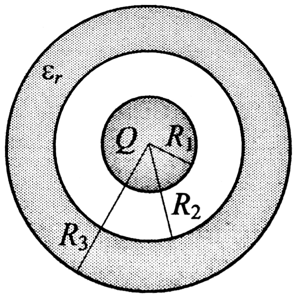
QUARTO APPELLO — 11.09.2017
FISICA GENERALE T-2, Prof. G. Vannini
Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica e dell'Automazione

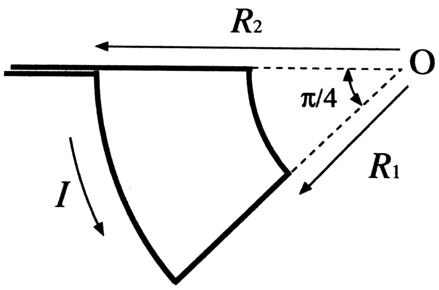
ESERCIZIO 1

Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 2$ cm e carica $Q = 1$ mC è circondata da un guscio di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, con costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3$, di raggio interno $R_2 = 4$ cm e raggio esterno $R_3 = 8$ cm. Si calcoli l'energia elettrostatica del sistema.



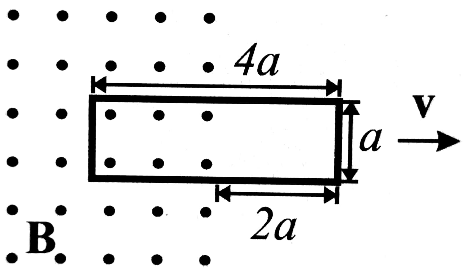
ESERCIZIO 2

Un circuito, percorso da corrente I, è costituito da due archi di cerchio concentrici di raggi R_1 e R_2 e da due segmenti radiali, come in figura. L'angolo sotteso ai due archi è di $\pi/4$ radianti. Si calcoli il campo di induzione magnetica generato nel centro O degli archi.



ESERCIZIO 3

Una spira rettangolare, di lati a e $4a$ e di resistenza R, viene estratta con velocità costante v da una regione di campo magnetico **B** uniforme, in cui era immersa solo per metà, come in figura. Si determini il lavoro che è necessario compiere per estrarre completamente la spira.



SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Calcoliamo prima il campo D: data la simmetria del problema, D è radiale e dotato di simmetria sferica, e dunque è ortogonale alle superfici di interfaccia fra il guscio dielettrico e il vuoto. Applichiamo il teorema di Gauss, considerando una generica superficie Sigma concentrica alla sfera conduttrice e di raggio *r*.

Se $0 < r < R_1$, si ha:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q_{int} = 0 \quad \text{quindi} \quad \mathbf{D} = 0 \ .$$

Per r > R1, si ha:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q \quad \text{quindi} \quad \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{u_r} \ .$$

Il vettore D non cambia passando dal vuoto al dielettrico dal momento che all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente normale di tale vettore.

A questo punto, il campo elettrico si calcola facilmente:

$$\mathbf{E} = 0 \qquad 0 < r < R_1 \ ;$$
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u_r} \qquad R_1 < r < R_2, \ r > R_3 \ ;$$
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u_r} \qquad R_2 < r < R_3 \ .$$

La densità di energia del campo elettrostatico è data da:

$$u = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \ .$$

L'energia elettrostatica totale del sistema si calcola come segue:

$$U = \int_\tau u\, d\tau \ ,$$ dove tau è il volume totale in cui è presente il campo e dato è l'elemento di volume infinitesimo che, data la simmetrica sferica, è dato da $d\tau = 4\pi r^2 dr$.

Nel caso in esame si ottiene:

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} (\frac{Q}{4\pi\epsilon_0})^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r \int_{R_2}^{R_3} (\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r})^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{R_3}^{\infty} (\frac{Q}{4\pi\epsilon_0})^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr =$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\epsilon_r}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3})] = 1.87 \times 10^5 J$$

ESERCIZIO 2

Calcoliamo il campo magnetico generato nel punto O mediante il principio id sovrapposizione. I tratti radiali del circuito non contribuiscono al campo **B**(O), in quanto i vettori **r** e **dl** sono tra loro paralleli, per cui possiamo porre:

$$B(O) = \int_{arco\ R_1} \mathbf{dB} + \int_{arco\ R_2} \mathbf{dB} \ ,$$

dove il campo **dB** generato da un elemento infinitesimo **dl** del circuito è dato dalla relazione:

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathbf{dl}\times\mathbf{r}}{r^3} \ .$$

Dalle due equazioni precedenti si ottiene:

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_{arco\ R_1} \frac{\mathbf{dl}\times\mathbf{r}}{R_1^3} + \int_{arco\ R_2} \frac{\mathbf{dl}\times\mathbf{r}}{R_2^3}\right] .$$

Si può notare che, rispetto al punto O, la corrente fluisce in senso antiorario nel tratto di raggio maggiore ed in senso orario nel tratto di raggio maggiore. Pertanto i due tratti del circuito contribuiranno in O con campi magnetici di segno opposto. Detto $\mathbf{u_z}$ il vettore perpendicolare al piano del foglio e uscente, possiamo riscrivere B(O) nella forma:

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathbf{u_z}\left[\int_{arco\ R_2} \frac{dl}{R_2^2} - \int_{arco\ R_1} \frac{dl}{R_1^2}\right] ,$$

da cui otteniamo:

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathbf{u_z}\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\right] = -\frac{\mu_0 I}{16R_1R_2}(R_2 - R_1)\mathbf{u_z} \ .$$

ESERCIZIO 3

Prima di calcolare il lavoro compiuto per estrarre la spira, è necessario determinare le forze che agiscono su di essa.

Durante l'estrazione della spira, il flusso di **B** concatenato varia. Infatti, se S è la superficie delimitata dalla spira, il flusso di **B** vale:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS = BS_x \ ,$$

dove S_x è la porzione di superficie ancora immersa nella regione in cui è presente il campo magnetico:

$$S_x = (4a - x)a$$

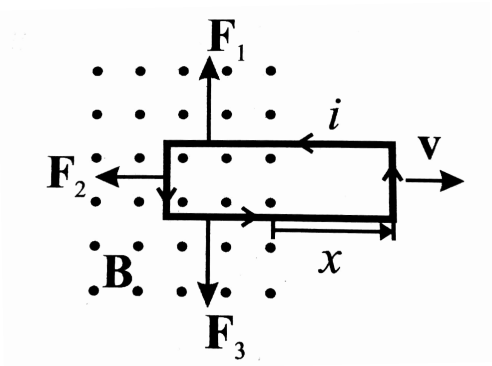
e dove **n** è stato scelto con lo stesso verso di **B**. Per comodità la variabile *x* è definita in modo tale che la sua derivata rispetto al tempo sia esattamente pari alla velocità *v* con cui si muove la spira.
La variazione di flusso induce una forza elettromotrice *f* nella spira, secondo la legge di Faraday:

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B}}{dt} = -\frac{d}{dt}[B(4a - x)a] = Bav \ .$$

Di conseguenza, nella spira circolerà una corrente secondo la legge di Ohm:

$$i = \frac{f}{R} = \frac{Bav}{R} \ .$$

Si può notare che per v costante anche i è costante ed il suo verso di scorrimento, congruentemente con la scelta di n, è quello riportato in figura. Il verso di i, inoltre, è in accordo con la legge di Lenz. Infatti, la corrente indotta i tende a generare un ulteriore contributo di campo magnetico, equiverso a quello preesistente, nel tentativo di contrastarne la diminuzione di flusso a seguito dell'estrazione della spira.



Sapendo che nella spira circola la corrente i, possiamo dedurre che i suoi lati, ancora immersi nella regione di campo magnetico, sentiranno delle forze che possono essere espresse dalla seconda legge di Laplace:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B} \ ,$$

dove **l** ha modulo e direzione pari alla lunghezza del singolo tratto rettilineo di filo e verso uguale a quello della corrente *i*. Le forze così determinate sono riportate in figura e i loro moduli valgono:

$$F_1 = i(4a - x)B \ ;$$
$$F_2 = iaB \ ;$$
$$F_3 = i(4a - x)B \ .$$

E' importante notare che $F_1 = F_3$ in ogni istante durante l'estrazione della spira e quindi, essendo il loro verso opposto, la loro risultante è sempre nulla.
Sulla spira agisce quindi la sola forza $\mathbf{F_2}$ che si oppone al moto. Per mantenere la spira in moto uniforme è necessario applicare una forza uguale e contraria $\mathbf{F_{est}} = -\mathbf{F_2}$, finché la spira non sarà completamente estratta.

Il lavoro fatto per estrarre la spira è quindi il lavoro fatto dalla forza esterna $\mathbf{F_{est}}$:

$$L = \int_{2a}^{4a} \mathbf{F}_{est} \cdot \mathbf{u_z} dx = \int_{2a}^{4a} iaB\mathbf{u_x} \cdot \mathbf{u_x} dx = iaB[x]_{2a}^{4a} = 2ia^2B \, .$$

Sostituendo la definizione di *i* nel lavoro L si ottiene:

$$L = \frac{2B^2a^3v}{R} \quad .$$