DOCUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Facultad de Administración

No. 60, ISSN: 0124-8219
Julio de 2009

Metodología de la lógica difusa

Liliana Adriana Mendoza Saboya

Universidad del Rosario
Facultad de Administración

Universidad del Rosario
Facultad de Administración

Metodología de la lógica difusa
Documento de Investigación No. 60

Liliana Adriana Mendoza Saboya

Universidad del Rosario
Facultad de Administración
Editorial Universidad del Rosario
Bogotá D.C.
2009

Mendoza Saboya, Liliana Adriana
Metodología de la lógica difusa / Liliana Adriana Mendoza Saboyá.—Facultad de Administración. Bogotá: Editorial Universidad del Rosario, 2009.
57 p.—(Documento de Investigación; 60).

ISSN: 0124-8219

Administración de empresas / Filosofía / Lógica difusa / Administración – Toma de decisiones / Comportamiento organizacional / I. Título / II. Serie.

658.40301 SCDD 20

Liliana Adriana Mendoza Saboya

ISSN: 0124-8219

Primera edición: junio de 2009
Impresión:
Impreso y hecho en Colombia
Printed and made in Colombia

Contenido

Metodología de la lógica difusa

Liliana Adriana Mendoza Saboya*

RESUMEN

Este trabajo es un acercamiento a los elementos de la lógica difusa y su aplicación en el ámbito social. Para tal efecto se retoman los conceptos de: función de pertenencia, conjuntos difusos, operaciones entre conjuntos difusos y sus relaciones difusas, y operaciones entre relaciones difusas. Cada una de las exposiciones tiene asociado un ejemplo recogido de la experiencia lograda con el trabajo sobre una muestra de 318 empresas. Bajo esta estructura se desarrolla la aplicación de la herramienta de lógica difusa como mecanismo para representar un sistema empresarial que involucra la autonomía y la eficiencia de los empleados de una empresa. Dentro de los resultados se encuentra que tanto la autonomía como la eficiencia son interdependientes y se retroalimentan. De dicho movimiento sistémico emerge un atractor que describe el comportamiento de la eficiencia dada una autonomía o viceversa.

INTRODUCCIÓN

En el siglo III a.C. Aristóteles comenzó con la conceptualización de lo que hoy se denomina la lógica clásica o lógica bivalente. Esta lógica fundamenta la teoría de conjuntos, en la que si un elemento pertenece a un conjunto entonces no pertenece a su complemento. Esta exclusión es la que determina la inclusión a otros espacios o conjuntos; es decir, en la lógica clásica se presenta sobre un sistema bivalente. Algunos ejemplos se observan en la tabla 1:

Tabla 1: Ejemplos de preposiciones en lógica clásica

p		Np
Lleno	Vs.	Vacío
Blanco	Vs.	Negro
Negativo	Vs.	Positivo
Frío	Vs.	Caliente
Rápido	Vs.	Lento
Pobre	Vs.	Rico

Fuente: Elaboración de la autora.

* Profesora de postgrados de la Universidad del Rosario, es economista de la Universidad Jorge Tadeo Lozano de Bogotá, tiene estudios de estadística de la Universidad Nacional de Colombia. Se ha especializado en Dinámica de sistemas en la Universidad de Cataluña y es Máster en Dirección y Gerencia de Empresas en la Universidad del Rosario.

Según la lógica aristotélica, el estado “lleno” es excluyente al estado “vacío”; es decir, o es “lleno” o es “vacío” pero no los dos, o ninguno de los dos. La pregunta es cuáles son los límites de lo que encierra “lleno” para definir el estado “vacío”. En estos ejemplos se observa que hay solamente dos elementos: el “uno o el otro”. Este esquema se reduce a que un elemento solamente puede estar en estado de verdad o falsedad, pero no en los dos.

Formalmente, la lógica bivalente se define bajo tres principios básicos: identidad, no contradicción y tercero excluido. El principio de identidad se refiere a que si A se identifica en estado de verdad, si y sólo si A es verdad. El principio de no contradicción es que si A es verdad entonces no puede ser falsa, porque no puede ser los dos al mismo tiempo, y el principio de tercero excluido se refiere a que A puede ser verdadero o falso pero no otro resultado.

Determinar los límites de cada estado y cumplir con los tres principios es el punto fundamental para determinar cada elemento de lógico. No obstante, si los límites no están definidos entonces no se sabrá si el estado es “lleno” o es “vacío”, o si, por ejemplo, es “rápido” o es “despacio”, “frío” o “caliente”. Cuando no hay exactitud en las fronteras de cada estado se acude a la aceptación del tercero excluido, en la que si no es lo “uno o lo otro”, se puede pensar en otro posible resultado.

Observar fenómenos bajo la óptica de la lógica clásica no es siempre el camino más apropiado, dado que la naturaleza no es bivalente; en consecuencia, Aristóteles expone que las preposiciones que mencionan futuros contingentes tales como “mañana habrá una batalla naval” indican algún grado de incertidumbre, y no se pueden expresar como enunciados verdaderos o falsos, dado que no se tiene la certeza de qué va a acontecer el día de mañana. Con esta introducción se comienza a ver que la vida tiene más de dos opciones, y que en medio de éstas hay otros resultados posibles.

En 1920 Jan Lukasiewicz introdujo la lógica trivalente para dar respuesta al problema de los futuros contingentes. Lukasiewicz muestra que si la preposición es falsa o verdadera posee un valor de 0 ó 1 respectivamente, pero si no es ni verdadera ni falsa se puede dar un valor de $\frac{1}{2}$. Las tablas tautológicas de la lógica clásica y la lógica trivalente son iguales para los valores “1” y “0”.

Tabla 2: Negación

Negación				
Lógica	Clásica		Trivalente	
Valor	P	Np	p	Np
VERDADERO	1	0	1	0
FALSO	0	1	0	1
POSIBLE			1/2	1/2

Fuente: Velarde (1978).

Tabla 3: Conjunción

Conjunción de p & q						
Lógica	Trivalente			Clásica		
Valor	1	1/2	0	1		0
1	1	1/2	0	1		0
1/2	1/2	1/2	0			
0	0	0	0	0		0

Fuente: Velarde (1978).

Tabla 4: Disyunción

Disyunción de p v q						
Lógica	Trivalente			Clásica		
Valor	1	1/2	0	1		0
1	1	1	1	1		1
1/2	1	1/2	1/2			
0	1	1/2	0	1		0

Fuente: Velarde (1978).

Tabla 5: Implicación

Implicación p entonces q						
Lógica	Trivalente			Clásica		
Valor	1	1/2	0	1		0
1	1	1/2	0	1		0
1/2	1	1	1/2			
0	1	1	1	1		1

Fuente: Velarde (1978).

Tabla 6: Implicación doble

Implicación doble (p entonces q) & (q entonces p)						
Lógica	Trivalente			Clásica		
Valor	1	1/2	0	1		0
1	1	1/2	0	1		0
1/2	1/2	1	1/2			
0	0	1/2	1	0		1

Fuente: Velarde (1978).

Dicha similitud se observa en las cinco operaciones de negación, conjunción, disyunción, implicación y doble implicación.

Particularmente, en la lógica trivalente la opción "posible" es operada con las tres opciones, donde a la negación de una preposición se le da el valor de $\frac{1}{2}$, ya sea ésta falsa o verdadera. Es decir, si por ejemplo la preposición es "mañana habrá una batalla naval", ésta puede ser falsa o verdadera, y su negación en cualquier condición es igual a $\frac{1}{2}$. En el caso de la conjunción entre dos preposiciones posibles o una posible u otra verdadera, se le da un valor también de posible; contrariamente, si una de las dos preposiciones es falsa y la otra posible, el valor de conjunción es cero. De otro lado, si ambas preposiciones son posibles o si una es falsa y la otra es posible, la disyunción entre éstas es posible; mientras que si una es verdadera y la otra posible, la disyunción es 1.

Si el condicionante es igual al consecuente, o si el condicionante es posible y el consecuente es verdadero o si el condicionante es falso y el consecuente posibles, la implicación entre estos es igual a 1. Pero si el condicionante es verdadero y el consecuente posible o si el condicionante es posible y el consecuente falso entonces la implicación será $\frac{1}{2}$. Y, finalmente, en la doble implicación si el condicionante es posible y el consecuente es verdadero, o si el condicionante es verdadero o falso y el consecuente es posible, o si el condicionante es posible y el consecuente es falso, la doble implicación es posible. Mientras que son ambas, el consecuente y el condicionante, son posibles, la implicación doble es verdadera.

Bajo esta observación se concluye que las operaciones en el sistema trivalente son equivalentes al sistema de lógica clásica, pero las operaciones del sistema bivalente no son equivalentes al sistema de lógica trivalente.

En 1965 Lofti Zaden propone que los valores de las preposiciones no son necesariamente numéricas sino lingüísticas. Ya no se habla de verdadero como 1, falso 0 o posibles $\frac{1}{2}$, sino que el conjunto de posibles resultados es tan amplio como el razonamiento humano. El abanico de posibles resultados de una proposición está determinado por un grado de certeza que oscila entre dos valores extremos que son límites fijados por la lógica clásica. Con el estudio de dicho grado de imprecisión se llega al desarrollo de la lógica difusa, la cual contempla los estados de ambigüedad de preposiciones que reflejan comportamientos reales, por ejemplo: el crecimiento de participación es alto, la persona no está bien capacitada, esa empresa es perdurable, los empleados están motivados, la empresa es grande, etc.

1. INVESTIGACIÓN

El aporte de la lógica difusa se observa en áreas como: Inteligencia artificial Lingüística, Lógica, Análisis de decisión, Teoría de control y Redes neuronales, entre otros. Particularmente, existen grupos de investigación nacionales especializados en temas de lógica difusa y sus aplicaciones, tales como:

- Grupo de investigación y desarrollo en inteligencia artificial, de la Universidad Nacional, sede Medellín. http://www.unalmed.edu.co/~gidia/sld.html
- Grupo de Investigación en Sistemas Neurodifusos, de la Corporación Universitaria Rafael Núñez.
- Inteligencia Artificial.
- Inteligencia Artificial Turing.
- Inteligencia Artificial en Educación.
- Grupo de Inteligencia Artificial.
- Visión Artificial e Imágenes Diagnósticas.
- Artificial Intelligence Group (AIG-UAC).
- Grupo de Investigación en Inteligencia Artificial (IAFT).
- Grupo de Investigación en Inteligencia Artificial (GIA).
- Grupo de Investigación en Inteligencia Artificial (GIIA).
- Automatización, Visión Artificial, Robótica y Control (AVARC).
- Computación Evolutiva y Vida Artificial (EVO-ALIFE).
- Grupo de Investigación en Modelación e Inteligencia Artificial (GIMIA).
- Grupo de Inteligencia Artificial - Juan de Castellanos (GIA-JDC).
- Grupo de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Artificial (GIDIA).
- Grupo de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Artificial Aplicada (GIDIAA).
- Grupo de investigación de inteligencia artificial control y comunicaciones (GIIACC).
- Grupo de Investigación en Inteligencia Artificial y Sistemas de Conocimiento Experto Lince.
- Inteligencia Artificial y Tecnologías de la Información y Comunicación para la Enseñanza (GIATIC).

Y a nivel internacional los más relevantes son:

- Centre for Computational Intelligence. http://www.cci.dmu.ac.uk/
- Fuzziness and Uncertainty Modelling Research Group at Ghent University, Belgium. http://www.fuzzy.ugent.be/
- Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI) research group at University of Waterloo, Canada. http://pami.uwaterloo.ca/tizhoosh/fip.htm
- Control Systems Engineering Group at Faculty of Information Technology & Systems, Delft University of Technology, The Netherlands. http://www.dcsc.tudelft.nl/index.html
- Machine Intelligence Institute, USA. http://www.panix.com/~yager/HP/mii.html
- Fuzzy Logic Laboratorium Linz (FLLL), Linz, Austria. http://www.flll.uni-linz.ac.at/
- Approximate Reasoning and Artificial Intelligence Group, University of Granada, Spain. http://decsai.ugr.es/difuso/fuzzy.html
- Research group on Neural Networks and Fuzzy Systems, Uni. Magdeburg, Germany. http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/wiki/pmwiki.php
- ELITE - European Laboratory for Intelligent Techniques Engineering, Aachen, Germany. http://www.elite-foundation.org/
- Knowledge/Intelligence Systems Laboratory in the Department of Mechanical and Industrial Engineering at the University of Toronto, Canada. http://www.mie.utoronto.ca/labs/fuzzy/
- Soft computing and Fuzzy Logic Group at University of Milano, Italy. http://homes.dsi.unimi.it/~mundici/SCFL/
- Grupo de investigación ORETO Sistemas inteligentes Aplicados de la Universidad de Castilla-La Mancha. http://www.oreto.inf-cr.uclm.es
- Centro Europeo de Soft Computing. http://www.softcomputing.es/es/portada.php
- Grupo: Inteligencia artificial y razonamiento aproximado. Universidad Pública de Navarra. http://www.unavarra.es/invest/cat_invest%2035_1.htm
- Grupo de sistemas inteligentes. Universidad de Santiago de Compostela. http://www.gsi.dec.usc.es/

- Fusión de la información y lógica difusa de la Universidad de Alcalá.
- Escola Superior de Tecnologia i Ciències Experimentals. Oficina de Cooperació en Investigació i Desenvollupament Tecnològic (OCIT) Univertitat Jaume. http://www.uji.es/CA/ocit/e@/05304/?codi=111

2. OBJETIVO

El propósito de este capítulo es presentar la conceptualización de lógica difusa, para luego implementar su metodología en el campo organizacional. La inquietud de desarrollar esta aplicación partió de la conceptualización de la empresa como un fenómeno desarrollado por el hombre, al cual se le heredó la ambigüedad para su comprensión.

Al definir la organización como un sistema inmerso en un sistema complejo gobernado por las acciones humanas, se le ha dado la categoría de sistema dinámico que se encuentra impregnado de la inexactitud, vaguedad y ambigüedad.

Los sistemas empresariales funcionan por la interacción de varios elementos: internos, como los trabajadores, proveedores, accionistas, clientes, entre otros; y externos, como gobierno, mercado, comunidad, etc. Dichas interacciones llevan a la empresa a presentar un comportamiento que varía según la composición de dada elemento exencionado. No obstante, hay combinaciones que le dan la capacidad a la empresa de perdurar en el tiempo, pero también se presentan combinaciones que la llevan a morir.

Bajo estas características las herramientas tradicionales de matemáticas o estadística dan una visión puntual del comportamiento de una empresa, o de la combinación de elementos que la componen. Sin embargo, la medición basada en la lógica bivalente no contempla los niveles medios que muestra el grado de perdurabilidad que puede lograr una empresa. Dada esta necesidad, se ha optado por hacer observaciones de la empresa con la lógica polivalente y, en particular, con herramientas que la utilicen, este es el caso de la lógica difusa. A continuación se presenta la metodología de lógica difusa como herramienta para la comprensión de perdurabilidad de la empresa.

3. CONJUNTOS DIFUSOS

Al igual que la lógica clásica, la lógica difusa desarrolla la teoría de conjuntos basada en las construcciones tautológicas. Dentro de los desarrollos se presentan: la función de pertenencia, las operaciones entre conjuntos, las relaciones entre elementos de conjuntos y las operaciones entre relaciones.

3.1. FUNCIÓN DE PERTENENCIA

La función de pertenencia es una función que toma valores entre 0 y 1, donde 0 indica la carencia total de un estado, y 1 indica la carencia total del estado complementario. Por ejemplo, si el estado es "perdurable" la función de pertenencia es 1; su estado complementario es "No perdurable", para el cual su función de pertenencia es 0.

Para determinar una función de pertenencia es preciso definir el conjunto en el que se observa dicha pertenencia. En la lógica clásica, un conjunto se determina por una afirmación, sentencia o preposición, las cuales se caracterizan por ser exactas. Por ejemplo: Preposición: las empresas con activos entre 50 y 300 millones durante el 2007.

Entonces, las empresas con activos entre dicho rango pertenecen al conjunto A, y las empresas que no tengan activos entre el rango mencionado no pertenecen al conjunto A. Para esta preposición la función de pertenencia es:

$$\nu_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si x} \in \text{A} \\ 0 \text{ si x} \notin \text{A} \end{cases}$$

Esto es, el valor de la función de pertenencia de x al conjunto A es 1 cuando x pertenece al conjunto, es decir, cuando la preposición es verdadera; y el valor de la función es 0 cuando x no pertenece al conjunto, es decir, cuando la preposición es falsa.

En lógica clásica sólo se tienen dos posibles resultados para una preposición blanco o negro, pero en lógica borrosa hay una gama infinita de negros o blancos, entre 0 y 1. Los valores infinitos entre 0 y 1 muestran el grado de presencia de un estado determinado. Por ejemplo, 0 es blanco y 1 es negro, 0.5 es medio blanco y medio negro, 0.75 es más negro que blanco, ó 0.25 es más blanco que negro.

Ilustración 1: Función de pertenencia para el estado negro

Grado	Color
0	
0,25	
0,5	
0,75	
1	

Fuente: Elaboración de la autora.

Si se quiere determinar el estado de la perdurabilidad de una empresa, se tienen valores infinitos entre ser "perdurable" y "no perdurable".

Ilustración 2: Función de pertenencia para el estado perdurable

Fuente: Elaboración de la autora.

En los primeros años de operación la empresa busca lograr la perdurabilidad, pero después de determinado tiempo enferma y va perdiendo dicha perdurabilidad. En la ilustración 2 se observa que en los primeros nueve años de operación de la empresa la perdurabilidad es 0, es decir, el estado de la empresa es "no perdurable". Luego entre los nueve y diecisiete años de operación, la empresa continúa trabajando según su razón social, y se dice que la empresa tiene un grado de perdurabilidad; en el año dieciocho de operación el estado de la empresa es "perdurable" y el valor de la función de pertenencia es 1. No obstante, suponiendo que la empresa continúa con sus prácticas regulares, al cabo del año diecinueve la empresa pierde fuerza y entra en descenso, y comienza a recorrer un camino que la lleva de nuevo a un estado de "no perdurabilidad" que se observa en el año veintisiete de operación. La función de pertenencia de este ejemplo de perdurabilidad es:

$$f_{perdurabilad}(x = \text{años de operación}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (0 \leq \text{x} < 9) \;\; \text{y} \;\; (27 \leq \text{x} < \infty) \\ (0.11\text{x} - 1) & \text{si} \quad (9 \leq \text{x} < 18) \\ 1 & \text{si} \quad \text{x} = 18 \\ (3 - 0.11\text{x}) & \text{si} \quad (18 < \text{x} < 27) \end{cases}$$

Así, la función de pertenencia es 0 cuando x es mayor a 0 pero menor a 9 y cuando x es mayor a 27; se calcula con la ecuación $f_A(x) = 0.11\text{x} - 1$ cuando *x* es mayor a 9 pero menor a 18 y con la ecuación $f_A(x) = 3 - 0.11\text{x}$ cuando *x* es mayor a 18 pero menor a 27.

3.2. CONJUNTO DIFUSO

Un conjunto difuso es una agrupación de pares ordenado, compuesto por elementos y su respectiva función de pertenencia. Particularmente, en el ejemplo de perdurabilidad el conjunto de pares ordenados está constituido por cada elemento de perdurabilidad y su valor de pertenencia. Si una empresa mide su perdurabilidad según los años de operación, entonces a cada año, x, le corresponde una pareja $\mu_A(x)$ que determina el valor de pertnencia de x al conjunto A, es decir:

$$A = \{(\text{x}, \ \mu_A(\text{x})) \text{ para todo x} \in \text{U}\}$$

Donde U es el universo, que en este caso son las empresa con x años de operación, observadas con corte a un año determinado, ejemplo diciembre de 2007.

Dentro de las características que tiene un conjunto difuso se encuentran las siguientes:

El soporte del conjunto difuso A son todos los elementos x que pertenecen al universo en estudio, que tiene una función de pertenencia distinta a cero. Es decir:

$$Sopor(x) = \{x \in U \ tal\,que \ \mu_{\text{A}}(x) > 0\}$$

Si la función de pertenencia de x es 0.5 se dice que x es un punto de cruce.

$$x_{Pcr\mu_A(x)} = \{x \; tal \, que \; \mu_A(x) = 0.5\}$$

Sean A y B dos conjuntos difusos, los conjuntos A y B son iguales si, y sólo si, las funciones de pertenencia son iguales:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

El conjunto difuso B está contenido en A, $B \subset A$, si, y sólo si, la función de pertenencia de B, $\mu_B(x)$, es menor o igual a un múltiplo de la función de pertenencia de A, $\mu_A(x)$, es decir:

$$\mu_B(x) \leq k\mu_A(x)$$

3.3. OPERACIONES CON CONJUNTOS DIFUSOS

Las operaciones entre conjuntos difusos son: complemento, unión e intersección.

3.3.1. Complemento de conjuntos difusos

El complemento de un conjunto A, es decir $\overline{A}$, se define como uno menos la función de pertenencia de A:

$$\mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x) = 1 - \mu_{\mathrm{A}}(x)$$

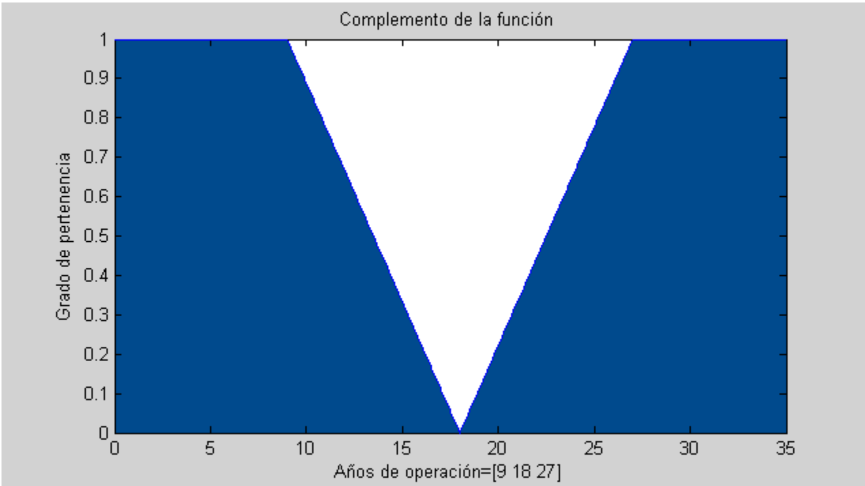
Por ejemplo, si el conjunto de las empresas perdurables está dado por la siguiente tabla:

A	
x	$\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$
0	0
18	1
30	0

Fuente: Elaboración de la autora.

Donde para 0 años la función de pertenencia es 0, para 18 años la función es 1 y para 30 años es 0. Es decir, si la empresa tiene 0 ó 13 años de antigüedad, ésta "no es perdurable", pero si la empresa tiene 18 años se dice que es "perdurable", en este caso el conjunto complemento es:

Ilustración 3: Complemento del conjunto de las empresas con algún grado de perdurabilidad



Fuente: Elaboración de la autora.

$\overline{A}$	
x	$\mu_A (x)$
0	1
18	0
30	1

Fuente: Elaboración de la autora.

En este conjunto están las empresas que con 0 años de antigüedad son "perdurables", las que con 18 años "no son perdurables", y las que con 30 años "no son perdurables".

3.3.2. Unión de conjuntos difusos

La función de pertenencia de la unión de dos conjuntos difusos A y B, $A \cup B$ está dada por la función de pertenencia de A, $\mu_A(x)$; y la función de pertenencia de B $\mu_B(x)$. Entonces la unión es:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

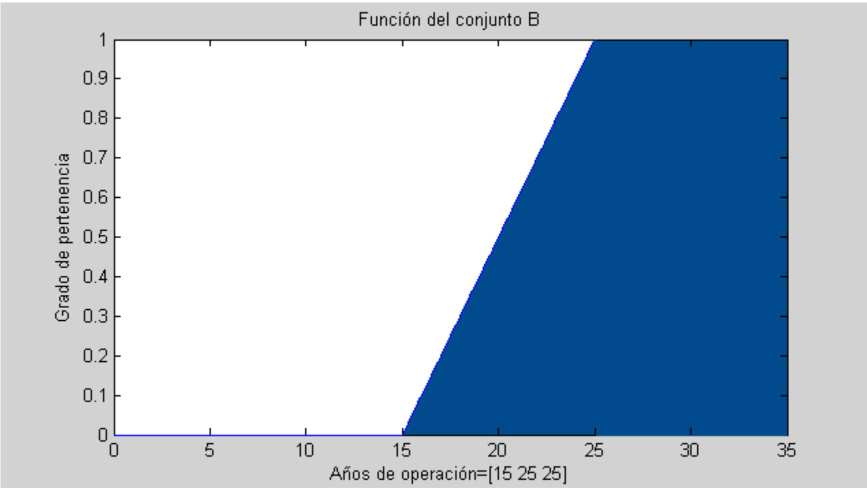
En el caso del conjunto de las empresas perdurables, la perdurabilidad en el sector A y B está dada por:

A		B	
x	$\mu_A(x)$	x	$\mu_B(x)$
0	0	15	0
18	1	25	1
30	0	35	1

Fuente: Elaboración de la autora.

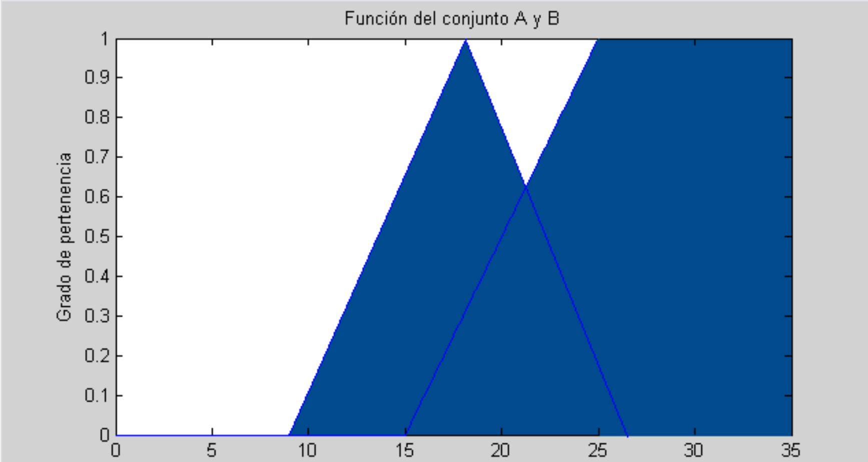
Y la unión de A y B es la zona sombreada de la ilustración 5.

Ilustración 4: Conjunto difuso B



Fuente: Elaboración de la autora.

Ilustración 5: Unión de los conjuntos difusos A y B



Fuente: Elaboración de la autora.

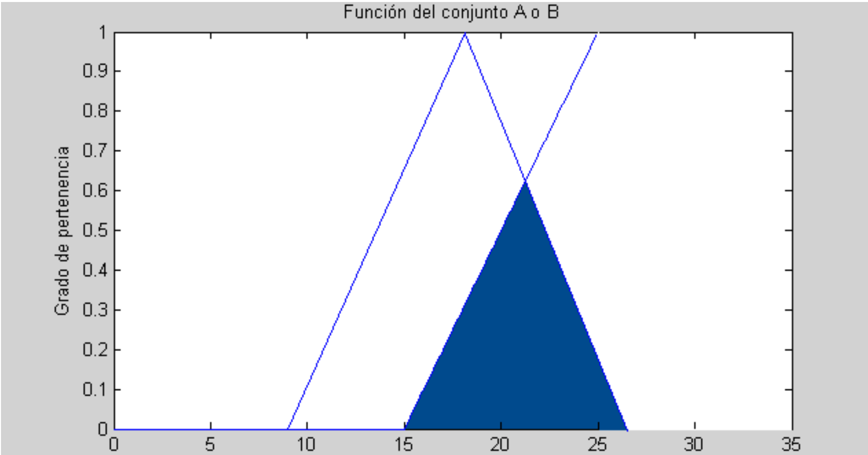
3.3.3. Intersección de conjuntos difusos

La función de pertenencia de la intersección de dos conjuntos difusos A y B, $A \cap B$ está dada por la función de pertenencia de A, $\mu_A(x)$; o la función de pertenencia de B, $\mu_B(x)$. Entonces la intercepción es:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

En el caso de la perdurabilidad en los sectores A y B la intercepción es la siguiente:

Ilustración 6: Intersección de los conjuntos difusos A y B



Fuente: Elaboración de la autora.

En este sector sombreado se encuentran las empresas que tienen antigüedad entre 15 y 30 años, pero que no alcanza el grado máximo de pertenencia a lo que se llama perdurabilidad.

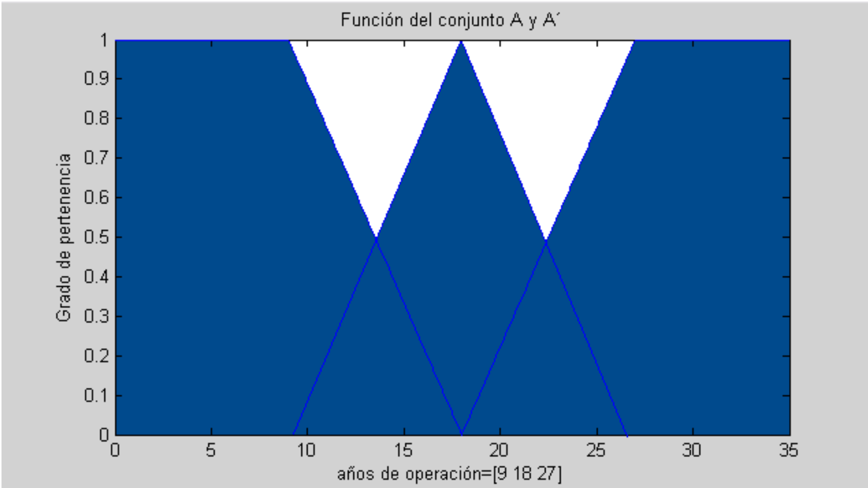
Adicional a las operaciones los conjuntos difusos, se analizan las dos leyes de la contradicción y la exclusión.

Primero: la ley de la contradicción dice que la unión de un conjunto A con su complemento no son iguales al universo,[2] porque según la unión de conjuntos difusos, la función de pertenencia de la unión está dada por:

$$\mu_{A \cup \overline{A}}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_{\overline{A}}(x)$$

2 Bajo lógica clásica, la teoría de conjuntos, la unión entre un conjunto y su complemento es el universo $A \cup \overline{A} = U$.

Ilustración 7: Ejemplo de la ley de exclusión



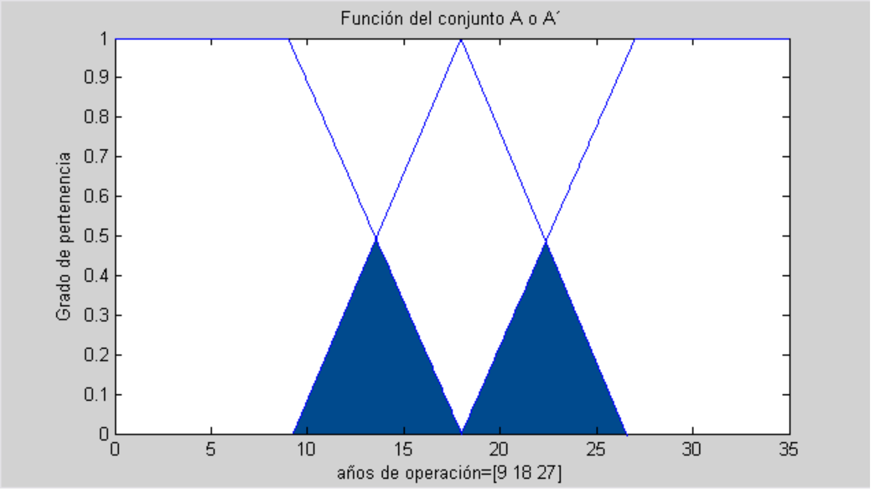
Fuente: Elaboración de la autora.

Dado que el universo está constituido por todo el espacio que hay de 0 a 1 en el eje de Grados de pertenencia y de 0 a 30 en el eje de los elementos; y según la ilustración 9 de la ley de exclusión, los triángulos blancos no son parte de la unión. Es decir, la unión no es igual al universo.

Segundo: la ley de exclusión dice que la intersección entre un conjunto difuso A y su complemento es igual a vacío,[3] y aplicando la operación de intercepción la función de pertenencia de la intersección está dada por $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$.

3 Bajo lógica clásica, la teoría de conjuntos, la intersección entre un conjunto y su complemento es vacía. $A \cap \overline{A} = \Phi$

Ilustración 8: Ejemplo de la ley de contradicción



Fuente: Elaboración de la autora.

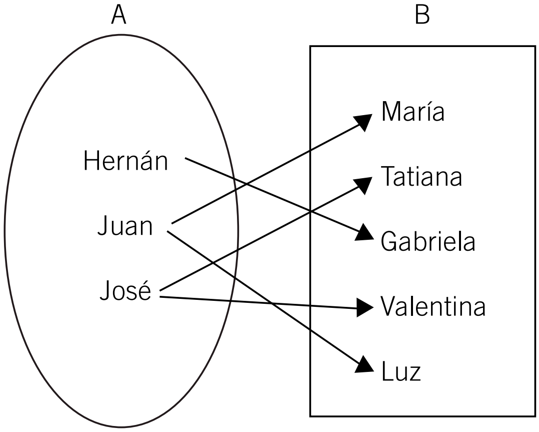
Según la ilustración 8 de la ley de contradicción, los triángulos amarillos indican que la intercepción tiene elemento, es decir intercepción no es igual a vacío.

Por ejemplo, A representa las empresas que tienen algún grado de perdurabilidad pero su complemento no son las no perdurables, son las empresas que también tiene algún grado de perdurabilidad. Así, la intersección es un conjunto de empresas que tienen algún bajo grado de perdurabilidad, ya sea por ser empresas jóvenes o por llevar mucho tiempo operando.

3.4. RELACIONES DIFUSAS

La relación es un conjunto de pares ordenados en el cual a cada elemento de un conjunto A le corresponde uno o varios elementos como pareja, del conjunto B. Por ejemplo: el conjunto A representa tres padres y el conjunto B cinco hijas. La relación está en que los elementos de A representan los padres de los elementos de B.

Ilustración 9: Ejemplo de relaciones



Fuente: Elaboración de la autora.

Las parejas ordenadas de dicha relación son las siguientes:

$$R = \{(Hernán, Gabriela), (Juan, María), (Juan, Luz), (José, Tatiana), (José, Valentina)\}$$

Los elementos del conjunto difuso A se relaciona con los elementos de un conjunto difuso B, la fuerza de esta relación se mide de 0 a 1.

Por ejemplo:

Si x presenta los años de antigüedad de las empresas del sector A, y y los años de antigüedad de las empresas del sector B, la relación es que las empresas del sector A tienen una perdurabilidad similar a las empresas del sector B, es decir 'X es similar a Y'.

		Y			
		1	5	6	12
X	1	1	0,3	0,1	0
	5	0,3	1	0,8	0,1
	6	0,1	0,8	1	0,7
	12	0	0,1	0,7	1

Fuente: Elaboración de la autora.

Si X y Y son universos y el producto cartesiano está dado por X x Y para todo x que pertenece a X y y que pertenece a Y, es decir:

$$X\ x\ Y = \{(x,\ y) \perp x \in X\ , y \in Y\}$$

Dentro del producto cartesiano se encuentran las relaciones entre los elementos de X y los elementos de Y. Particularmente, si A es un conjunto difuso en X y B es un conjunto difuso en Y, entonces el producto cartesiano entre A y B es la relación difusa R.

En esta medida, el producto A x B es subconjunto de X x Y:

$$A\ x\ \ B = R \subset X\ x\ Y$$

La relación entre A y B está dada por la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{\mathrm{R}}(x,\ y) = \mu_{AxB}(x,\ y) = min\left(\mu_A(x),\ \mu_B(y)\right)$$

Por ejemplo, el conjunto difuso A está determinado sobre un universo de tres años de operación $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, y B definido sobre un universo de dos rentabilidades,[4] $Y = \{y_1, y_2\}$. Entonces el producto cartesiano representa la perdurabilidad observada a partir de la rentabilidad.[5]

Ahora, el conjunto difuso A que define la perdurabilidad está dado por:

$$A = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} \qquad \text{y}$$

El conjunto difuso B que define la rentabilidad de la empresa está dado por:

$$B = \frac{0.1}{y_1} + \frac{0.5}{y_2}$$

El producto cartesiano difuso es:

$$AxB = R = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

4 Se entiende por rentabilidad como el porcentaje que representan las utilidades sobre los activos que posee la empresa en un momento dado.

5 La expresión *perdurabilidad* aun no tiene una definición particular. No obstante, uno de los componentes para que la empresa permanezca activa es su rentabilidad.

Cada uno de los componentes del producto está dado por:

$$\mu_{\mathrm{R}}(x_i, y_j) = \mu_{\mathrm{AxB}}(x_i, y_j) = min\left(\mu_{\mathrm{A}}(x_i), \mu_{\mathrm{B}}(y_j)\right)$$

Donde i es 1, 2 y 3 y j es 1 y 2.

Entonces, la matriz que muestra la relación R entre la perdurabilidad y la rentabilidad está compuesta por los siguientes resultados:

$$\mu_{\mathrm{R}}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) = \mu_{\mathrm{AxB}}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) = min\left(0.1, 0.1\right) = 0.1$$

$$\mu_R(x_i, y_j) = \mu_{AxB}(x_i, y_j) = min\left(0.6, 0.1\right) = 0.1$$

$$\mu_R(x_i, y_j) = \mu_{AxB}(x_i, y_j) = min\left(0.2, 0.1\right) = 0.1$$

$$\mu_R(x_i, y_j) = \mu_{AxB}(x_i, y_j) = min\left(0.1, 0.5\right) = 0.1$$

$$\mu_R(x_i, y_j) = \mu_{AxB}(x_i, y_j) = min\left(0.6, 0.5\right) = 0.5$$

$$\mu_R(x_i, y_j) = \mu_{AxB}(x_i, y_j) = min\left(0.2, 0.5\right) = 0.2$$

$$AxB = R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ o}$$

La relación difusa entre X y Y es: *X es la perdurabilidad de Y*

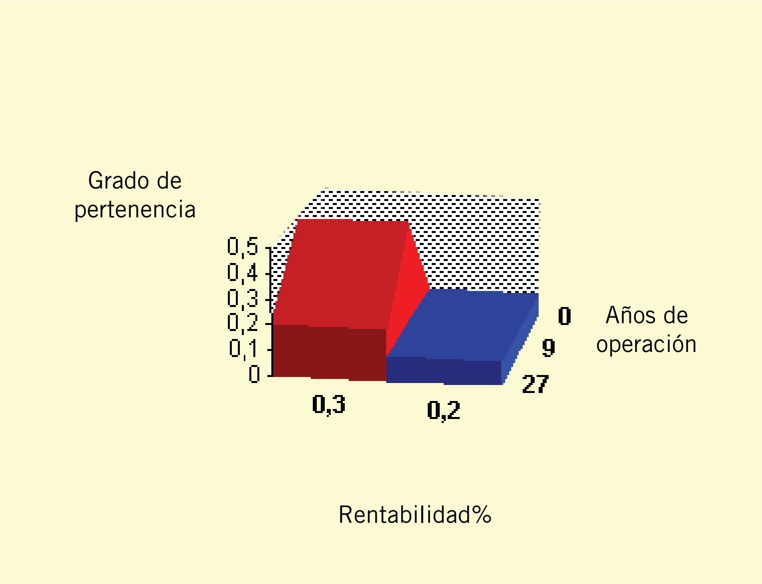
		Y	
		0,1	0,5
X	0,1	0,1	0,1
	0,6	0,1	0,5
	0,2	0,1	0,2

Fuente: Elaboración de la autora.

Entonces, R es la relación entre los años de operación de empresas y su rentabilidad.

Si, por ejemplo, X es el universo $X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{0,9,27\}$, y Y es el universo $Y = \{y_1, y_2\} = \{0.2, 0.3\}$ entonces la gráfica de la relación es:

Ilustración 10: Relación entre perdurabilidad y rentabilidad



Fuente: Elaboración de la autora.

La gráfica muestra que cuando la rentabilidad es 0.2% y los años de operación son 0, 9 ó 27, el grado de relación entre los dos conjuntos es bajo 0.1, y aunque cuando la rentabilidad es mayor, 0.3%, la relación es un poco más alta, para empresas con 0 ó 27 años de operación, pero ésta sigue siendo baja. Particularmente, la relación más alta está entre la rentabilidad de 0.3% y las empresas con nueve años de operación.

3.5. OPERACIONES ENTRE RELACIONES DIFUSAS

Si P y R son relaciones difusas sobre un espacio cartesiano X x Y, los elementos del producto cartesiano tienen las siguientes operaciones: complemento, unión e intersección.

3.5.1 Complemento de una relación difusa

El complemento de la relación difusa R contenida en el espacio cartesiano X x Y está dado por:

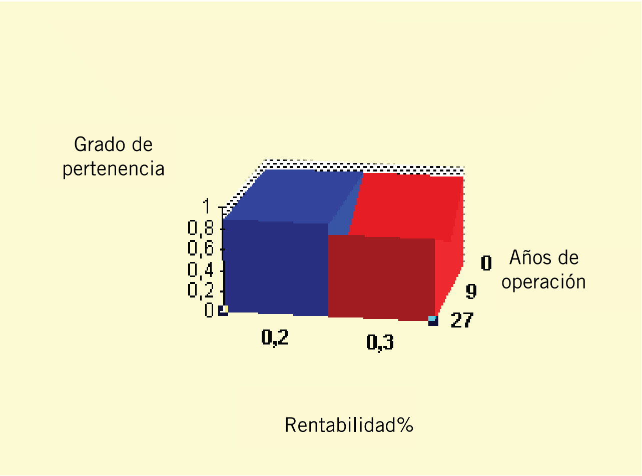
$$\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \left(\mu_R(x, y)\right)$$

Por ejemplo, si R es:

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$, su complemento se construye como:

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.5 \\ 0.9 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Ilustración 11: Complemento de la relación entre perdurabilidad y rentabilidad



Fuente: Elaboración de la autora.

Esta gráfica muestra el complemento de la relación entre rentabilidad y perdurabilidad, medida en años de operación. Cuando la empresa no tiene una rentabilidad de 0.2%, la relación con las empresas de 0, 9 ó 27 años es alta.

3.5.2. Unión entre relaciones difusas

La unión de dos relaciones R y P que están contenidas en el plano cartesiano X x Y, es igual a la máxima función de pertenencia entre R y P, es decir:

Por ejemplo, si P es una relación entre la rentabilidad y el reconocimiento de la empresa en el sector, expresadas por el conjunto difuso C y D. Donde C y D están dados por:

$$C = \frac{0.2}{y_1} + \frac{0.8}{y_2}$$

$$D = \frac{0.5}{z_1} + \frac{0.6}{z_2}$$

Entonces el producto artesiano entre B y C es:

$$CxD = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \end{pmatrix} = P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Entonces la unión entre las relaciones R y P es:

$$R \cup P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Cada miembro de la unión se construye de la siguiente manera:

$$\mu_{\mathrm{R\cup P}}(\mathrm{x}_1, \mathrm{z}_1) = \max\big(min(0.1,0.2), min(0.1,0.5)\big) = 0.1$$

$$\mu_{\mathrm{R\cup P}}(\mathrm{x}_1, \mathrm{z}_2) = \max\big(min(0.1,0.2), min(0.5,0.5)\big) = 0.5$$

$$\mu_{\mathrm{R\cup P}}(\mathrm{x}_2, \mathrm{z}_1) = \max\big(min(0.1,0.2), min(0.2,0.5)\big) = 0.2$$

$$\mu_{\mathrm{R\cup P}}(\mathrm{x}_2, \mathrm{z}_2) = \max\big(min(0.1,0.2), min(0.1,0.6)\big) = 0.1$$

$$\mu_{\mathrm{R\cup P}}(\mathrm{x}_3, \mathrm{z}_1) = \max\big(min(0.1,0.2), min(0.5,0.6)\big) = 0.5$$

$$\mu_{\mathrm{R\cup P}}(\mathrm{x}_3, \mathrm{z}_2) = \max\big(min(0.1,0.2), min(0.2,0.6)\big) = 0.2$$

Es decir:

$$R \cup P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

La unión de los dos productos cartesianos se representa en el espacio X x Z; es decir, la nueva relación representa la perdurabilidad y el reconocimiento de la empresa en el sector.

3.5.3. Intersección entre relaciones difusas

La intersección entre las dos relaciones difusas P y R está dada por:

$$\mu_{R \cap P}(x, y) = min\left(\mu_R(x, y), \ \mu_P(x, y)\right)$$

Por ejemplo:

$$R \cap P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Y para cada miembro de la intersección se tiene que:

$$\mu_{R \cap P}(x_1, z_1) = \min(max(0.1,0.2), max(0.1,0.5)) = 0.2$$

$$\mu_{R \cap P}(x_1, z_2) = \min(max(0.1,0.2), max(0.5,0.5)) = 0.2$$

$$\mu_{R \cap P}(x_2, z_1) = \min(max(0.1,0.2), max(0.2,0.5)) = 0.2$$

$$\mu_{R \cap P}(x_2, z_2) = \min(max(0.1,0.2), max(0.1,0.6)) = 0.2$$

$$\mu_{R \cap P}(x_3, z_1) = \min(max(0.1,0.2), max(0.5,0.6)) = 0.2$$

$$\mu_{R \cap P}(x_3, z_2) = \min(max(0.1,0.2), max(0.2,0.6)) = 0.2$$

Es decir:

$$R \cap P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

La intersección de los dos productos cartesianos se representa en el espacio X x Z, es decir, la perdurabilidad o el reconocimiento de la empresa en el sector.

4. LÓGICA DIFUSA

Dentro del interés de la lógica está estudiar la verdad o falsedad en las preposiciones, pero algunas sentencias no son del todo verdaderas o falsas, porque se analizan en diferentes contextos. Por esta razón una lógica de verdadero/falso es limitada para la observación de fenómenos que traen consigo la incertidumbre, y que pueden ser verdaderos y falsos según quien los observe. En consecuencia, se tiene como alternativa la lógica polivalente, en la cual se tienen múltiples grados de verdad o falsedad. La lógica que tiene en cuenta múltiples repuestas basadas en conjuntos difusos se llama lógica difusa, y para su estudio se exponen a continuación las operaciones entre dichos conjuntos.

4.1. OPERACIONES

Si una preposición difusa P representa un conjunto difuso A entonces la verdad en el valor x está dado por $V(P)$, el cual es equivalente a la función de pertenencia $\mu_A(x)$; es decir, $V(P) = \mu_A(x)$, donde $x \in A$ y la función de pertenencia está entre 0 y 1, $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$.

Una de las utilidades de la función de pertenencia de un conjunto difuso es que se puede operar con la función de otros conjuntos difusos. Dentro de los conectores lógicos están: negación, disyunción, conjunción e implicación.

Por ejemplo, si P es una proposición difusa sobre el conjunto difuso A, y Q una proposición difusa sobre el conjunto difuso B, se tienen las siguientes operaciones:

Negación: es el grado de verdad del complemento de P, el cual es igual a 1 menos el grado de verdad de P.

Es decir, la función de pertenencia de los elementos que son descritos por el complemento de la preposición P es igual a 1 menos la función de pertenencia de los elementos que son descritos por la preposición P, es decir:

$$V(\overline{P}) = (1 - V(P))$$

Disyunción entre P y Q: o grado de verdad entre P y Q es igual al máximo grado de verdad, el de P o el de Q, es decir:

$$V(P \vee Q) = max\left\{V(P),\ V(Q)\right\}$$

Conjunción entre P y Q: o el grado de verdad entre P o Q es igual a mínimo grado de verdad, el de P o el de Q, es decir:

$$V(P \wedge Q) = min(V(P), V(Q))$$

Implicación de P entonces Q: es el grado de verdad del complemento de P y Q, o es el máximo entre el grado de verdad el complemento de P y el grado de verdad de Q. En esta operación se identifican dos partes: el antecedente, que está acompañado por el "SI"; y el consecuente, que se antecede de un "ENTONCES". En este caso P es el antecedente y Q en consecuente:

$$V(P \rightarrow Q) = V(\overline{P} \vee Q) = max(V(\overline{P}), V(Q))$$

Implicación P $\rightarrow Q$:es equivalente a decir: Si x es A ENTONCES y es B; donde p es el condicionante y Q el consecuente. Esta relación es equivalente a la unión de los productos cartesianos:

$$R = (AxB) \cup (\overline{A}xY)$$

Y la función de pertenencia de R es:

$$\mu_R(x, y) = max\left[(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)), (1 - \mu_A(x))\right]$$

Por ejemplo, se tiene un universo difuso X que representa la percepción de los empresarios en relación con la siguiente afirmación: 1) "La empresa es efectiva cuando faculta a sus empleados y les da autonomía para intervenir en la solución de problemas". Y un universo difuso Y que representa la percepción de los empresarios en relación a la siguiente afirmación: 2) "El reconocimiento al desempeño y esfuerzo de los empleados propicia la identidad y cohesión social".

Si el universo de X es: $X = \{1, 2, 3, 4 ,5\}$ y, el universo Y es: $Y = \{1, 2, 3, 4 ,5\}$, la percepción media de la afirmación 1 constituye el conjunto difuso A; y la percepción media de la afirmación 2 constituye el conjunto difuso B. Entonces, la implicación Si A entonces B se halla de la siguiente forma.

Primero se desarrollan los productos: $(A \times B)$ y $(\overline{A} \times Y)$ donde:

$$A = \left\{ \frac{0.4}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.3}{4} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{0.6}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.2}{4} \right\}$$

Y C es un conjunto difuso de percepciones sobre la afirmación 2:

$$C = \left\{ \frac{0.1}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.7}{5} \right\}$$

Entonces el producto cartesiano difuso de $(A \times B)$ es:

$$AxB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 1 \\ 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Si el complemento de A es:

$$\overline{A} = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0.7}{4} \right\}$$

Y el universo y es:

$$Y=\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right\}$$

Entonces el producto $(\overline{A} \text{ x } Y)$ es:

$$\overline{A}xY=\begin{bmatrix}1\\0.6\\0\\0.7\\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7\end{bmatrix}$$

La unión de los dos productos es R:
$R = (A\ x\ \ B) \cup (\overline{A}\ x\ \ Y) = R = max\left\{(A\ x\ \ B)\ ,(\overline{A}\ x\ \ Y)\right\}$

$$\text{R} = (A\ x\ \ B) \cup (\overline{A}\ x\ \ Y) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6\\0 & 0.6 & 1 & 0.2 & 0\\0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7\end{bmatrix}$$

Implicación condicionada: es decir, Si A entonces B sino C; para encontrar la relación de la implicación condicionada se desarrollan los siguientes productos: $(A \text{ x } B)$ y $(\overline{A} \text{ x } C)$:

$$\overline{A}xC=\begin{bmatrix}1\\0.6\\0\\0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.7\\0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.6 & 0.6\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0.1 & 0.2 & 0.7 & 0.7 & 0.7\end{bmatrix}$$

$$R=(AxB)\cup(\overline{A}xC)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0\\0 & 0.6 & 1 & 0.2 & 0\\0 & 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.7\\0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.6 & 0.6\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0.1 & 0.2 & 0.7 & 0.7 & 0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.7\\0.1 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6\\0 & 0.6 & 1 & 0.2 & 0\\0.1 & 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7\end{bmatrix}$$

Esta relación representa la implicación condicionada, SI A entonces B sino C.

Otra operación es la composición, la cual tiene como utilidad encontrar el complemento de un consecuente a partir de su implicación. Es decir, si se tienen dos implicaciones:

SI x es A ENTONCES y es B

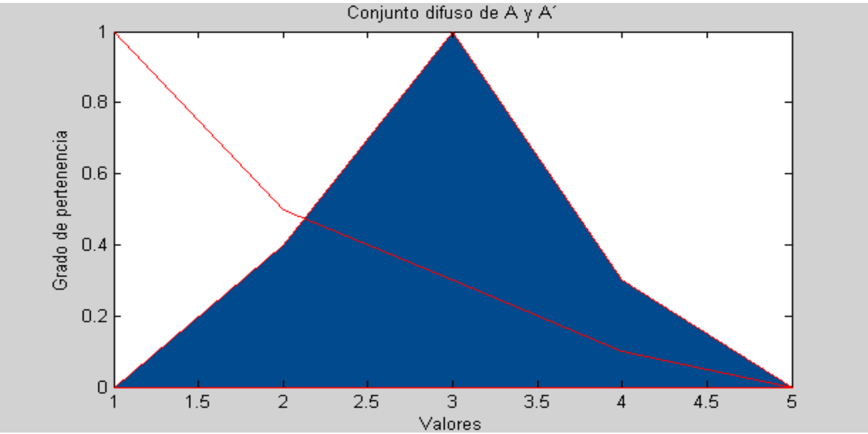
SI x es A´ ENTONCES y es B´

Así, a partir de la primera implicación se puede encontrar el consecuente de la implicación dos, B´ por medio de la composición $B' = A' \circ R$. La composición es una operación entre un conjunto difuso y una relación.

Por ejemplo, el conjunto difuso A´ indica la baja percepción de empresarios sobre la afirmación: "La empresa es efectiva cuando faculta a sus empleados y les da autonomía para intervenir en la solución de problemas". Es decir:

$$A' = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.1}{4} \right\}$$

Ilustración 12: Ejemplo 1 de conjunto difuso y su complemento



Fuente: Elaboración de la autora.

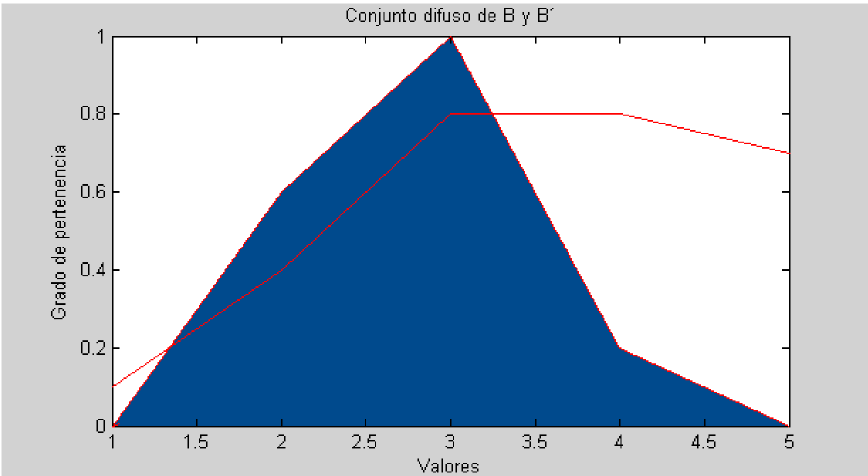
Y R es la relación que describe la implicación condicionada SI la percepción de la afirmación 1 es media, ENTONCES la percepción de la afirmación dos es media, SI NO la percepción de la afirmación de la afirmación 2 es difusa.

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.7 \\ 0.1 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.8 & 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$$

El conjunto difuso B´ está dado por:

$$B' = \left\{ \frac{0.1}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.7}{5} \right\}$$

Ilustración 13: Ejemplo 2 de conjunto difuso y su complemento



Fuente: Elaboración de la autora.

Y B´ representa el conjunto difuso que ilustra la percepción de los empresarios ante la afirmación: "El reconocimiento al desempeño y esfuerzo de los empleados propicia la identidad y cohesión social". La operación muestra que la percepción se acerca a tomar valores mayores a 3.

4.2. SISTEMAS BASADOS EN REGLAS

Las implicaciones SI-ENTONCES conforman una expresión de inferencia donde "SI" indica el antecedente y "ENTONCES" indica el consecuente.

La lógica difusa utiliza esta operación para determinar reglas que describen relaciones entre conjuntos difusos, donde "SI" es la condición o antecedente, y "ENTONCES" indica la restricción o consecuente. La mayoría de los sistemas difusos tiene más de una regla:

$$\begin{array}{l}\text{Regla 1: SI condición } X_1 \text{ ENTONCES restricción } Y_1\\ \text{Regla 2: SI condición } X_2 \text{ ENTONCES restricción } Y_2\\ \text{Regla 3: SI condición } X_3 \text{ ENTONCES restricción } Y_3\\ \ldots\\ \text{Regla k: SI condición } X_k \text{ ENTONCES restricción } Y_k\end{array}$$

Las k reglas tienen cada una, una condición y una restricción, pero cada regla puede tener varias condiciones, bajo una misma restricción:

$$\begin{array}{l}\text{Regla 1: SI condición } X_{11} \text{ y condición } X_{21} \text{ y} \ldots \text{y condición } X_{j1}, \text{ ENTONCES restricción } Y_1\\ \text{Regla 2: SI condición } X_{12} \text{ y condición } X_{22} \text{ y} \ldots \text{y condición } X_{j2}, \text{ ENTONCES restricción } Y_2\\ \text{Regla 3: SI condición } X_{13} \text{ y condición } X_{23} \text{ y} \ldots \text{y condición } X_{j3}, \text{ ENTONCES restricción } Y_3\\ \ldots\\ \text{Regla k: SI condición } X_{1k} \text{ y condición } X_{2k} \text{ y} \ldots \text{y condición } X_{jk}, \text{ ENTONCES restricción } Y_k\end{array}$$

Si A_{ih} representa el conjunto difuso de la condición i en la regla h y B_h el conjunto difuso de la restricción, entonces las reglas difusas son:

$$\begin{array}{l}\text{Regla 1}: SI\ x_1 \in (A_{11} \text{ y } A_{21}\ y \ldots y\ A_{i1}\ y \ldots A_{j1}) \text{ ENTONCES } y_1 \in B_1\\ \text{Regla 2}: SI\ x_2 \in (A_{12} \text{ y } A_{22}\ y \ldots y\ A_{i3}\ y \ldots A_{j3}) \text{ ENTONCES } y_2 \in B_2\\ \ldots\\ \text{Regla h}: SI\ x_J \in (A_{1h} \text{ y } A_{2h}\ y \ldots y\ A_{ih}\ y \ldots A_{jh}) \text{ ENTONCES } y_h \in B_h\\ \ldots\end{array}$$

Y A es el conjunto difuso de los x que están contenidos en todas las condiciones, $x \in A$ o $x \in (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_j)$. Entonces la función de pertenencia es:

$$\mu_A(x) = \min\left[(\mu_{A_1}(x),(\mu_{A_2}(x)...(\mu_{Aj}(x)\right]$$

Adicionalmente cada regla puede tener una u otra condición, es decir:

$$\text{Regla 1: SI condición } X_{11} \text{ o condición } X_{21} \text{ o…o condición } X_{j1}, \text{ ENTONCES restricción } Y_1$$
$$\text{Regla 2: SI condición } X_{12} \text{ o condición } X_{22} \text{ o…o condición } X_{j2}, \text{ ENTONCES restricción } Y_2$$
$$\text{Regla 3: SI condición } X_{13} \text{ o condición } X_{23} \text{ o…o condición } X_{j3}, \text{ ENTONCES restricción } Y_3$$
$$...$$
$$\text{Regla k: SI condición } X_{1k} \text{ o condición } X_{2k} \text{ o…o condición } X_{jk}, \text{ ENTONCES restricción } Y_k$$

En este caso A_{ih} representa el conjunto difuso de la condición i en la regla h y B_h el conjunto difuso de la restricción, entonces las reglas difusas son:

$$\text{Regla 1}: SI\ x_1 \in (A_{11}\ o\ A_{21}\ o...o\ A_{i1}\ o...A_{j1})\ \text{ENTONCES}\ y_1 \in B_1$$
$$\text{Regla 2}: SI\ x_2 \in (A_{12}\ o\ A_{22}\ o...o\ A_{i3}\ o...\ A_{j3})\ \text{ENTONCES}\ y_2 \in B_2$$
$$...$$
$$\text{Regla h}: SI\ x_J \in (A_{1h}\ o\ A_{2h}\ o...o\ A_{ih}\ o...\ A_{jh})\ \text{ENTONCES}\ y_h \in B_h$$
$$...$$

Y A es el conjunto difuso de los x que están contenidos en al menos una de las condiciones, $x \in A \quad o \quad x \in (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_j)$. Entonces la función de pertenencia es:

$$\mu_A(x) = \max\left[(\mu_{A_1}(x),(\mu_{A_2}(x)...(\mu_{Aj}(x)\right]$$

Así como las condiciones se pueden operar bajo la unión y la intersección, las restricciones también pueden ser varias y operarse entre sí. Si A_h representa el conjunto difuso de la restricción en la regla h y B_{ih} el conjunto difuso de la restricción i en la regla h, entonces las reglas difusas son:

$$\text{Regla 1}: SI\ x_1 \in A_1\ \text{ENTONCES}\ y_1 \in (B_{11}\ \text{y}\ B_{21}\ y...y\ B_{i1}\ y...\ B_{j1})$$
$$\text{Regla 2}: SI\ x_2 \in (A_2\ \text{ENTONCES}\ y_2 \in (B_{21}\ \text{y}\ B_{22}\ y...y\ B_{i2}\ y...\ B_{j2})$$
$$\text{Regla h}: SI\ x_j \in (A_h\ \text{ENTONCES}\ y_h \in (B_{1h}\ \text{y}\ B_{2h}\ y...y\ B_{ih}\ y...\ B_{jh})$$

En este caso, el sistema tiene reglas conjuntas que intersecan los consecuentes; es decir el sistema está compuesto por h regla, y los consecuentes se expresan así: $y \in B \quad o \quad x \in (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_j)$. Entonces la función de pertenencia es:

$$\mu_B(y) = \min\left[(\mu_{B_1}(y),(\mu_{B_2}(y)...(\mu_{Bj}(y)\right]$$

Y en el caso en que el sistema tenga reglas disjuntas en las que se unan los consecuentes, éstos se expresan, así: $y \in B \quad o \quad x \in (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_j)$. Entonces la función de pertenencia es:

$$\mu_B(y) = \max\left[(\mu_{B_1}(y),(\mu_{B_2}(y)...(\mu_{Bj}(y)\right]$$

4.3. TÉCNICAS DE INFERENCIA DIFUSA

A continuación se describen tres técnicas gráficas para hacer inferencia de sistemas difusos basados en reglas lingüísticas, éstos son: Sistema de Mamdani, Modelos de Sugeno y Modelos de Tsukamoto.

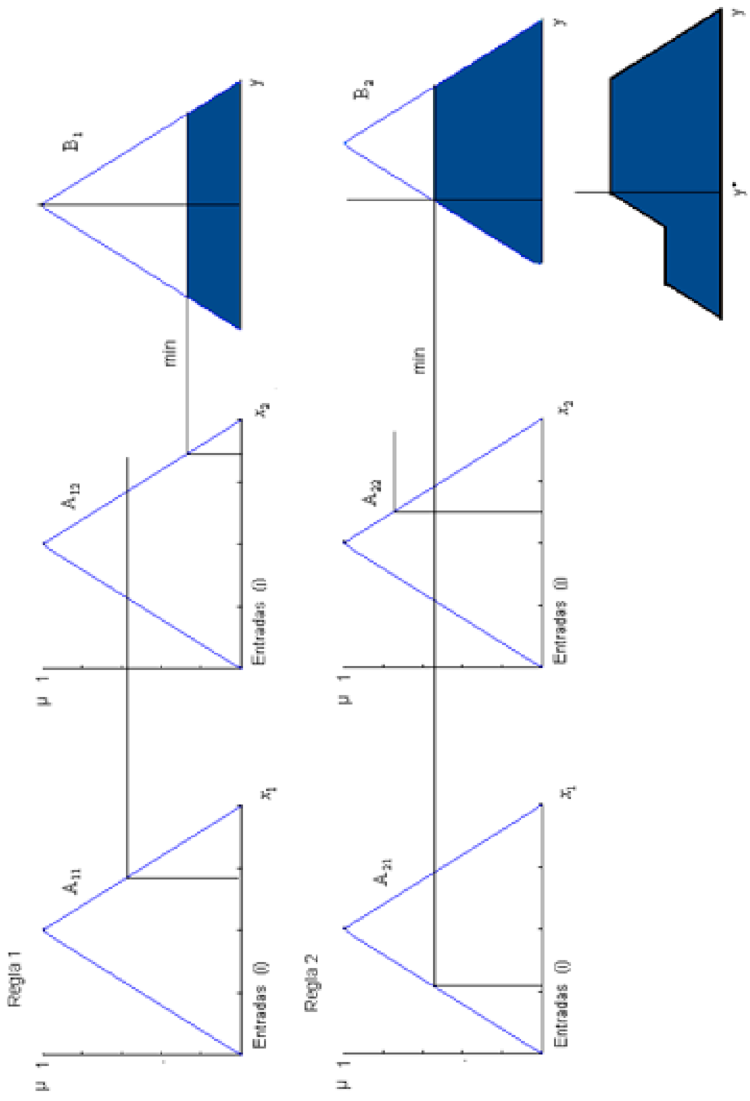
4.3.1. Sistema de Mamdani

El Sistema de Mamdani se basa en la implicación

SI x_1 es A_{1k} y x_1 es A_{2k} ENTONCES y_k es B_k para todo $k = 1,2...,h$ donde A_{1k} y A_{2k} son conjuntos difusos que representan el k- esima condicionante y B_k es un conjunto difuso que representa la k- esima restricción.

Si por ejemplo si $k = 2$ y se tienen las siguientes formas gráficas de los conjuntos A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1 y B_2.

Ilustración 14: Inferencia bajo el Sistema Mamdani



Fuente: Elaboración de la autora.

En la regla 1 se toma el valor mínimo entre los valores de y que corresponden a x_1 y x_2, respectivamente dicho valor se proyecta sobre el conjunto difuso B_1. Y también en la regla 2, se toma el valor mínimo entre los valares de y que corresponden a x_1 y x_2, respectivamente dicho valor y se proyecta sobre el conjunto difuso B_2. Los conjuntos B_1 y B_2 son representados por las zonas sombreadas y son los consecuentes de cada regla. El siguiente paso para hallar la inferencia con las dos reglas difusas es encontrar el máximo de las dos funciones de pertenencia de los conjuntos B_1 y B_2 para cada uno de los valores de y. El resultado es una gráfica en la que se unen los dos conjuntos difusos que representan la inferencia de las dos reglas difusas.

4.3.2. Modelos de Sugeno

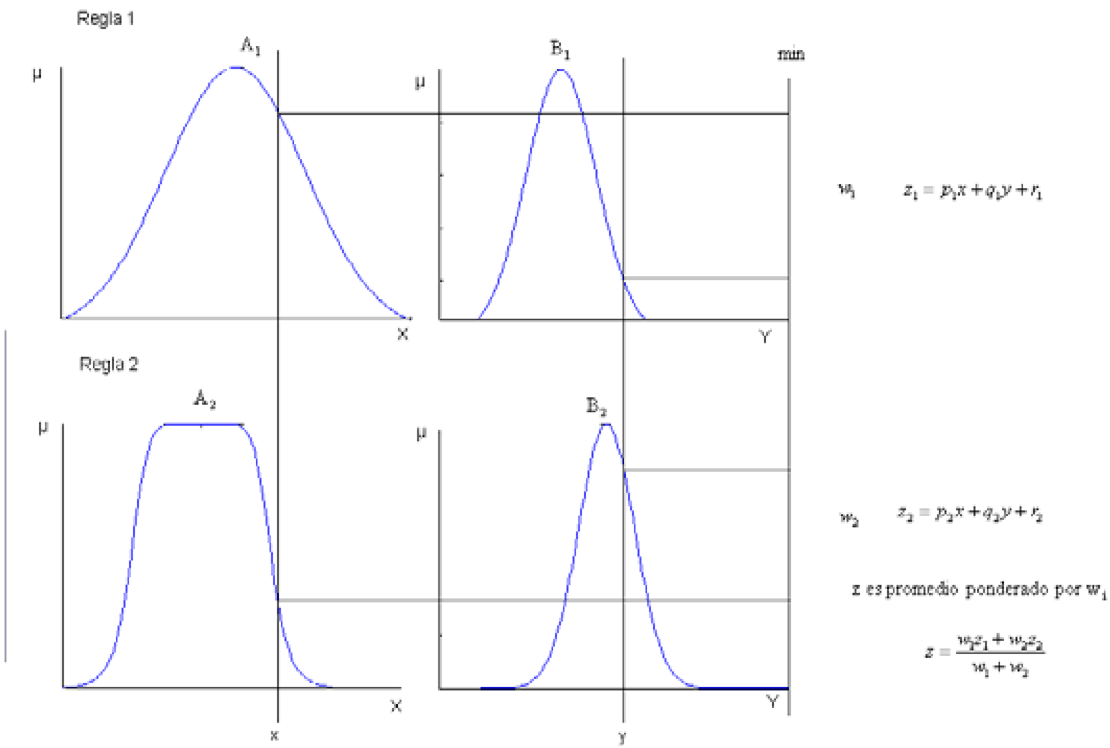
La regla en este modelo se compone de dos entradas, la de x y la de y, y una salida, z, así:

$$\textit{SI}\ \mathrm{x}\ \textit{e}\mathrm{s}\ \mathrm{A} \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{y}\ \textit{e}\mathrm{s}\ \mathrm{B} \quad \mathrm{ENTONCES} \quad \mathrm{z\ es\ z} = f(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

donde z es una función y representa en consecuente. Dado que el consecuente está en función de x y de y la función es un polinomio.[6]

6 En el caso de que la función $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ sea constante se trataría de un Sistema Mamdani.

Ilustración 15: Inferencia bajo Modelos Sugeno



Fuente: Elaboración de la autora.

A cada valor de x le corresponde un valor de pertenencia a los conjuntos difusos A_1 y A_2 y a cada valor de y le corresponde un valor de pertenencia a los conjuntos difusos B_1 y B_2. La inferencia difusa se obtiene cuando de cada regla se toma el mínimo de las funciones de pertenencia de los valores x y y. Estas funciones son descritas como w_1 y w_2, respectivamente, y toman valores entre 0 y 1. Las funciones $z = f(x, y)$ que representan los consecuentes de cada regla difusa son combinaciones lineales de x y y,

$$z_1 = p_1x + q_1y + r_1$$

$$z_2 = p_2x + q_2y + r_2$$

Donde p_i, q_i y r_i son constantes de la función.[7]

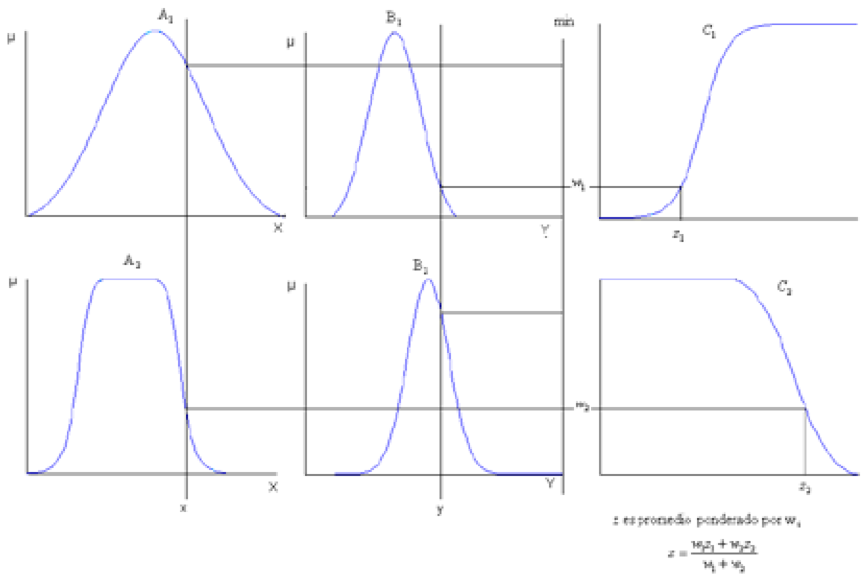
4.3.3. Modelo de Tsukamoto

Una regla i en este modelo se compone de una o varias entradas X y Y y una salida Z, así:

SI x *es* A_i y x es B_i ENTONCES y es C_i

El modelo de Tsukamoto puede tener k reglas difusas.

Ilustración 16: Inferencia bajo el modelo Tsukamoto



Fuente: Elaboración de la autora.

---

7 Para hallar el valor de difuzificación se toma cada w_i como los pesos de cada z_i y se desarrolla un promedio ponderado.

$$z = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2}{w_1 + w_2}$$

La inferencia es una función monotónica que está en el valor que indica la pertenencia w_i y el resultado de cada z_i.

4.4. APLICACIONES

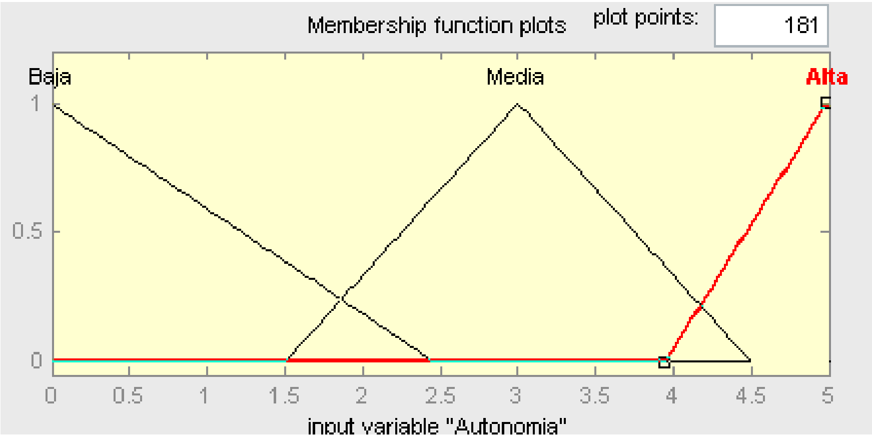
En el ejemplo de la percepción de los actores hacia las afirmaciones:

1) "La empresa es efectiva cuando faculta a sus empleados y les da autonomía para intervenir en la solución de problemas".

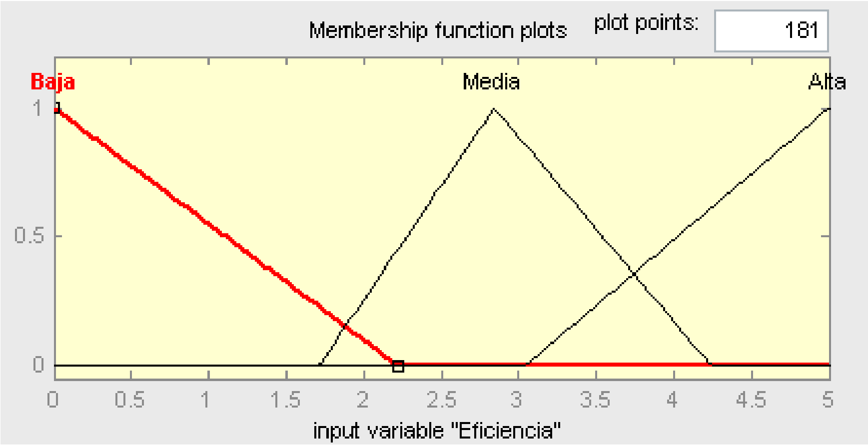
2) "La empresa eficiente es aquella que identifica, almacena, procesa, y utiliza la información sobre la competencia, clientes y proveedores".

3) El reconocimiento al desempeño y esfuerzo de los empleados propicia la identidad y cohesión social".

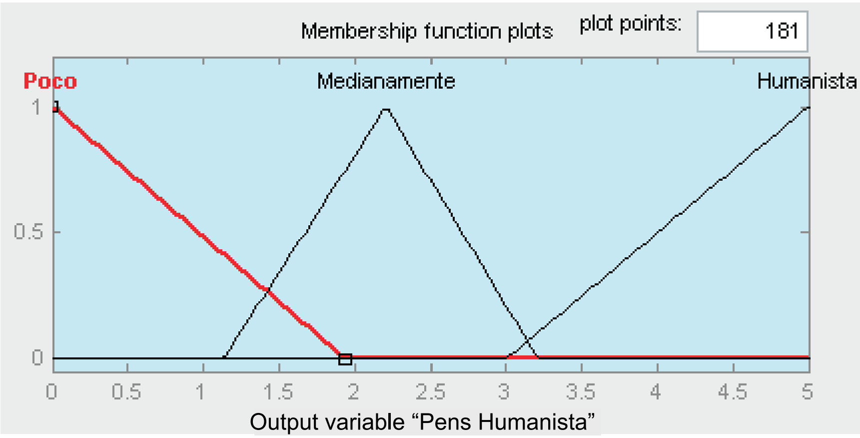
La afirmación 1 está orientada a medir la percepción de la autonomía; la afirmación 2, a medir la eficiencia; y la afirmación 3, el pensamiento humanista. La percepción de cada afirmación se puede dividir en alta media y baja, y los conjuntos difusos son los siguientes:



Fuente: Elaboración de la autora.



Fuente: Elaboración de la autora.



Fuente: Elaboración de la autora.

Y la descripción del fenómeno se rige bajo las siguientes cinco reglas difusas:

Regla 1: SI la percepción de la afirmación 1 es baja o la percepción de la afirmación 2 es baja, ENTONCES el pensamiento directivo es poco humanista.

REGLA 2: SI la percepción de la afirmación 1 es alta o la percepción de la afirmación 2 es baja, ENTONCES el pensamiento directivo es poco humanista.

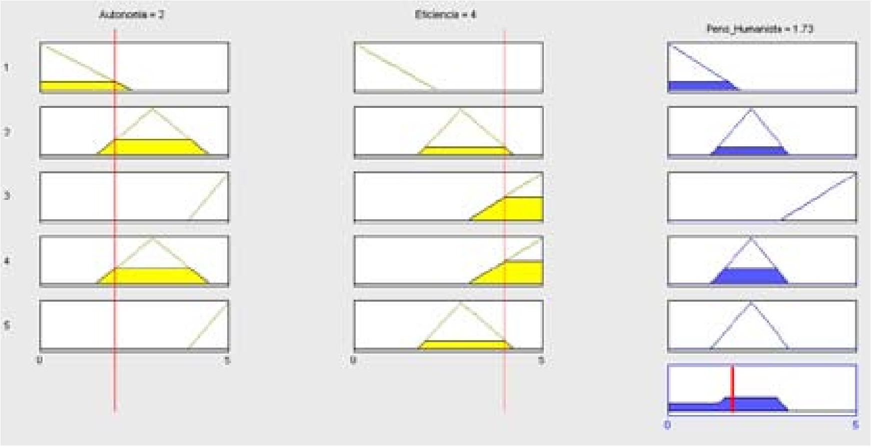
REGLA 3: SI la percepción de la afirmación 1 es baja y la percepción de la afirmación 2 es alta, ENTONCES el pensamiento directivo es medianamente humanista.

REGLA 4: SI la percepción de la afirmación 1 es media y la percepción de la afirmación 2 es alta, ENTONCES el pensamiento directivo se medianamente humanista.

REGLA 5: SI la percepción de la afirmación 1 es alta y la percepción de la afirmación 2 es media, ENTONCES el pensamiento directivo se medianamente humanista.

Si se toma una percepción hacia la afirmación 1 de “2” y hacia la afirmación 2 de “4”, el proceso de desdifuzificación por Sistema Mamdani da como resultado que el pensamiento humanista es de 1.73, como se observa en la siguiente ilustración:

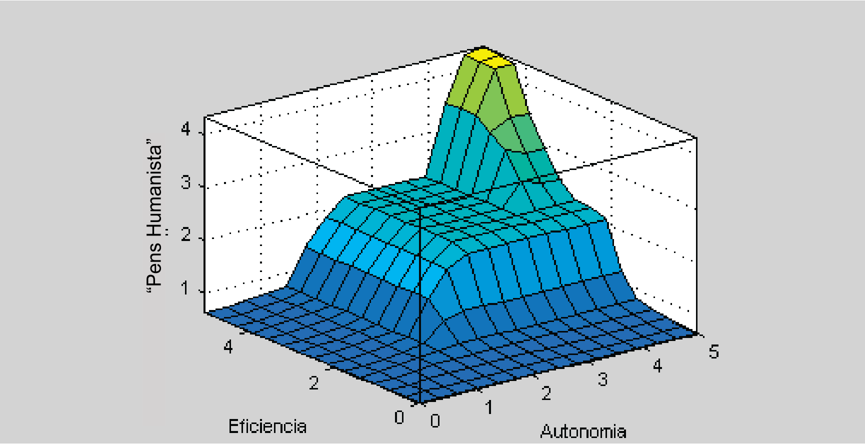
Ilustración 17: Cinco reglas difusas



Fuente: Elaboración de la autora.

La gráfica de los tres conjuntos difusos es la siguiente:

Ilustración 18: Sistema difuso



Fuente: Elaboración de la autora.

Entonces, cuando un empresario o directivo califica la percepción sobre la afirmación "La empresa es efectiva cuando faculta a sus empleados y les da autonomía para intervenir en la solución de problemas" con 2; y sobre la afirmación "La empresa eficiente es aquella que identifica, almacena, procesa, y utiliza la información sobre la competencia, clientes y proveedores" con 4; bajo un sistema de pensamiento como el dibujado en las cinco reglas, entonces el pensamiento humanista es de 1.75, y si la calificación es inversa éste es de 1.85.

5. SISTEMAS DIFUSOS

Los sistemas basados en reglas difusas tienen tres elementos: un conjunto de reglas que representan la dinámica para comprender el sistema, la información de entrada y la información de salida. Estos elementos son logrados a través de la experiencia del observador o de la intuición que se tenga del funcionamiento del sistema. La forma en que se transfiere información de una condición hacia una conclusión se realiza por medio de una función de transferencia que indica la relación entre las observaciones de entrada y las de salida.

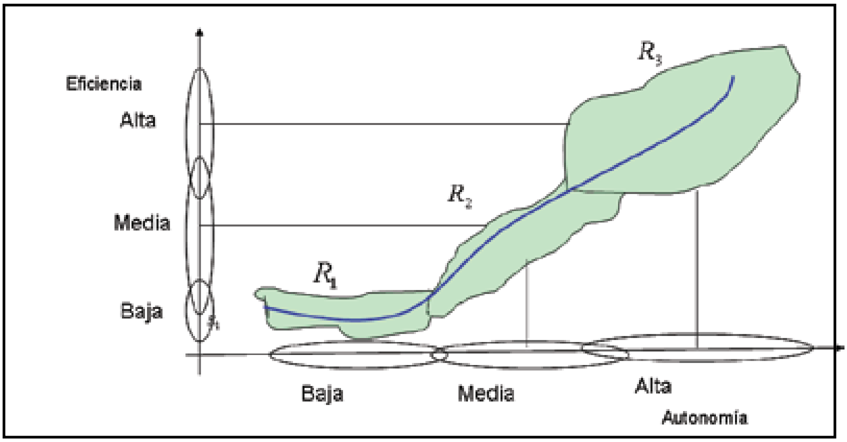
Cuando la función es continua, se puede expresar como una matriz de relaciones. Por ejemplo, si la función es $y = 2x^2$ los valores de entrada x son $-4-2,0,2,4$ y los valores de salida y son $0,8,32$. Entonces la matriz es:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No obstante, no todos los sistemas pueden ser representados por algoritmos, algunos sistemas más complejos son observados a través de los datos de entrada y los datos de salida de éstos. Entonces, una forma de relacionar las entradas con las salidas son las reglas lingüísticas de SI-ENTONCES. Por ejemplo, se observan como datos de entrada la autonomía de los empleados por medio de una escala (Alta, Media y Baja), y las observaciones de salida son la eficiencia en el trabajo, determinados por Alta Media y Baja.

Una función no lineal de esta relación puede ser la siguiente:

Ilustración 19: Parches borrosos para autonomía Vs. eficiencia



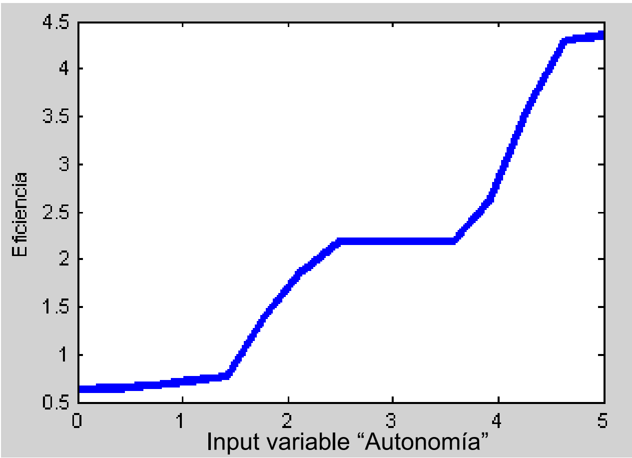
Fuente: Elaboración de la autora.

Donde cada parche representa una regla lingüística y cada regla es una relación entre un conjunto de entrada y un conjunto de salida. Este tipo de

relaciones difusas describen un sistema no lineal. La unión de las relaciones o de los parches se denomina relación de transferencia del sistema difuso (Ross, 2005, 252).
El sistema mencionado está formado por las siguientes reglas lingüísticas:

SI autonomía es baja ENTONCES eficiencia es baja.
SI autonomía es media ENTONCES eficiencia es media
SI autonomía es alta ENTONCES eficiencia es alta.

Ilustración 20: Sistema autonomía-eficiencia

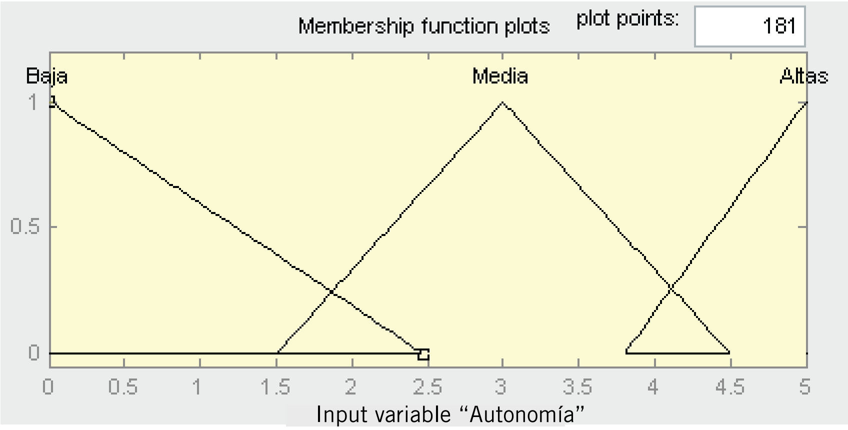


Fuente: Elaboración de la autora.

Y los conjuntos difusos con los cuales se construyeron las reglas son:

Conjuntos de autonomía
BAJA entre 0 y 2
MEDIA entre 1.5 y 4.5
ALTA entre 3.5 y 5

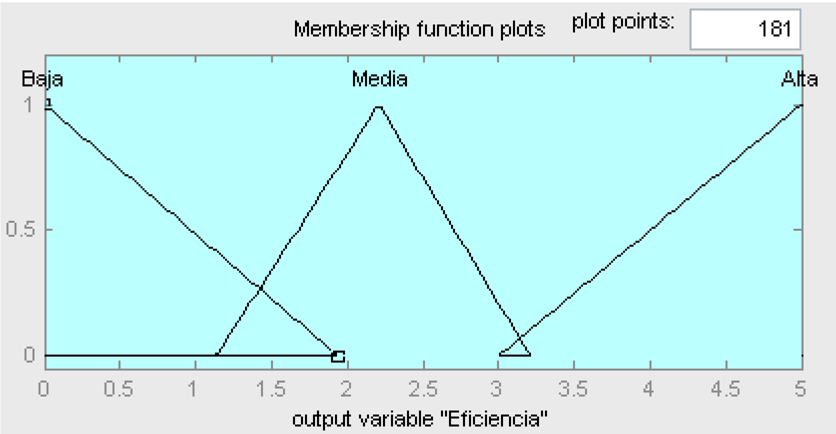
Ilustración 21: Conjunto difuso de autonomía



Fuente: Elaboración de la autora.

Conjuntos de eficiencia
BAJA entre 0 y 1.5
MEDIA entre 0.5 y 3.8
ALTA entre 3.5 y 5

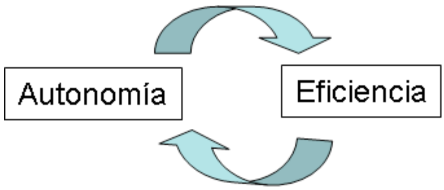
Ilustración 22: Conjunto difuso de eficiencia



Fuente: Elaboración de la autora.

Ahora, al observar el siguiente sistema compuesto por la percepción del empresario hacia la autonomía y percepción del empresario hacia la eficiencia del empleado, se evidencia una retroalimentación de los dos elementos mencionados.

Ilustración 23: Ejemplo de sistema



Fuente: Elaboración de la autora.

Es decir, el comportamiento del sistema indica que la percepción de la eficiencia del empleado está relacionada con la percepción de la autonomía que tiene el empleado en su trabajo. Pero, además, la autonomía se ve afectada por la eficiencia que se tenga en el trabajo. Para este sistema se tienen dos juegos de reglas difusas: primero, están las reglas que muestran el comportamiento de la eficiencia dadas las observaciones de la autonomía, y luego las otras reglas que indican el comportamiento de la autonomía según sea la eficiencia.

Las reglas difusas para las relaciones entre eficiencia dada una autonomía, son:

SI autonomía es menor a 2 ENTONCES la eficiencia es menor a 1.5

SI autonomía está entre 1.5 y 4.5 ENTONCES la eficiencia está entre 0.5 y 3.8

SI autonomía está entre 3.5 y 5 ENTONCES la eficiencia está entre 3.8 y 5

Las reglas difusas para las relaciones entre autonomía dada una eficiencia, son:

SI la eficiencia es menor a 1.5 ENTONCES autonomía es menor a 2

SI la eficiencia está entre 0.5 y 3.8 ENTONCES autonomía está entre 1.5 y 4.5

SI la eficiencia está entre 3.8 y 5 ENTONCES autonomía está entre 3.5 y 5

Para plasmar este sistema en una simulación, en la primera iteración se parte de la autonomía como condicionantes y la eficiencia como conclusión; en la segunda iteración el condicionante es el resultado de la eficiencia de la primera iteración, y la conclusión, de la segunda iteración, es el resultado de la autonomía.

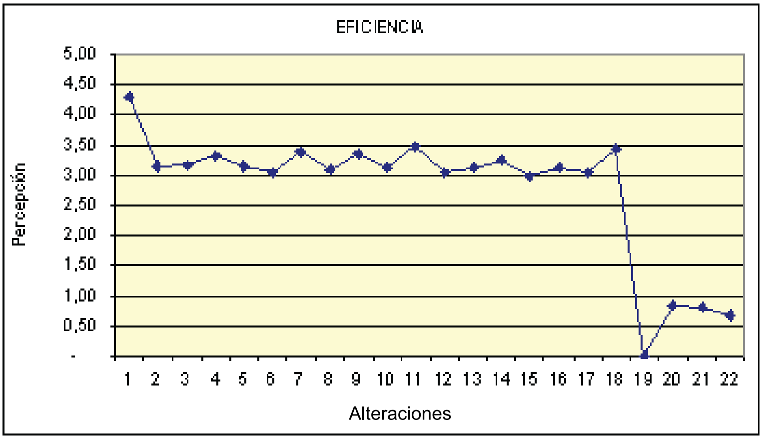
Ilustración 24: Resultados de 12 iteraciones

	Autonomía	Eficiencia
1	4,90	4,68
2	4,25	4,40
3	2,71	3,01
4	3,21	3,25
5	2,74	3,03
6	3,47	3,37
7	3,05	3,18
8	3,50	3,38
9	3,30	3,29
10	2,83	3,07
11	3,20	3,24
12	2,65	2,98

Fuente: Elaboración de la autora.

Al comenzar una autonomía con 4.9, después de las 22 de iteraciones, el sistema se comporta de la siguiente forma:

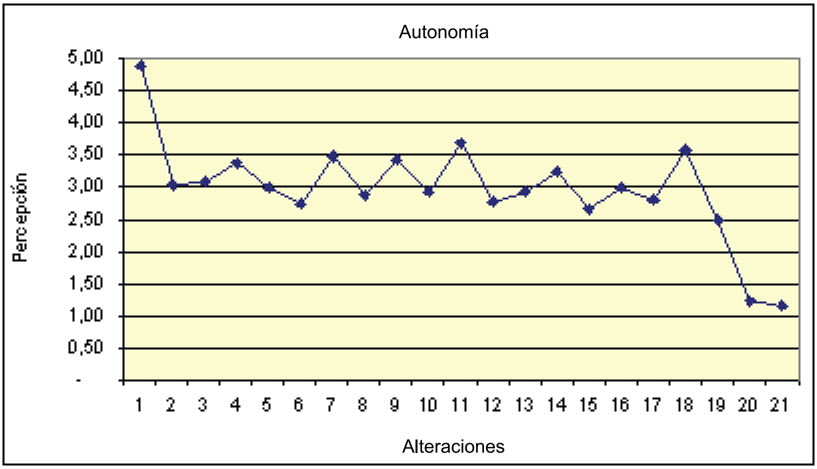
Ilustración 25: Resultados de la eficiencia en 22 iteraciones



Fuente: Elaboración de la autora.

En las primeras 18 iteraciones la eficiencia presenta un comportamiento "Media" pero superior a 3 sin embargo, a partir de la iteración 19 la eficiencia cae a un nivel "Bajo".

Ilustración 26: Resultados de la autonomía en 21 iteraciones

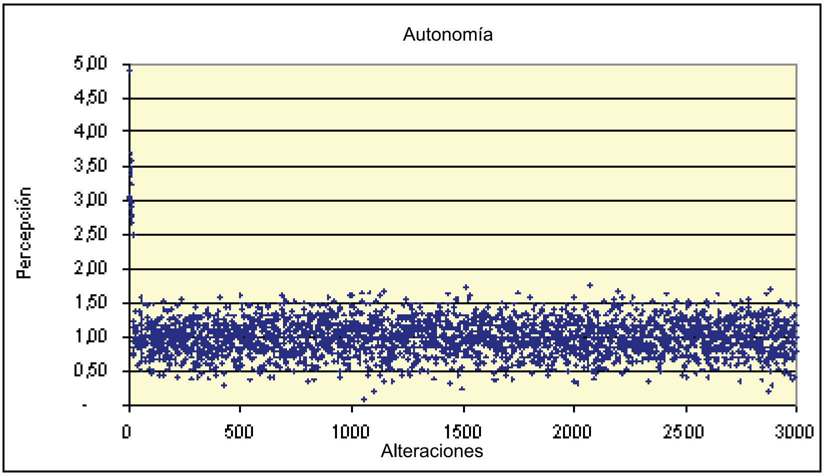


Fuente: Elaboración de la autora.

Análogamente, la autonomía es Media pero superior a 2.5, a partir de la iteración 19 el nivel de autonomía se registra como Bajo.

Si este ejercicio iterativo se realiza 3000 veces, se obtienen las siguientes gráficas como resultado de la simulación:

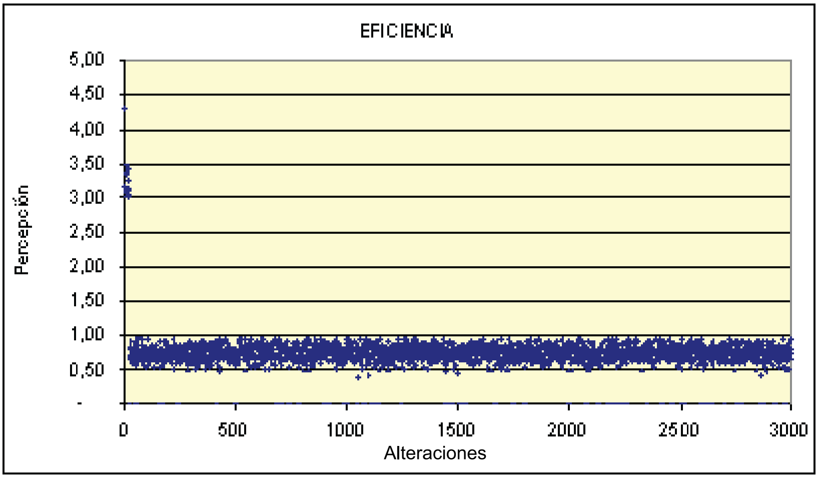
Ilustración 27: Resultados de la autonomía en 3000 iteraciones



Fuente: Elaboración de la autora.

Después de 50 iteraciones la autonomía cae a niveles muy bajos, y no regresa de nuevo a ser ni Media ni Alta.

Ilustración 28: Resultados de la eficiencia en 3000 iteraciones



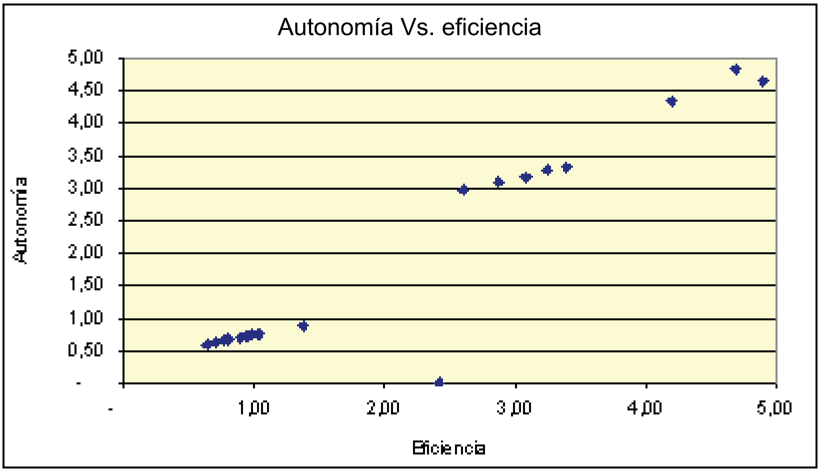
Fuente: Elaboración de la autora.

Del mismo modo, la eficiencia puede ser Media en las primeras iteraciones, pero en condiciones continuas y después de 50 iteraciones el nivel es Bajo, y no se recupera.

5.1. SIMULACIÓN CONJUNTA

Al graficar un diagrama de dispersión de la Autonomía y la Eficiencia se observan tres zonas: Baja-Baja, Media-Media y Alta-Alta

Ilustración 29: Simulación de autonomía vs. eficiencia

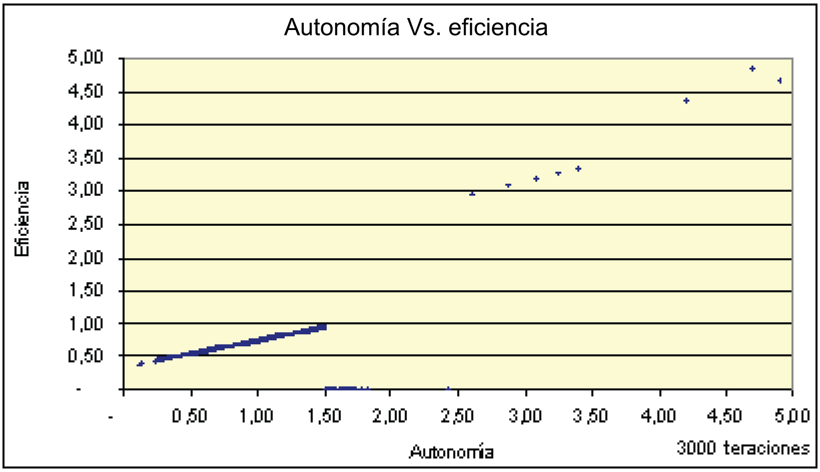


Fuente: Elaboración de la autora.

Se observa que a Eficiencia Baja, Baja Autonomía; a Eficiencia Alta, Alta Autonomía o viceversa.

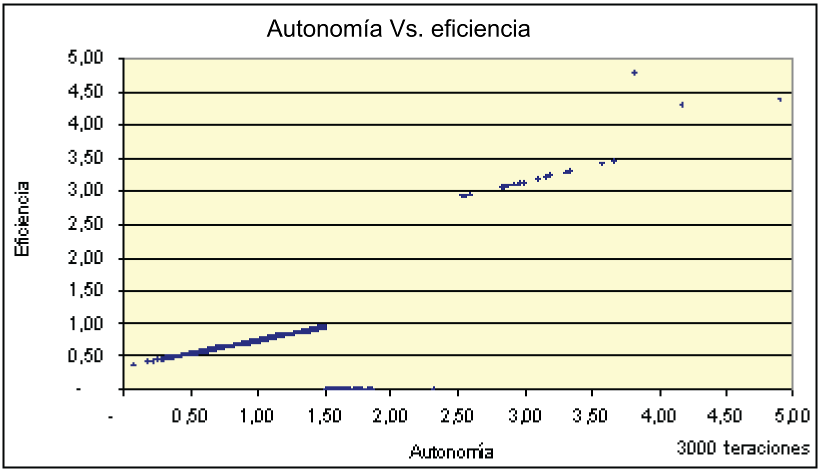
La simulación con 3000 iteraciones se observa el siguiente comportamiento:

Ilustración 30: Simulación uno



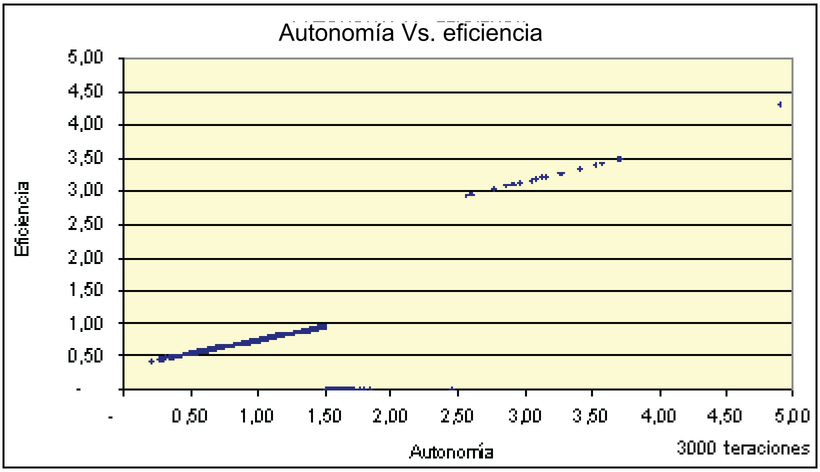
Fuente: Elaboración de la autora.

Ilustración 31: Simulación dos



Fuente: Elaboración de la autora.

Ilustración 32: Simulación tres



Fuente: Elaboración de la autora.

En las gráficas se observa cómo cuando la autonomía de los empleados es menor a 2 la eficiencia es menor a 1.5; si la autonomía está entre 2 y 4.5, la eficiencia puede tomar cualquier valor entre 0 y 5; y si la autonomía es mayor a 4.5, la eficiencia es mayor a 3.

CONCLUSIONES

La metodología para el diseño de sistemas difusos está compuesta por los siguientes elementos:

- Definición de conjuntos involucrados en cada variable del sistema.
- Determinación de las relaciones entre el antecedente y el consecuente.
- Determinación de las reglas difusas del antecedente y el consecuente.
- Detección de los parches borrosos.
- Simulación difusa.

Los fenómenos sociales pueden ser objeto de simulación a través de la lógica difusa gracias a los componentes de incertidumbre e inexactitud que existen entre los individuos de estudio.

La clasificación de cada conjunto difuso está dada por la experiencia o puede ser resultado de las observaciones a priori de expertos o de investigaciones. Por tal razón cada observador puede tener propuestas distintas a cerca de la categorización de un fenómeno.

Particularmente, y según el ejemplo propuesto por el estudio, la percepción puede convertirse en una herramienta para describir la asociación entre dos conjuntos difusos, como son los niveles de autonomía y eficiencia.

El sistema compuesto por la percepción de autonomía y la eficiencia de los empleados es circular; del resultado de la una, depende el resultado de la otra. Los parches borrosos muestran una relación creciente, pero se observa un atractor hacia tomar valores bajos en cada variable. Lo anterior indica que este sistema debe tener algún elemento perturbador que mantenga el sistema en niveles altos, tanto de eficiencia como de autonomía. Es posible que este perturbador se logre a través de un controlador de la autonomía.

BIBLIOGRAFÍA

Aristóteles. “De Interpretatione”. *Cuadernos Teorema.* No. 16. Pp. 1 – 28.

García S., Alfonso. “Fatalismo, trivalencia y verdad: Un análisis del problema de los futuros contingentes”. *Anuario Filosófico*. No. 16, 1983. Pp. 307 - 329.

Pérez, Marco Antonio. *Sistemas de Lógica Difusa*. México: Universidad de Guadalajara.

Ross, J. Timothy. *Fuzzy Logic with Engineering Applications* [1995]. Segunda edición. New York: McGraw-Hill, 2005.

Siler, William. *Fuzzy Expert Systems and Fuzzy Reasoning*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons Inc., 2005.

Velarde, J. “Lógica polivalente”. *El Basilismo*. No. 1. Marzo – abril de 1978. Pp. 93-99.