r\mathrm{Im}\,\frac{p(\rho,\rho)d\rho}{\rho}; \quad (2.5)$$

3) *Множество Ω значений функционала $W(f)$ на классе S имеет представление*

$$\Omega=L(\mathcal{C}(0,1)).$$

Доказательство. Хорошо известна следующая связь между функциями классов S и $\mathcal{C}(0,\infty)$:

$$f\in S\Leftrightarrow\ f=\lim_{t\to\infty}e^t\omega(z,t;h),\ \ h\in\mathcal{C}(0,\infty),$$

где $\omega(z,t;h)$ — решение дифференциального уравнения Левнера (2.2) с начальным условием (2.3), см., например, [23], гл. 6, [1], гл. 1, § 6.

Непосредственно из уравнения Левнера при фиксированном $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$, следует, что

$$\arg \frac{f(z_0)}{z_0} = -\int\limits_0^\infty \mathrm{Im} h(\omega_0, t)\, dt \tag{2.6}$$

и

$$\arg f'(z_0) = -\int\limits_0^\infty \mathrm{Im}(\omega_0 h'_\omega(\omega_0, t) + h(\omega_0, t))\, dt, \tag{2.7}$$

где $\omega_0 = \omega(z_0, t; h)$. Положим $\rho(t) = |\omega(z_0, t; h)|$ и $\omega(z_0, t; h) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, и заметим, что

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\rho(t)\mathrm{Re}\, h(\omega_0(t), t) < 0 \tag{2.8}$$

для почти всех $t \in [0, \infty)$. Таким образом, $\rho(t)$ — монотонно убывающая функция переменной t. Это позволяет выполнить под знаками интегралов в соотношениях (2.6), (2.7) замену переменной $t \mapsto \rho$. Замечая, что $\rho(0) = |z_0|$ и $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 0$, получаем формулы

$$\arg \frac{f(z_0)}{z_0} = -\int\limits_0^{|z_0|} \frac{\mathrm{Im} h(\omega_0, t(\rho))}{\mathrm{Re} h(\omega_0, t(\rho))} \frac{d\rho}{\rho} \tag{2.9}$$

и

$$\arg f'(z_0) = -\int\limits_0^{|z_0|} \frac{\mathrm{Im}(\omega_0 h'_\omega(\omega_0, t(\rho)) + h(\omega_0, t(\rho)))}{\mathrm{Re} h(\omega_0, t(\rho))} \frac{d\rho}{\rho}. \tag{2.10}$$

Чтобы линеаризовать эти формулы, заметим, что если $h(\omega, t) \in \mathcal{C}(0, \infty)$, то функция

$$p(\omega, \rho) = \frac{h\left(e^{i\theta(t)} \frac{\rho-\omega}{1-\rho\omega},\ t\right) - i\mathrm{Im}\, h(\omega_0,\ t)}{\mathrm{Re}\, h(\omega_0,\ t)}, \tag{2.11}$$

где $\omega_0 = \rho e^{i\theta(t)}$, $t = t(\rho)$, принадлежит классу $\mathcal{C}(0, 1)$. При этом формулы обращения имеют вид

$$h(\omega, t) = \frac{p\left(\frac{\rho-\omega e^{-i\theta}}{1-\rho\omega e^{-i\theta}},\ \rho\right) - i\mathrm{Im}\, p(\rho, \rho)}{\mathrm{Re}\, p(\rho, \rho)},$$

где ρ и θ, как функции параметра t, определяются из уравнений

$$t = \int\limits_0^r \mathrm{Re}\, \frac{p(\rho, \rho) d\rho}{\rho}, \quad \theta = \arg z_0 + \int\limits_0^r \mathrm{Im}\, \frac{p(\rho, \rho) d\rho}{\rho}.$$

Заменяя в формулах (2.9), (2.10) функцию h на p, приходим к следующим выражениям для значений аргументов функции и ее производной в фиксированной точке z_0 круга $\mathbb{D}$ в терминах $p(\omega, t)$:

$$\arg \frac{f(z_0)}{z_0} = \int_0^{|z_0|} \mathrm{Im} p(\rho, \rho) \frac{d\rho}{\rho},$$

и

$$\arg f'(z_0) = \int_0^{|z_0|} \mathrm{Im} \left(\frac{\rho}{1-\rho^2} p'_\omega(0, \rho) + p(\rho, \rho) \right) \frac{dt}{t}.$$

Тогда $W(f) = L(p)$, и мы завершаем доказательство первого утверждения предложения 2.1. Второе утверждение вытекает из отмеченных выше формул обращения. Последнее утверждение является прямым следствием первых двух. □

Непосредственно из предложения 2.1 и сделанного выше замечания о компактности и выпуклости класса $\mathcal{C}$ следует замкнутость, ограниченность и выпуклость множества Ω. Заметим, что вместе с функцией $p(z, t)$, классу $\mathcal{C}(0, 1)$ принадлежит также функция вида $\overline{p(\bar{z}, t)}$. При этом

$$L(\overline{p(\bar{z}, t)}) = -L(p(z, t)).$$

Следовательно, если точка $(X, Y) \in \Omega$, то множеству Ω принадлежит также точка $(-X, -Y)$. Более глубокий анализ предложения 2.1 позволит нам ниже установить симметрию множества Ω относительно обеих координатных осей.

Вторая часть предложения 2.1 может быть использована при определении экстремальных функций, см., например, [1], с. 137, [9].

Теорема 2.1. *Пусть $f \in S$ и $z_0 \in \mathbb{D}$. Тогда при любых вещественных значениях параметров A и B имеют место следующие точные оценки*

$$\max_{f \in S} \left[A \arg \frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + B \arg f'(z_0) \right] \le$$
$$\le \int_0^{|z_0|} \max_{p \in \mathcal{C}} \mathrm{Im} \left[m p(t) + \frac{\delta t}{1-t^2} p'(0) \right] \frac{dt}{t}, \quad (2.12)$$

где

$$m = B - A, \quad \delta = B + A.$$

При этом

$$\max_{p\in\mathcal{C}} \operatorname{Im} \left[mp(t) + \frac{\delta t}{1-t^2} p'(0) \right] = \max_{|\eta|=1} \operatorname{Im} \left[m \frac{1+t\eta}{1-t\eta} + \frac{2\delta t\eta}{1-t^2} \right] =$$

$$= \left| m + \frac{\delta}{x} \right| \sqrt{2\frac{1+t^2}{1-t^2}x - x^2 - 1}, \quad (2.13)$$

где $x = x(t)$ *— наибольший при* $|m| > |\delta|$, *и наименьший при* $|m| < |\delta|$, *положительный корень уравнения*

$$mx^3 - \frac{1+t^2}{1-t^2}mx^2 + \frac{1+t^2}{1-t^2}\delta x - \delta = 0. \quad (2.14)$$

Доказательство. Неравенство (2.12) является прямым следствием предложения 2.1. Далее, в силу формулы Рисса–Герглотца и известных положений выпуклого анализа, при каждом фиксированном значении $t \in [0, |z_0|]$,

$$\max_{p\in\mathcal{C}} \operatorname{Im} \left[mp(t) + \frac{\delta t}{1-t^2} p'(0) \right] = \max_{|\eta|=1} \operatorname{Im} \left[m \frac{1+t\eta}{1-t\eta} + \frac{2\delta t\eta}{1-t^2} \right].$$

Положим

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1+t\eta}{1-t\eta} \right) = x,$$

заметив при этом, что при изменении параметра η на единичной окружности, новый параметр x принимает значения из промежутка $R = [(1-t)/(1+t), (1+t)/(1-t)]$. В терминах новой переменной x

$$\max_{|\eta|=1} \operatorname{Im} \left[m \frac{1+t\eta}{1-t\eta} + \frac{2\delta t\eta}{1-t^2} \right] = \max_{x\in R} \left| m + \frac{\delta}{x} \right| \sqrt{2\frac{1+t^2}{1-t^2}x - x^2 - 1}.$$

Элементарные вычисления показывают, что искомый максимум достигается в точке $x_0 = x_0(t)$, где x_0 — наибольший при $|m| > |\delta|$, и наименьший при $|m| < |\delta|$, корень уравнения (2.14). $\square$

Замечание 2.1. *Первое утверждение теоремы* 2.1 *редуцирует экстремальную задачу об оценке функционала*

$$\max_{f\in S} \left[A \arg \frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + B \arg f'(z_0) \right]$$

на классе S *к линейной экстремальной задаче*

$$\max_{p\in\mathcal{C}} \operatorname{Im} \left[mp(t) + \frac{\delta t}{1-t^2} p'(0) \right]$$

в классе $\mathcal{C}$ *— Каратеодори.*

Теорема 2.2. *На классе S при фиксированном z_0, $0 < |z_0| = r < 1$ и произвольных вещественных A и B, справедливы точные оценки*

$$A \arg \frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + B \arg f'(z) \le \frac{|m|}{2} \log \frac{1+|m|\sigma}{1-|m|\sigma} + \frac{|\delta|}{2} \log \frac{1+|\delta|\sigma}{1-|\delta|\sigma} -$$

$$\sqrt{|m\delta|} \log \frac{1+\sigma\sqrt{|m\delta|}}{1-\sigma\sqrt{|m\delta|}} + 2\sqrt{|m\delta|} \arctan \sigma \sqrt{|m\delta|} -$$

$$\frac{\delta+m}{2} \arctan \frac{\sigma(m^2x^2-\delta^2)}{x(\delta-m)} + \frac{\delta-m}{2} \arctan \frac{\sigma(m^2x^2-\delta^2)}{x(\delta+m)} \equiv H(m,\delta,r),$$

где

$$m = B - A, \quad \delta = B + A,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{x^2-1}{m^2x^2-\delta^2}}$$

и x — наибольший, если $|m| \ge |\delta|$, и наименьший, если $|m| \le |\delta|$, положительный корень уравнения

$$mx^3 - \frac{1+r^2}{1-r^2} mx^2 + \frac{1+r^2}{1-r^2} \delta x - \delta = 0.$$

Доказательство. Подставим (2.13) в (2.12) и выполним под знаком интеграла замену переменной $t \mapsto x$ по формуле

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{\delta - mx^3}{\delta x - mx^2},$$

где $x \ge 1$ при $|m| > |\delta|$ и $x \le 1$ при $|m| < |\delta|$. Интегрирование завершает доказательство теоремы. □

Укажем некоторые следствия теоремы 2.2. Прежде всего отметим, что из этой теоремы немедленно выводится теорема вращения Г. М. Голузина и И. Е. Базилевича в классе S. Она получается при $A = 0$ и $B = \pm 1$. Далее, неравенство (1.2) также является очевидным следствием теоремы 2.2, если положить $A = B = \pm 1/2$. Выбрав $A = \pm 1$, $B = 0$, получаем точную оценку (1.3) в классе S. Используя теперь известную связь между функциями f и F классов S и Σ, приходим к теореме вращения Левнера [20]

$$|\arg F'(z)| \le \log \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}, \ \ |z| > 1, \ \ F \in \Sigma.$$

Далее, если $f(z) \in S$, то функция

$$\Phi(z) = z\sqrt{\frac{f(z^p)}{z^p}} = z + ...$$

принадлежит подклассу S_p класса S функций, обладающих p-кратной симметрией вращения относительно начала координат, см [8], с. 50. Тогда

$$\arg \Phi'(z_0) = \frac{1-p}{p} \arg \frac{f(z_0^p)}{z_0^p} + \arg f'(z_0^p).$$

Полагая в теореме 2.2

$$A = \frac{p-1}{2p}, \quad B = \frac{p+1}{2p},$$

и рассматривая функционал в точке z_0^p, мы получаем решение задачи вращения в подклассах S_p [12].

Следствие 2.1. *Пусть $f \in S_p$, $p = 1, 2, \ldots$ и z, $0 < |z| = r < 1$, фиксировано. Тогда справедлива точная оценка*

$$|\arg f'(z)| \le \frac{2}{\sqrt{p}} \arctan \frac{\sigma}{\sqrt{p}} + \frac{1+p}{2p} \arctan \frac{py}{p-1} + \\ + \frac{1-p}{2p} \arctan \frac{py}{p+1} + \frac{1}{2} \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma} + \\ + \frac{1}{2p} \log \frac{p+\sigma}{p-\sigma} - \frac{1}{\sqrt{p}} \log \frac{\sqrt{p}+\sigma}{\sqrt{p}-\sigma},$$

где

$$\sigma = p\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-p^2}}, \quad y = \frac{1}{px}\sqrt{(x^2-1)(x^2-p^2)},$$

и $x = x(r)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$x^3 - ax^2 + apx - p = 0,$$

в котором $a = (1+r^{2p})/(1-r^{2p})$.

Замечание 2.2. *В приложениях, при рассмотрении ряда частных случаев, теорема 2.1 может оказаться предпочтительнее ее развернутого варианта, теоремы 2.2. Приведем два примера. Если положить $A = \mp 1/2$, $B = \pm 1/2$, то $m = \pm 1$, $\delta = 0$, и непосредственно из теоремы 2.1 следует, что*

$$\left|\arg \frac{f(z_0)}{z_0}\right| \le \int_0^{|z_0|} \max_{|\eta|=1} \left|\mathrm{Im}\left[\frac{1+t\eta}{1-t\eta}\right]\right| \frac{dt}{t} = \int_0^{|z_0|} \frac{2dt}{1-t^2} = \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

Чтобы оценить $\arg f'(z_0)$, *нужно положить* $A = 0$, $B = \pm 1$. *Тогда* $m = \delta = \pm 1$, *и задача сводится, согласно теореме* 2.1, *к нахождению максимума функции* $y/x + y$ *на окружности* $(x - a(t))^2 + y^2 = b^2(t)$, *где* $a(t) = (1-t^2)/(1-t^2)$, $b(t) = 2t/(1-t^2)$, *при всех* $0 < t < |z_0|$. *Элементарные вычисления показывают, что эта функция принимает максимальное значение при* $x_0 = 1$, *если* $0 \le t \le 1/\sqrt{2}$, *и в точке*

$$x_0(t) = \frac{a(t) - 1 + \sqrt{(a(t)+1)(a(t)-3)}}{2},$$

если $t \ge 1/\sqrt{2}$ $(a(t) \ge 3)$. *Тогда*

$$|\arg f'(z_0)| \le \int_0^{|z_0|} (1 + 1/x_0)\sqrt{2a(t)x_0 - x_0^2 - 1}\,\frac{dt}{t}.$$

Интегрирование приводит к формулам (1.1).

Обратимся теперь к задаче об описании множества Ω значений функционала $W(f)$ на классе f. Поскольку Ω является выпуклым множеством, то для определения его границы достаточно найти опорную функцию

$$H_\Omega(\theta,\, r) = \max_{f \in S} \operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta} W(f)\right\}$$

при всех вещественных значениях параметра $\theta \in [0, 2\pi]$. В силу теоремы 2.2,

$$H_\Omega(\theta,\, r) = H(m, \delta, r),$$

где

$$m = \sin\theta - \cos\theta, \quad \delta = \sin\theta + \cos\theta.$$

Замечание 2.3. *Поскольку* $m(-\theta) = -\delta(\theta)$ *и* $\delta(-\theta) = -m(\theta)$, *то из* (2.11)–(2.14) *следует, что* $H_\Omega(\theta,\, r) = H_\Omega(-\theta,\, r)$, *и мы приходим к заключению, что множество* Ω *симметрично относительно оси* X. *А поскольку множеству* Ω *принадлежат одновременно точки* (X, Y) *и* $(-X, -Y)$, *то* Ω *симметрично и относительно оси* Y.

Зная опорную функцию к множеству Ω, теперь нетрудно дать описание и самого множества Ω.

Теорема 2.3. *Область* Ω *значений комплекснозначного функционала*

$$W(f) = \arg\frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + i\arg f'(z) = X + iY,\ f \in S,\ 0 < |z_0| = r < 1,$$

представляет собой замкнутое выпуклое множество, симметричное относительно координатных осей X и Y, граница $\partial\Omega$ которого зависит только от r и задается следующим образом.
1) *При $0 < r < 1/\sqrt{2}$ множество $\partial\Omega$ состоит из двух вертикальных отрезков*

$$X = \pm \log \frac{1}{1-r^2},$$

$$|Y| \leq \log \frac{1}{1-r^2} + \log(1 + r\sqrt{2-r^2}) + 2\arctan \frac{r}{\sqrt{2-r^2}},$$

соединенных гладким образом кривой с параметрическим уравнением

$$\varphi(\theta) = \mathrm{sign} m \frac{1+i}{2} \log \frac{1+|m|\sigma}{1-|m|\sigma} + i\frac{\mathrm{sign}\delta}{2} \log \frac{1+|\delta|\sigma}{1-|\delta|\sigma} -$$
$$- \frac{\mathrm{sign}(m\delta)[\delta + i(m+\delta)]}{2\sqrt{|m\delta|}} \left(\log \frac{1+\sigma\sqrt{|m\delta|}}{1-\sigma\sqrt{|m\delta|}} - 2\arctan\sigma\sqrt{|m\delta|} \right) -$$
$$- \frac{1+2i}{2} \arctan \frac{\sigma(m^2x^2-\delta^2)}{x(\delta-m)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{\sigma(m^2x^2-\delta^2)}{x(\delta+m)},$$

когда параметр θ изменяется в интервале $0 \leq \theta \leq \pi$, и ее зеркальным отражением относительно оси X.
2) *При $1/\sqrt{2} \leq r < 1$ граница $\partial\Omega$ состоит из двух, отмеченных выше, вертикальных отрезков, двух горизонтальных отрезков*

$$Y = \pm \left\{ \pi + \log \frac{r^2}{1-r^2} \right\},$$

$$|X| \leq \log \frac{1}{1-r^2} + \log(r^2 + \sqrt{2r^2-1}) - 2\arctan\sqrt{2r^2-1}$$

и четырех дуг кривой $\varphi(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, соединяющих гладким образом отрезки. Здесь

$$\sigma = \sqrt{\frac{x^2-1}{m^2x^2-\delta^2}}$$

и x — наибольший при $\pi/2 < \theta < \pi$ и $3\pi/2 < \theta < 2\pi$, и наименьший при $0 < \theta < \pi/2$ и $\pi < \theta < 3\pi/2$, положительный корень уравнения

$$mx^3 - \frac{1+r^2}{1-r^2} mx^2 + \frac{1+r^2}{1-r^2} \delta x - \delta = 0.$$

Доказательство. Напомним, что облась Ω выпукла, и обозначим через θ угол между внешней нормалью к границе $\partial\Omega$ области Ω в точке $\varphi(\theta)$ и положительным направлением оси X. Тогда $\mathrm{Re}\,\left\{e^{-i\theta}\varphi(\theta)\right\} = H_\Omega(\theta, r)$. Для завершения доказательства, достаточно воспользоваться теоремой 2.2 и правилом получения огибающей семейства прямых. □

3. Вращение при квазиконформных отображениях

В 1961 году Ф. Джон [16], изучая взаимосвязи между напряжением и вращением внутри упругого тела, доказал, что если $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^n$ осуществляет $(1+\varepsilon)$ - билипшицево отображение куба $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ обьема $m(\mathcal{Q})$, то f' принадлежит классу $BMO(\mathcal{Q})$ функций с ограниченным средним колебанием. Другими словами, существует универсальная постоянная D, такая что для данного куба и любого параллельного вложенного куба $\mathcal{R}$

$$\frac{1}{m(\mathcal{R})} \int\limits_{\mathcal{R}} |f'(x) - f_{\mathcal{R}}{}'| dv \leq D\varepsilon,$$

где $f'_{\mathcal{R}}$ обозначает интегральное среднее f' по кубу $\mathcal{R}$. Применив к компонентам вектора $f' - f'_{\mathcal{R}}$ фундаментальную лемму о функциях класса BMO, доказанную совместно с Л. Ниренбергом в работе [17], Ф. Джон показал, что для каждого M мера $\mu(M)$ тех x из $\mathcal{R}$, для которых $|f'(x) - f'_{\mathcal{R}}| \geq M\varepsilon$, удовлетворяет неравенству

$$\mu(M) \leq Ee^{-FM} m(\mathcal{R}) \tag{3.1}$$

с универсальными постоянными E и F. В качестве иллюстрации последнего результата, он установил следующую теорему вращения.

Теорема. ([16], с. 411). Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – $(1+\varepsilon)$ — билипшицево отображение комплексной плоскости, такое что

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{для } |z| > b \\ ze^{i\theta} & \text{для } |z| < a < b \end{cases}$$

и $\theta \in [0, \pi]$. Тогда

$$\theta \leq O(1 + \log(b/a))\varepsilon.$$

Для полноты рассуждений, приведем оригинальное доказательство теоремы.

Пусть $\mathcal{R}$ - квадрат $|x_1| < 2b$, $|x_2| < 2b$, $z = x_1 + ix_2$, и пусть $f_R{}'$ обозначает интегральное среднее от f' по квадрату $\mathcal{R}$. Мы имеем $f' = 1$ for $|z| > b$, $f' = e^{i\theta}$ для $|z| < a$. Если

$$q = \max(|f'_{\mathcal{R}} - 1|, |f'_{\mathcal{R}} - e^{i\theta}|),$$

то

$$q \geq \frac{1}{2}|e^{i\theta} - 1| \geq \frac{1}{\pi}\theta.$$

Положим $M = q/\varepsilon$. Тогда, либо внутри меньшего круга, либо в области $\mathcal{R} \cap \{|z| > b\}$, выполняется неравенство $|f' - f'_{\mathcal{R}}| \geq M\varepsilon$. Следовательно, мера $\mu(M)$ части R, где $|f' - f'_{\mathcal{R}}| \geq M\varepsilon$ должна быть не меньше, чем

$$\min[(16-\pi)b^2, \pi a^2] = \pi a^2.$$

С другой стороны, в силу неравенства (3.1),

$$\mu(M) \leq Ee^{Fq/\varepsilon} 16b^2.$$

Отсюда следует, что

$$\theta \leq O(1 + \log \frac{b}{a})\varepsilon. \tag{3.2}$$

Оценка (3.2) не является оптимальной. Оказывается, что точное решение задачи следует искать в классе квазиконформных отображений, который включает в себя билипшицевы отображения. Более того, такой подход ведет к точным интегральным оценкам вращения в терминах локальных коэффициентов искажения. Прежде чем привести формулировки результатов, напомним некоторые определения и обозначения.

Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{C}$ называется Q — квазиконформным, $Q \geq 1$, если $f \in W^{1,2}_{\rm loc}(G)$ и если

$$||f'(z)||^2 \leq Q\, J_f(z) \ \text{ почти везде в } G.$$

Здесь $J_f(z)$ — якобиан отображения $f(z)$ и $||f'(z)|| = |f_z(z)| + |f_{\bar z}(z)|$. Для почти всех $z \in G$ мы определим коэффициент искажения $K_f(z)$ отображения f в точке z и комплексную дилатацию $\mu(z)$ по формулам

$$K_f(z) = \frac{||f'(z)||^2}{J_f(z)}, \quad \mu(z) = \frac{f_{\bar z}(z)}{f_z(z)}.$$

Гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{C}$ называется L - билипшицевым, если он удовлетворяет следующему двойному неравенству

$$\frac{1}{L}|z - z'| \leq |f(z) - f(z')| \leq L|z - z'|$$

для любых $z,\ z' \in G$. Наименьшее из $L \geq 1$, для которой это неравенство имеет место, называется изометрическим коэффициентом искажения отображения f. Заметим, что каждое L - билипшицево отображение f является L^2 - квазиконформным.

Точное решение задачи Ф. Джона выводится из следующего результата, установленного в работе [14]. Пусть f представляет собой

Q — квазиконформное отображение кругового кольца $R(a,b) : a \leq \leq |z| \leq b$, с комплексной дилатацией $\mu(z)$ и такое, что $f(z) = z$ для $|z| = b$ и $f(z) = ze^{i\theta}$ для $|z| = a$. Тогда для любой непрерывной неубывающей выпуклой функции Φ справедливы точные оценки

$$\iint\limits_{R(a,b)} \Phi(K_f(z)) \frac{dxdy}{|z|^2} \geq \iint\limits_{R(a,b)} \Phi(K_{f^*}(z)) \frac{dxdy}{|z|^2}. \tag{3.3}$$

Экстремальное отображение f^* имеет вид

$$f^*(z) = bs_k(z/b), \quad k = -\theta/\log(b/a),$$

где $s_k(z) = ze^{ik\log|z|}$.

Действительно, полагая в неравенстве (3.3) $\Phi(u) = u$, мы получаем, что

$$|\theta| \left(\frac{|\theta|}{2\log(b/a)} + \sqrt{1 + \frac{\theta^2}{4\log^2(b/a)}} \right) \leq \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R(a,b)} \frac{K_f(z) - 1}{|z|^2} \, dxdy. \tag{3.4}$$

Оценка является точной и знак равенства реализуется для функции $f^*(z)$. Поскольку, как уже было отмечено выше, L - билипшицево отображение является одновременно L^2 - квазиконформным, то мы приходим к точному неравенству в теореме Ф. Джона.

Теорема 3.1. [14]. *Пусть f — L-билипшицево отображение кругового кольца $R(a,b) : a \leq |z| \leq b$, такое, что $f(z) = z$ для $|z| = b$ и $f(z) = ze^{i\theta}$ для $|z| = a$. Тогда имеет место следующая точная оценка*

$$|\theta| \leq (L - 1/L)\log(b/a).$$

В частности, если $L = 1 + \varepsilon$, то

$$|\theta| \leq \varepsilon \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} \log \frac{b}{a}.$$

Приведенные выше оценки вращения записаны либо в терминах максимальной дилатации отображения, либо в терминах интегральных средних, зависящих только от $|\mu(z)|$. Следующий результат позволяет учитывать влияние аргумента комплексной дилатации $\mu(z)$ на вращение при квазиконформных отображениях.

Пусть $\mu(z)$ — произвольная измеримая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию $||\mu||_\infty \leq k < 1$. Положим

$$D_\mu(z) = \frac{|1 - \mu(z)\bar{z}/z|^2}{1 - |\mu(z)|^2}$$

и заметим, что если через $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ обозначить квазиконформный гомеоморфизм с комплексной дилатацией $\mu(z)$, то почти всюду справедливы соотношения

$$D_\mu(z) = \frac{|\partial_\theta f(te^{i\theta})|^2}{t^2 J_f(te^{i\theta})}, \;\; z = te^{i\theta},$$

и

$$D_{-\mu}(z) = \frac{|\partial_t f(te^{i\theta})|^2}{J_f(te^{i\theta})}.$$

Теорема 3.2. *Пусть f — квазиконформный автоморфизм кругового кольца $A(r,R)$ с комплексной дилатацией $\mu(z)$ и $h : A(r,R) \to$ $\to A(r,R)$ — произвольный квазиконформный автоморфизм, сохраняющий объемы. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |d_{f\circ h}(re^{i\theta}) - d_{f\circ h}(Re^{i\theta})|d\theta \le$$
$$\le \log\frac{R}{r} + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{-\kappa}(z)/2 - 1}{|z|^2}\,dxdy. \quad (3.5)$$

Здесь через κ обозначена комплексная дилатация отображения $f\circ h$.

Доказательство. Фиксируем в кольце $A(r,R)$ радиальный сегмент $\gamma(t) = te^{i\theta}$, $r \le t \le R$, и сохраняющий объемы автоморфизм $h : A(r,R) \to A(r,R)$ и заметим, что

$$\int\limits_{f\circ h\circ\gamma} \frac{|dw|}{|w|} \ge \left(\Delta^2_{f\circ h}(\theta) + \log^2\frac{R}{r}\right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

Здесь

$$\Delta_{f\circ h}(\theta) = |d_{f\circ h}(Re^{i\theta}) - d_{f\circ h}(re^{i\theta})| \;—$$

угловое колебание отображения $\varphi(z) = f(h(z))$ в концевых точках сегмента $\gamma(t)$. В силу неравенства Минковского

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\Delta^2_{f\circ h}(\theta) + \log^2\frac{R}{r}\right)^{1/2} d\theta\right)^2 \ge$$
$$\ge \left(\int\limits_0^{2\pi}\Delta_{f\circ h}(\theta)\,d\theta\right)^2 + \left(\int\limits_0^{2\pi}\log(R/r)\,d\theta\right)^2. \quad (3.7)$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{f\circ h\circ\gamma} \frac{|dw|}{|w|} = \int\limits_r^R \frac{|\varphi_t(te^{i\theta})|}{|\varphi(te^{i\theta})|}\,dt = \int\limits_r^R \frac{D_{-\kappa}^{1/2}(te^{i\theta})\cdot J_\varphi^{1/2}(te^{i\theta})}{|\varphi(te^{i\theta})|}\,dt$$

для почти всех $\theta\in[0,2\pi]$. Здесь $\kappa(z)$ обозначают комплексную дилатацию отображения $\varphi(z)$. Обозначая

$$\int\limits_{f\circ h\circ\gamma} \frac{|dw|}{|w|} = \ell(\theta),$$

и применяя неравенство Шварца, мы получаем

$$\ell^2(\theta) \le \int\limits_r^R D_{-\kappa}(te^{i\theta})\frac{dt}{t}\cdot\int\limits_r^R \frac{J_\varphi(te^{i\theta})}{|\varphi(te^{i\theta})|^2}t\,dt,$$

и следовательно

$$\frac{\ell^2(\theta)}{\psi_\kappa(\theta)} \le \int\limits_r^R \frac{J_\varphi(te^{i\theta})}{|\varphi(te^{i\theta})|^2}t\,dt$$

для почти всех $\theta\in[0,2\pi]$, где функция $\psi_\kappa(\theta)$ определена формулой

$$\psi_\kappa(\theta) = \int\limits_r^R D_{-\kappa}(te^{i\theta})\frac{dt}{t}.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по θ от 0 до 2π и применяя теорему Фубини, мы приходим к неравенству

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\ell_{f\circ h}^2(\theta)}{\psi_\kappa(\theta)}\,d\theta \le \iint\limits_{A(r,R)} \frac{J_\varphi(z)}{|\varphi(z)|^2}\,dxdy.$$

Принимая во внимание тот факт, что $h(A(r,R) = A(r,R)$ и отображение h сохраняет объемы, то есть якобиан $J_h(z)=1$ для почти всех $z\in A(r,R)$, мы видим, что

$$\iint\limits_{A(r,R)} \frac{J_\varphi(z)}{|\varphi(z)|^2}dxdy = \iint\limits_{A(r,R)} \frac{J_f(z)}{|f(z)|^2}dxdy = \iint\limits_{A(r,R)} \frac{dudv}{|w|^2} = 2\pi\log(R/r). \quad (3.8)$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\ell^2(\theta)}{\psi_\kappa(\theta)}d\theta \le 2\pi\log(R/r),$$

и в силу неравенства Шварца

$$\left(\int_0^{2\pi} \ell(\theta)\, d\theta\right)^2 \le \int_0^{2\pi} \frac{\ell^2_{f\circ h}(\theta)}{\psi_\kappa(\theta)}\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \psi_\kappa(\theta) d\theta \le$$

$$\le 2\pi(\log(R/r)) \iint\limits_{A(r,R)} D_{-\kappa}(z) \frac{dxdy}{|z|^2}.$$

Объединяя последнее неравенство с неравенствами (3.6) и (3.7), мы получаем

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta_{f\circ h}(\theta)\, d\theta\right)^2 + \log^2(R/r) \le \frac{\log(R/r)}{2\pi} \iint\limits_{A(r,R)} D_{-\kappa}(z) \frac{dxdy}{|z|^2}.$$

Отсюда, в силу элементарного неравенства $a^2+b^2 \ge 2ab$, следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta_{f\circ h}(\theta) d\theta \le \log(R/r) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{r<|z|<R} \frac{D_{-\kappa}(z)/2 - 1}{|z|^2} dxdy.$$

Теорема доказана. □

Выбирая допустимый автоморфизм h надлежащим образом, можно получить различные следствия теоремы 3.2.

Следствие 3.1. *Пусть $f : A(r,R) \to A(r,R)$ — квазиконформный автоморфизм с комплексной дилатацией $\mu(z)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big| d_f(h^+(re^{i\theta})) - d_f(Re^{i\theta}) + \log(R/r) \Big|\, d\theta \le$$

$$\le \log(R/r) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_{r<|z|<R} \frac{|\mu(z)|^2 - \operatorname{Im}(\mu(z)\bar{z}/z)}{1-|\mu(z)|^2} \cdot \frac{dxdy}{|z|^2}, \quad (3.9)$$

где

$$h^+(z) = ze^{i\log(R/|z|)}.$$

Доказательство. Положим $h(z) = h^+(z)$. Это отображение является билипшицевым, сохраняет объемы, отображает кольцо $A(r,R)$ на себя и тождественно на окружности $|z| = R$. Тогда

$$\Delta_{f\circ h^+}(\theta) = |d_f(h^+(re^{i\theta})) - d_f(Re^{i\theta}) + \log(R/r)|.$$

Далее, вычисления

$$h_t^+(z)=h^+(z)(1-i)/t,\quad \bar h_t^+(z)=\bar h^+(z)(1+i)/t,\quad |h^+(z)|=t,$$

показывают, что

$$D_{-\kappa}(z)=\frac{|\frac{\partial}{\partial t}f(h^+(z))|^2}{J_{f\circ h^+}(z)}= \\ =\frac{2|f_z(h^+)+if_{\bar z}(h^+)\bar h^+/h^+|^2}{J_f(h^+)}=2D_{-i\mu}(h^+(z)),$$

где $z=te^{i\theta}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)}\frac{D_{-\kappa}(z)/2-1}{|z|^2}\,dxdy=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)}\frac{D_{-i\mu}(h^+(z))-1}{|z|^2}\,dxdy.$$

Выполняя под знаком интеграла замену переменных по формуле $z\mapsto h^+(z)$, и принимая во внимание тот факт, что $|h^+(z)|=|z|$ и $J_{h^+}(z)=1$, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)}\frac{D_{-i\mu}(h^+(z))-1}{|z|^2}\,dxdy=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)}\frac{D_{-i\mu}(z)-1}{|z|^2}\,dxdy= \\ =\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<|z|<R}\frac{|\mu(z)|^2-\mathrm{Im}(\mu(z)\bar z/z)}{1-|\mu(z)|^2}\cdot\frac{dxdy}{|z|^2}.$$

Теперь неравенство (3.5) принимает вид (3.9) и мы завершаем доказательство следствия 3.1. □

Следствие 3.2. *Пусть $f: A(r,R)\to A(r,R)$ — квазиконформный автоморфизм с комплексной дилатацией $\mu(z)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|d_f(Re^{i\theta})-d_f(h^-(re^{i\theta}))+\log(R/r)\right|d\theta\le \\ \le\log(R/r)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<|z|<R}\frac{|\mu(z)|^2+\mathrm{Im}(\mu(z)\bar z/z)}{1-|\mu(z)|^2}\cdot\frac{dxdy}{|z|^2},\quad(3.10)$$

где

$$h^-(z)=ze^{-i\log(R/|z|)}.$$

Положим в тереме 3.2 $h = h^-(z)$. Тогда $\Delta_{f\circ h^-}(\theta) = |d_f(Re^{i\theta}) - d_f(h^-(re^{i\theta})) + \log(R/r)|$. Вычисления

$$h_t^-(z) = h^-(z)(1+i)/t,\ \ \bar{h}_t^-(z) = \bar{h}^-(z)(1-i)/t,\ \ |h^-(z)| = t,$$

показывают, что

$$D_{-\kappa}(z) = \frac{|\frac{\partial}{\partial t} f(h^-(z))|^2}{J_{f\circ h^-}(z)} = 2D_{i\mu}(h^-(z)),$$

где $z = te^{i\theta}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{-\kappa}(z)/2 - 1}{|z|^2}\, dxdy = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{i\mu}(h^-(z)) - 1}{|z|^2}\, dxdy.$$

Выполняя замену переменных под знаком интеграла по формуле $z \mapsto h^-(z)$, и принимая во внимание соотношения $|h^-(z)| = |z|$ и $J_{h^-}(z) = 1$, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{i\mu}(h^-(z)) - 1}{|z|^2}\, dxdy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{A} \frac{D_{i\mu}(z) - 1}{|z|^2}\, dxdy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<|z|<R} \frac{|\mu(z)|^2 + \operatorname{Im}(\mu(z)\bar{z}/z)}{1 - |\mu(z)|^2} \cdot \frac{dxdy}{|z|^2}$$

и, тем самым, завершаем доказательство. □

В задаче Ф. Джона $d_f(ae^{i\varphi}) = \theta$, $d_f(be^{i\varphi}) = 0$ для всех $0 \le \varphi \le 2\pi$ и мы приходим к следующим двусторонним оценкам вращения.

Следствие 3.3. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — квазиконформное отображение комплексной плоскости с комплексной дилатацией $\mu(z)$, такое что*

$$f(z) = \begin{cases} z & \textit{для } |z| \ge b \\ ze^{i\theta} & \textit{для } |z| \le a < b. \end{cases}$$

Тогда

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|^2 + \operatorname{Im}(\mu\bar{z}/z)}{1 - |\mu|^2} \cdot \frac{dxdy}{|z|^2} \le \theta \le \frac{1}{\pi}\iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|^2 - \operatorname{Im}(\mu\bar{z}/z)}{1 - |\mu|^2} \cdot \frac{dxdy}{|z|^2}.$$

Таким образом,

$$|\theta| \le \max \left| \frac{1}{\pi}\iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|^2 \pm \operatorname{Im}(\mu\bar{z}/z)}{1 - |\mu|^2} \cdot \frac{dxdy}{|z|^2} \right|.$$

Если еще заметить, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|^2 \pm \mathrm{Im}(\mu\bar{z}/z)}{1-|\mu|^2}\cdot\frac{dxdy}{|z|^2}\right| \le \frac{1}{\pi}\iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|}{1-|\mu|}\frac{dxdy}{|z|^2} = \\ = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(a,b)} \frac{K_f(z)-1}{|z|^2}\,dxdy,$$

тогда

$$|\theta| \le \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(a,b)} \frac{K_f(z)-1}{|z|^2}\,dxdy,$$

ср. с формулой (3.4).

Замечание 3.1. *Основные неравенства, доказанные в этом параграфе, не зависят от максимальной дилатации квазиконформных отображений и они остаются в силе для более общих гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ при надлежащих условиях на существование несобственных интегралов.*

Теорема 3.2 допускает следующее обобщение, ср. [3].

Теорема 3.3. *Пусть $f : A(r,R) \to G$ представляет собой Q — квазиконформное отображение с комплексной дилатацией $\mu(z)$. Если G содержит кольцо $A(r(1+\varepsilon), R/(1+\varepsilon))$ и содержится в кольце $A(r/(1+\varepsilon), R(1+\varepsilon))$, то для любого сохраняющего объемы квазиконформного автоморфизма h кольца $A(r,R)$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |d_{f\circ h}(re^{i\theta}) - d_{f\circ h}(Re^{i\theta})|d\theta \le \log(R/r) + \\ + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{-\kappa}(z)/2-1}{|z|^2}\,dxdy + 2\varepsilon(1+Q). \quad (3.11)$$

Здесь κ обозначает комплексную дилатацию отображения $f\circ h$.

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3.2, заметим что теперь неравенство (3.5) должно быть заменено неравенством

$$\int\limits_{f\circ h\circ\gamma} \frac{|dw|}{|w|} \ge \left(\Delta^2_{f\circ h}(\theta) + \log^2\frac{|f(Re^{i\theta})|}{|f(re^{i\theta})|}\right)^{1/2} \ge$$

$$\geq \left(\int_0^{2\pi} \Delta_{f\circ h}(\theta) d\theta \right)^2 + 4\pi^2 (\log(R/r) - 2\varepsilon)^2,$$

поскольку $A(r(1+\varepsilon), R/(1+\varepsilon)) \subset f(A(r,R))$, и значит

$$\log^2 \frac{|f(Re^{i\theta})|}{|f(re^{i\theta})|} \geq (\log(R/r) - 2\varepsilon)^2,$$

а соотношение (3.8) — неравенством

$$\iint\limits_{A(r,R)} \frac{J_\varphi(z)}{|\varphi(z)|^2} dxdy = \iint\limits_{A(r,R)} \frac{J_f(z)}{|f(z)|^2} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{f(A(r,R))} \frac{dudv}{|w|^2} \leq 2\pi(\log(R/r) + 2\varepsilon),$$

так как $f(A(r,R)) \subset A(r/(1+\varepsilon), R(1+\varepsilon))$. После элементарных преобразований мы получаем неравенство (3.11). □

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве следствий 3.1 и 3.2, приходим к следующему утверждению.

Следствие 3.4. *В условиях теоремы* 3.3 *справедливы оценки*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| d_f(h^+(re^{i\theta})) - d_f(Re^{i\theta}) + \log(R/r) \right| d\theta \leq$$

$$\leq \log(R/r) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_{r<|z|<R} \frac{|\mu(z)|^2 - \operatorname{Im}(\mu(z)\bar{z}/z)}{1 - |\mu(z)|^2} \cdot \frac{dxdy}{|z|^2} + 2\varepsilon(1+Q),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| d_f(Re^{i\theta}) - d_f(h^-(re^{i\theta})) + \log(R/r) \right| d\theta \leq$$

$$\leq \log(R/r) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_{r<|z|<R} \frac{|\mu(z)|^2 + \operatorname{Im}(\mu(z)\bar{z}/z)}{1 - |\mu(z)|^2} \cdot \frac{dxdy}{|z|^2} + 2\varepsilon(1+Q),$$

где $h^\pm = ze^{\pm i \log(R/|z|)}$.

В заключение отметим, что близкие по смыслу теоремы вращения для пространственных квазиконформных отображений содержатся в работе [15].

Литература

[1] Александров И. А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций.* М.: Наука, 1976, 44 с.

[2] Базилевич И. Е. *Sur les théorémes de Koebe–Bieberbach.* **1** (1936), 283–292.

[3] Белинский П. П. *Поведение квазиконформного отображение в изолированной особой точке* // Уч. записки Львовского ун-та, сер. мех.-матем. **29** (1954), №1 , 58–70.

[4] Белинский П. П. *Общие свойства квазиконформных отображений.* Новосибирск: Наука, 1974, 100 с.

[5] Bieberbach L. *Aufstellung und Beweis des Drehugssatzes für schlichte konforme Abbildungen* // Math. Z. **4** (1919), 295–305.

[6] Brakalova M. and Jenkins J. A. *On the local behavior of certain homeomorphisms* Kodai Math. J. **17** (1994), 201–213.

[7] Голузин Г. М. *Sur les théorémes de rotation dans la théorie des fonctions univaletes* // Матем. сб. **1** (1936), 293–296.

[8] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1966, 628 с.

[9] Горяйнов В. В. *Об экстремалях в оценках функционалов, зависящих от значений однолистной функции и ее производной.* В кн. Теория отображений и приближение функций. Киев: Наукова думка, 1983, 38–49.

[10] Grunsky H. *Neue Abschätzungen zur konformen Abbildungen ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche* // Schr. Math. Seminars u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin. **1** (1932), 93–140.

[11] Гутлянский В. Я. *Параметрическое представление однолистных функций* // ДАН СССР. **194**(1970), №4 — С. 750–753.

[12] Гутлянский В. Я. *Теорема вращения в классе однолистных p-симметричных функций* // Матем. заметки. **10** (1971), 239–242.

[13] Гутлянский В. Я., Горяйнов В. В. *Об экстремальных задачах в классе S_M.* В кн. Математический сборник. Киев: Наукова думка, 1976, 242–246.

[14] Gutlyanskiĭ V. and Martio O., *Rotation estimates and spirals* // Conform. Geom. Dyn. **5** (2001), 6–20.

[15] Gutlyanskiĭ V. and Martio O. *On rotation estimates for space quasiconformal mappings* // Доповіді Нац. Акад. Наук України. Матем. Природозн. Технічні Науки. **1** (2002), 7–12.

[16] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения.* М.: Ин. Лит., 1962, 266 с.

[17] John F. *Rotation and strain* // Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 391–413.

[18] John F. and Nirenberg L. *On functions of bounded mean oscilation* // Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426.

[19] Лебедев Н. А. *Мажорантная область для выражения $I=\log\{z^k f'(z)^{1-\lambda}/f(z)^\lambda\}$ в классе S* // Вестник ЛГУ. **8** (1955), 29–41.

[20] Lehto O. and Virtanen K. *Qvasiconformal mappings in the plane.* — Berlin etc.: Springer–Verlag, 1973, 258 с.

[21] Löwner K. *Über Extremumsätze bei der Konformen Abbildungen des aüßeren des Einheitskreises* // Math. Z. **3** (1919), 65–77.

[22] Löwner K. *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises* // J. Math. Ann. **89** (1923), 103–121.

[23] Pommerenke Ch. *Univalent functions.* Vandenhoeck u. Ruprecht, Gottingen, 1975, 376 p.

[24] Reich E. and Walczak H. *On the behavior of quasiconformal mappings at a point* // Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 338–351.

Сведения об авторах

В. Я. Гутлянский Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74,
83114, Донецк Украина
E-Mail: gut@iamm.ac.donetsk.ua

Olli Martio Department of Mathematics,
P.O. Box 4 (Yliopistonkatu 5), FIN-00014,
University of Helsinki, FINLAND
E-Mail: martio@cc.helsinki.fi