Sur la théorie de τ-inclinaison

par

Hipolito Treffinger

Thèse présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de Philosophæ Doctor (Ph. D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 2017

Le 9 août 2017,

le jury a accepté la thèse de Monsieur Hipolito Treffinger
dans sa version finale.

Membres du jury :

Professeur Ibrahim Assem
Directeur de recherche
Département de mathématiques

Docteur David Smith
Co-directeur de recherche
Département de mathématiques

Professeur Thomas Brüstle
Membre interne
Département de mathématiques

Docteur Patrick Le Meur
Membre externe
Université Paris Diderot (Paris 7)

Professeure Shiping Liu
Président-rapporteur
Département de mathématiques

Sommaire

Cette thèse rend compte des résultats parus dans deux articles écrit ou coécrit par l'auteur de cette thèse, à savoir [60, 24]. Ces articles sont assez indépendants entre eux. C'est pour cela qu'on peut séparer la thèse en deux parties.

Dans le début de la thèse on étudie la théorie de τ-inclinaison comme une extension de la théorie d'inclinaison classique, en prouvant, par exemple, une version τ-inclinante du théorème d'inclination. Aussi, on introduit les τ-tranches. On montre que les τ-tranches généralisent d'autres tranches présentes dans la littérature. De plus, on obtient des résultats reliant les τ-tranches avec les algèbres inclinées.

Dans la deuxième partie, on commence pour étudier les conditions de stabilité introduites par King et Rudakov dans [44, 52], respectivement. Notamment, on donne une description de la structure de chambres et parois d'une algèbre en utilisant les g-vecteurs des modules τ-rigides indécomposables. Pour finir, on introduit les chemins verts pour montrer que les conditions de stabilité de King et Rudakov sont compatibles.

Mots-clefs : τ-inclinaison, τ-tranches, conditions de stabilité, structure de chambres et parois

Remerciements

Je voudrais, tout d'abord remercier mon directeur de thèse, le Professeur Ibrahim Assem, pour la confiance qu'il m'a accordée en me donnant l'opportunité de réaliser ce projet, pour m'avoir guidé et donné des précieux conseils tout au long de ce parcours. Je voudrias également adresser mes remerciements à mon co-directeur, David Smith, pour ses réflexions pertinentes et sa rigueur mathématique, ce qui m'a d'aillleurs permis de poser les prémisses de ce travail. Je tiens en outre à exprimer mon eternelle reconnaissance au Professeur - et veritable ami - Thomas Brüstle, qui a toujours été présent à mes côtés, tant sur le plan mathématique comme personnel. Je souhaite enfin souligner l'atmosphère amicale qui a toutjouts régner au Département de Mathématiques de l'Université de Sherbrooke, propice aux échanges humains et académiques. Je voudrais en suite adresser mes plus sincères remerciesments à Andrea Gatica, Professeur à la *Universidad Nacional del Sur* (Bahia Blanca, Argentine), une personnalité humaine à mes yeux exemplaire, sans laquelle mon parcours mathématique, s'il n'avait tout simplement pas existé, eut était complétement différent. À travers sa personne, je tiens à exprimer ma gratitude à toute la communauté mathématique de la théorie des représentations de l'Amérique du Sud, laquelle m'a accueillie dès le premier moment. Sur le plan personnel, j'embrasse fortement ma famille : Walter, Malú, Camila et Sole. Bien que des milliers des kilomètres nous séparent, ils ont été présents à chaque instant, et ce, tout au long de mos séjour à Sherbrooke. Ma famille étant loin, d'autres personnes ont pu me soutenir, et en quelque sorte combler cet espace vide. Un grand merci tout en particulier à ceux que je considère comme mes véritables amis - Antoine, Rocio, Félix, Maggy, Zoltan et Mich - pour leur présence et leur soutien. Je vous porterai toujours dans mon cœur. Finalement, je remercie viviement le Département de Mathématiques et la Faculté des Sciences de l'Univeristé de Sherbrooke, Bishop's University, l'ISM et la Fondation FORCE, institutions qui, grâce à leur soutien financier, ont permis de mener ce projet à sa fin.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La présente thèse est dédiée à l'étude de la théorie de τ-inclinaison. Elle comporte deux parties principales. La première est vouée à l'étude de la théorie de τ-inclinaison en elle-même, et sera l'occasion de montrer des résultats originaux dans cette théorie. Dans la deuxième partie, nous utilisons la théorie de τ-inclinaison pour donner une nouvelle description des conditions de stabilité introduites par King dans [44]. Cette nouvelle description nous permettra alors de donner une caractérisation des suites vertes maximales dans les catégories de modules.

Un des problèmes classiques d'algèbre est de déterminer si, étant données deux algèbres A_1 et A_2, il existe une équivalence de Morita entre les catégories $\mathrm{mod}A_1$ et $\mathrm{mod}A_2$. Ce problème fut étudié intensément pendant des années et on s'est rendu compte que chercher des équivalences de Morita est assez restrictif comme problème. Donc, on a cherché d'autres foncteurs capables de transmettre information entre différentes catégories de modules. Dans le cas de la théorie de représentations, la généralisation des foncteurs de Morita la plus importante est due à Brenner et Butler dans [19], où ils ont défini et axiomatisé les foncteurs d'inclinaison.

Ces foncteurs ont révolutionné la théorie des représentations des algèbres. Depuis la publication de [19], la théorie d'inclinaison, qui est l'étude des foncteurs d'inclinaison et de leurs propriétés dans différents catégories de modules, a été un des moteurs de la recherche en théorie des représentations.

Prenons pour exemple l'application remarquable des foncteurs d'inclinaison réalisée par Happel et Ringel dans [40] où ils définissent les algèbres inclinées. Dans cet article ces deux mathématiciens démontrent que certaines caractéristiques des algèbres inclinées peuvent être déduites des caractéristiques connues des algèbres héréditaires desquelles elles proviennent.

Plus tard dans l'histoire, une autre révolution a vu le jour lorsque Fomin et Zelevinski ont défini les algèbres amassées. Ce nouveau sujet d'étude, qui est devenu une nouvelle branche des mathématiques, s'est révélé être en lien avec bien d'autres branches. Parmi ces dernières, nous pouvons sans conteste citer la théorie des représentations. Plus encore, il a lieu de souligner l'influence considérable que la théorie des représentations a eue sur la théorie des algèbres amassées. À l'inverse, on ne peut parler des avancements de la théorie des représentations depuis le début du siècle sans parler des algèbres amassées. En témoigne, l'apparition de la théorie de τ-inclinaison, définie par Adachi, Iyama et Reiten dans [1].

D'un côté, la théorie de τ-inclinaison généralise la théorie d'inclinaison, parce que elle donne un cadre théorique propice pour étudier tous les paires de torsion fonctoriellement finies et non seulement les paires de torsion engendrées par un module inclinant. De l'autre, la théorie de τ-inclinaison apparaît être un bon cadre théorique pour étudier les algèbres amassées car, pour les algèbres jacobiènnes, les modules indécomposables τ-rigides sont en bijection avec les variables amassées de l'algèbre amassée associée. Plus encore, elle géneralise ces dernières puisqu'elle nous permet d'étudier des algèbres qui n'ont pas d'équivalent amassé.

En considérant la théorie de τ-inclinaison comme une généralisation de la théorie d'inclinaison, on voudrait voir jusqu'à quel point les résultats classiques de la théorie d'inclinaison peuvent être étendus à la théorie de τ-inclinaison, qui est l'étude des modules τ-inclinantes. Sa définition est la suivante.

Définition 1.0.1. [1, Definition 0.1.a] Soit M un A-module. Alors M est dit **τ-rigide** si $\mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$. Un module τ-rigide T est **τ-inclinant** si $|T| = |A|$ et il est un module **τ-inclinant sur son support** s'il existe un idempotent $e \in A$ tel que T est un (A/AeA)-module τ-inclinant.

Dans ce sens, nous avons dans le Chapitre 4 deux résultats principaux.

Il est connu qu'un module donné peut être la représentation de plusieurs algèbres au même temps. Le premier de nos résultats nous permet de donner une relation explicite entre trois d'elles, ce qui est une généralisation complète d'un théorème classique dans la théorie d'inclinaison.

Théorème 1.0.2 (Théorème 4.1.1)**.** *Soit T un A-module τ-inclinant sur son support, $B = \mathrm{End}_A M$ son algèbre d'endomorphismes et $C = A/\mathrm{Ann}_A T$. Alors le morphisme d'algèbres $\varphi : A \to \mathrm{End}_B({}_B T)$ défini par $\varphi(a)(t) = ta$ pour tout $t \in T$ et $a \in A$ induit un isomorphisme $C \cong \mathrm{End}_B({}_B T)$.*

On a déjà dit que la théorie d'inclination prend son nom du *théorème d'inclination* prouvé par Brenner et Butler dans [19]. Dans cette thèse nous pouvons donner une généralisation complète de cet résultat comme conséquence de nos travaux. L'énoncé de la dite généralisation est le suivant.

Corollaire 1.0.3 (Corollaire 4.2.2)**.** *Soit T un module τ-inclinant sur son support. Considérons la paire de sous-catégories* $(\mathrm{Fac}T, \mathrm{Sub}(\tau_A T))$ *de* $\mathrm{mod}A$. *Soit $B = \mathrm{End}_A(T)$ l'algèbre des endomorphismes de T et $C = A/\mathrm{Ann}T$. Alors il existe une paire de torsion $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dans* $\mathrm{mod}B$ *telle que*

1. *Le foncteur* $\mathrm{Hom}_A(T, -) : \mathrm{Fac}T \longrightarrow \mathcal{Y}$ *est une équivalence de catégories avec quasi-inverse* $- \otimes_B T : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathrm{Fac}T$.

De plus $\tau_C T = \tau_A T$ si et seulement si

2. *Le foncteur* $\mathrm{Ext}^1_A(T, -) : \mathrm{Sub}(\tau_A T) \longrightarrow \mathcal{X}$ *est une équivalence de catégories avec quasi-inverse* $\mathrm{Tor}_1^B(-, T) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Sub}(\tau_A T)$.

Il est important de remarquer que la τ-inclinaison n'est pas la seule généralisation de la théorie d'inclinaison. Il en existe d'autres telles que la théorie des modules silting (qui ne sont pas de type fini) ou la théorie de complexes silting à deux termes dans l'étude de la catégorie dérivée d'un algèbre. En outre, ces théories sont compatibles avec la théorie de τ-inclinaison. Naturellement, on s'est intéressé à généraliser le théorème d'inclinaison dans chaque une de ces théories. Nous référons le lecteur aux articles [30] et [27] pour voir d'autres généralisations du théorème principal de l'article [19].

Un autre point central de la théorie d'inclinaison sont les algèbres inclinées, définies par Happel et Ringel dans [40]. Dans cet article, ils ont donné sa défini les algèbres inclinées et, en plus, ils les ont caractérisées en utilisant le concept de tranche complète. Dans la suite de cette thèse, nous donnons la définition de τ-tranche. Sa définition formel est la suivante.

Définition 1.0.4 (Définition 5.1.1)**.** Soit A une algèbre de dimension finie et Σ une présection dans le carquois d'Auslander-Reiten Γ_A de *mod*A. Alors Σ est une *τ-tranche* si $T_\Sigma = \bigoplus_{U \in \Sigma} U$ est un A-module τ-inclinant sur son support. De plus, Σ est une *τ-tranche complète* si T_Σ est un module τ-inclinant.

Nous montrons que ce nouvel objet mathématique est une bonne généralisation des tranches complètes et compatible dans certains cas avec les tranches locales définies par Assem, Brüstle et Schiffler dans [5].

Théorème 1.0.5 (Proposition 5.3.4 et Proposition 5.4.3)**.** *Soit A un algèbre de dimension finie.*

— *Si A est une algèbre inclinée, alors Σ est une tranche complète dans mod$A$ si et seulement si Σ est une τ-tranche complète dans mod$A$.*

— *Si Σ est une τ-tranche complète dans mod$A$ alors elle est une tranche locale dans mod$A$. En outre, si A est une algèbre inclinée amassée, alors la réciproque est vraie.*

Une fois qu'on a montré que la définition est cohérente avec la littérature existante, nous étudions des propriétés des τ-tranches. Notamment nous prouvons les résultats suivants, dont le premier a été prouvé par Liu dans [47] de forme indépendante.

Corollaire 1.0.6 (Corollaire 5.1.4)**.** *Soit Σ une τ-tranche dans* mod$A$*. Alors l'algèbre $C = A/\mathrm{Ann}\Sigma$ est une algèbre inclinée. De plus Σ est une tranche complète dans* mod$C$*.*

Proposition 1.0.7 (Proposition 5.1.3)**.** *Soit Σ une τ-tranche dans* mod$A$*. Alors l'algèbre $B = \mathrm{End}_A(T_\Sigma)$ est héréditaire.*

Théorème 1.0.8 (Théorème 5.2.7)**.** *Soit* Σ *une* τ*-tranche dans* mod$A$ *et* I *un idéal de* A *tel que* $I \subset \mathrm{Ann}\Sigma$*. Alors* Σ *est aussi une* τ*-tranche dans* modA/I*.*

Corollaire 1.0.9 (Corollaire 5.2.3)**.** *Soit* I *un idéal de* A *tel que* $I \subset \mathrm{Ann}\Sigma$*. Alors* $\tau_{A/I}X = \tau_A X$ *et* $\tau_{A/I}^{-1}X = \tau_A^{-1}X$ *pour tout* $X \in \Sigma$*.*

Notons que le dernier corollaire implique que le Corollaire 1.0.3 s'applique à toutes les τ-tranches.

De plus, nous utilisons les τ-tranches pour donner différentes caractérisations des algèbres inclinées.

Corollaire 1.0.10 (Corollaire 5.3.2)**.** *Une algèbre* A *est inclinée si et seulement s'il existe une* τ*-tranche fidèle* Σ *dans* mod$A$*.*

Théorème 1.0.11 (Théorème 5.4.2)**.** *Soit* A *une algèbre et* Γ_A *son carquois d'Auslander-Reiten. Alors* A *est inclinée si et seulement s'il existe une composante connexe, standard généralisée et convexe* Γ *du carquois d'Auslander-Reiten* Γ_A *contenant une section* τ*-rigide* Σ *telle que* $|\Sigma| = |A|$*.*

Théorème 1.0.12 (Théorème 5.4.7)**.** *Soit* A *une algèbre et* Γ_A *son carquois d'Auslander-Reiten. Supposons que* Γ_A *a une composante connexe* Γ *qui est convexe, standard généralisée et simplement connexe. Alors* Σ *est une* τ*-tranche dans* Γ *si et seulement si* A *est une algèbre inclinée simplement connexe ayant* Σ *comme tranche complète.*

Finalement nous étudions les extensions ponctuelles et les extensions scindées des algèbres avec des τ-tranches et donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle extension a une τ-tranche.

Proposition 1.0.13 (Proposition 5.5.1)**.** *Soit* A *une algèbre avec une* τ*-tranche complète* Σ *et* $X \in \mathrm{add}\Sigma$*. Alors l'algèbre* $R = A[X]$ *a une* τ*-tranche* $\tilde{\Sigma}$ *dans modR de la* *forme* $\tilde{\Sigma} = \Sigma \oplus P_x$*, où* P_x *est le* R*-module projectif associé au sommet d'extension du carquois ordinaire de* R*.*

Théorème 1.0.14 (Théorème 5.5.7)**.** *Soit* Σ *une* τ*-tranche complète dans* mod$A$*,* Q *un* A*-*A*-bimodule et* R *une extension scindée de* A *par* Q*. Alors* Σ *est une* τ*-tranche complète dans* mod$R$ *si et seulement si* $Q_A \in \mathrm{Fac}(\tau_A^{-1}\Sigma)$ *et* $D({}_AQ) \in \mathrm{Sub}(\tau_A\Sigma)$*. En autre, si* A *est une algèbre inclinée et* Σ *est une tranche complète dans* mod$A$*, alors* $\mathrm{Ann}_R\Sigma = Q$*.*

Ces résultats constituent la première partie de la thèse. On averti au lecteur que plusieurs résultat rélient les τ-tranches aux algèbres inclinées ont été trouvé de forme indépendante par Shiping Liu dans [47] ou ils sont des conséquences directes des résultats que l'on peut y trouver.

Nous l'avons évoqué ci-avant, un des atouts le plus intéressant de la théorie de τ-inclinaison est sa capacité de simuler la combinatoire des algèbres amassées dans la catégorie de modules d'une algèbre arbitraire $A = kQ/I$.

Dans leur contexte initial, les suites vertes maximales, introduites par Keller dans [43], sont des suites finies de mutations admissibles (appelées *mutations vertes*) d'une algèbre amassée. Si une telle suite ne peut pas être étendue en une suite de longeuer strictement plus grande, elle est dite *maximale*.

Bien que les suites vertes maximales soient *in-fine* intéressantes, et ce, en raison des problèmes qui d'en découlent dans le contexte des algèbres amassées et de la théorie des représentations (voir par exemple [22, 23, 49, 31]), là n'est pas la seule motivation pour les étudier. Dernièrement, de manière indépendante, et avec un autre vocabulaire, plusieurs articles de physique de haute énergie ont utilisé les suites vertes maximales pour étudier le spectres des particules BPS (voir par exemple [29, 36, 2]).

Ce qui fait que la résolution des problèmes liés aux suites vertes maximales implique aussi des avancements tant dans la théorie de représentations comme dans la théorie des algèbres amassées et la physique théorique.

Nous l'avons dit, la théorie de τ-inclinaison est une théorie qui permet l'étude des problèmes de la théorie des algèbres amassées dans un contexte plus général. En particulier, il est possible d'exprimer les suites vertes maximales dans le langage de la théorie de τ-inclinaison afin de les étudier d'un point de vue plus abstrait.

La seconde partie de la thèse est le fruit d'une collaboration ([24]) cosignée par Thomas Brüstle, David Smith et l'auteur de cette thèse.

Dans un première temps, au Chapitre 7, on introduit la définition de suite verte maximale dans un catégorie abélienne. Après cela, on étudie les conditions de stabilité introduite par Rudakov dans [52]. Sa définition est la suivante.

Définition 1.0.15. [52, Definition 1.1]7.1.1 Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne petite, $(\mathcal{P}, \leq)$ un ensemble partialement ordonné et $\phi : \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}$ une fonction telle que $\phi(X) = \phi(Y)$ si X est isomorphe à Y. Alors le pré-ordre induit par ϕ est dit **structure de stabilité** si pour chaque suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ d'objets non nuls de $\mathcal{A}$ la **propriété de bascule** est satisfaite. C'est-à-dire que exactement une des trois conditions suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{soit} & \phi(L) < \phi(M) < \phi(N), \\ \text{ou} & \phi(L) > \phi(M) > \phi(N), \\ \text{ou} & \phi(L) = \phi(M) = \phi(N). \end{array}$$

est vérifiée. Lorsque c'est le cas, on dit que ϕ est une **fonction de stabilité**, et $\phi(X)$ est appelée la **phase** de X pour tout objet non nul X de $\mathcal{A}$.

Comme résultat principal du chapitre, on caractérise les fonctions de stabilité induisant une suite verte maximale. L'énoncé du théorème est le suivant.

Théorème 1.0.16 (Théorème 7.3.6)**.** *Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité. Supposons que les éléments maximaux et minimaux de $\mathcal{P}$ n'appartiennent pas à $\phi(\mathcal{A})$. Alors ϕ induit une suite verte maximale si et seulement s'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme d'objets ϕ-stables et si deux objets ϕ-stables M_1 et M_2 sont tels que $\phi(M_1) = \phi(M_2)$ sont nécessairement isomorphes.*

Ensuite, nous nous concentrons sur les catégories de modules. En particulier, on veut prouver que dans ce contexte plus restreint, toutes les suites vertes maximales de mod$A$ sont induites par une fonction de stabilité. Le Chapitre 8 développe les outils nécessaires pour cela.

D'abord, on rapelle la définition de paire τ-inclinante.

Définition 1.0.17. Soit M un A-module et P un A-module projectif. La paire (M, P) est dite τ**-rigide** si :

— $\mathrm{Hom}_A(M, \tau_A M) = 0$;

— $\mathrm{Hom}_A(P, M) = 0$.

Une paire τ-rigide (M, P) est dite τ-inclinante (presque τ-inclinante) si $|M| + |P| = |A|$ ($|M| + |P| = |A|$, respectivement).

Dans un premier résultat on caractérise la catégorie des modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-semistables, où $\alpha(M - P)$ est un vecteur induit par une paire τ-rigide (M, P). L'énoncé du théorème est le suivant.

Théorème 1.0.18 (Théorème 8.2.4)**.** *Soit A une algèbre, (M, P) une paire τ-rigide où M et P sont des modules sobres écrit comme $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ et $P = \bigoplus_{j=k+1}^{r} P_j$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est un vecteur réel à coefficients positifs. Considérons le vecteur $\alpha(M - P) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g^{M_i} - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j g^{P_j}$ et prenons la fonctionnelle linéaire*

$\theta_{\alpha(M-P)}(-)$ associée à $\alpha(M-P)$. Alors il existe une algèbre $\tilde{B}$ telle que la catégorie de modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-semistables est équivalente à mod$\tilde{B}$. En outre il y a exactement $rg(K_0(A)) - r$ classes d'isomorphismes de modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-stables.

Étant donné que dans le théorème précédent les conditions sur les vecteurs $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ sont assez faibles, on en déduise des conséquences géométriques sur la structure de chambres et parois de A (voir Définition 8.1.3, Définition 8.1.4 et Definition 8.1.5).

Proposition 1.0.19 (Proposition 8.3.2 et Corollaire 8.3.5)**.** *Soit (M, P) une paire τ-inclinante. Alors (M, P) induit une chambre $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ ayant exactement t parois $\mathfrak{D}(N_1)$, $\ldots$,$\mathfrak{D}(N_t)$, où les modules $\{N_1, N_2, \ldots, N_t\}$ peuvent être calculés de forme explicite. En outre, si (M, P) et (M', P') sont deux paires τ-inclinantes différentes, alors $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ est différente de $\mathfrak{C}_{(M',P')}$. En plus, si l'algèbre est τ-finie, toute chambre est de cette forme.*

Proposition 1.0.20 (Proposition 8.3.3)**.** *Soit (M, P) une paire τ-inclinante presque complète. Alors le cône $\mathcal{C}_{(M,P)}$ de (M, P) est inclus dans la paroi définie par N, où N est le conoyau de la* add$M$*-approximation à droite de la complétion de Bongartz de (M, P).*

Après cela on associe à chaque chambre $\mathfrak{C}$ une classe de torsion $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}}$ et, en particulier, on montre que si une chambre $\mathfrak{C}$ est induite par une paire τ-inclinante (M, P), alors $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}} = \mathrm{Fac}M$. L'énoncé est le suivant.

Proposition 1.0.21 (Proposition 8.4.2)**.** *Soit (M, P) une paire τ-inclinante, $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ la chambre qu'elle induit, $\mathfrak{D}(N_1), \ldots, \mathfrak{D}(N_t)$ les parois qui entourent $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ et soit $\mathcal{N} = \{N_i : \theta(N_i) > 0$ pour chaque $\theta \in \mathfrak{C}\}$. Alors $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}_{(M,P)}} = FacM = T(\mathcal{N})$, où $T(\mathcal{N})$ est la classe de torsion la plus petite contenant $\mathcal{N}$.*

Finalement on montre que les théorie développées dans le Chapitre 7 et le Chapitre 8 sont compatibles. Pour faire cela on introduit les chemins verts comme suit.

Définition 1.0.22 (Définition 8.5.1)**.** Soit A une algèbre telle que $rg(K_0(A)) = t$ et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^t$ une fontion continue. Alors γ est un **chemin vert** si $\gamma(0) = (1,1,\ldots,1)$, $\gamma(1) = (-1,-1,\ldots,-1)$ et si pour tout A-module M il existe un unique $t_M \in [0,1]$ tel que $\theta_{\gamma(t_M)}([M]) = \langle \gamma(t_M), [M] \rangle = 0$.

La compatibilité entre les conditions de stabilité de King et de Rudakov est énoncée via les chemins verts comme suit.

Proposition 1.0.23 (Proposition 8.5.4)**.** *Chaque chemin vert γ induise une structure de stabilité $\phi_\gamma : \mathrm{mod}A \to [0,1]$ définit par $\phi_\gamma(M) = t_M$, où pour tout M, t_M est le réel tel que $\theta_{\gamma(t_M)}([M]) = 0$. En outre, M est ϕ_γ-semistable si et seulement si M est $\theta_{\gamma(t_M)}$-semistable.*

Chapitre 2

Rappels et Notations

2.1 Categories

Dans ce chapitre, nous présentons une brève introduction des concepts de base de théorie de représentations qui doivent être maîtrisés pour lire cette thèse.

Le traitement que nous donnerons à ces concepts n'est pas exhaustif. C'est pour cela que l'on réfère le lecteur à [10, 14, 53] pour plus de détails. Nous supposons que le lecteur a de bonnes connaissances générales en algèbre ainsi qu'en théorie des catégories.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie. Si X est un objet de $\mathcal{A}$, par abus de notation, on notera $X \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est une catégorie **additive** si :

— $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ est un groupe abélien pour tous $X, Y \in \mathcal{A}_0$;

— la composition de morphismes est bilinéaire ;

— toute famille finie d'objets de $\mathcal{A}$ admet un produit et une somme directe dans

$\mathcal{C}$.

En outre, une catégorie additive $\mathcal{A}$ est dite **abélienne** si :

— pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ il existe un noyau pour f, noté $\ker f$;

— pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ il existe un conoyau pour f, noté $\mathrm{coker} f$;

— pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ le morphisme induit $\tilde{f} : \mathrm{coker}(\ker f) \to \ker(\mathrm{coker} f)$ est un isomorphisme.

Dans ce texte, on entend par **algèbre**, toute *k-algèbre associative unitaire de dimension finie*, où k est un corps algébriquement clos. Si A est une algèbre on entend par **A-module** tout *A-module à droite de type fini*, sauf si spécifié autrement.

On note $\mathrm{mod}A$ la catégorie des A-modules de type fini et $\mathrm{ind}A$ une sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}A$ constituée de modules indécomposables et contenant exactement un représentant de chaque classe d'isomorphismes de modules indécomposables. En général, si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathrm{mod}A$, nous noterons simplement $\mathcal{C}$ la classe des objets au lieu de $\mathcal{C}_0$. De plus, on note $\mathrm{add}\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}A$ formée des facteurs directs des sommes directes finies d'objets de $\mathcal{C}$. En outre on notera respectivement $\mathrm{Fac}\mathcal{C}$ et $\mathrm{Sub}\mathcal{C}$ les sous-catégories pleines de $\mathrm{mod}A$ formées par les quotients et sous-objets des objets de $\mathrm{add}\mathcal{C}$. De plus, si $\mathcal{C}_0 = \{M\}$ est formée par un seul objet M, on notera $\mathrm{add}M$ pour $\mathrm{add}\{M\}$, et on utilisera la même convention pour $\mathrm{Fac}M$ et $\mathrm{Sub}M$. Une autre sous-catégorie d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ qui sera définie à partir de la sous-catégorie $\mathcal{C}$ est $\mathrm{Filt}\mathcal{C}$, la sous-catégorie pleine de tous les objets de $\mathcal{A}$ qui admettent une filtration par des objets de $\mathcal{C}$ et l'objet 0, c'est-à-dire, $X \in \mathrm{Filt}\mathcal{C}$ s'il existe des sous-objets X_i de X tels que

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$$

et X_i/X_{i-1} appartient à $\mathcal{C}$.

Considérons une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de mod$A$. Alors $\mathcal{C}$ est dite **covariantement finie** si pour tout objet $X \in \mathcal{A}$, il existe $M \in \mathcal{C}$ et un morphisme $f : X \to M$ tel que la suite de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,X)|_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(-,f)|_{\mathcal{C}}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,M)|_{\mathcal{C}} \longrightarrow 0$$

soit exacte. De façon duale, on dit que $\mathcal{C}$ est **contravariantement finie** si pour tout objet $X \in \mathcal{A}$, il existe un objet $M \in \mathcal{C}$ et un morphisme $g : M \to X$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-)|_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(g,-)|_{\mathcal{C}}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)|_{\mathcal{C}} \longrightarrow 0$$

soit exacte. On dit que $\mathcal{C}$ est **fonctoriellement finie** si elle est covariantement et contravariantement finie.

Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{A}$. Alors un objet $M \in \mathcal{C}$ est dit **Ext-projectif dans** $\mathcal{C}$ si $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,X) = 0$ pour tout objet $X \in \mathcal{C}$. De façon duale, $M \in \mathcal{C}$ est un objet **Ext-injectif dans** $\mathcal{C}$ si $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,M) = 0$ pour tout objet $X \in \mathcal{C}$.

Étant donnée une sous-catégorie fonctoriellement finie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, on note $P(\mathcal{C})$ une somme directe d'un représentant de chaque classe d'isomorphisme des objets Ext-projectifs indécomposables de $\mathcal{C}$. Dualement on notera $I(\mathcal{C})$ une somme directe d'un représentant de chaque classe d'isomorphisme des objets Ext-injectifs indécomposables de $\mathcal{C}$.

Pour X, $Y \in \mathcal{A}$, on note $\mathcal{I}(X,Y)$ l'ensemble des morphismes de X vers Y qui se factorisent par un objet injectif de $\mathcal{A}$ et, dualement, $\mathcal{P}(X,Y)$ l'ensemble de morphismes qui se factorisent par un objet projectif de $\mathcal{A}$. Alors, $\mathcal{I}(X,Y)$ et $\mathcal{P}(X,Y)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$. Donc on notera $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)/\mathcal{P}(X,Y)$ et $\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y)$.

Si $\mathcal{A} = \text{mod}A$ pour une algèbre A et M est un A-module, on notera $|M|$ le nombre des facteurs directs indécomposables non isomorphes de M. En outre l'**annulateur** de M, noté Ann$M$, est l'idéal de A défini par $\text{Ann}M = \{a \in A : Ma = 0\}$. On dira que M est **fidèle** si $\text{Ann}M = 0$. De plus, on dira que M est **sincère** si tout A-module simple est un facteur de composition de M. Le résultat suivant sur les modules sincères est bien connu.

Proposition 2.1.1. *Soit M un A-module. Alors les conditions suivantes sont équivalents.*

1. *M est un A-module sincère.*
2. *$Hom_A(P, M) \neq 0$ pour tout A-module projectif P.*
3. *$Hom_A(M, I) \neq 0$ pour tout A-module injectif I.*

On notera $dp_A M$ la dimension projective de M et $di_A M$ sa dimension injective. La dimension globale de A est notée $dim.gl.A$.

Finalement, on note A^{op} l'algèbre opposée de A et $D = \text{Hom}_k(-, k)$ le foncteur de dualité standard. En outre, on note TrM le **transposée de** M (voir [10, Section IV.2]). Sa définition est la suivante.

Définition 2.1.2. Soit M un A-module et $P_1 \xrightarrow{p} P_0 \to 0$ sa présentation projective minimale. On note par $\text{Tr}(M) = \text{Coker}(\text{Hom}_A(p, A))$.

2.2 Algèbres et carquois

Dans cette section, nous nous intéresserons à la notion de carquois ainsi qu'aux liens entre cette notion et l'étude des algèbres associatives. Nous fixons également plusieurs notations utilisées par la suite.

Un **carquois** est un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ consistant en deux ensembles Q_0 (dont les éléments sont appelés les **sommets**) et Q_1 (dont les éléments sont appelés les **flèches**) et deux applications $s, b : Q_1 \to Q_0$ qui associent à chaque flèche α sa **source** $s(\alpha)$ et son **but** $b(\alpha)$. Afin de simplifier la notation, un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ est souvent noté $Q = (Q_0, Q_1)$, ou encore Q. On dit qu'un carquois $Q = (Q_0, Q_1)$ est **fini** si Q_0 et Q_1 sont des ensembles finis, et **connexe** si le graphe qu'on obtient en oubliant le sens des flèches, dit **graphe sous-jacent** à Q, est connexe. On représente généralement une flèche $\alpha \in Q_1$ de source x et de but y par $\alpha : x \to y$ ou bien $x \stackrel{\alpha}{\to} y$. Si α et β sont deux flèches de Q telles que $b(\alpha) = s(\beta)$ alors on notera leur composition $\alpha\beta$. Un **chemin de longueur** $l \geq 1$ de x vers y est une suite de flèches $\omega : x = x_0 \stackrel{\alpha_1}{\to} x_1 \stackrel{\alpha_2}{\to} \dots \stackrel{\alpha_l}{\to} x_l = y$ tels que $b(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ pour $1 \leq i < l$, et est souvent noté $x \stackrel{\omega}{\rightsquigarrow} y$ ou $\omega = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_l$. À chaque point $x \in Q_0$, on associe aussi un chemin de longueur 0 dit **chemin stationnaire** en x et noté ε_x. Un chemin non stationnaire $x \stackrel{\omega}{\rightsquigarrow} y$ est dit un **cycle** si $x = y$. Enfin, Q est dit **acyclique** s'il ne contient aucun cycle.

L'**algèbre des chemins** kQ de Q est la k-algèbre dont le k-espace vectoriel sous-jacent a comme base l'ensemble de tous les chemins (y compris les chemins stationnaires) dans Q, et dont le produit de deux éléments de la base est défini comme étant leur concatenation, si cela est possible, et 0 sinon.

Si l'on note J l'idéal bilatère de kQ engendré par les flèches de Q, on dit qu'un idéal I de kQ est **admissible** s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que $J^m \subseteq I \subseteq J^2$. Dans ce cas, la paire (Q, I) est appelée un **carquois lié**. D'autre part, une **relation** de kQ de $x \in Q_0$ vers $y \in Q_0$ est une combinaison linéaire de chemins de x vers y dans Q de longueur supérieure ou égale à deux. Il est connu que tout idéal admissible est engendré par un nombre fini de relations (voir [10, Corollary II.2.9]). Aussi, si k est un corps algébriquement clos et que A est une algèbre sobre et connexe de dimension finie, alors il existe un carquois lié (Q, I) tel que $A \cong kQ/I$. En outre Q est connexe, voir [35]. Le carquois lié (Q, I) est alors appelé une **présentation** de A, et A est dite **triangulaire** lorsque Q est acyclique. En outre, lorsque $I = J^2$, l'algèbre kQ/I est appelée l'**algèbre de radical carré nul** associée à Q.

2.3 Théorie d'Auslander-Reiten

Nous avons dit que toute algèbre A est isomorphe à l'algèbre des chemins d'un carquois lié. Maintenant, nous rappelons quelques éléments de la théorie d'Auslander-Reiten d'une algèbre A, notamment l'existence de suites presque scindées dans mod$A$ ainsi que la nature du carquois d'Auslander-Reiten de mod$A$. Dans cette section on suit la présentation faite dans [10, Chapter IV].

On commence par définir la translation d'Auslander-Reiten.

Définition 2.3.1. [10, Definition IV.2.3] La **translation d'Auslander-Reiten** τ_A dans mod$A$ est définie par $\tau_A = DTr$ et la **translation inverse d'Auslander-Reiten** τ_A^{-1} est définie par $\tau_A^{-1} = TrD$.

De la définition de la translation d'Auslander-Reiten suit le résultat suivant, qui est une compilation de ses propriétés.

Proposition 2.3.2. *Soient M et N deux A-modules indécomposables. Alors :*

1. $\tau_A M = 0$ si et seulement si M est projectif ;

1'. $\tau_A^{-1} N = 0$ si et seulement si N est injectif.

2. Si M n'est pas projectif, alors $\tau_A M$ n'est pas injectif et $\tau_A^{-1}\tau_A M \cong M$;

2'. Si N n'est pas injectif, alors $\tau_A^{-1}N$ n'est pas projectif et $\tau_A\tau_A^{-1}N \cong N$.

Avant de définir le carquois d'Auslander-Reiten de mod$A$, nous rappelons que si $M, N \in \text{mod}A$, un morphisme $f : M \to N$ est dit **minimal à gauche** si, pour tout $g \in \text{End}_A N$ tel que $gf = f$, on a que g est un isomorphisme. De façon duale on dit que f est **minimal à droite** si la condition duale est satisfaite. En outre, f est dit **presque scindé à gauche** si f n'est pas une section et, pour tout homomorphisme de A-modules $u : M \to U$ qui n'est pas une section, il existe un morphisme $u' : N \to U$ tel que $u'f = u$. On définit dualement la notion de morphisme **presque scindé à droite**. De plus on dit que f est **irréductible** si f n'est ni une section ni une rétraction et si pour chaque décomposition $f = f_1f_2$, on a que f_1 est une rétraction ou f_2 est une section.

Étant donné deux A-modules X et Y, on dit qu'un morphisme $f \in \text{Hom}_A(X, Y)$ est **radical** si pour toute section $i : M \to X$ et toute rétraction $p : Y \to N$ la composition ifp n'est pas un isomorphisme. On note $\text{rad}_A(X, Y)$ l'espace de tous les morphismes radicaux de X vers Y. En outre on dit que $f \in \text{rad}_A^2(X, Y)$ s'il existe un A-module Z et deux morphismes $f_1 \in \text{rad}_A(X, Z)$ et $f_2 \in \text{rad}_A(Z, Y)$ tels que $f_2f_1 = f$. De façon inductive on définit $\text{rad}_A^n(X, Y)$. Finalement on définit radical infini comme suit.

$$\text{rad}_A^\infty(X, Y) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \text{rad}_A^n(X, Y).$$

Il est connu que si X et Y sont deux modules indécomposables et $f \in \text{Hom}_A(X, Y)$ est un morphisme, alors f est irréductible si et seulement si $f \in \text{rad}_A(X, Y) \backslash \text{rad}_A^2(X, Y)$ (voir [10, Lemma IV.1.6]).

On notera

$$\text{Irr}_A(X, Y) = \text{rad}_A(X, Y)/\text{rad}_A^2(X, Y)$$

qui est appelé **l'espace de morphismes irréductibles de X vers Y**.

Une suite exacte courte de mod$A$

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

est une **suite presque scindée** si f est un morphisme minimal presque scindé à gauche et g est un morphisme minimal presque scindé à droite.

Étant donné un A-module indécomposable M, on définit la **τ-orbite** de M comme étant $\{\tau_A^m M : m \in \mathbb{Z}\}$. On dira que les τ-orbites de M et N sont **voisines** s'il existe $M' \in \{\tau_A^m M : m \in \mathbb{Z}\}$, $N' \in \{\tau_A^n N : n \in \mathbb{Z}\}$ et un morphisme irréductible f tel que $f : M' \to N'$ ou $f : N' \to M'$.

Les deux théorèmes suivants, dus à Auslander et Reiten, montrent l'existence des suites presque scindées dans mod$A$ et nous donnent une caractérisation des celles-ci.

Théorème 2.3.3. *[10, Theorem IV.3.1]*

(a) Pour chaque A-module indécomposable non-projectif M il existe une suite presque scindée $0 \to \tau_A M \to E \to M \to 0$ dans mod$A$.

(b) Pour chaque A-module indécomposable non-injectif N il existe une suite presque scindée $0 \to N \to F \to \tau_A^{-1} N \to 0$ dans mod$A$.

Théorème 2.3.4. *[10, Theorem IV.1.13] Soient A une algèbre et*

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

une suite exacte courte dans mod$A$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *La suite exacte courte $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ est presque scindée.*
2. *L est indécomposable et g est presque scindé à droite.*

3. *N est indécomposable et f est presque scindé à gauche.*

4. *f et g sont des morphismes irréductibles.*

Remarque 2.3.5. Notons que si $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ est une suite presque scindée, alors elle est uniquement déterminée par L ou par N, lesquels sont toujours des modules indécomposables. De plus, on a que $L \cong \tau_A N$ et $N \cong \tau_A^{-1} L$.

Un des résultats sur lesquels se base cette thèse est connu sous le nom de *formules d'Auslander-Reiten*. L'énoncé suit.

Théorème 2.3.6 (Formules d'Auslander-Reiten)**.** *[10, Theorem IV.2.13] Soient A une k-algèbre et M, N deux A-modules. Alors il existe des isomorphismes*

$$\mathrm{Ext}_A^1(M,N) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}_A(N,\tau_A M) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau_A^{-1}N, M)$$

fonctoriels dans les deux variables.

Étant donnée une algèbre A on va associer à la catégorie mod$A$ un objet combinatoire qui prendra une place centrale dans la première partie de la thèse. Cet objet s'appelle le *carquois d'Auslander-Reiten*. Sa définition suit.

Définition 2.3.7. [10, Definition IV.4.6] Soit A une algèbre et soit mod$A$ sa catégorie de modules. Alors le **carquois d'Auslander-Reiten** de mod$A$, noté Γ_A, est un carquois ayant pour sommets les classes d'isomorphismes $[X]$ des A-modules indécomposables. En plus, le nombre de flèches de $[X]$ vers $[Y]$ est égal à la dimension de $\mathrm{Irr}_A(X,Y)$ comme k-espace vectoriel.

Comme on vient de dire, on utilisera de manière essentielle le carquois d'Auslander-Reiten au cours de la thèse. Donc, pour simplifier l'écriture, on identifie les points de Γ_A avec les objets de ind$A$.

Cette thèse considère des propiertés particulières des composantes connexes du carquois d'Auslander-Reiten Γ_A. Leur définition suit.

Définition 2.3.8. Soient A une algèbre et Γ_A son carquois d'Auslander-Reiten. Une composante connexe Γ de Γ_A est dite **standard généralisée** si $\mathrm{rad}_A^{\infty}(X,Y) = 0$ pour tout $[X],[Y] \in \Gamma$.

Une propriété de las composantes standard généralisées est la suivante, que sera utilisée dans certaines preuves.

Proposition 2.3.9. *Soient A une algèbre et Γ une composante connexe standard généralisée de Γ_A. Alors pour tous $X, Y \in \Gamma$ et tout $f \in Hom_A(X,Y)$, f peut s'écrire comme*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{(i,t_i)} \dots f_{(i,1)}$$

où $\alpha_i \in k$ et $f_{(i,j)}$ est irréductible pour tout i et pour tout j.

Définition 2.3.10. Soient A une algèbre et Γ_A son carquois d'Auslander-Reiten. Une composante connexe Γ de Γ_A est dite **convexe** si pour toute suite de morphismes non nuls entre modules indécomposables

$$X \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} Y$$

et telle que X et Y appartiennent à Γ, on a que X_i appartient aussi à Γ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$.

Finalement, on définira certaines structures dans le carquois d'Auslander-Reiten : les *présections* et les *sections*.

Définition 2.3.11. [5, Definition 3] Soient A une algèbre, Γ_A son carquois d'Auslander-Reiten et Γ une composante connexe de Γ_A. Un sous-carquois connexe Σ de Γ est une **présection** si :

1. étant donnée une flèche $f : X \to Y$ dans Γ telle que $X \in \Sigma$ alors soit $Y \in \Sigma$, soit $\tau Y \in \Sigma$;
2. étant donnée une flèche $f : X \to Y$ dans Γ telle que $Y \in \Sigma$ alors soit $X \in \Sigma$, soit $\tau^{-1} X \in \Sigma$;

Définition 2.3.12. [10, Definition VIII.1.2] Soient A une algèbre, Γ_A son carquois d'Auslander-Reiten et Γ une composante connexe de Γ_A. Un sous-carquois connexe Σ de Γ est une **section** si :

1. Σ est acyclique ;
2. Pour chaque $X \in \Gamma$ il existe un unique $z \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau_A^z X \in \Sigma$;
3. Si $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n$ est un chemin dans Γ où X_0 et X_n appartient à Σ, alors X_i appartient à Σ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$.

Les résultats suivants sont des conséquences directes de la définition de section et présection.

Lemme 2.3.13. *[10, Lemma VIII.1.4] Soient A une algèbre, Γ une composante connexe de Γ_A et Σ une section dans Γ. Alors Σ est une présection dans Γ.*

Étant donné deux A-modules indécomposables X et Y, on dit que X est un **prédécesseur immédiat** s'il existe un morphisme irréductible $f : X \to Y$. La notion de **successeur immédiat** est définit de forme duale. Avec cette terminologie on peut énoncer le lemme suivante.

Lemme 2.3.14. *Soit Σ une présection. Alors :*

1. *Aucun des successeurs immédiats de Σ qui n'appartient pas a Σ n'est projectif ;*
2. *Aucun des prédécesseurs immédiats de Σ qui n'appartient pas a Σ n'est injectif.*

Démonstration. Soit P un module projectif indécomposable ayant un des facteurs direct indécomposable de son radical M dans Σ. Alors il existe une flèche $f : M \to P$ dans Γ. La définition de présection implique que soit P appartient à Σ, soit τP appartient à Σ. Or $\tau P = 0$. Donc P appartient à Σ. L'autre énoncé peut être démontré de façon duale. $\square$

Lemme 2.3.15. *Soit Σ une présection. Alors Σ est acyclique.*

Démonstration. Prenons un chemin $\omega : X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n$ contenu dans Σ. Si $X_1 = X_n$, alors $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n = X_1 \xrightarrow{f_1} X_2$ est un chemin tel que $\tau X_{i+2} \neq X_i$ puisqu'est il est contenu dans Σ. Cela contredit [10, Corollary IX.2.3]. Donc ω n'est pas un cycle et Σ est acyclique. $\square$

2.3.1 Suites presque scindées dans différentes catégories de modules

Soient M un A-module et I un idéal de A. Notons C l'algèbre quotient A/I. Si I est contenu dans l'annulateur de M, alors on sait que M est aussi un C-module. Alors on peut calculer ses translatés d'Auslander-Reiten $\tau_A M$ et $\tau_C M$ dans mod$A$ et mod$C$, respectivement. A priori, ces deux modules peuvent être différents. Le résultat suivant nous donne une relation entre eux.

Lemme 2.3.16. *[10, Lemma VIII.5.2] Soit A une algèbre, I un idéal bilatère de A et $C = A/I$. Si M est un C-module, alors $\tau_C M$ dans modC est un sous-module dans modA de $\tau_A M$. Dualement, $\tau_C^{-1} M$ est un module quotient dans modA de $\tau_A^{-1} M$.*

Dans la présente thèse les modules M ayant la propriété que $\tau_A M = \tau_C M$ joueront un rôle fondamental. Suivant [11], on note $\mathcal{C}_A$ la classe tous ces modules.

2.4 Groupe fondamental d'une algèbre

Soit A une algèbre. À chaque présentation $A = kQ/I$, nous pouvons associer son groupe fondamental $\pi_1(Q, I)$ (voir [48]). On dit qu'une algèbre triangulaire est **simplement connexe** si le groupe fondamental $\pi_1(Q, I)$ est trivial pour toute présentation $A \cong kQ/I$. Nous pouvons associer aussi un groupe fondamental $\pi_1(\Gamma)$ à une composante connexe Γ du carquois d'Auslander-Reiten de A (voir [18]). De façon analogue, on dit qu'une composante connexe Γ est **simplement connexe** si son groupe fondamental $\pi_1(\Gamma)$ est trivial.

2.5 Quelques extensions d'algèbres

2.5.1 Extensions ponctuelles

Soient A une algèbre et M un A-module. On note $B = A[M]$ l'**extension ponctuelle de A par M**, où B est l'algèbre des matrices

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & k \end{pmatrix}$$

avec la somme et la multiplication habituelles des matrices. Il faut remarquer que le carquois de B peut être obtenu du carquois de A en ajoutant un nouveau sommet, appelé **sommet d'extension**, tel que le radical du B-module projectif associé au nouveau sommet soit isomorphe à M.

De façon duale on définit la **co-extension ponctuelle de A par M**, notée $B = [M]A$.

2.5.2 Extensions scindées par des idéaux nilpotents

Soient A une algèbre et Q un A-A-bimodule équipé d'un A-A-morphisme $\mu : Q \otimes_A Q \to Q$ tel que $\mu(\mu(q \otimes q') \otimes q'') = \mu(q \otimes \mu(q' \otimes q''))$ pour tout $q, q', q'' \in Q$. On suppose toujours que le produit μ est nilpotent et que $\dim_k(Q)$ est finie car on travaille sur des algèbres de dimension finie sur le corps k. Alors l'espace vectoriel $B = A \oplus Q$ devient une algèbre associative si on définit la multiplication par

$$(a, q).(a', q') = (aa', aq' + qa' + \mu(q \otimes q')).$$

En outre il existe une suite exacte scindée de k-espaces vectoriels

$$0 \to Q \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

où $\iota : q \mapsto (0, q)$ est l'inclusion de Q comme idéal bilatère de $B = A \oplus Q$. De plus la projection $\pi : (a, q) \mapsto a$ a une section $\sigma : a \mapsto (a, 0)$. On dit que B est l'**extension scindée de A par Q** si la section σ est un morphisme d'algèbres. En particulier, si en outre $\mu(q \otimes q') = 0$ pour tous $q, q' \in Q$ on dit que B est l'**extension triviale** de A par Q. Nous referons le lecteur à [11] pour plus de précisions.

2.5.3 Extensions par relations et par relations partielles

Un cas particulier des extensions scindées qui est très lié aux concepts développés dans la première partie de cette thèse est celui des extensions par relations, introduites par Assem, Brüstle et Schiffler dans [6]. Plus tard, Assem, Bustamante, Dionne, Le Meur et Smith ont généralisé ce concept aux extensions par relations partielles dans [8].

Soit A une algèbre telle que $dim.gl.A \leq 2$ et soit $E = \mathrm{Ext}^2_A(DA, A)$. Alors l'**extension par relations** de A, notée $\tilde{A} = A \ltimes E$, est l'extension triviale de A

par E. Si E peut être décomposé comme $E = E' \oplus E''$ en tant que A-A-bimodule, alors $B = A \ltimes E'$ est appelée une **extension par relations partielle** de A par E'.

2.6 Théorie de l'inclinaison

Dans la présente section on fera un bref survol des principaux résultats de la théorie de l'inclinaison. Le lecteur intéressé par un traitement plus approfondi de cette théorie pourra consulter [10], [9] ou [3]. Dans le restant de la thèse, sauf mention contraire, on entend pour **sous-catégorie** de mod$A$ toute sous-catégorie pleine, additive et stable par facteurs directs.

2.6.1 Paires de torsion

La théorie de l'inclinaison étudie comment certaines modules, appelés inclinants, sont reliés à des sous-catégories de la catégorie de modules d'une algèbre. Ces sous-catégories forment ce qu'on appelle une paire de torsion. La définition suit.

Définition 2.6.1. Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F}$ deux sous-catégories de mod$A$.

— On dit que $\mathcal{T}$ est une classe de torsion si $\mathcal{T}$ est stable par extensions et conoyeaux ;

— On dit que $\mathcal{F}$ est une classe sans torsion si $\mathcal{F}$ est stable par extensions et noyeaux ;

— Une paire $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de sous-catégories de mod$A$ est une **paire de torsion** si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{T}$ et tout $N \in \mathcal{F}$.

2. Pour tout $M \in \text{mod}A$, si $\text{Hom}_A(M,N) = 0$ pour tout $N \in \mathcal{F}$, alors $M \in \mathcal{T}$.
3. Pour tout $N \in \text{mod}A$, si $\text{Hom}_A(M,N) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{T}$, alors $M \in \mathcal{F}$.

Dans ce cas $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F}$ seront appelées la **classe de torsion** et la **classe sans torsion** de la paire $(\mathcal{T},\mathcal{F})$, respectivement. En outre, tout objet de $\mathcal{T}$ est dit **de torsion** et tout objet de $\mathcal{F}$ est dit **sans torsion**.

La proposition suivante montre des caractéristiques des classes qui forment les paires de torsion.

Proposition 2.6.2. *[10, Proposition VI.1.4]*

1. *Soit $\mathcal{T}$ une sous-catégorie de modA. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   - *(a) $\mathcal{T}$ est la classe de torsion d'une paire de torsion $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ dans modA.*
   - *(b) $\mathcal{T}$ est stable par extensions et quotients.*
   - *(c) Il existe un sous-foncteur t du foncteur identité de modA tel que $\mathcal{T} = \{M : M = tM\}$.*
2. *Soit $\mathcal{F}$ une sous-catégorie de modA. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   - *(a) $\mathcal{F}$ est la classe sans torsion d'une paire de torsion $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ dans modA.*
   - *(b) $\mathcal{F}$ est stable par extensions et sous-modules.*
   - *(c) Il existe un sous-foncteur t du foncteur identité de modA tel que $\mathcal{F} = \{N : tN = 0\}$.*

Une conséquence de la proposition précédente est la proposition suivante.

Proposition 2.6.3. *[10, Proposition VI.1.5] Soient* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *une paire de torsion dans* mod$A$ *et* M *un* A*-module. Alors il existe une suite exacte courte*

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$$

où $tM \in \mathcal{T}$ *et* $M/tM \in \mathcal{F}$*. En outre cette suite est unique dans le sens que, s'il existe une autre suite exacte* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *avec* $M' \in \mathcal{T}$ *et* $M'' \in \mathcal{F}$*, alors les deux suites sont isomorphes.*

Définition 2.6.4. Soient $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ une paire de torsion dans mod$A$ et M un A-module. Alors la suite $0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$ de la Proposition 2.6.3 est appelée la **suite canonique** de M. En outre, la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est dite **scindée** si la suite canonique de tout A-module est scindée.

2.6.2 Modules inclinants

Parmi les paires de torsion de la catégorie mod$A$, certaines, caractérisées dans [4, 57], sont caractérisées par les modules dits inclinants.

Définition 2.6.5. [19, 40] Soient A une algèbre et T un A-module. Alors T est dit **inclinant** si :

1. $dp_A T \leq 1$;
2. T est **rigide**, c'est-à-dire $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$;
3. Il existe une suite exacte courte $0 \to A \to T_0 \to T_1 \to 0$, avec T_0, $T_1 \in addT$.

On sait aussi, que si un module T vérifie les conditions 1 et 2, alors 3 est équivalent à la condition suivante (voir [10, Corollary VI.4.4]).

3'. $|T| = |A|$.

Théorème 2.6.6. *[10, Theorem VI.2.5] Soit T un A-module inclinant. Alors $(FacT, Sub(\tau_A T))$ est une paire de torsion. En outre, $FacT = \{M : Ext^1_A(T,M) = 0\}$ et $Sub\tau T = \{N : Hom_A(T,N) = 0\}$.*

Soient un A-module et $B = \mathrm{End}_A(M)$. Alors le A-module M admet une structure évidente de B-module à gauche. La proposition suivante nous montre que les A-modules inclinants sont aussi des B-modules inclinants et, en plus, nous donne l'existence d'une paire de torsion engendrée par T dans $\mathrm{mod}B$ d'une façon constructive.

Théorème 2.6.7. *[10, Lemma VI.3.3 et Corollary VI.3.6] Soient T un A-module inclinant et $B =End_A(T)$. Considérons les sous-catégories pleines $\mathcal{X} = \{X \in modB : X \otimes_B T = 0\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y \in modB : Tor_1^B(Y,T) = 0\}$ de $modB$. Alors T est un B-module inclinant et $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est une paire de torsion dans $modB$.*

Une question naturelle qui émerge de la proposition précédente est l'existence ou non d'une relation entre la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ et la paire $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. En étudiant de façon axiomatique les modules inclinants, Brenner et Butler ont relié ces paires de torsion dans [19] la relation existante. Leur résultat principal est le suivant. On donne la formulation faite dans [10, Theorem VI.3.8].

Théorème 2.6.8. *[10, Theorem VI.3.8][19, Theorem III.(a)] Soient T un A-module inclinant, $(Fac\,T,\ Sub(\tau_A T))$ la paire de torsion induite dans $modA$ et $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ la paire de torsion induite dans $modB$. Alors :*

1. *Le foncteur $Hom_A(T,-) : FacT \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une équivalence de catégories avec quasi-inverse $- \otimes_B T : \mathcal{Y} \longrightarrow FacT$.*
2. *Le foncteur $Ext^1_A(T,-) : Sub(\tau_A T) \longrightarrow \mathcal{X}$ est une équivalence de catégories avec quasi-inverse $Tor_1^B(-,T) : \mathcal{X} \longrightarrow Sub(\tau_A T)$.*

2.7 Algèbres héréditaires, inclinées et inclinées amassées

La classification des représentations des algèbres est un problème très vaste et complexe, voire impossible, si on essaie de le résoudre dans un cadre complètement général. C'est pour cela que les mathématiciens ont défini des familles d'algèbres sur lesquelles cette tâche est envisageable.

Cette section définit quelques familles d'algèbres qui seront utiles dans cette thèse.

2.7.1 Algèbres héréditaires et inclinées

La dimension projective d'un A-module M permet de décider s'il est projectif ou non. En ce sens la dimension globale d'une algèbre A peut être interprétée comme une première mesure de la complexité de l'algèbre. Par exemple, la dimension globale d'une algèbre semi-simple est zéro. De ce point de vue, les premières algèbres en dehors des algèbres semi-simples sont, donc, celles de dimension globale un.

Définition 2.7.1. Soit A une algèbre. Alors A est dite **héréditaire** si $dim.gl.A \leq 1$.

À l'heure actuelle, et depuis quelques années déjà, on peut dire que les catégories des modules des algèbres héréditaires de type de représentation fini ou de type docile sont bien connues. Happel et Ringel ont défini dans [40] les algèbres inclinées. Leur définition suit.

Définition 2.7.2. [40, Introduction] Soit A une algèbre. Alors A est dite **inclinée** s'il existe une algèbre héréditaire H et un H-module inclinant T tels que $A \cong \mathrm{End}_H(T)^{op}$.

Dans le même article Happel et Ringel ont pu donner quelques précisions sur la catégorie de modules des algèbres inclinées grâce à l'information disponible sur les algèbres héréditaires et les outils fournis par le Théorème 2.6.8. Par exemple la proposition suivante nous donne une borne pour la dimension globale des algèbres inclinées.

Théorème 2.7.3. *[40, Theorem 5.2] Soit A une algèbre inclinée. Alors $dim.gl.A \leq 2$.*

La définition des algèbres inclinées est donc basée sur l'existence d'une algèbre héréditaire et d'un module inclinant dans cette algèbre. Dans le même article où ils ont défini les algèbres inclinées, Happel et Ringel donnent une caractérisation des algèbres inclinées à l'aide des tranches complètes. Il faut remarquer que dans la littérature il existe plusieurs définitions équivalentes des tranches complètes. On prend celle parue dans [51].

Définition 2.7.4. [51, Definition 4.2.2] Soient A une algèbre et Γ_A son carquois d'Auslander-Reiten. Soient Σ un sous-carquois plein et connexe de Γ_A et $T_\Sigma = \bigoplus_{[M]\in\Sigma} M$. Alors Σ est une **tranche complète** si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. T_Σ est un A-module sincère ;
2. T_Σ est convexe dans mod$A$, c'est-à-dire que pour chaque chemin

$$X = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n = Y$$

   dans mod$A$ tel que $X, Y \in \Sigma$, on a que $X_i \in \Sigma$ pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$;
3. Si M est indécomposable et non projectif, alors au plus un de M ou $\tau_A M$ appartient à Σ ;

4. Si M est un module indécomposable, N est un facteur direct indécomposable de T_Σ et $f : M \to N$ est un morphisme irréductible, alors soit M appartient à Σ, alors M est non injectif et $\tau_A^{-1}M$ appartient à Σ.

Le théorème suivant nous donne une caractérisation de toutes les tranches complètes.

Théorème 2.7.5. *[51, Theorem 4.2.3] Soient H une algèbre héréditaire, T un H-module inclinant et $B = \operatorname{End}_H(T)$. Si on écrit $DH = \bigoplus_{i=1}^{n} I(i)$, alors le module*

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Hom}_H(T, I(i))$$

est isomorphe à T_Σ pour une tranche complète Σ dans $\operatorname{mod}B$. En outre, pour toute tranche complète Σ il existe un B-module Q comme plus haut tel que $T_\Sigma = Q$.

Comme corollaire du théorème précédent on obtient une caractérisation des algèbres inclinées.

Corollaire 2.7.6. *[51, Corollary 4.2.4] Soit A une algèbre. Alors A est inclinée si et seulement si elle admet une tranche complète Σ dans son carquois d'Auslander-Reiten Γ_A. En outre, soit $T = \bigoplus_{[M]\in\Sigma} M$, alors $H = End_A(T)$ est une algèbre héréditaire, ${}_HT$ est un H-module inclinant et $A \cong End_H(T)$.*

Une autre caractérisation des algèbres inclinées, qui est plus facile à appliquer dans la pratique, fut développée de façon indépendante par Liu et Skowroński, dans [46] et [55], respectivement. Cette caractérisation alternative utilise le concept de section au lieu de celui de tranche complète.

Théorème 2.7.7. *[46, 55][Critère de Liu-Skowroński] Soit A une algèbre. Alors A est une algèbre inclinée si et seulement si A admet une section Σ qui est fidèle et telle que $Hom_A(M, \tau_A N) = 0$ pour tous $M, N \in \Sigma$.*

2.7.2 Algèbres inclinées amassées

L'étude des algèbres inclinées amassées a débuté avec leur définition, faite par Buan, Marsh et Reiten dans [26] et, de façon indépendante, par Caldero, Chapoton et Schiffler pour le cas $\mathbb{A}_n$ dans [28]. Depuis, certaines représentations de ces algèbres et d'autres concepts qui leur sont associés peuvent être considérés comme une catégorification des algèbres amassées définies par Fomin et Zelevinski dans [34].

Dans cette section on énoncera deux façons de définir ces algèbres. La première est la définition originale de Buan, Marsh et Reiten en tant qu'algèbres d'endomorphismes d'un objet inclinant dans une catégorie amassée. La deuxième découle des travaux faits par Assem, Brüstle et Schiffler dans [6, 5], où ils prouvent que les algèbres inclinées amassées sont exactement les extensions par relations des algèbres inclinées.

Algèbres inclinées amassées et catégories amassées

Pour donner la définition originale des algèbres inclinées amassées il faut commencer par celle de catégorie amassée. On donne la définition de Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov apparue dans [25]. Cette définition utilise le concept de catégorie dérivée bornée, on renvoi le lecteur à [38] pour une définition précise et ses propriétés de base.

Définition 2.7.8. [25] Soient H une algèbre héréditaire, $\mathcal{D} = D^b(\text{mod}H)$ la catégorie dérivée bornée de mod$H$ et prenons l'automorphisme $F = [1] \circ \tau_{\mathcal{D}}^{-1}$ de $\mathcal{D}$, qui est la composition du foncteur de décalage [1] de $\mathcal{D}$, et l'inverse $\tau_{\mathcal{D}}^{-1}$ de la translation d'Auslander-Reiten de $\mathcal{D}$. Alors la **catégorie amassée** associé à H, notée $\mathcal{C}_H$, est la catégorie de F-orbites de $\mathcal{D}$ ayant comme objets les objets de $\mathcal{D}$ et, étant donné deux objets $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ de $\mathcal{C}_H$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_H}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} Hom_{\mathcal{D}}(X, F^i Y)$. En outre, la composition de morphismes est défini de façon naturelle.

Remarque 2.7.9. Soit H une algèbre héréditaire. Alors $\mathcal{C}_H$ est une catégorie Krull-Schmidt.

Leur motivation à l'introduction des catégories amassées était de donner une catégorification des algèbres amassées. Ainsi ils réussirent nottament à décrire la combinatoire de la mutation des amas à l'aide de celle de la mutations des objets inclinants amassés. La définition d'un objet inclinant amassé suit.

Définition 2.7.10. Soit $\mathcal{C}_H$ une catégorie amassée. On dit que $\tilde{X}$ est un **objet inclinant amassé** si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_H}(\tilde{X}, \tilde{X}[1]) = 0$ et $|\tilde{X}| = |H|$.

Dans un autre article, apparu presque au même temps que [25], Buan, Marsh et Reiten ont défini dans [26] les algèbres inclinées amassées comme suit.

Définition 2.7.11. [26] Soit B une algèbre. Alors B est dite une algèbre **inclinée amassée** si et seulement s'il existe une catégorie amassée $\mathcal{C}_H$ et un objet inclinant amassé $\tilde{T}$ tels que $B \cong \mathrm{End}_{\mathcal{C}_H}(\tilde{T})$.

En plus, ils ont prouvé que les catégories de modules des algèbres inclinées amassées gardent un lien étroit avec les catégories amassées d'où elles proviennent. Leur résultat est le suivant.

Théorème 2.7.12. *[26] Soient $\mathcal{C}_H$ une catégorie amassée, $\tilde{T}$ un objet inclinant amassé et $B = End_{\mathcal{C}_H}(\tilde{T})$ l'algèbre inclinée amassée correspondante. Alors le foncteur $Hom_{\mathcal{C}_H}(\tilde{T}, -) : \mathcal{C}_H \to modB$ induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{C}_H/(\tau_{\mathcal{C}_H}\tilde{T})$, la catégorie amassée $\mathcal{C}_H$ factorisée par l'idéal formé des morphismes de $\mathcal{C}$ qui se factorisent par un objet de $add(\tau_{\mathcal{C}_H}\tilde{T})$, et $modB$, la catégorie de B-modules.*

Algèbres inclinées amassées, algèbres inclinées et extensions par relations

Soit H une algèbre héréditaire et T un H-module inclinant. Dans [25] on prouve que T induit un objet inclinant amassé $\tilde{T}$. Donc T induit une algèbre inclinée amassée $\tilde{C} = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_H}(\tilde{T})$. D'autre part, T induit aussi l'algèbre inclinée $C = \mathrm{End}_H(T)$. Étant donnée cette situation, il est naturel de se demander quelle est la relation entre C et $\tilde{C}$.

En étudiant ce problème, Assem, Brüstle et Schiffler produisirent une série de quatre articles, où ils donnent une caractérisation des algèbres inclinées amassées à partir des algèbres inclinées et ils étudient leurs catégories de modules. Dans le reste de la sous-section on énoncera quelques résultats et définitions apparues dans [5, 6].

Le premier de ceux-là nous donne une caractérisation des algèbres inclinées amassées entant qu'extension par relations des algèbres inclinées.

Théorème 2.7.13. *[6] Soient C un algèbre inclinée et $E = \mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$. Alors l'extension par relations $\tilde{C} = C \ltimes E$ est une algèbre inclinée amassée. En outre, toute algèbre inclinée amassée est de cette forme.*

Maintenant, il est naturel de se demander quand deux algèbres inclinées C_1 et C_2 sont telles que $C_1 \ltimes \mathrm{Ext}^2_{C_1}(DC_1, C_1) \cong C_2 \ltimes \mathrm{Ext}^2_{C_2}(DC_2, C_2)$. Le théorème précédent nous donne une condition nécessaire : il doit exister une algèbre héréditaire H et deux H-modules inclinants T_1 et T_2 tels que $C_1 \cong \mathrm{End}_H(T_1)$ et $C_2 \cong \mathrm{End}_H(T_2)$.

Une condition nécessaire et suffisante fut donné par Assem, Brüstle et Schiffler dans [5] à l'aide d'un nouvel objet mathématique qu'ils ont introduit, les tranches locales. D'autre part, Assem, Brüstle et Schiffler dans [7] et Bertani-Økland, Oppermann et Wrålsen dans [16] ont donné une condition nécessaire et suffisante en utilisant différents notions.

La définition de tranche locale suit.

Définition 2.7.14. [5, Definition 11] Soit A une algèbre. Un sous-carquois Σ du carquois d'Auslander-Reiten Γ_A de A est une *tranche locale* s'il satisfait aux conditions suivantes.

1. Σ est une présection ;
2. Σ est *sectionnellement convexe*, c'est-à-dire que pour chaque chemin

$$X = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n = Y$$

   dans Γ_A tel que $X_i \neq \tau_A X_{i+2}$ pour $0 \leq i \leq n-2$ et que $X, Y \in \Sigma$, on a que $X_i \in \Sigma$ pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$;
3. $|\Sigma| = |A|$.

En général, on voit que deux algèbres inclinées qui ne sont pas isomorphes peuvent induire la même algèbre inclinée amassée. Le théorème paru dans [5] est le suivant.

Théorème 2.7.15. *[5] Soit B une algèbre inclinée amassée et soit Γ_B son carquois d'Auslander-Reiten. Alors C est une algèbre inclinée telle que $B \cong C \ltimes Ext^2_C(DC, C)$ si et seulement si il existe une tranche locale Σ dans Γ_B telle que $C \cong B/Ann\Sigma$.*

Chapitre 3

Résultats connus sur la τ-inclinaison

Dans le présent chapitre nous exposons, sans démonstration, quelques résultats sur la théorie de τ-inclinaison qui seront utilisés librement dans le cours de la thèse. La plupart ont paru dans [1, 32, 42]. On renvoie le lecteur aux articles originaux pour voir les preuves et un traitement plus approfondi de ces concepts.

3.1 Définition et propriétés de bases

Définition 3.1.1. [1, Definition 0.1.a] Soit M un A-module. Alors M est dit **τ-rigide** si $\mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$.

Les modules τ-rigides ont été amplement étudiés (voir par exemple [55, 56, 47, 46, 12, 4, 15]), même si le terme *τ-rigide* est récent. De la τ-rigidité d'un module découlent deux faits qui sont d'une importance capitale pour la théorie de τ-inclinaison. Le premier est une conséquence directe des formules d'Auslander-Reiten, voir le

Théorème 2.3.6.

Corollaire 3.1.2. *Soit M un module τ-rigide. Alors M est un module rigide.*

Noter que le Théorème 2.3.6 dit que la rigidité de M peut être déduite du fait que $\mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$ ou encore du fait que $\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}M, M) = 0$. On a choisi la première de ces deux options pour définir les modules τ-rigides. De façon duale on peut définir les modules τ^{-1}-rigides.

Définition 3.1.3. [1, Section 2] Soit M un A-module. Alors M est dit **τ^{-1}-rigide** si $\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}M, M) = 0$.

Le deuxième fait est connu sous le nom de *Lemme de Skowroński.*

Lemme 3.1.4. *[56, Lemma 2] Soit M un module τ-rigide. Alors $|M| \leq |A|$.*

Maintenant on passe à la définition sur laquelle se base cette thèse.

Définition 3.1.5. [1, Definition 0.1] Soit T un module τ-rigide. Alors T est **τ-inclinant** si $|T| = |A|$ et il est un module **τ-inclinant sur son support** s'il existe un idempotent $e \in A$ tel que T est un (A/AeA)-module τ-inclinant.

Remarque 3.1.6. De même qu'il n'est pas vrai que tout module rigide est inclinant partiel, il n'est pas vrai que tout module τ-rigide est un module τ-inclinant sur son support. Par exemple, dans la catégorie de modules de l'algèbre héréditaire A de type $\mathbb{A}_2$ donné par le carquois

$$1 \longrightarrow 2$$

le module projectif $P_1 = {}^{1}_{2}$ est τ-rigide. En outre P_1 est indécomposable, donc $|P_1| = 1$. Par contre, il n'y a pas d'idempotent $e \in A$ qui fasse de P_1 un module τ-inclinant sur son support car P_1 est sincère et il n'est pas τ-inclinant.

Avec la définition en mains, les deux propositions suivantes nous donnent une petite liste de propriétés des modules τ-rigides et τ-inclinants sur leurs supports.

Proposition 3.1.7. *[1, Lemma 2.1, Proposition 2.2]*

1. *Soient $e \in A$ un idempotent et M un (A/AeA)-module. Alors M est un A-module τ-rigide si et seulement si M est un (A/AeA)-module τ-rigide.*
2. *Un module τ-inclinant sur son support est τ-inclinant si et seulement s'il est sincère.*
3. *Un module τ-inclinant sur son support est inclinant si et seulement s'il est fidèle.*
4. *Tout A-module τ-rigide M est un C-module inclinant partiel, où $C = A/AnnM$. En outre, si M est un module τ-inclinant sur son support alors M est un C-module inclinant.*

Proposition 3.1.8. *Soit T un A-module. Alors T est un module inclinant si et seulement si M est un module τ-inclinant et $dpM \leq 1$.*

Démonstration. La nécessité suit de la Proposition 3.1.7.2 et de la définition de module inclinant.

La suffisance est une conséquence directe de [14, Corollary IV.4.7], qui montre que dans ces conditions $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) \cong D\mathrm{Hom}_A(T,\tau T) = 0$. $\square$

Comme dans la définition des modules inclinants, nous pouvons construire une suite exacte qui nous donne une approximation de l'algèbre A.

Proposition 3.1.9. *[42, Proposition 2.14] Soit T un A-module τ-rigide. Alors T est un module τ-inclinant sur son support si et seulement s'il existe une suite exacte*

$$A \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} T'' \to 0$$

où T', $T'' \in addT$ et f est une $(addT)$-approximation à droite.

Aussi, [10, Lemma VI.2.2] nous donne une autre façon de différencier les modules inclinants des modules τ-inclinants qui ne sont pas inclinants.

Proposition 3.1.10. *Soit T un A-module τ-inclinant sur son support. Alors T est un A-module inclinant si et seulement s'il existe une suite exacte courte*

$$0 \to A \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} T'' \to 0$$

avec T', $T'' \in addT$.

Démonstration. La nécessité est immédiate, donc on prouve la suffisance. Remarquons que, en vertu de [10, Lemma VI.2.2], l'injectivité de f dans la suite exacte courte

$$0 \to A \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} T'' \to 0$$

implique que T est fidèle. Ainsi M est inclinant en conséquence de la Proposition 3.1.7. □

Chaque fois qu'on a un module inclinant partiel U, on peut trouver un module inclinant T_U tel que $T_U = N \oplus U$, grâce à un processus développé par Bongartz dans [17]. Ce résultat a été généralisé par Adachi, Iyama et Reiten aux modules τ-rigides.

Théorème 3.1.11. *[1, Theorem 2.10] Soit U un module τ-rigide. Alors $({}^{\perp}(\tau_A U), Sub(\tau U))$ est une paire de torsion. En outre $T_U := \mathcal{P}({}^{\perp}(\tau U))$ est un module τ-inclinant ayant U comme facteur direct.*

Remarque 3.1.12. Si dans le théorème précédent U est un module inclinant partiel, alors T_U coïncide avec le module obtenu par la complétion classique de Bongartz.

Une des difficultés à travailler avec les modules τ-inclinants sur leurs supports c'est que le nombre de facteurs indécomposables varie d'un module à l'autre. C'est pour cela qu'afin d'énoncer certains résultats de la théorie de τ-inclinaison on a besoin d'introduire les notions de projectifs associés aux modules τ-inclinants sur leurs supports et de paires τ-rigides comme suit.

Définition 3.1.13. Soit A une algèbre. Alors :

1. Si T est un A-module τ-inclinant sur son support et $e \in A$ est un idempotent de A tel que T est un A/AeA-module τ-inclinant, alors on définit le **module projectif P_T associé à T** comme $P_T = eA$.
2. Si M est un A-module τ-rigide et P est un A-module projectif, on dira que la paire (M, P) est **compatible** si $\mathrm{Hom}_A(P, M) = 0$.
3. Soit (M, P) une paire compatible. Alors on dit que (M, P) est une paire **τ-inclinante** si $|M| + |P| = |A|$.
4. Soit (M, P) une paire compatible. Alors on dit que (M, P) est une paire **τ-inclinante presque complète** si $|M| + |P| = |A| - 1$.

Comme conséquence immédiate des définitions précédentes on a la proposition suivante.

Proposition 3.1.14. *[1, Proposition 2.3] Soit A une algèbre. Alors toute paire τ-inclinante est de la forme (T, P_T), où T est un A-module τ-inclinant sur son support et P_T est le module projectif associé à T.*

Maintenant qu'on a introduit assez de terminologie, on peut énoncer le théorème qui a motivé la théorie de la τ-inclinaison.

Théorème 3.1.15. *[1, Theorem 2.18] Soit A une algèbre et (M, P) une paire τ-inclinante presque complète. Alors il existe exactement deux modules τ-inclinants sur leurs supports T_1 et T_2 tels que M est une facteur direct de chaque T_i et P est un facteur direct de chaque P_{T_i}. En autre, il existe exactement un des T_i tel que $FacT_i$=$FacM$.*

Définition 3.1.16. [1, Definition 2.19] Soient T_1 et T_2 comme dans le théorème précédent. Alors on dit que T_2 est la **mutation** de T_1 en M' ce qu'on note $T_2 = \mu_{M'}(T_1)$, et T_1 est la mutation de T_2 au M'', notée $T_1 = \mu_{M''}(T_2)$.

3.1.1 Modules τ-inclinants et extensions d'algèbres

Dans la Proposition 3.1.7 on a comparé les A-modules τ-rigides aux modules τ-rigides les quotients de A par un idéal engendré par un idempotent. Il est clair que les idéaux engendrés par des éléments idempotents ne sont pas les seuls idéaux d'une algèbre arbitraire A. Donc il est naturel de se demander quelle est la relation entre les A-modules τ-rigides et les A/I-modules τ-rigides, où I est un idéal plus général. Ce problème est fort difficile et il est encore ouvert.

Ceci dit, on peut considérer ce problème d'un point de vue different, c'est-à-dire qu'on peut prendre une algèbre R qui est une extension scindée d'une autre algèbre A. Si on est dans cette situation, alors $A = R/I$ pour un certain idéal I de R.

Prenons un A-module τ-rigide M. Donc M est un R-module de façon triviale. Par contre on ne sait pas s'il est τ-rigide ou non en tant que R-module. C'est évidemment le cas si $\tau_A M = \tau_R M$.

Dans la présente sous-section on énonce des résultats parus dans [11] qui nous donnent des conditions pour que $\tau_A M = \tau_R M$ lorsque R est une extension scindée par un idéal nilpotent de A.

Remarque 3.1.17. Les résultats originaux de [11] sont plus généraux que ceux qu'on énonce. Nous les avons adaptés de façon qu'ils puissent répondre à la question principale de cette sous-section.

Théorème 3.1.18. *[11, Theorem] Soient A une algèbre, M un A-module τ-rigide et R une extension scindée de A par un idéal nilpotent Q. Si $Q_A \in Fac(M)$ et $D({}_AQ) \in$ Sub$(\tau_A M)$, alors $\tau_A M = \tau_R M$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $Q_A \in Fac(M)$ et $D({}_AQ) \in \mathrm{Sub}(\tau_A M)$ implique que $\mathrm{Hom}_A(Q, \tau_A M) = 0$ et $M \otimes_A Q = 0$, respectivement. $\square$

Remarque 3.1.19. Même si les extensions ponctuelles sont un cas particulier des extensions scindées, nous énonçons le résultat correspondant aux extensions ponctuelles pour son utilisation ultérieure.

Proposition 3.1.20. *[11, Corollary 2.6] Soit A une algèbre, M un A-module τ-rigide et $R = A[X]$ l'extension ponctuelle de A par X. Si Hom$_A(X, \tau_A M) = 0$, alors $\tau_A M = \tau_R M$.*

3.2 Modules τ-inclinants et classes de torsion

Toute comme la théorie d'inclinaison, la théorie de τ-inclinaison est intimement liée aux paires de torsion dans la catégorie de modules.

Comme dans [1], on note sτ-tilt$A$ la classe de A-modules τ-inclinants sur leurs supports et f-tors$A$ toutes les classes de torsion fonctoriellement finies dans mod$A$.

Le théorème suivant est un des piliers de la τ-inclinaison. Rappelons que, étant donnée une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de mod$A$ stable par extensions et facteurs directs, on note $P(\mathcal{C})$ la somme directe d'un représentant de chaque classe d'isomorphisme de module indécomposable Ext-projectif de $\mathcal{C}$.

Théorème 3.2.1. *[1, Theorem 2.7] L'application Φ : $s\tau$-tilt$A \to$ f-tors$A$ définie par $\Phi(M) =$FacM est une bijection d'inverse $\Phi^{-1}(\mathcal{T}) = P(\mathcal{T})$.*

Donc le théorème précédent nous dit que chaque module τ-inclinant sur son support engendre une classe de torsion fonctoriellement finie et, réciproquement, que toute classe de torsion fonctoriellement finie est engendrée par un module τ-inclinant sur son support.

Cette bijection induit de façon naturelle un ordre partiel dans sτ-tilt$A$.

Définition 3.2.2. [1, Definition-Proposition 2.28] Soient M et N deux modules τ-inclinants sur leur support. Alors on dit que $N \leq M$ si Fac$N$ $\subseteq$Fac$M$.

En plus, on verra dans le prochain résultat que cet ordre est compatible avec la mutation.

Théorème 3.2.3. *[1, Proposition 2.28][32, Theorem 3.1] Soit M et N deux modules τ-inclinants sur leur support tels que N est obtenu par une mutation de M. Alors soit $N < M$, soit $N > M$.*

En outre, si $\mathcal{T}$ est une classe de torsion telle que Fac$M \subsetneq \mathcal{T}$ alors il existe un module L obtenu par mutation de M tel que Fac$M \subsetneq$ Fac$L \subset \mathcal{T}$. Dualement, si $\mathcal{T}$ est une classe de torsion telle que $\mathcal{T} \subsetneq$ Fac$M$ alors il existe un module L' obtenu par mutation de M tel que $\mathcal{T} \subset$ Fac$L' \subsetneq$ Fac$M$.

3.3 Équivalence induite par un module τ-inclinant

Un des résultats clés de la théorie d'inclinaison est le théorème d'inclinaison de Brenner et Butler (voir Théorème 2.6.8). Le résultat suivant prouvé dans un contexte plus général dans [30] montre qu'une de ces équivalences reste valide pour les modules τ-inclinants. On transcrive ici le résultat tel comme peut être trouvé dans [42].

Proposition 3.3.1. *[30, Theorem 4.1][42, Proposition 3.5] Soient T un A-module τ-inclinant sur son support, $B = End_A(T)$ et $\mathcal{Y}$ la sous-catégorie de $modB$ définie par $\mathcal{Y} = \{Y \in modB : Tor_1^B(Y,T) = 0\}$. Alors le foncteur $Hom_A(T,-) : modA \to modB$ induit une équivalence de catégories entre $FacT$ et $\mathcal{Y}$. Son quasi-inverse est le foncteur de $\mathcal{Y}$ dans $FacT$ induit par $- \otimes_B T : modB \to modA$.*

Remarque 3.3.2. La preuve donné par Jasso consiste en considérer M comme un C-module inclinant, où $C = A/\mathrm{Ann}M$. Cette type de raisonement sera utilisé pour prouver certains résultats de cette thèse.

Soit U un module τ-rigide, T_U sa complétion de Bongartz et $B = \mathrm{End}_A(T_U)$. Alors $\mathrm{Hom}_A(T_U, U)$ est un B-module projectif. Cela implique l'existence d'un idempotent $e_U \in B$ tel que $\mathrm{Hom}_A(T_U, U) = e_U B$. Posons $\tilde{B} = B/Be_UB$, c'est l'algèbre quotient de B par l'idéal engendré par e_U, et sτ-tilt$_U A$ la classe des A-modules τ-inclinants sur leur support M tels que $M = M' \oplus U$.

Théorème 3.3.3. *[42, Theorem 1.1] Soient U un module τ-rigide et $\tilde{B}$ comme plus haut. Alors le foncteur $Hom_A(T_U,-) : modA \to modB$ induit un foncteur $F : U^{\perp} \cap {}^{\perp}(\tau_A U) \to \mathrm{mod}\tilde{B}$ qui est une équivalence de catégories. En outre F induit une bijection Θ entre sτ-tilt$_U A$ et sτ-tilt$\tilde{B}$ qui respecte l'ordre, c'est-à-dire que $M \leq N$ si et seulement si $\Theta(M) \leq \Theta(N)$ pour tous M et N dans sτ-tilt$_U A$.*

Ce processus d'identification est appelé *réduction τ-inclinante*.

Chapitre 4

Modules τ-inclinants sur leur supports et leurs algèbres d'endomorphismes

Ce chapitre est dédié à l'étude des algèbres d'endomorphismes des modules τ-inclinants sur leurs supports.

Soient A une algèbre et T un A-module τ-inclinant sur son support. Tout au long de ce chapitre on notera B et C les algèbres $B = \mathrm{End}_A(T)$ et $C = A/\mathrm{Ann}_A T$, respectivement. Dans la première section de ce chapitre nous montrons que l'algèbre $\mathrm{End}_B(T)$ est isomorphe à C. Dans la deuxième nous prouvons une généralisation du Théorème de Brenner-Butler (voir Théorème 2.6.8) lorsque $\tau_A T = \tau_C T$.

4.1 Sur le quotient d'une algèbre par l'annulateur d'un module τ-inclinant sur son support

On commence cette section directement avec son résultat principal.

Théorème 4.1.1. *Soient T un A-module τ-inclinant sur son support, $B = \mathrm{End}_A T$ son algèbre d'endomorphismes et $C = A/\mathrm{Ann}_A T$. Alors le morphisme d'algèbres $\varphi : A \to \mathrm{End}_B({}_BT)^{op}$ défini par $\varphi(a)(t) = ta$ pour tout $t \in T$ induit un isomorphisme $C \cong \mathrm{End}_B({}_BT)^{op}$.*

Démonstration. Pour tout $a \in A$, nous avons que $\varphi(a) = 0$ si et seulement si $Ta = 0$. Donc $\ker \varphi = \mathrm{Ann}T$. Alors φ induit, par passage au quotient, un morphisme $\tilde{\varphi} : C \to \mathrm{End}_B T^{op}$ donné par $c \mapsto (t \mapsto t\dot{c})$ pour $c \in C$ et $t \in T$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ann}_A T \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathrm{End}_B({}_BT)^{op} \\
& C \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

La proposition 3.1.7 implique que T est un C-module inclinant. De plus, mod$C$ étant une sous-catégorie pleine de mod$A$, nous avons que $\mathrm{End}_C(T) \cong \mathrm{End}_A(T) = B$. Conséquemment, [10, Lemme VI.3.3] implique que $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme d'algèbres.

□

Les corollaires suivants découlent immédiatement du Théorème 4.1.1.

Corollaire 4.1.2. *Soient T un A-module τ-inclinant sur son support et $B = \mathrm{End}_A(T)$ son algèbre d'endomorphismes. Alors B est une algèbre connexe si et seulement si $C = A/\mathrm{Ann}_A T$ est connexe.*

Démonstration. Soit T un A-module inclinant sur son support. Si B est une algèbre connexe, alors [10, Corollary VI.3.5] implique que $\mathrm{End}_C(T)$ est connexe, puis

$\mathrm{End}_B({}_BT)$ est connexe. Donc on peut appliquer le Théorème 4.1.1 pour conclure que C est connexe. Supposons que C est connexe. On sait que T est un C-module inclinant par la Proposition 3.1.7. En outre $B = \mathrm{End}_A(T) = \mathrm{End}_C(T)$ parce que mod$C$ est une sous-catégorie pleine de mod$A$. Donc [10, Lemma VI.3.4] implique que B est connexe. □

Corollaire 4.1.3. *Soit T un A-module τ-inclinant sur son support et $B = \mathrm{End}_A(T)^{op}$ son algèbre d'endomorphismes. Alors $\varphi : A \to \mathrm{End}_B({}_BT)$ est un isomorphism si et seulement si T est un A-module inclinant.*

Démonstration. Considérons le morphisme d'algèbres φ du Théorème 4.1.1 et supposons que c'est un isomorphisme. Alors le Théorème 4.1.1 implique que $\mathrm{Ann}_A T = 0$. Donc nous pouvons appliquer la Proposition 3.1.7.(3) pour conclure que T est un A-module inclinant. L'autre implication est prouvée dans [10, Lemma VI.3.3]. □

4.2 Une version τ-inclinante du Théorème de Brenner-Buttler

Comme on a déjà dit dans le Chapitre 3, on peut associer à chaque A-module τ-inclinant sur son support T la classe de torsion Fac$T$ et la classe sans torsion $\mathrm{Sub}(\tau_A T)$. Dans le théorème suivant, qui est le résultat principal de ce chapitre, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que le foncteur $\mathrm{Ext}^1_A(T, -)$: $\mathrm{Sub}(\tau_A T) \to \mathcal{X}$ du Théorème 2.6.8 soit une équivalence de catégories.

Théorème 4.2.1. *Soient T un A-module τ-inclinant sur son support, $B = \mathrm{End}_A T$ son algèbre d'endomorphismes et $C = A/\mathrm{Ann}_A T$. Alors le foncteur* $\mathrm{Ext}^1_A(T, -)$:

$\mathrm{Sub}(\tau_A T) \to \mathcal{X}$ *est une équivalence de catégories avec quasi-inverse* $\mathrm{Tor}_1^B(-,T) : \mathcal{X} \to \mathrm{Sub}_A(\tau_A T)$ *si et seulement si* $\tau_A T \cong \tau_C T$.

Démonstration. *Suffisance.* De l'isomorphisme entre $\tau_A T$ et $\tau_C T$ suit immédiatement que $\tau_A T$ est un C-module, donc $\mathrm{Sub}(\tau_A T) = \mathrm{Sub}(\tau_C T)$. Nous noterons $\tau_A T$ et $\tau_C T$ simplement τT.

Soit L appartient à $\mathrm{Sub}(tauT)$. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{I}_A(L,\tau T) \neq 0$. Alors il existe un A-module injectif I et un morphisme $f : L \to \tau T$ qui se factorise par I sous la forme $f = f_2 f_1$ avec $f_1 : L \to I$ et $f_2 : I \to \tau T$. Comme L est aussi un C-module, il existe une enveloppe injective $i : L \to I'$ dans $\mathrm{mod}C$. En particulier, i est un monomorphisme dans $\mathrm{mod}A$ parce que $\mathrm{mod}C$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}A$. Alors l'injectivité de I fait en sorte qu'il existe un morphisme $h : I' \to I$ tel que $f_1 = hi$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, "i"'] & & \tau T . \\ & I \arrow[ur, "f_2"'] & \\ I' \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Donc $f = f_2 hi$ et $f_2 h \neq 0$ parce que $f \neq 0$. De plus, $\mathrm{mod}C$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}A$ et I' et τT sont des C-modules, donc $f_2 h$ est un morphisme dans $\mathrm{mod}C$. Alors $\mathcal{I}_C(L,\tau T) \neq 0$ et ceci contredit le fait que $dp_C T \leq 1$ parce que T est C-inclinant. Ceci montre que $\mathcal{I}_A(L,\tau T) = 0$. On en déduit la suite d'isomorphismes fonctoriels suivante

$$\mathrm{Ext}_A^1(T,L) \cong D\mathrm{Hom}_A(L,\tau T) = D\mathrm{Hom}_C(L,\tau T) \cong \mathrm{Ext}_C^1(T,L).$$

Cela prouve notre affirmation.

Comme T est un C-module inclinant, on a que $\mathrm{Ext}^1_C(T,-)$ induit une équivalence de catégories de $\mathrm{Sub}(\tau T)$ dans $\mathcal{X}$ de quasi-inverse induit par $\mathrm{Tor}^B_1(T,-)$ comme quasi-inverse. Donc la suffisance se suit de l'isomorphisme entre $\mathrm{Ext}^1_A(T,-)$ et $\mathrm{Ext}^1_C(T,-)$.

Nécessité. Supposons que $\mathrm{Ext}^1_A(T,-)$ est une équivalence de catégories. Comme T est un A-module τ-inclinant sur son support, alors ${}_BT$ est un B-module inclinant. Cela implique que $\mathrm{End}_B(T) \cong C$ et que $\mathrm{Tor}^B_1(T,-)$ induit une équivalence des catégories de $\mathcal{X}$ vers $\mathrm{Sub}(\tau_C T)$. Donc $\tau_A M \cong \mathrm{Tor}^B_1(T,(\mathrm{Ext}^1_A(T,\tau_A T)))$ est un C-module. Alors, $\tau_A T$ est un sous-module de $\tau_C T$. D'autre part, [10, Lemma VIII.5.2] implique que $\tau_C T$ est un sous-module de $\tau_A T$. Donc, on peut conclure que $\tau_A T \cong \tau_C T$. □

Avec le Théorème 4.2.1 et [30, Theorem 4.1] nous pouvons énoncer le corollaire suivant, qui généralise le théorème d'inclinaison prouvé par Brenner et Buttler dans [19].

Corollaire 4.2.2. *Soit T un module τ-inclinant sur son support. Considérons la paire de sous-catégories* $(\mathrm{Fac}T, \mathrm{Sub}(\tau_A T))$ *de* $\mathrm{mod}A$. *Soit $B = \mathrm{End}_A(T)$ l'algèbre des endomorphismes de T et $C = A/\mathrm{Ann}T$. Alors il existe une paire de torsion* $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *dans* $\mathrm{mod}B$ *telle que*

1. *Le foncteur* $\mathrm{Hom}_A(T,-) : \mathrm{mod}AT \longrightarrow \mathrm{mod}B$ *induit une équivalence de catégories entre* $\mathrm{Fac}T$ *et* $\mathcal{Y}$ *avec quasi-inverse induite par* $- \otimes_B T : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathrm{Fac}T$.

De plus $\tau_C T = \tau_A T$ si et seulement si

2. *Le foncteur* $\mathrm{Ext}^1_A(T,-) : \mathrm{mod}A \longrightarrow \mathrm{mod}B$ *induit une équivalence de catégories entre* $\mathrm{Sub}(\tau_A T)$ *et* $\mathcal{X}$ *avec quasi-inverse induite par* $\mathrm{Tor}^B_1(-,T) : \mathrm{mod}B \longrightarrow \mathrm{mod}A$.

□

Maintenant nous présentons deux exemples. Le premier montre que $\tau_A T = \tau_C T$ n'est pas toujours vrai pour un module τ-inclinant sur son support arbitraire T et on voit que, conséquemment, Sub$\tau_A T$ n'est pas équivalent à $\mathcal{X}$. Le deuxième est un module T τ-inclinant sur son support tel que $\tau_A T = \tau_C T$.

Exemple 4.2.3. Soit A l'algèbre de chemins du carquois

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\alpha'"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 3 \arrow[l, bend left, "\beta'"] \end{tikzcd}$$

liée par l'idéal $I = \langle \alpha'\alpha - \beta\beta', \alpha\alpha', \beta'\beta \rangle$. Prenons le module τ-inclinant sur son support $T = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus 1$. Alors Ann$T = \langle \alpha', \beta' \rangle$ et l'algèbre quotient $C = A/\mathrm{Ann}T$ est l'algèbre de chemins du carquois de type $\mathbb{A}_3$ suivant.

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3\,.$$

On sait que T est un C-module inclinant. Donc, il induit une paire de torsion $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dans mod$B$, où $B = \mathrm{End}_C(T) = \mathrm{End}_A(T)$. De plus, cette paire de torsion est telle que $\mathrm{Hom}_C(T, -)$ induit une équivalence de catégories de Fac$T$ dans $\mathcal{Y}$ alors que $\mathrm{Ext}^1_C(T, -)$ induit une équivalence de catégories de Sub$(\tau_C T)$ dans $\mathcal{X}$. Cependant $\tau_C T = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \oplus 2$ et $\tau_A T = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$. Ainsi la classe de torsion $\mathcal{X}$ de mod$B$ n'est pas équivalente à la classe sans torsion Sub$(\tau_A T)$ dans mod$A$. Sinon Sub$(\tau_C T)$ serait égale à Sub$(\tau_A T)$. Or, $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ appartient à Sub$(\tau_A T)$ et il n'est pas un C-module et, donc, il n'appartient pas à Sub$(\tau_C T)$.

Exemple 4.2.4. Considérons l'algèbre $A = kQ/I$, où Q est le carquois

$$\begin{tikzcd} & & 3 \arrow[dl, "\beta"] \\ 1 \arrow[urr, "\alpha"] & 2 \arrow[l, "\gamma"] & \\ & & 4 \arrow[ul, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

et $I = \langle \alpha\beta, \gamma\alpha \rangle$. Prenons $T = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 43 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 4$, et son translaté d'Auslander-Reiten $\tau_A T = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$. Dans ce cas $\mathrm{Hom}_A(T, \tau_A T) = 0$ et $|T| = |A| = 4$. Alors T est un A-module τ-inclinant. De plus T n'est pas un A-module inclinant parce que son annulateur $\mathrm{Ann}_A(T) = \langle \alpha \rangle$ n'est pas nul. Considérons la paire de torsion $(\mathrm{Fac}T, \mathrm{Sub}(\tau_A T))$ associée à T. Un calcul simple nous montre que $\mathrm{Fac}T = add\{\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 43 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, 4, \begin{smallmatrix} 43 \\ 2 \end{smallmatrix}, 3\}$ et $\mathrm{Sub}(\tau_A T) = add\{\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, 1\}$.

Maintenant, considérons l'algèbre $C = A/\mathrm{Ann}_A T$. Alors C est l'algèbre héréditaire donné par le carquois suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dl, "\beta"] \\
1 & 2 \arrow[l, "\gamma"'] & \\
 & & 4 \arrow[ul, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

On a que $\tau_C T = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \cong \tau_A T$. D'autre part, $B = \mathrm{End}_A(T) = kQ'/I'$, où Q' est le carquois

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta'"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha'"'] \arrow[dl, "\gamma'"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\delta'"] &
\end{tikzcd}$$

et I' est l'idéal engendré par la relation de commutativité $\alpha'\beta' - \gamma'\delta'$. Ainsi, le Corollaire 4.2.2 nous donne une paire de torsion $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dans $\mathrm{mod}B$ tel que $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ et $\mathrm{Ext}^1_A(T, -)$ induisent des équivalences de catégories de $\mathrm{Fac}T$ vers $\mathcal{Y}$ et de $\mathrm{Sub}(\tau_A T)$ vers $\mathcal{X}$, respectivement. sont des équivalences de catégories. Dans ce cas particulier nous pouvons calculer la paire de torsion $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de façon explicite pour obtenir

$\mathcal{X} = add\{{\scriptstyle 3}, \begin{smallmatrix} 4 \\ 32 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}, {\scriptstyle 4}\}$ et $\mathcal{Y} = add\{\begin{smallmatrix} 4 \\ 32 \\ 1 \end{smallmatrix}, {\scriptstyle 2}, \begin{smallmatrix} 32 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}, {\scriptstyle 1}\}$.

On peut voir une représentation diagrammatique de cet exemple dans la Figure 4.1.

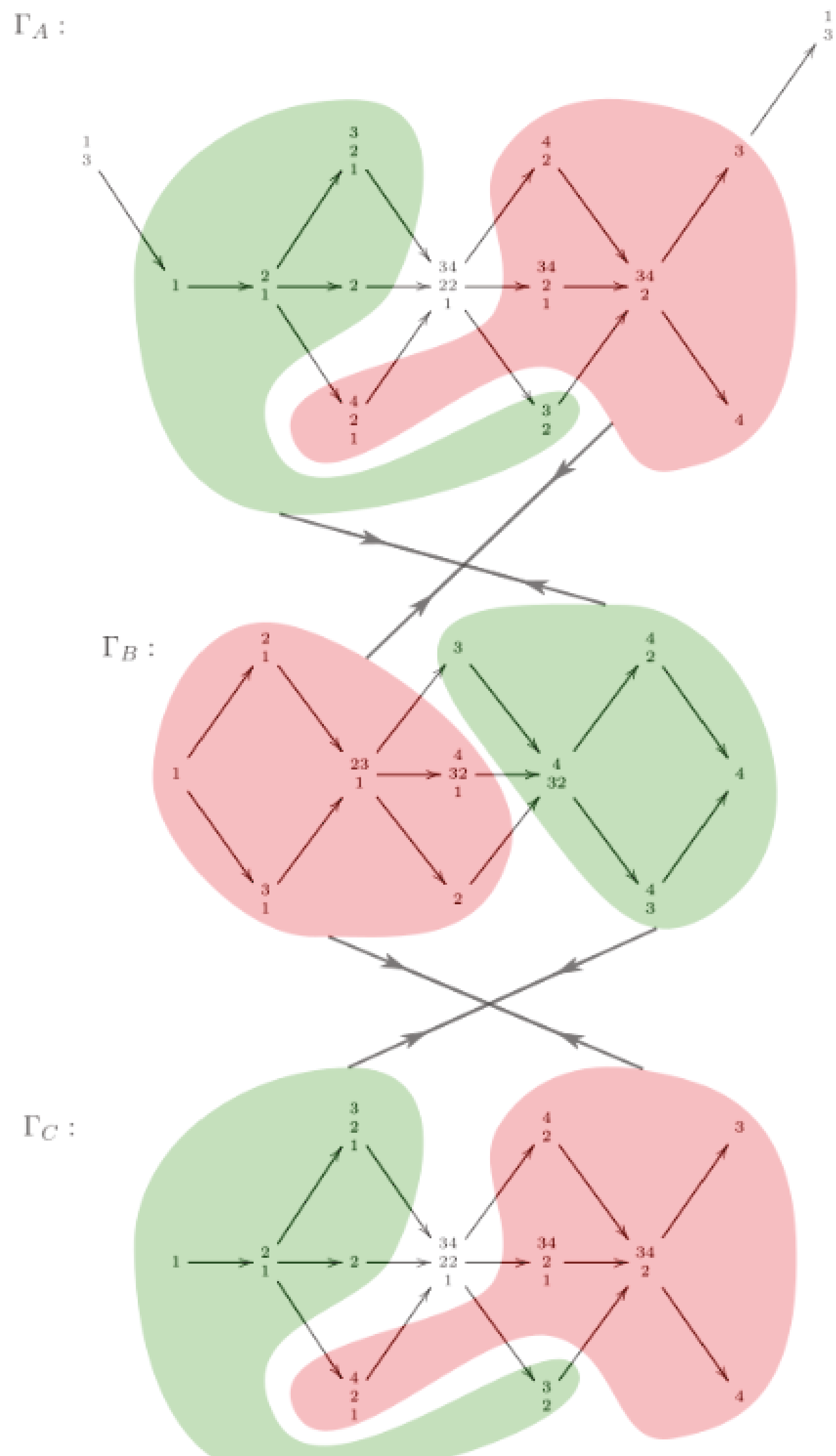

Figure 4.1 – Paires de torsion dans mod$A$, mod$B$ et mod$C$ et leur équivalences de catégories

Chapitre 5

τ-Tranches

Dans la théorie de l'inclinaison les tranches complètes ont joué un rôle fondamental. Ces objets, qui sont définis à partir d'une structure combinatoire dans le carquois d'Auslander-Reiten induite par un module inclinant, permettent de mieux comprendre la catégorie de modules dans laquelle ils peuvent être trouvés. Dans la théorie de τ-inclinaison il existe des objets avec des propriétés semblables à celles des tranches complètes. Nous les appelons *τ-tranches.* Ce chapitre est dédié à l'étude de ces objets.

La structure du chapitre est la suivante. Dans la première section nous donnons la définition des τ-tranches et leurs propriétés fondamentales. Dans un deuxième temps, nous partons d'une algèbre avec une τ-tranche et étudions des quotients d'algèbres qui ont des τ-tranches isomorphes -en tant que carquois- à la τ-tranche de laquelle on est parti. Dans la troisième section nous montrons que si une algèbre est inclinée amassée, alors les τ-tranches et les tranches locales coïncident. Après cela, dans la quatrième section nous montrons que si A est une algèbre inclinée, alors les tranches complètes et les τ-tranches coïncident. En outre, on utilise les τ-tranches pour donner une caractérisation des algèbres inclinées simplement connexes. Dans un cinquième temps, nous étudions les extensions scindées et ponctuelles des algèbres avec des τ-tranches. Finalement, nous achevons le chapitre avec un exemple.

On averti au lecteur que certaines résultats qui se trouvent dans les trois premiers sections de cet chapitre ont été trouvé de façon indépendante par Liu dans [47]. On écrit ici ces résultats pour proteger l'integrité de la thèse.

5.1 Définition

Nous commençons cette section avec la définition de τ-tranche. On rappel au lecteur que la de présection est la Définition 2.3.11.

Définition 5.1.1. Soient A une algèbre et Σ une présection dans une compossante connexe Γ du carquois d'Auslander-Reiten Γ_A. Alors Σ est une *τ-tranche* si $T_\Sigma = \bigoplus_{U \in \Sigma} U$ est un A-module τ-inclinant sur son support. De plus, Σ est une *τ-tranche complète* si T_Σ est un module τ-inclinant.

Par la suite on notera Σ une présection dans Γ et $T_\Sigma = \bigoplus_{U \in \Sigma} U$ le A-module correspondant. On dira qu'une présection Σ est *τ-rigide* si T_Σ l'est.

Remarque 5.1.2. Si Σ est une τ-tranche complète, il suit de la Définition 3.1.3 que $|\Sigma| = |A|$. De plus T_Σ est un A-module sincère en vertu de la Proposition 3.1.7.

Une des propriétés importantes des tranches complètes est que leurs algèbres d'endomorphismes sont héréditaires. La proposition suivante nous dit que les τ-tranches partagent cette caractéristique.

Proposition 5.1.3. *Soit* Σ *une* τ*-tranche dans* mod$A$. *Alors l'algèbre* $B = \mathrm{End}_A(T_\Sigma)$ *est héréditaire.*

Démonstration. Soit P un B-module projectif indécomposable et $u : Q \to P$ un monomorphisme non nul dans mod$B$ où Q est indécomposable. Considérons la paire de torsion $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ associée à T_Σ vu comme B-module. Comme T_Σ est un A-module τ-inclinant sur son support, $\mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, -)$ est une équivalence de catégories entre $\mathrm{Fac}(T_\Sigma)$ et $\mathcal{Y}$ en vertu de [42, Proposition 3.5]. Comme $P \in \mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}$ est stable pour les sous-modules, Q appartient aussi à $\mathcal{Y}$. De plus, [42, Proposition 3.5] implique l'existence d'un facteur direct M de T_Σ, d'un A-module N qui appartient à $\mathrm{Fac}(T_\Sigma)$ et d'un morphisme $v : N \to M$ tels que $\mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, v) = u$. En outre, N est indécomposable et v est un monomorphisme parce que $\mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, -)$ induit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Fac}T_\Sigma$ et $\mathcal{Y}$. Notons que Σ est acyclique en vertu du Lemme 2.3.15. Si N n'est pas un facteur direct de T_Σ, le Lemme [10, VIII.5.4] nous donne une factorisation de v comme $v = gf$, où $f : N \to \tau_A T_\Sigma$ et $g : \tau_A T_\Sigma \to T_\Sigma$. Puisque $N \in \mathrm{Fac}T_\Sigma$, il existe $T' \in add(T_\Sigma)$ et un épimorphisme $f' : T' \to N$. Or T_Σ est un A-module τ-rigide, donc la composition $ff' : T_\Sigma \to \tau_A T_\Sigma$ est nulle, ce qui implique que $f = 0$. Or, $0 \neq \mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, v) = \mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, g)\mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, f)$. Cette contradiction vient de notre hypothèse que N n'appartient pas à Σ. Ainsi N est un facteur direct de T_Σ et $Q = \mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, N)$ est un B-module projectif. $\square$

Le résultat suivant a paru d'abord dans [47] avec une formulation équivalente. Nous donnons une preuve alternative, en utilisant les résultats développés dans cette thèse.

Corollaire 5.1.4. *Soit* Σ *une* τ*-tranche dans* mod$A$. *Alors l'algèbre* $C = A/\mathrm{Ann}\Sigma$ *est une algèbre inclinée. De plus* Σ *est une tranche complète dans* mod$C$.

Démonstration. Comme T_Σ est un A-module τ-inclinant sur son support, il suit du Théorème 4.1.1 que $C \cong End_B(T_\Sigma)$, où $B = End_A(T_\Sigma)$. De plus B est héréditaire en vertu de la Proposition 5.1.3. Donc C est l'algèbre d'endomorphismes d'un module inclinant sur une algèbre héréditaire. Ainsi C est inclinée. En outre, $(T_\Sigma)_C \cong Hom_A(T_\Sigma, T_\Sigma) \otimes T_\Sigma \cong B \otimes T_\Sigma$. Alors Σ est une tranche complète dans mod$C$ parce que T_Σ est un B-module inclinant et B est héréditaire, voir [51, Corollaire 4.2.3]. $\square$

Quand on veut prouver qu'un A-module M est un module τ-inclinant sur son support, il faut prouver que M est τ-rigide et trouver un idempotent $e \in A$ approprié. Maintenant si on veut prouver que M est une τ-tranche on doit de plus prouver que M induit une présection dans une composante du carquois d'Auslander-Reiten Γ_A. Le lemme suivant (très utilisé dans le reste du chapitre) nous dit que tout module τ-rigide induisant une présection dans Γ_A est nécessairement une τ-tranche.

Lemme 5.1.5. *Soit Σ une présection dans Γ_A telle que T_Σ est τ-rigide en tant que A-module. Alors Σ est une τ-tranche.*

Démonstration. D'abord, [47, Theorem 2.7] implique que Σ est une tranche complète dans mod$C$, où $C = A/\mathrm{Ann}\Sigma$. Donc $|\Sigma| = |C|$ parce que T_Σ est un C-module inclinant. Prenons l'ensemble d'idempotents orthogonaux et primitifs $S := \{e_i : e_i \in \mathrm{Ann}\Sigma\}$, l'idempotent $e = \sum_{e_i \in S} e_i$ et l'algèbre $A' = A/AeA$. Alors l'annulateur de Σ dans A' est contenu dans rad A' parce que T_Σ est un A'-module sincère. Donc $|C| = |A'|$. Ainsi T_Σ est un A-module τ-inclinant sur son support. Comme Σ est aussi une présection par hypothèse, on conclut que Σ est une τ-tranche. $\square$

Il est connu que les tranches complètes sont convexes dans la catégorie des modules. Comme dans [47], nous considérons une notion de convexité plus faible.

Définition 5.1.6. [47, Definition 1.6.2] Soient A une algèbre et Σ un sous-carquois plein du carquois d'Auslander-Reiten Γ_A de A. Alors Σ est **faiblement convexe** si pour tout chemin de morphismes entre modules indécomposables

$$X \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} Y$$

tel que X et Y appartiennent à Σ et que le morphisme $f = f_n \dots f_0$ soit non nul, nous avons que $X_i \in \Sigma$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Corollaire 5.1.7. *Soit Σ une τ-tranche dans* mod$A$*. Alors Σ est faiblement convexe.*

Démonstration. Le module T_Σ est τ-rigide. Donc Σ est faiblement convexe en vertu de [47, Proposition 2.5]. □

5.2 Quotients d'algèbres avec des τ-tranches

Soit A une algèbre ayant une τ-tranche Σ. Dans la présente sous-section, on étudie les quotients $C = A/I$, avec I un idéal contenu dans AnnΣ. Comme conséquence des résultats principaux de cette section nous obtenons que pour une telle algèbre C, on a $\tau_C\Sigma = \tau_A\Sigma$. Donc le Corollaire 4.2.2 s'applique à toutes les τ-tranches.

Le premier des deux lemmes suivants décrit les prédécesseurs et successeurs immédiats d'une τ-tranche, alors que le deuxième décrit les morphismes irréductibles qui les relient à la τ-tranche. Avec cette information on pourra prouver le théorème principal de cette sous-section. On averti au lecteur que les trois résultats suivants sont équivalents à [47, Lemma 2.7].

Lemme 5.2.1. *Soient Σ une τ-tranche dans* mod$A$*, I un idéal de A tel que $I \subset$* AnnΣ *et $f : X \to Y$ un morphisme irréductible dans* mod$A$*.*

1. *Si* $X \in \Sigma$, *alors* $Y \in \mathrm{mod}A/I$;
2. *Si* $Y \in \Sigma$, *alors* $X \in \mathrm{mod}A/I$.

Démonstration. On prouve le premier énoncé, le second étant dual.

Notons que T_Σ est un A/I-module parce que $I \subset \mathrm{Ann}\Sigma$. Alors tout facteur direct de T_Σ est aussi un A/I-module. Supposons que $X \in \Sigma$ et que $Y \notin \Sigma$. Alors le Lemme 2.3.14 implique que Y n'est pas projectif. Donc $\tau_A Y \in \Sigma$ parce que Σ est une présection dans Γ_A. Considérons la suite presque scindée se terminant en Y.

$$0 \to \tau_A Y \xrightarrow{g} E \xrightarrow{g'} Y \to 0.$$

Si E est un A/I-module, alors Y l'est aussi parce qu'il est le conoyau d'un morphisme dans $\mathrm{mod}A/I$. Supposons que E n'est pas un A/I-module. Alors il existe un facteur direct indécomposable Y_1 de E qui n'est pas un A/I-module. Comme Y_1 est un facteur direct indécomposable de E, il existe deux morphismes irréductibles $f_1 : \tau_A Y \to Y_1$ et $h_1 : Y_1 \to Y$. Nous savons que $\tau_A Y \in \Sigma$ et que $Y_1 \notin \Sigma$, donc $\tau_A Y_1 \in \Sigma$. Considérons la suite presque scindée se terminant en Y_1.

$$0 \to \tau_A Y_1 \xrightarrow{g_1} E_1 \xrightarrow{g_1'} Y_1 \to 0.$$

On peut répéter le processus de façon récursive pour trouver, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un A-module Y_n qui n'est pas un A/I-module, qui est tel que $\tau_A Y_n \in \Sigma$ et des morphismes irréductibles $f_n : \tau_A Y_{n-1} \to Y_n$ et $h_n : Y_n \to Y_{n-1}$. De plus la composition $h_n h_{n-1} \ldots h_1$ est un chemin sectionnel pour tout nombre naturel n.

Ainsi, nous avons construit un chemin sectionnel infini dans Γ_A. Donc $Y_i \neq Y_j$ si $i \neq j$ en vertu de [10, Corollary IX.2.3]. De plus $0 \neq \tau_A Y_i \in \Sigma$ pour tout i. Or, $|\Sigma| < \infty$ en vertu du Lemme 3.1.4. Cette contradiction vient de la supposition que Y n'est pas un A/I-module. Alors Y est un A/I-module. Ce qui achève la preuve. $\square$

Lemme 5.2.2. *Soenit I un idéal de A tel que $I \subset \mathrm{Ann}\Sigma$ et $f : X \to Y$ un morphisme avec X et Y indécomposables. Supposons que X ou Y appartient à Σ. Alors f est un morphisme irréductible dans* $\mathrm{mod}A$ *si et seulement si f est un morphisme irréductible dans* $\mathrm{mod}A/I$.

Démonstration. Supposons que $X \in \Sigma$. Par hypothèse, f est un morphisme irréductible dans $\mathrm{mod}A$ et le Lemme 5.2.1 implique que X et Y sont des A/I-modules. En particulier f est un morphisme irreductible dans $\mathrm{mod}A/I$.

Soit f un morphisme irréductible dans $\mathrm{mod}A/I$. En particulier X et Y sont des A/I-modules. Donc f est un morphisme dans $\mathrm{mod}A$, qui n'est pas nécessairement irréductible. Alors f n'est pas une section dans $\mathrm{mod}A$ parce qu'il ne l'est pas dans $\mathrm{mod}A/I$. Soit $X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix}} E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$ minimal presque scindé à gauche dans $\mathrm{mod}A$, avec E_i indécomposable pour tout i. Donc il existe $(f_1', \ldots, f_t') : E_1 \oplus \cdots \oplus E_t \longrightarrow Y$ tel que $f = \sum_{i=1}^{t} f_i' f_i$. Le Lemme 5.2.1 implique que E_i est un A/I-module pour tout $i \in \{1, \ldots, t\}$ parce que X appartient à Σ. Ainsi la factorisation que l'on vient de donner est une factorisation dans $\mathrm{mod}A/I$. Par hypothèse, f est irréductible dans $\mathrm{mod}A/I$. Au vu de ce qui précède, soit $[f_1, \ldots, f_t]^t$ est une section, soit $[f_1', \ldots, f_t']$ est une rétraction. Mais chaque f_i est un morphisme irréductible, de ce fait, au moins un des f_i' est une rétraction et donc un isomorphisme. Ainsi f est irréductible dans $\mathrm{mod}A$.

La preuve est achevée, l'autre énoncé étant dual. $\square$

Comme corollaire des lemmes précédents on obtient le corollaire suivant, qui a de conséquences multiples. Nous verrons des implications de ce résultat tout au long du chapitre.

Corollaire 5.2.3. *Soit I un idéal de A tel que $I \subset \mathrm{Ann}\Sigma$. Alors $\tau_{A/I}X = \tau_A X$ et $\tau_{A/I}^{-1}X = \tau_A^{-1}X$ pour tout $X \in \Sigma$.*

Démonstration. Soit X un facteur direct indécomposable de T_Σ. Considérons la suite presque scindée de mod$A$ se terminant en X.

$$0 \to \tau_A X \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} X \to 0$$

Le Lemme 5.2.1 implique que tout facteur direct de M est un A/I-module et le Lemme 5.2.2 implique que tout summand direct de v est un morphisme irréductible dans modA/I. En outre, comme v est un morphisme presque scindé à droite dans mod$A$, il l'est aussi dans modA/I aussi. Cela implique que la suite presque scindée se terminant en X de mod$A$ coïncide avec la suite presque scindée se terminant en X de modA/I. Alors $\tau_A X = \tau_{A/I}X$. On peut prouver de façon duale que $\tau_A^{-1}X = \tau_{A/I}^{-1}X$. □

Une conséquence immédiate du Corollaire 5.2.3 est que le Corollaire 4.2.2 s'applique aux τ-tranches.

Corollaire 5.2.4. *Soient Σ une τ-tranche, $B = \mathrm{End}_A(T_\Sigma)$ l'algèbre d'endomorphismes de Σ et $C = A/\mathrm{Ann}\Sigma$. Alors il existe une paire de torsion $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dans* mod$B$ *telle que*

1. *Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, -) : \mathrm{mod}A \longrightarrow \mathrm{mod}B$ induit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Fac}T_\Sigma$ et $\mathcal{Y}$ avec quasi-inverse induite par $-\otimes_B T_\Sigma : modB \longrightarrow modA$.*
2. *Le foncteur $\mathrm{Ext}_A^1(T_\Sigma, -) : \mathrm{mod}A \longrightarrow \mathrm{mod}B$ induit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Sub}(\tau_A T_\Sigma)$ et $\mathcal{X}$ avec quasi-inverse induite par $\mathrm{Tor}_1^B(-, T_\Sigma) : \mathrm{mod}B \longrightarrow \mathrm{mod}A(\tau_A T_\Sigma)$.*

Démonstration. Le Corollaire 5.2.3 implique que $\tau_A T_\Sigma = \tau_C T_\Sigma$, où $C = A/\mathrm{Ann}\Sigma$. Par conséquent les conditions du Corollaire 4.2.2 sont satisfaites pour toute τ-tranche Σ. □

Par ailleurs, le Corollaire 5.2.3 nous permet de donner une description assez explicite des classes de torsion induites par des τ-tranches.

Proposition 5.2.5. *Soit Σ une τ-tranche dans mod$A$. Alors* $\mathrm{Fac}(T_\Sigma) = \mathrm{add}T_\Sigma \cup \mathrm{Fac}(\tau^{-1}T_\Sigma)$.

Démonstration. On a prouvé dans le Corollaire 5.2.3 que $\tau_A^{-1}(T_\Sigma) = \tau_C^{-1}(T_\Sigma)$, où $C = A/\mathrm{Ann}\Sigma$. De plus Σ est une tranche complète dans mod$C$ en vertu du Corollaire 5.1.4. Donc il suffit de prouver l'énoncé dans le cas où A est une algèbre inclinée ayant Σ comme tranche complète. La deuxième partie de la preuve est bien connue.

□

Remarque 5.2.6. Soit Σ une τ-tranche dans mod$A$. Alors Σ est une tranche complète dans mod$C$ en vertu du Corollaire 5.1.4. Donc [10, Lemma VIII..5.5] implique que $\mathrm{Hom}_C(\tau_C^{-1}T_\Sigma, T_\Sigma) = 0$. Par conséquent $\mathrm{Hom}_A(\tau_A^{-1}T_\Sigma, T_\Sigma) = 0$. Ainsi toute τ-tranche Σ est en même temps un module τ-inclinant sur son support et un module τ^{-1}-coinclinant sur son support dans mod$A$. Ce comportement des τ-tranches généralise la propriété des tranches complètes qui sont en même temps des modules inclinants et coinclinants.

Théorème 5.2.7. *Soient Σ une τ-tranche dans* mod$A$ *et I un idéal de A tel que $I \subset \mathrm{Ann}\Sigma$. Alors Σ est aussi une τ-tranche dans* modA/I.

Démonstration. Premièrement on prouve que Σ est une présection dans modA/I.

Soit $\alpha : X \to Y$ une flèche dans $\Gamma_{A/I}$ telle que $X \in \Sigma$. Si $Y \in \Sigma$, il n'y a rien à prouver. Supposons le contraire. Alors le Lemme 5.2.2 implique que α est induite par un morphisme irréductible $f : X \to Y$ dans mod$A$. Écrivons la suite presque scindée se terminant en Y.

$$0 \to \tau_A Y \xrightarrow{g'} E \xrightarrow{f'} Y \to 0$$

Comme X est un facteur direct de Σ et Σ est une présection dans mod$A$, nous avons que $\tau_A Y \in \Sigma$. Alors, le Corollaire 5.2.3 implique que $Y = \tau_A^{-1}\tau_A Y = \tau_{A/I}^{-1}\tau_A Y$. Donc $\tau_A Y = \tau_{A/I} Y$. Ainsi $\tau_{A/I} Y \in \Sigma$.

On peut dualiser ces arguments pour prouver que si $Y \in \Sigma$ et $\beta : X \to Y$ est une flèche dans $\Gamma_{A/I}$ alors soit $Y \in \Sigma$, soit $\tau_{A/I}^{-1} Y \in \Sigma$. Donc Σ est une présection dans modA/I.

De plus $\mathrm{Hom}_{A/I}(\Sigma, \tau_{A/I}\Sigma) = \mathrm{Hom}_A(\Sigma, \tau_{A/I}\Sigma) = \mathrm{Hom}_A(\Sigma, \tau_A\Sigma) = 0$. Donc Σ est une présection τ-rigide dans modA/I. Le Lemme 5.1.5 implique que Σ est une τ-tranche dans modA/I. $\square$

5.3 Algèbres inclinées et inclinées amassées

Dans cette sous-section on montre que les tranches complètes des algèbres inclinées et les tranches locales des algèbres inclinées amassées sont des cas particuliers de τ-tranches. Plus précisément, on donnera d'abord une caractérisation des algèbres inclinées en utilisant les τ-tranches complètes et après on montrera que dans la catégorie de modules d'une algèbre inclinée amassée les tranches locales et les τ-tranches complètes coïncident.

Lemme 5.3.1. *Soit A une algèbre inclinée et Σ une tranche complète dans* mod$A$.

Alors Σ *est une* τ*-tranche complète dans* mod$A$.

Démonstration. Il est bien connu que toute tranche complète est un module inclinant. Donc T_Σ est un module τ-inclinant fidèle. De plus, Liu et Skowronski ont prouvé indépendamment (voir [46] et [55], respectivement) que toute tranche complète induit une section dans Γ_A. Alors Σ est une présection en vertu de [10, Lemma VIII.1.4]. Ainsi, le Lemme 5.1.5 implique que Σ est une τ-tranche complète. $\square$

Une conséquence des résultats du présent chapitre est une caractérisation des algèbres inclinées à partir des τ-tranches complètes. Il faut noter que ce résultat a été déjà obtenu par Liu dans [47] (avec une preuve différente) et indépendamment par Skowronski-Yamagata (communication privée).

Corollaire 5.3.2. *Une algèbre* A *est inclinée si et seulement s'il existe une* τ*-tranche fidèle* Σ *dans* mod$A$.

Démonstration. Soit A une algèbre inclinée. Alors il existe une tranche complète Σ dans mod$A$. Le Lemme 5.3.1 implique que Σ est une τ-tranche complète. De plus, Σ est fidèle parce que T_Σ est un module inclinant.

Soit A une algèbre avec une τ-tranche complète Σ. Comme Σ est fidèle, on a que $\mathrm{Ann}\Sigma = 0$. Donc le Corollaire 5.1.4 implique que A est une algèbre inclinée. $\square$

Maintenant on passe à l'étude des tranches locales (voir Définition 2.7.14). Ces tranches locales sont définies pour une algèbre arbitraire, mais elles ont été utilisées principalement dans le contexte des algèbres inclinées amassées (voir Théorème 2.7.15). Avant de prouver l'équivalence entre tranches locales et τ-tranches complètes dans les catégories des modules d'une algèbre inclinée amassée, on montrera le lemme suivant.

Lemme 5.3.3. *Soit Σ une τ-tranche. Alors Σ est sectionnellement convexe.*

Démonstration. Considérons un chemin sectionnel $X = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n = Y$ tel que $X, Y \in \Sigma$. Alors le morphisme $f = f_{n-1} \dots f_1 \neq 0$ (voir [10, Corollary IX.2.2]). Donc le Corollaire 5.1.7 implique que $X_i \in \Sigma$ pour tout i. Ainsi Σ est sectionnellement convexe. $\square$

Maintenant nous sommes prêts à prouver l'équivalence.

Proposition 5.3.4. *Soient A une algèbre et Σ une τ-tranche complète. Alors Σ est une tranche locale. De plus, si A est une algèbre inclinée amassée, la réciproque est aussi vraie.*

Démonstration. Soit Σ une τ-tranche complète. En particulier, Σ est une présection et $|A| = |\Sigma|$. De plus Σ est sectionnellement convexe en vertu du Lemme 5.3.3. Donc Σ est une tranche locale.

Soit A une algèbre inclinée amassée et Σ une tranche locale dans Γ_A. Alors Σ est une présection et $|\Sigma| = |A|$. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie amassée et T l'objet amas-inclinant dans $\mathcal{C}$ tel que $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op} = A$. Dans [5], il est prouvé que pour toute tranche locale Σ, il existe un objet amas-inclinant $\tilde{\Sigma}$ dans la catégorie amassée $\mathcal{C}$ tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tilde{\Sigma}) = \Sigma$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\tilde{\Sigma}$ et $\tau_{\mathcal{C}}T$ n'ont pas de facteurs directs indécomposables communs. Maintenant, le Theorem A de [26] implique que

$$\mathrm{Hom}_A(\Sigma, \tau_A\Sigma) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tilde{\Sigma}), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tau_{\mathcal{C}}\tilde{\Sigma})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{\Sigma}, \tau_{\mathcal{C}}\tilde{\Sigma})/\tilde{\mathcal{I}}$$

où $\tilde{\mathcal{I}}$ est l'ensemble des morphismes de $\tilde{\Sigma}$ vers $\tau_{\mathcal{C}}\tilde{\Sigma}$ qui se factorisent par un objet de $add(\tau_{\mathcal{C}}T)$. Or $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{\Sigma}, \tau_{\mathcal{C}}\tilde{\Sigma}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{\Sigma}, \tilde{\Sigma}[1]) = 0$ parce que $\tilde{\Sigma}$ est un objet inclinant amassé. Donc $\mathrm{Hom}_A(\Sigma, \tau_A\Sigma) = 0$. Alors le Lemme 5.1.5 implique que Σ est une τ-tranche complète. $\square$

Jusqu'à présent, à chaque fois qu'on trouve une tranche locale dans la catégorie de modules d'une algèbre arbitraire, on réalise qu'elle est aussi une τ-tranche complète. Par contre nous n'avons pas une démonstration générale ni un contre-exemple de ce fait. La conjecture suivante reste, donc, encore ouverte.

Conjecture 5.3.5. Soit A une algèbre, Γ_A son carquois d'Auslander-Reiten et Σ une tranche locale dans Γ_A. Alors Σ est une τ-tranche complète dans Γ_A.

L'exemple suivant nous montre un fait intéressant : si Σ_1 et Σ_2 sont des τ-tranches complètes dans mod$A$, alors le carquois sous-jacent de Σ_1 et de Σ_2 ne sont pas nécessairement isomorphes.

Exemple 5.3.6. Soit A l'algèbre des chemins du carquois

$$\begin{tikzcd}
4 \arrow[dr, "\alpha"'] & & 1 \arrow[ll, "\beta"'] \\
& 3 \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[dr, "\epsilon"] & \\
5 \arrow[ur, "\delta"] & & 2 \arrow[ll, "\omega"]
\end{tikzcd}$$

liée par l'idéal engendré par tous les chemins de longueur deux sauf $\alpha\epsilon$. Son carquois d'Auslander-Reiten est dessiné dans la Figure 5.1.

On peut voir que $\Sigma = \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 54 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}$ est une τ-tranche complète de type $\mathbb{A}_5$. Cependant $\tilde{\Sigma} = \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ est une τ-tranche complète de type $\mathbb{D}_5$.

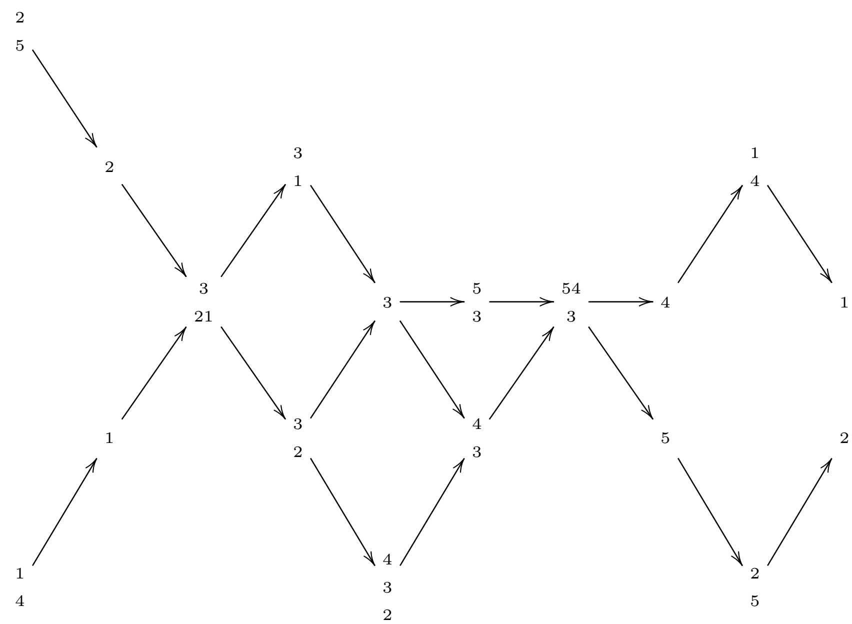

Figure 5.1 – Le carquois d'Auslander-Reiten de l'Exemple 5.3.6

5.4 τ-tranches et algèbres inclinées

On sait déjà que les tranches complètes d'une algèbre inclinée sont des τ-tranches complètes. Dans cette section on prouve que toute τ-tranche complète dans la catégorie de modules d'une algèbre inclinée est une tranche complète. En outre, on montre que si une algèbre simplement connexe admet une τ-tranche complète dans sa catégorie de modules, alors cette algèbre est nécessairement inclinée.

On commence en prouvant le lemme qui sera la pierre fondamentale sur laquelle se basent toutes les démonstrations de cette section.

Lemme 5.4.1. *Soit Γ une composante connexe du carquois d'Auslander-Reiten Γ_A d'une algèbre A. Supposons que Γ est convexe, standard généralisée et qu'elle admet une τ-tranche complète Σ. Alors A est une algèbre inclinée ayant Σ comme tranche* *complète si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Il n'existe pas de chemin dans* Γ *commençant en un sommet de* Σ *et finissant en un projectif n'appartenant pas à* Σ *;*
2. *Il n'existe pas de chemin dans* Γ *commençant dans un injectif n'appartenant pas à* Σ *finissant en un sommet de* Σ.

Démonstration. On suppose que 1. et 2. sont satisfaites. On va montrer que Σ est une tranche complète, tel comme définit dans la Définition 2.7.4.

Soit $C = A/Ann\Sigma$. Alors C est une algèbre inclinée ayant Σ comme tranche complète en vertu du Corollaire 5.1.4. On prouvera par recurrence sur les mailles que la composante Γ est formée exclusivement de C-modules. Pour faire cela, il suffit de prouver que si X n'est pas injectif, tout succeseur immediat de X est un C-module et $\tau_A^{-1}X$ est un C-module alors X est un C-module. En effet, avec ces hypothèses on peut construire la suite presque scindée commençant en X,

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} \tau_A^{-1}X \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas, $\tau_A^{-1}X$ est un C-module par hypothèse et E est aussi un C-module parce que tous ses facteurs directs indécomposables sont des C-modules. Donc $X = \ker f$ est un C-module.

Si tout facteur direct indécomposable de Σ est projectif, il n'y a rien à prouver. Sinon, un argument similaire auquel paru dans la preuve du Lemme 5.2.1 implique qu'il existe un X tel que tous ses succeseur immédiats apartiennent à Σ. Donc, tout succeseur immediat de X et $\tau_A^{-1}X$ sont trivialement des C-modules. Donc on vient de montrer que la récurrence peut être initialisée.

Soit Z un prédécesseur de Σ. Alors l'hypothèse 1. implique Z n'est pas injectif.

Donc, tout succeseur immediat de Z est un predesseseur de Σ. Par recurrence, tout succeseur immediat de Z est un C-module. En outre, $\tau_A^{-1}X$ est un C-module parce qu'il est le secceseur immediat d'un succeseur immediat de Z. Donc Z est un C-module.

Dualement, on prouve que tout succeseur de Σ est un C-module.

On vérifie maintenant que Γ est connexe dans mod$A$. On sais que Σ est une tranche complète dans mod$C$. Donc Σ est convexe dans mod$C$. En particulier Σ est convexe dans Γ. De plus, Γ est convexe dans mod$A$ par hypothèse. Ainsi Σ est convexe dans mod$A$.

Comme Σ est une τ-tranche complète dans mod$A$, on a que Σ est un module sincère.

On vérifie enfin que pour tout A-module X non injectif, au plus un de X et $\tau_A^{-1}X$ appartient à Σ. Soit X un A-module non injectif et prenons la suite presque scindée

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow \tau_A^{-1}X \longrightarrow 0.$$

Supposons qu'un facteur direct indécomposable Z_1 de Z appartient à Σ. Alors il existe une flèche dans Γ de X vers Z_1. Il s'ensuit que soit X, soit $\tau_A^{-1}X$ (et pas les deux) appartient à Σ parce que Σ est une présection. En outre, au plus un de X ou $\tau_A^{-1}X$ appartient à Σ en vertu de la définition de présection.

Ainsi Σ est une tranche complète dans mod$A$ en vertu de la Définition 2.7.4. $\square$

Le lemme qu'on vient de prouver nous amène de façon directe au théorème suivant, qui montre un certain paralléle avec le critère de Liu-Skowroński.

Théorème 5.4.2. *Soient A une algèbre et Γ_A son carquois d'Auslander-Reiten. Alors A est inclinée si et seulement s'il existe une composante connexe, standard généralisée* *et convexe Γ du carquois d'Auslander-Reiten Γ_A contenant une section τ-rigide Σ telle que $|\Sigma| = |A|$. En outre, lorsque ces conditions sont vérifiés, alors Σ est une tranche complète.*

Démonstration. Si A est inclinée, alors il existe une tranche complète Σ dans Γ_A. En particulier Σ est une section et $|\Sigma| = |A|$. De plus Σ se trouve dans une composante reliante Γ de Γ_A. On sait que Γ est une composante convexe. En outre, il est prouvé dans [56] et [46, Lemma 1.5] que Γ est standard généralisée.

Pour prouver la réciproque, en vertu du Lemme 5.4.1, il suffit de montrer qu'il n'y a pas de chemin d'un sommet de Σ vers un projectif indécomposable que n'appartient pas à Σ ni de chemin d'un injectif indécomposable qui n'appartient pas à Σ vers un sommet de Σ. On demontre le premier cas, le deuxième est prouvé de façon duale.

Supposons qu'il existe un chemin dans Γ d'un module $Y \in \Sigma$ vers un module projectif P.

$$Y = Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_t = P$$

Comme Σ est un module sincère, il existe $X \in \Sigma$ tel que $\mathrm{Hom}_A(P, X) \neq 0$. De plus, le fait que Γ soit standard généralisée implique l'existence d'un chemin dans Γ comme suit.

$$P = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_s = X$$

En concatenant les deux chemins précédents on obtient un chemin dans Γ commençant en Y et finissant dans X qui passe par P. Maintenant, comme Σ est une section, Σ est en particulier convexe. Donc $P \in \Sigma$. Ceci achève la preuve. $\square$

On est maintenant en mesure de prouver que les tranches complètes et les τ-tranches complètes coïncident dans la catégorie de modules d'un algèbre inclinée.

Proposition 5.4.3. *Soit A une algèbre inclinée. Alors Σ est une tranche complète dans* mod$A$ *si et seulement si Σ est une τ-tranche complète.*

Démonstration. Il suit du Corollaire 5.1.4 que les tranches complètes dans mod$A$ sont des τ-tranches complètes fidèles.

Réciproquement, supposons que Σ est une τ-tranche complète dans mod$A$ et $\tilde{\Sigma}$ une tranche complète dans mod$A$. Notons $(Fac\tilde{\Sigma}, Sub(\tau(\tilde{\Sigma})))$ la paire de torsion associée à $\tilde{\Sigma}$. Il est connu que la paire de torsion induite par $\tilde{\Sigma}$ est scindée (voir [10, Lemma VIII.3.2]). Cela nous donne trois cas possibles à considérer.

Premièrement, supposons que $M \in Sub(\tau\tilde{\Sigma})$ pour tout $M \in \Sigma$. Alors $dpT_{\Sigma} \leq 1$ en vertu de [39, Lemma II.2.1]. Par conséquent Σ est un module inclinant en vertu de la Proposition 3.1.8. Donc T_{Σ} est fidèle.

Dualement, supposons que $M \in Fac\tilde{\Sigma}$ pour tout facteur indécomposable M de Σ. Alors $di\Sigma \leq 1$. Donc Σ est un module coinclinant et donc fidèle.

Finalement, s'il existe $M, N \in \Sigma$ tels que $M \in Fac(\tilde{\Sigma})$ et $N \in Sub(\tau\tilde{\Sigma})$, cela implique que Σ est contenue dans la même composante Γ que $\tilde{\Sigma}$ car Σ et $\tilde{\Sigma}$ sont des sous-carquois connexes de Γ_A. Donc Γ est une composante convexe et standard généralisée.

De plus, il est connu que Γ est un sous-carquois plein de $\mathbb{Z}\tilde{\Sigma}$. Donc Σ est une présection dans $\mathbb{Z}\tilde{\Sigma}$ parce que Σ est une présection dans Γ. Il est montré dans [5, Proposition 7] que les présections et les sections coïncident dans les carquois stables par translation. Donc Σ est une section dans $\mathbb{Z}\tilde{\Sigma}$.

On affirme que Σ est une section dans Γ. D'abord, Σ est convexe et acyclique dans Γ parce qu'elle l'est dans $\mathbb{Z}\tilde{\Sigma}$. De plus, pour chaque $Z \in \Gamma \subset \mathbb{Z}\tilde{\Sigma}$ il existe un unique $Y_k \in \Sigma$ et un unique $t \in \mathbb{Z}$ tels que $Z = \tau^t Y_k$ parce que Σ est une section dans $\mathbb{Z}\tilde{\Sigma}$. Donc Σ est une section dans Γ. En outre Σ est τ-rigide car T_Σ est un module τ-inclinant. Ainsi le Théorème 5.4.2 implique que Σ est une tranche complète dans mod$A$. $\square$

Corollaire 5.4.4. *Soit A une algèbre ayant une τ-tranche complète Σ dans Γ_A. Alors A est inclinée si et seulement si Σ est fidèle en tant que A-module.*

Démonstration. Si Σ est un A-module fidèle, le Corollaire 5.3.2 implique que A est inclinée. Réciproquement, si A est inclinée alors Σ est une tranche complète en vertu de la Proposition 5.4.3. Donc Σ est fidèle. $\square$

Le prochain exemple nous montre que l'hypothèse de convexité de Γ ne peut pas être omise du Théorème 5.4.2.

Exemple 5.4.5. Considérons l'algèbre de radical carré nul dont le carquois est

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] & \\ 3 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & 1 \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \end{tikzcd} .$$

Prenons la composante Γ de son carquois d'Auslander-Reiten qui apparaît dans la Figure 5.2. On peut voir que la τ-tranche complète $\Sigma = \begin{smallmatrix}11\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\11\end{smallmatrix}$ est une section τ-rigide complète dans Γ. De plus Γ est standard généralisée. Par contre A n'est pas inclinée et Σ n'est pas une tranche complète et cela parce que Γ n'est pas convexe.

Par exemple, prenons les morphismes $p_3 : \begin{smallmatrix}3\\11\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\33\end{smallmatrix}$, $p_2 : \begin{smallmatrix}2\\33\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix}$ et $p_1 : \begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}$. Alors le chemin

$$\begin{smallmatrix}3\\11\end{smallmatrix} \xrightarrow{p_3} \begin{smallmatrix}2\\33\end{smallmatrix} \xrightarrow{p_2} \begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix} \xrightarrow{p_1} \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}$$

est un chemin dans mod$A$ qui commence et termine dans Γ mais il passe par $\begin{smallmatrix}2\\33\end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix}$ qui ne sont pas en Γ.

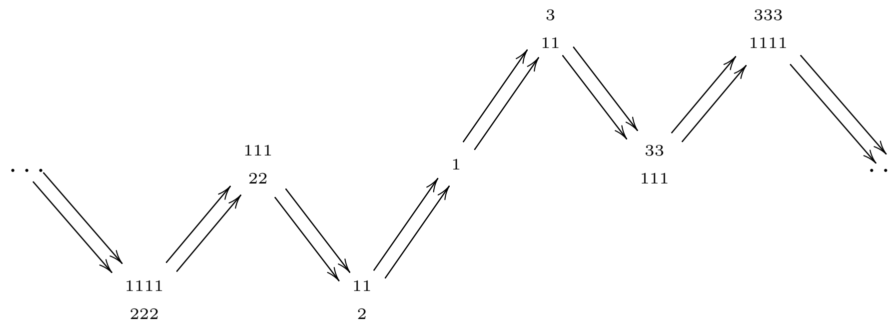

Figure 5.2 – Composante Γ de l'Exemple 5.4.5

5.4.1 Algèbres inclinées simplement connexes

Le reste de la section sera dédié à l'étude des algèbres inclinées simplement connexes.

Lemme 5.4.6. *Soit Γ une composante simplement connexe du carquois d'Auslander-Reiten Γ_A d'une algèbre A ayant une τ-tranche Σ. Alors deux points distincts de Σ appartiennent à des τ-orbites distinctes.*

Démonstration. Premièrement, notons que Γ est acyclique parce qu'elle est simplement connexe.

On prouvera que l'appartenance de deux points de Σ à la même τ-orbite contredit l'hypothèse que Γ est simplement connexe. En fait il suffit de prouver cela pour les sous-carquois pleins Ω de Σ dont on numérote les points $\Omega_0 = \{X_1, X_2, ..., X_t\}$ de façon que, pour chaque i, il y a une flèche de X_i vers X_{i+1} ou une flèche de X_{i+1} vers X_i.

Supposons que $\Omega_0 = \{X_1, X_2\}$. On peut supposer sans perte de généralité qu'il existe une flèche de X_1 vers X_2. Si X_1 appartient à la même τ-orbite que X_2, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_1 = \tau^n X_2$ ou $X_1 = \tau^{-n} X_2$. Si $X_1 = \tau^{-n} X_2$ alors il existe un cycle

$$X_1 \to X_2 \rightsquigarrow \tau^{-n} X_2 = X_1$$

dans Γ, une contradiction. Si $X_1 = \tau^n X_2$, alors il existe une flèche de X_2 vers $\tau^{-1} X_1$, donc cela implique l'existence d'un cycle

$$X_2 \to \tau^{-1} X_1 \rightsquigarrow \tau^{-n} X_1 = X_2$$

dans Γ. C'est absurde. Alors X_1 n'appartient pas à la même τ-orbite que X_2.

Supposons maintenant que $\Omega_0 = \{X_1, X_2, X_3\}$ et que $X_3 = \tau^n X_1$ avec $n \geq 1$. Notons que la dernière hypothèse implique que X_1 n'est pas projectif et que X_3 n'est pas injectif. En outre, $n \neq 1$ parce que Σ est une présection. On a, sans perte de généralité, quatre cas possibles à considérer :

1. Il y a une flèche de X_1 vers X_2 et une autre de X_2 vers X_3 : dans ce cas on voit immédiatement que cela implique l'existence d'un cycle dans Γ ;

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \rightsquigarrow \tau^{-n} X_3 = X_1$$

2. Il y a une flèche de X_2 vers X_1 et une autre de X_2 vers X_3 : ceci implique qu'il y a une flèche de τX_1 vers X_2 et une autre de X_2 vers X_3. Alors il existe un cycle comme dans le premier cas ;

$$\tau X_1 \to X_2 \to X_3 \rightsquigarrow \tau^{-n} X_3 = X_1$$

3. Il y a une flèche de X_1 vers X_2 et une autre de X_3 vers X_2 : ceci implique qu'il y a une flèche de X_1 vers X_2 et une autre de X_2 vers $\tau^{-1} X_3$. Alors il existe un cycle comme dans le premier cas ;

$$X_1 \to X_2 \to \tau^{-1} X_3 \rightsquigarrow \tau^{-n} X_3 = X_1$$

4. Il y a une flèche de X_2 vers X_1 et une autre de X_3 vers X_2 : ceci implique qu'il y a une flèche de τX_1 vers X_2 et une autre de X_2 vers $\tau^{-1}X_3$. Alors il existe une cycle comme dans le premier cas.

$$\tau X_1 \to X_2 \to \tau^{-1}X_3 \rightsquigarrow \tau^{-n}X_3 = X_1$$

Les cas où $n < -1$ se prouvent de façon duale.

Donc on a prouvé que si X_1 et X_3 appartiennent à la même τ-orbite, alors il existe un cycle dans Γ. Ainsi X_1, X_2 et X_3 appartiennent tous à des τ-orbites différentes.

Supposons, par récurrence, que $\Omega_0 = \{X_1, ..., X_t\}$ est tel que X_i n'appartient pas à la même τ-orbite que X_j si $1 \leq |i - j| \leq t - 2$. Comme Γ est simplement connexe, X_1 n'appartient pas à la même τ-orbite que X_t. Sinon le graphe de τ-orbites de Γ contiendrait un cycle de longeuer plus grand ou égal à 3, en contradiction avec l'hypothèse de simple connexité (voir [18, Section 4,6]). Ainsi les τ-orbites de $X_1, \ldots, X_t$ sont deux-à-deux-distinctes. $\square$

Théorème 5.4.7. *Soient A une algèbre et Γ_A son carquois d'Auslander-Reiten. Supposons que Γ_A a une composante connexe Γ qui est convexe dans* ind$A$*, standard généralisée et simplement connexe. Soit Σ un sous-carquois de Γ, alors Σ est une τ-tranche dans Γ si et seulement si A est une algèbre inclinée simplement connexe ayant Σ comme tranche complète.*

Démonstration. *Nécessité.* D'après le Lemme 5.4.1, il suffit de montrer qu'il n'y a pas de chemin dans Γ d'un module injectif I vers Σ et qu'il n'y pas de chemins dans Γ de Σ vers un projectif P.

Fixons une numérotation des points de Σ_0, $X_1, \ldots, X_n$. Supposons qu'il existe un chemin ω'

$$X \to Y_1 \to \cdots \to Y_{t-1} \to P$$

dans Γ de $X \in \Sigma$ vers un module projectif indécomposable P qui n'appartient pas à Σ. On peut supposer sans perte de généralité que aucun Y_k appartient à Σ. En outre, comme Σ est une présection finie, on peut aussi supposer sans perte de généralité que $Y_1 = \tau^{-1}X_1$.

Comme Σ est une τ-tranche complète, alors T_Σ est un module sincère. Cela implique que $\mathrm{Hom}_A(P, T_\Sigma) \neq 0$. Maintenant, comme Γ est une composante standard généralisée, tout morphisme $f : P \to T_\Sigma$ peut s'écrire comme $f = \sum_i \lambda_i f_{1i} \dots f_{ti}$. Donc on peut déduire l'existence d'un chemin ω'' dans Γ

$$Y_t = P \to Y_{t+1} \to \cdots \to Y_{m-1} \to Y_m \to Y$$

de P vers un facteur indécomposable Y de Σ. Comme Σ est une présection finie, le [10, Corollary IX.2.3] implique l'existence d'un $j \in \{t+1, t+2, \dots, m\}$ et un $X_k \in \Sigma$ tels que $Y_j = \tau X_k$. On peut supposer sans perte de généralité que $j = m$.

Prenons le chemin composé $\omega = \omega'\omega''$.

$$X \to Y_1 \to \cdots \to P \to \cdots \to Y_{m-1} \to Y_m \to Y.$$

Maintenant considérons l'ensemble $\mathcal{I} = \{Y_i \in \omega : Y_i = \tau^{z_i} X_h, X_h \in \Sigma, z_i \in \mathbb{Z}\}$. Cet ensemble n'est pas vide parce que $Y_1, Y_m \in \mathcal{I}$. En outre, si pour chaque $h \in \{1, ..., n\}$ on note $\mathcal{I}_h = \{Y_i \in \omega : Y_i = \tau^{z_i} X_h, z_i \in \mathbb{Z}\}$ on a que

$$\mathcal{I} = \bigcup_{h=1}^{n} \mathcal{I}_h.$$

De plus, le Lemme 5.4.6 implique que $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Soit Y_s le premier point du chemin ω tel que $Y_s = \tau^{z_s} X_{s'}$ avec $z_s \geq 1$ pour un $X_{s'}$ donné dans Σ. Un tel Y_s existe parce que $Y_m = \tau X_k$. Si $Y_s = Y_1$ alors $X_s = X_1$ en vertu du Lemme 5.4.6. Ceci nous permet d'écrire un cycle en X_1 passant par $\tau^{-1}X_1$ et $\tau^{z_s}X_1$,

$$X_1 \to * \to \tau^{-1}X_1 \rightsquigarrow \tau^{z_s}X_1 \to \cdots \to \tau X_1 \to * \to X_1$$

ce qui contredit que Γ est simplement connexe.

Donc, $Y_s \neq Y_1$ de sorte que $s > 1$. Soit $r \in \{1, \ldots, s-1\}$ l'entier tel que $Y_r \in \mathcal{I}$ et $Y_i \notin \mathcal{I}$ si $r < i < s$. Soient $z_r \in \mathbb{Z}$ et $r' \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $Y_r = \tau^{z_r}X_{r'}$. Alors il existe un sous-chemin $\tilde{\omega}$ de ω de Y_r vers Y_s. Comme Γ est simplement connexe, alors soit $X_{r'} = X_{s'}$, soit il y une flèche entre $X_{r'}$ et $X_{s'}$. Si $X_{r'} = X_{s'}$ alors il existe un cycle dans Γ de la forme suivante.

$$X_{r'} \to * \to \tau^{-1}X_{r'} \to \cdots \to \tau^{z_r}X_{r'} \overset{\tilde{\omega}}{=} Y_r \rightsquigarrow Y_s = \tau^{z_s}X_{r'} \to \cdots \to \tau X_{r'} \to * \to X_{r'}.$$

Sinon il existe une flèche de $X_{r'}$ vers $X_{s'}$ (ou vice-versa). Dans le cas d'une flèche $X_{r'} \to X_{s'}$ il existe un chemin de $X_{r'}$ vers lui-même passant par Y_r, Y_s et $\tau X_{s'}$ (ou $X_{s'}$) comme suit.

$$X_{r'} \to * \to \tau^{-1}X_{r'} \to \cdots \to \tau^{z_r}X_{r'} \overset{\tilde{\omega}}{\rightsquigarrow} \tau^{z_s}X_{s'} \to \cdots \to \tau X_{s'} \to X_{r'}.$$

Donc, l'existence d'un chemin d'un somme de Σ vers un projectif qui n'est pas dans Σ implique que Γ n'est pas simplement connexe. De ces faits on peut conclure que comme Γ est simplement connexe, alors il n'y a pas de chemin d'un sommet de Σ vers un projectif n'appartenant pas à Σ. Dualement, il n'y a pas de chemin d'un module injectif n'appartenant pas à Σ vers un sommet de Σ.

En outre, en vertu du Lemme 5.4.6, le graphe sous-jacent à Σ est isomorphe à un sous-graphe connexe du graphe de τ-orbites de Γ, lequel est un arbre parce que Γ est simplement connexe. Donc le graphe sous-jacent à Σ est lui-même un arbre. Par conséquent, [45, Theorem A] implique que A est simplement connexe.

Suffisance. Soit Σ une tranche complète dans mod$A$. Alors Σ est une τ-tranche complète dans la composante reliante Γ de Γ_A, qui est convexe et standard généralisée. En outre, Γ est simplement connexe en vertu du [45, Theorem 4.3]. Ceci achève la preuve. $\square$

Exemple 5.4.8. Considérons l'algèbre A de radical carré nul et de carquois

$$\begin{tikzcd} & & 2 \arrow[drr] & & \\ 5 \arrow[urr] \arrow[dr] & & & & 1 \\ & 4 \arrow[rr] & & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

On a dessiné son carquois d'Auslander-Reiten dans la Figure 5.3. On peut voir que Γ_A a une seule composante connexe qui est acyclique et standard généralisée mais qui n'est pas simplement connexe. Ici $\Sigma = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}23\\1\end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix}5\\42\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}$ est une τ-tranche complète. Par contre A n'est pas inclinée et Σ n'est pas une tranche complète. Notons que $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}$ appartiennent à la même τ-orbite.

5.5 Extensions d'algèbres avec des τ-tranches

Comme on a remarqué précédemment, étant données une algèbre A et une extension R de A, une question naturelle (et encore ouverte) dans la théorie de τ-inclinaison est de savoir si un A-module τ-inclinant sur son support l'est aussi en tant que R-module.

Dans la cette section on considère le cas particulier où le A-module τ-inclinant sur son support est une τ-tranche. Dans ce cas, la structure des τ-tranches nous aide puisque leur translaté d'Auslander-Reiten ne varie pas entre les différentes catégories

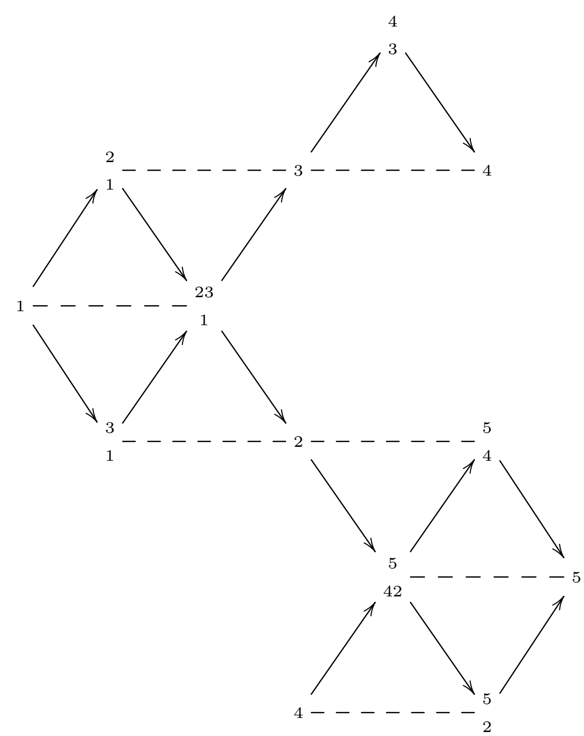

Figure 5.3 – The Auslander-Reiten quiver of A

de modules. Il faut remarquer que Pamela Suarez a étudié ce problème dans [58] en considérant des foncteurs différents du foncteur de changement de variables que l'on considère ici.

Dans la première sous-section on étudie les extensions ponctuelles des algèbres avec des τ-tranches. Dans la deuxième on considère les extensions par des idéaux nilpotents. Il faut remarquer que ces extensions contiennent comme cas particuliers les extensions par relations, introduites dans [6], qui ont été largement étudiés (Voir par exemple [54] et autres), et les extensions par relations partielles introduites dans [8]. Finalement on donnera un exemple où plusieurs algèbres sont reliées par des τ-tranches dans leurs carquois d'Auslander-Reiten.

5.5.1 Extensions ponctuelles

Premièrement on considère le cas où R est l'extension ponctuelle de A par un module X, c'est-à-dire $R = A[X]$.

Proposition 5.5.1. *Soient A une algèbre avec une τ-tranche complète Σ et $X \in$ $\mathrm{add}T_\Sigma$. Alors l'algèbre $R = A[X]$ a une τ-tranche complète $\tilde{\Sigma}$ dans mod$R$ de la forme $\tilde{T_\Sigma} = T_\Sigma \oplus P_x$, où P_x est le R-module projectif associé au sommet d'extension du carquois ordinaire de R.*

Démonstration. Fixons $T_{\tilde{\Sigma}} = T_\Sigma \oplus P_x$ et soit $\tilde{Sigma}$ le sous-carquois plein de Γ_R engendré par $T_{\tilde{\Sigma}}$.

Premièrement, notons que tout A-module projectif est aussi un R-module projectif. En outre, nous avons que $\mathrm{Hom}_A(X, \tau_A T_\Sigma) = 0$ parce que $X \in \mathrm{add}T_\Sigma$. Donc Corollary 2.6 [11] implique que $\tau_A T_\Sigma = \tau_R T_\Sigma$.

On a que $\mathrm{Hom}_R(T_{\tilde{\Sigma}}, \tau_R T_{\tilde{\Sigma}}) = \mathrm{Hom}_R(P_x, \tau_R T_\Sigma) \oplus \mathrm{Hom}_R(T_\Sigma, \tau_R T_\Sigma)$. Comme $\tau_R T_\Sigma$ est un A-module, $\mathrm{Hom}_R(P_x, \tau_R T_\Sigma) = 0$. De plus $\mathrm{Hom}_R(T_\Sigma, \tau_R T_\Sigma) = \mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, \tau_A T_\Sigma) = 0$. Donc $T_{\tilde{\Sigma}}$ est un R-module τ-rigide.

Maintenant on prouve que $\tilde{\Sigma}$ est une présection. Soit $f : M \to N$ une flèche dans Γ_R et supposons que $N \in \tilde{\Sigma}$. Si $N = P_x$ alors $M \in \tilde{\Sigma}$ parce que tout facteur direct indécomposable de $\mathrm{rad} P_x$ appartient à Σ et donc à $\tilde{\Sigma}$. Si $N \in \Sigma$ alors il existe dans Γ_A une flèche de M vers N parce que les suites presque scindées se terminant en N dans $\mathrm{mod}A$ et $\mathrm{mod}R$ coïncident. On sait que Σ est une présection dans Γ_A, donc soit $M \in \Sigma$, soit $\tau_A^{-1} M \in \Sigma$. Ainsi soit $M \in \Sigma$, soit $\tau_R^{-1} M \in \Sigma$.

Soit maintenant $f : M \to N$ une flèche de Γ_R telle que $M \in \tilde{\Sigma}$. Si N est projectif indécomposable, $N \in \tilde{\Sigma}$ lorsque $N = P_x$, et N est aussi un A-module projectif, de sorte que $N \in \Sigma$ en vertu du Lemme 2.3.14, lorsque $N \ncong P_x$. Si, supposons que N n'est pas projectif. Alors $\tau_R N \neq 0$. Donc il existe une flèche $f' : \tau_R N \to M$ dans Γ_R. On a déjà prouvé que dans ce cas que soit $\tau_R N \in \tilde{\Sigma}$, soit $\tau_R^{-1} \tau_R N \in \Sigma$. Alors, soit $\tau_R N \in \tilde{\Sigma}$, soit $N \in \Sigma$.

Ainsi $\tilde{\Sigma}$ est une présection τ-rigide. Le Lemme 5.1.5 implique que $\tilde{\Sigma}$ est une τ-tranche dans $\mathrm{mod}R$. De plus $\tilde{\Sigma}$ est une τ-tranche complète parce que $|\tilde{\Sigma}| = |\Sigma| + 1 = |A| + 1 = |B|$. □

Comme corollaire immédiat du théorème précédent, on a une nouvelle preuve du résultat suivant, qui appartient au folklore de la théorie des représentations.

Corollaire 5.5.2. *Soient A une algèbre inclinée ayant Σ comme tranche complète et $X \in \mathrm{add}\Sigma$. Alors l'algèbre $R = A[X]$ est une algèbre inclinée ayant comme tranche complète $\tilde{\Sigma} = \Sigma \oplus P_x$, où P_x est le R-module projectif associé au nouveau sommet du carquois.*

Remarque 5.5.3. Des résultats semblables à ceux de cette sous-section ont été prouvés par Oryu et Schiffler dans [50] (voir par exemple [50, Lemma 3.5]) en travaillant dans les extensions ponctuelles des algèbres inclinées amassées. En particulier ils ont prouvé que l'extension ponctuelle d'une algèbre inclinée amassée par un module projectif qui fait partie d'une tranche locale est aussi une algèbre inclinée amassée (voir [50, Theorem 3.6]).

Corollaire 5.5.4. *Soient A une algèbre avec une τ-tranche Σ et $X \in \mathrm{Fac}(\tau^{-1}\Sigma)$. Alors Σ est une τ-tranche dans $\mathrm{mod}R$, où $R = A[X]$.*

Démonstration. Premièrement, la Proposition 5.2.5 nous dit que $\mathrm{Fac}(\tau^{-1}T_\Sigma) \subset \mathrm{Fac}T_\Sigma$. Donc nous avons que $\mathrm{Hom}_A(X, \tau_A T_\Sigma) = 0$. Alors, [11, Corollary 2.6] implique que $Y \in \mathcal{C}_A$ [1] pour chaque facteur direct indécomposable Y de T_Σ. Ainsi $\mathrm{Hom}_R(T_\Sigma, \tau_R T_\Sigma) = \mathrm{Hom}_A(T_\Sigma, \tau_A T_\Sigma) = 0$, c'est-à-dire que T_Σ est un R-module τ-rigide. De plus $\mathrm{Hom}_A(X, T_\Sigma) = 0$ en vertu du Corollaire 5.2.3. Donc $Z \in \mathcal{C}_A$ pour chaque facteur direct indécomposable $Z \in \tau_A^{-1}T_\Sigma$. Donc, les suites presque scindées de $\mathrm{mod}A$ commençant ou terminant en un sommet de Σ coïncident avec les suites presque scindées correspondantes de $\mathrm{mod}R$. Ainsi Σ est une présection dans $\mathrm{mod}R$ parce qu'elle est une présection dans $\mathrm{mod}A$. Donc le Lemme 5.1.5 implique que Σ est une τ-tranche dans $\mathrm{mod}R$. $\square$

Maintenant on énonce des résultats au sujet de la co-extension ponctuelle $[X]A$ de A par le module X. Les preuves sont omises puisqu'elles sont duales de celles des deux résultats précédents.

Proposition 5.5.5. *Soit A une algèbre avec une τ-tranche complète Σ et $X \in \mathrm{add}\Sigma$. Alors l'algèbre $R = [X]A$ a une τ-tranche complète $\tilde{\Sigma}$ dans $\mathrm{mod}R$ de la forme $\tilde{\Sigma} =$*

1. voir Subsection 2.3.1

$\Sigma \oplus I_x$, *où* I_x *est le* R*-module injectif associé au nouveau sommet du carquois ordinaire de* R.

Corollaire 5.5.6. *Soit* A *une algèbre avec une* τ*-tranche* Σ *et* $X \in \mathrm{Sub}(\tau\Sigma)$. *Alors* Σ *est une* τ*-tranche dans* $\mathrm{mod}R$, *où* $R = [X]A$.

5.5.2 Extensions scindées par un idéal nilpotent

Maintenant on considère une extension scindée R de A par un A-A-bimodule Q. Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante que doit vérifier Q pour qu'une τ-tranche complète Σ dans $\mathrm{mod}A$ soit aussi une τ-tranche complète dans $\mathrm{mod}R$.

Théorème 5.5.7. *Soit* Σ *une* τ*-tranche complète dans* $\mathrm{mod}A$, Q *un* A*-*A*-bimodule et* R *une extension scindée de* A *par* Q. *Alors* Σ *est une* τ*-tranche complète dans* $\mathrm{mod}R$ *si et seulement si* $Q_A \in \mathrm{Fac}(\tau_A^{-1}T_\Sigma)$ *et* $D({}_AQ) \in \mathrm{Sub}(\tau_A T_\Sigma)$. *En outre, si* A *est une algèbre inclinée et* Σ *est une tranche complète dans* $\mathrm{mod}A$, *alors* $\mathrm{Ann}_R\Sigma = Q$.

Démonstration. Supposons que $Q_A \in$
$\mathrm{Fac}(\tau_A^{-1}\Sigma)$ et $D({}_AQ) \in \mathrm{Sub}(\tau_A\Sigma)$. Soit M un facteur direct indécomposable de Σ. Donc la Proposition **??** et son dual impliquent que $M \in \mathrm{Fac}(T_\Sigma)$ et que $M \in \mathrm{Sub}(T_\Sigma)$. Alors $\mathrm{Hom}_A(Q, \tau_A M) = 0$ et $\mathrm{Hom}_A(M, DQ) = 0$. Si M est un A-module projectif, alors $M = eA$ pour un idempotent primitif $e \in A$. Donc le A-module simple $top(eA)$ n'est pas un facteur de composition de $D({}_AQ)$. Alors $D(eQ) = D(Q)e = 0$ et cela implique que $eQ = 0$. Ainsi, M est un R-module projectif en vertu de [11, Corollary 1.4]. Si M n'est pas projectif, alors [11, Theorem 2.1] implique que les suites presque scindées se terminant en M dans $\mathrm{mod}A$ et $\mathrm{mod}R$ coïncident. Ceci implique que toute

suite presque scindée dans mod$A$ se terminant en un facteur indécomposable de T_Σ coïncide avec la suite presque scindée correspondante dans mod$R$.

Dualement, on peut prouver que les suites presque scindées dans mod$A$ commençant en un facteur directe indécomposable de T_Σ coïncident avec les suites presque scindées dans mod$R$ correspondats.

Donc on peut conclure que T_Σ est un R-module τ-inclinant et qu'il est aussi une présection dans Γ_R. Ainsi, grâce au Lemme 5.1.5, Σ est une τ-tranche complète dans mod$R$.

Dans l'autre sens, supposons que Σ est une τ-tranche complète dans mod$R$. On a que $R \cong A \oplus Q$ en tant que k-espaces vectoriels. On sait en plus que Q est un idéal bilatère de R. Si on identifie R avec $A \oplus Q$, Q est de la forme $Q = \{(0, q) : q \in Q\}$. Prouvons que $Q \subset \mathrm{Ann}_R\Sigma$. L'action de $r = (a, q) \in R$ sur un A-module arbitraire M est donnée par la formule suivant :

$$Mr = M(a, q) := Ma.$$

Alors Q est trivialement inclus dans l'annulateur $\mathrm{Ann}_R M$ pour tout A-module M. En particulier $Q \subset \mathrm{Ann}\Sigma$. Donc le Corollaire 5.2.3 nous dit que $\tau_A\Sigma \cong \tau_R\Sigma$ et $\tau_A^{-1}\Sigma \cong \tau_R^{-1}\Sigma$. Cela implique que les suites presque scindées de mod$A$ se terminant en un facteur direct indécomposable de Σ coïncide avec la correspondante dans mod$R$. Ainsi, [11, Theorem 2.1] [11, Corollary 1.4] et leurs versions duales impliquent que $Q_A \in \mathrm{Fac}(\tau_A^{-1}\Sigma)$ et $D({}_AQ) \in \mathrm{Sub}(\tau_A\Sigma)$.

Finalement, si A est une algèbre inclinée et Σ est une tranche complète dans mod$A$, on a que Σ est un module fidèle. Donc $\mathrm{Ann}_R\Sigma = Q$. $\square$

Comme cas particulier du résultat précédent on obtient une généralisation d'un résultat de Assem, Bustamante, Dionne, Le Meur et Smith qui se trouve dans [8], où ils ont introduit les extensions par relations partielles et ils ont étudié comment les tranches complètes des algèbres inclinées se comportent sous cette extension. Étant donnée une algèbre triangulaire C telle que $dim.gl.C \leq 2$, on notera $E = Ext_C^2(DC, C)$.

Corollaire 5.5.8. *Soient C une algèbre triangulaire telle que $dim.gl.C \leq 2$, Σ une τ-tranche complète dans* mod$C$ *et $\tilde{E} \in \mathrm{add}_{C\text{-}C}E$. Alors Σ est une τ-tranche complète dans mod$\tilde{C}$, où $\tilde{C}$ est l'extension triviale de C par $\tilde{E}$.*

Démonstration. Le Théorème 5.5.7 nous dit qu'il suffit de prouver que $\tilde{E}_C \in \mathrm{Fac}(\tau_C^{-1}\Sigma)$ et $D(\tilde{E})_C \in \mathrm{Sub}(\tau_C T_\Sigma)$. On va prouver que $\tilde{E}_C \in \mathrm{Fac}(\tau^{-1}T_\Sigma)$, l'autre affirmation étant duale.

Il est prouvé dans [54, Proposition 4.1] que $E_C \cong \tau_C^{-1}\Omega^{-1}C_C$, où $\Omega^{-1}C_C$ est la cosyzygie de C en tant que C-module à droite. Soit N un facteur direct indécomposable non-injectif de $\Omega^{-1}C$. Alors il existe un module injectif indécomposable I_N tel que $\mathrm{Hom}_C(I_N, N) \neq 0$. En plus, il existe un facteur direct indécomposable L de T_Σ tel que $\mathrm{Hom}_C(L, I_N) \neq 0$. Alors il existe un chemin $L \to I_N \to N \to * \to \tau_C^{-1}N$ dans mod$C$. Donc $\tau_C^{-1}N$ est un successeur propre de Σ. Ainsi $E_C \in \mathrm{Fac}(\tau_C^{-1}\Sigma)$. Ceci achève la preuve. $\square$

5.5.3 Exemple

Nous finissons avec un exemple qui illustre quelques résultats prouvés dans ce chapitre.

Exemple 5.5.9. Considérons l'algèbre inclinée amassée $\tilde{A}$ donnée par le carquois

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dl, "\beta"] \\
1 \arrow[urr, "\alpha"] \arrow[drr, "\omega"'] & 2 \arrow[l, "\gamma"] & \\
 & & 4 \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

lié par l'idéal $I = \langle \alpha\beta - \omega\delta, \beta\gamma, \delta\gamma, \gamma\omega, \gamma\alpha \rangle$. Comme on peut voir dans la Figure 5.4, le module $\Sigma = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus {\scriptstyle 2} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ est une τ-tranche complète dans mod$\tilde{A}$. Son annulateur est $Ann_{\tilde{A}}\Sigma = \langle \alpha, \omega \rangle$. Prenons l'idéal $I' = \langle \omega \rangle$, contenu dans $Ann_{\tilde{A}}\Sigma$ et considérons l'algèbre quotient $A = \tilde{A}/I'$. Alors A est l'algèbre des chemins du carquois

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dl, "\beta"] \\
1 \arrow[urr, "\alpha"] & 2 \arrow[l, "\gamma"] & \\
 & & 4 \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

lié par son radical au carré. Donc, comme on a prouvé dans le Théorème 5.2.7, $\Sigma = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus {\scriptstyle 2} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ est une τ-tranche complète dans mod$A$. Voir la Figure 5.5.

On peut voir que A est égale à l'extension ponctuelle $A'[{\scriptstyle 2}]$, où A' est donnée par le carquois

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dl, "\beta"] \\
1 \arrow[urr, "\alpha"] & 2 \arrow[l, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

avec radical carré nul et ${\scriptstyle 2}$ est le A'-module simple associé au sommet 2. Voir son carquois d'Auslander-Reiten dans la Figure 5.6. Alors, dans ce cas, ${\scriptstyle 2}$ appartient à $add\Sigma_1$, où $\Sigma_1 = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus {\scriptstyle 2} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$. De plus, $\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ est le module projectif indécomposable associé au sommet d'extension et $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$, comme prouvé dans la Proposition 5.5.1.

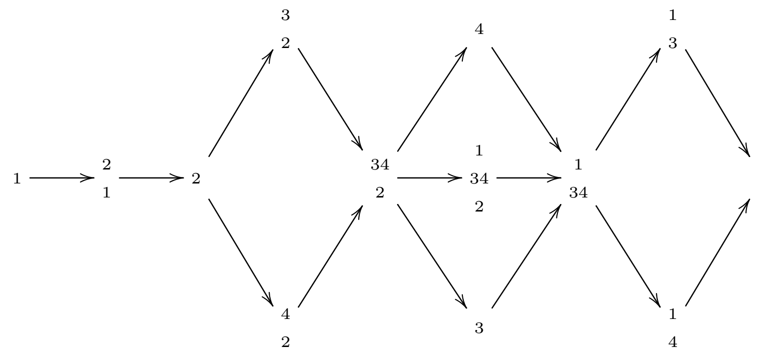

Figure 5.4 –

En outre, si on note $\Sigma_2 = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$, on a que $\begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix} \in Fac_{A'}(\tau_{A'}^{-1}\Sigma_2)$. Ici on peut voir que Σ_2 est une τ-tranche complète dans modA' et une τ-tranche dans mod$A$, comme prévu en vertu du Corollaire 5.5.4.

Finalement considérons l'algèbre $C = A/\langle\alpha\rangle$. L'idéal nilpotent $\mathrm{Ann}_A\Sigma$ de A a une structure de C-C-bimodule. De plus A est l'extension scindée de C par $\mathrm{Ann}_A\Sigma$. On peut faire le calcul et voir que, en tant que C-module, $(Ann_A\Sigma)_C = \begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix} \in Fac_C(\tau_C^{-1}\Sigma)$ et
$D(_C(\mathrm{Ann}_A\Sigma)) = \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \in Sub\tau_C\Sigma$. Ainsi, le Théorème 5.5.7 nous dit que la τ-tranche complète Σ dans mod$A$ est induite par la tranche complète Σ de l'algèbre inclinée C.

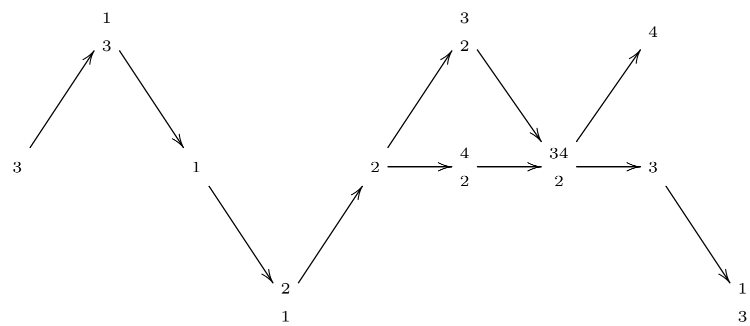

Figure 5.5 –

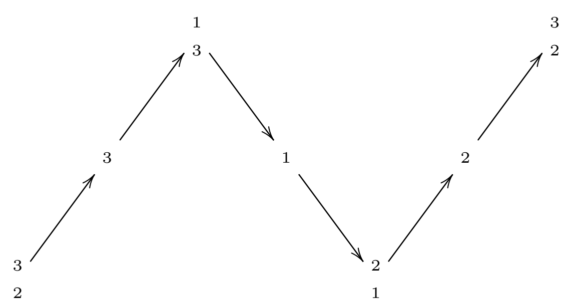

Figure 5.6 –

Chapitre 6

Groupe de Grothendieck, vecteurs dimension et g-vecteurs

Comme dans toute la thèse. Quand on dit que A est une **algèbre**, on veut dire que A est une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos k. Dans le même sens, on dit que M est un A**-module** si M est un module de type fini sur l'algèbre A.

Soit A une algèbre. Dans cette chapitre on associera à chaque A-module M deux vecteurs à coordonnées entières : le vecteur dimension $[M]$ de M et le g-vecteur g^M de M. Ces deux vecteurs nous permettront d'utiliser des outils d'algèbre linéaire pour obtenir de l'information sur la catégorie de modules mod$A$.

6.1 Groupe de Grothendieck et vecteurs dimension

Dans cette section on veut introduire le groupe de Grothendieck $K_0(\mathcal{A})$ d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ ainsi que les vecteurs dimension des objets de $\mathcal{A}$. On commence avec la définition du groupe de Grothendieck.

Définition 6.1.1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne petite. Le **groupe de Grothendieck** $K_0(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est le groupe abélien $K_0(\mathcal{A}) = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, où $\mathcal{F}$ est le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble des classes d'isomorphisme $\tilde{M}$ des objets M de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}'$ est le sous-groupe de $\mathcal{F}$ engendré par les éléments $\tilde{M} - \tilde{L} - \tilde{N}$ correspondant à toutes les suites exactes courtes $0 \to L \to M \to N \to 0$ dans $\mathcal{A}$.

Définition 6.1.2. Une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est dite **avec longueur** si le théorème de Jordan-Hölder est vérifié dans cette catégorie.

Dès maintenant, sauf mention contraire, chaque fois que l'on dira que $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, on suppose que $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne avec longueur avec un petit squelette.

Maintenant on introduit la notation que l'on utilisera dans le reste de la thèse. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne ayant t objets simples non-isomorphes. On notera $S(1), \ldots, S(t)$ une énumération de ces modules simples à isomorphisme près. En outre, si $\mathcal{A} = \mathrm{mod}A$ pour une algèbre A, on notera $P(i)$ et $I(i)$ la couverture projective et l'enveloppe injective de $S(i)$, respectivement. De plus, si $\mathcal{A} = \mathrm{mod}A$, le groupe de Grothendieck de $\mathrm{mod}A$ sera noté $K_0(A)$

Dans le restant de la thèse, on s'intéresse souvent aux dimensions de certains espaces de morphismes. On fixe la notation suivante. Soient M et N deux objets de $\mathcal{A}$, alors $\dim_k(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N))$ sera notée $hom(M, N)$.

Proposition 6.1.3. *Soient A une algèbre et M un A-module. Alors les vecteurs à coordonnées entières*

$$[hom(P(1), M), hom(P(2), M), \ldots, hom(P(t), M)]$$

et

$$[hom(M, I(1)), hom(M, I(2)), \ldots, hom(I(t), M]$$

sont égaux.

On appelle ce vecteur le **vecteur dimension de** M et on le note $\boldsymbol{dim}$M.

Le théorème de Jordan-Hölder nous permet de donner une description précise de la structure du groupe de Grothendieck comme suit.

Théorème 6.1.4. *[10, Theorem III.3.5] Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Alors le groupe de Grothendieck $K_0(\mathcal{A})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^t$, où t est le nombre d'objets simples non-isomorphes de $\mathcal{A}$ et l'ensemble des classes des objets simples non-isomorphes forment une base de $K_0(\mathcal{A})$. En outre, si A est une algèbre, le morphisme $\Phi : K_0(A) \to \mathbb{Z}^t$ défini par $\Phi([M]) = \mathbf{dim}M$ est un isomorphisme de groupes.*

Si A est une algèbre, le théorème précédent nous permet d'identifier la classe $[M]$ dans le groupe de Grothendieck d'un A-module M avec son vecteur dimension $\mathbf{dim}M$. Pour simplifier la notation, pour le reste de la thèse on notera donc aussi $[M]$ le vecteur dimension de M.

Remarque 6.1.5. Soient M et N deux A-modules indécomposables et supposons que $[M] = [N]$ alors ceci n'implique pas que $M \cong N$.

Par exemple prenons l'algèbre de Kronecker $A = k(\ 1 \rightrightarrows 2\ )$ et considérons les modules $M = \ k \overset{1}{\underset{\lambda}{\rightrightarrows}} k$ et $N = \ k \overset{1}{\underset{\mu}{\rightrightarrows}} k$ où $\lambda \neq \mu$. Dans ce cas, $[M] = [N] = [1, 1]$ mais M n'est pas isomorphe à N.

6.2 g-vecteurs

Étant donné un A-module M, on va lui associer un deuxième vecteur à coordonnées entières que l'on appelle le g-vecteur de M et que l'on le note g^M. Sa définition est la suivante.

Définition 6.2.1. Soit A une algèbre et $A = P(1) \oplus P(2) \oplus \cdots \oplus P(t)$ sa décomposition en somme directe de facteurs indécomposables en tant que A-module à droite. Le g-vecteur $g^{P(i)}$ de $P(i)$ est e_i, le i-ème élément de la base canonique de $\mathbb{Z}^t$. Plus généralement, soit M un A-module et soit $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ une présentation projective minimale de M. Si $P_0 = \bigoplus_{i=1}^t P(i)^{c_i}$ et $P_1 = \bigoplus_{i=1}^t P(i)^{c'_i}$, alors le g-vecteur de M est

$$g^M = g^{P_0} - g^{P_1} = (c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \ldots, c_t - c'_t).$$

Remarque 6.2.2. Notons que le g-vecteur g^M d'un A-module M est bien défini car la présentation projective minimale d'un A-module est unique à isomorphisme près.

Supposons que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension t et considérons $\langle -, - \rangle : V \times V \to k$ le produit scalaire défini par

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{t} v_i w_i$$

pour tout $v = (v_1, \ldots, v_t)$ et $w = (w_1, \ldots, w_t)$ dans V. En algèbre linéaire, un résultat important est l'existence d'un anti-isomorphisme $\Phi : V \to V^*$ d'un k-espace vectoriel V avec son dual V^*, défini par $\Phi(v) = \langle v, - \rangle$.

Dans cet écrit on explore la relation des g-vecteurs avec les vecteurs dimension des A-modules. Dans le Chapitre 8 on établi des résultats qui suggèrent que l'on peut interpréter les g-vecteurs comme espace dual au groupe de Grothendieck de l'algèbre

A. L'outil principal de la démonstration de ces résultats est le théorème suivant, montré par Auslander et Reiten dans [13].

Théorème 6.2.3. *[13, Theorem 1.4 (a)] Soient M et N deux A-modules. Alors*

$$\langle g^M, [N] \rangle = hom(M, N) - hom(N, \tau M).$$

Pour nous, il sera particulièrement intéressant de considérer le cas où l'on a une paire τ-rigide (M, P).

Corollaire 6.2.4. *Soient (M, P) une paire τ-rigide et N un A-module arbitraire. Alors*

$$\langle g^M - g^P, [N] \rangle = hom(M, N) - hom(N, \tau M) - hom(P, N).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\langle -, - \rangle$ est bilinéaire, d'appliquer le Théorème 6.2.3 puis de se rappeler que $\tau P = 0$. □

En outre, les g-vecteurs des modules τ-rigides et des paires τ-inclinantes ont des propriétés que l'on va exploiter dans le restant de cette thèse. Elles sont les suivantes.

Théorème 6.2.5. *[1, Theorem 5.5] La fonctions $M \mapsto g^M$ induit une injection de l'ensemble de paires τ-rigides dans $\mathbb{Z}$.*

Théorème 6.2.6. *[1, Theorem 5.1] Soit (M, P) une paire τ-inclinante telle que M et P sont des modules sobres et sa factorisation en somme directe d'indécomposables est $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ et $P = \bigoplus_{j=k+1}^{t} P_j$. Alors l'ensemble*

$$\{g^{M_1}, \dots, g^{M_k}, -g^{P_{k+1}}, \dots, -g^{P_t}\}$$

est une base de $\mathbb{Z}^t$.

Chapitre 7

Conditions de stabilité à la Rudakov et classes de torsion

La structure de ce chapitre est la suivante. Dans la Section 7.1 nous introduirons les conditions de stabilité définies par Rudakov dans [52], ainsi que certaines de leurs propriétés. Dans un deuxième temps, la Section 7.2 portera sur l'étude des fonctions de stabilité induisant des classes de torsion. Finalement, dans la Section 7.3, nous introduirons la notion de suite verte maximale dans une catégorie abélienne. Ceci nous permettra de démontrer le Théorème 7.3.6, lequel est une caractérisation des fonctions de stabilité qui induisent des suites vertes maximales.

7.1 Conditions de stabilité à la Rudakov

Cette section est dédiée aux conditions de stabilité dans les catégories abéliennes introduites par Rudakov et à la description de la filtration qu'elles induisent sur chaque objet de cette catégorie. Cette filtration est dite de Harder-Narasimhan.

7.1.1 Définition

Pour donner la définition de structure de stabilité, on rappelle d'abord qu'un ensemble est dit *pré-ordonné* s'il est équipé d'une relation réflexive et transitive. En particulier si on a une fonction $\phi : S \to T$, où $(T, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné, alors ϕ induit un pré-ordre $\leq_\phi$ dans S comme suit : si $x, y \in S$ alors $x \leq_\phi y$ si $\phi(x) \leq \phi(y)$.

Définition 7.1.1. [52, Definition 1.1] Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne petite, $(\mathcal{P}, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et $\phi : \mathrm{Obj}(\mathcal{A}^*) \to \mathcal{P}$ une fonction telle que $\phi(X) = \phi(Y)$ si X est isomorphe à Y. Alors le pré-ordre induit par ϕ est dit **structure de stabilité** si pour chaque suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ d'objets non nuls de $\mathcal{A}$ la **propriété de bascule** est satisfaite. C'est-à-dire que exactement une des trois conditions suivantes (voir Figure 7.1) est vérifiée :

$$\begin{array}{ll} \text{soit} & \phi(L) < \phi(M) < \phi(N), \\ \text{ou} & \phi(L) > \phi(M) > \phi(N), \\ \text{ou} & \phi(L) = \phi(M) = \phi(N). \end{array}$$

Lorsque c'est le cas, on dit que ϕ est une **fonction de stabilité**, et $\phi(X)$ est appelée la **phase** de X pour tout objet non nul X de $\mathcal{A}$.

Remarque 7.1.2. Si ϕ est une fonction de stabilité, alors $\phi(M)$ n'est pas définie si M est un objet nul de $\mathcal{A}$. En outre, l'existence des sommes directes dans $\mathcal{A}$ implique que $\mathrm{Im}(\phi)$ est un ensemble totalement ordonné. Désormais on suppose donc, sans perte de généralité, que $\mathcal{P}$ est totalement ordonné.

Jusqu'à la fin du chapitre, ϕ désignera une fonction de stabilité. On définit les objets ϕ-stables.

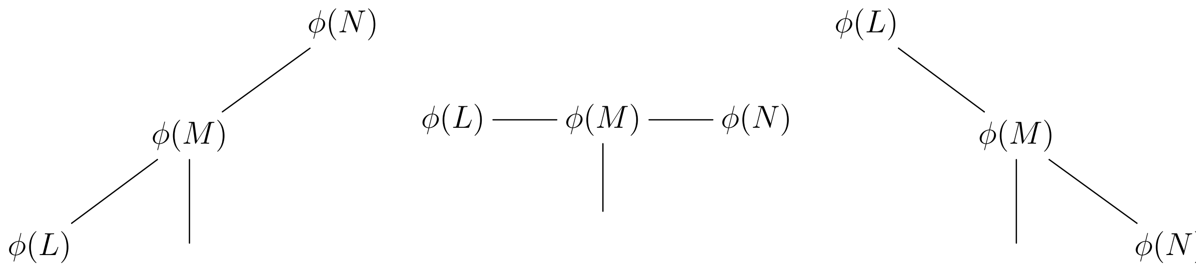

Figure 7.1 – Propriété de bascule.

Définition 7.1.3. [52, Definition 1.5 and 1.6], Un objet non nul M de $\mathcal{A}$ est dit **ϕ-stable** (ou **ϕ-semi-stable**) si pour chaque sous-objet $L \subset M$ non trivial on a que $\phi(L) < \phi(M)$ (ou $\phi(L) \leq \phi(M)$, respectivement).

En général on dit que chaque fonction de stabilité ϕ induit des **conditions de stabilité** sur les objets de $\mathcal{A}$.

Remarque 7.1.4. Notez que, grâce à la propriété de bascule, on peut définir les objets ϕ-stables (ϕ-semi-stables) à partir des objets quotients au lieu des sous-objets.

Maintenant nous donnons deux exemples des fonctions de stabilité importantes. Le premier considère les conditions de stabilité que Bridgeland a introduit pour les catégories triangulées dans [20], lesquelles sont inspirées de la physique. Le deuxième est un exemple inspiré de l'algèbre linéaire qui sera étudié en détail dans le prochain chapitre.

Exemple 7.1.5. [20, Definition 2.1] Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et soit $Z : K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ un homomorphisme de groupes tel que pour chaque objet non nul M de $\mathcal{A}$ son image $Z([M])$ par Z appartient au demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{r \cdot \exp(i\pi\phi) : r > 0 \text{ et } 0 \leq \phi < 1\}$.

Étant donnée une telle fonction $Z : K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$, on définit $\phi_Z : \mathrm{Obj}(\mathcal{A}^*) \to [0, 1[$ par

$$\phi_Z(M) = (1/\pi)\mathrm{arg}Z(M).$$

On peut voir que ϕ_Z est une fonction de stabilité.

Exemple 7.1.6. Soient A une algèbre et v un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^t$. Alors la fonction $\phi_v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi_v(M) = \langle v, [M] \rangle = \sum_{i=1}^{t} v_i[M]_i$$

est une fonction de stabilité. Ces fonctions de stabilité seront étudies dans le prochain chapitre.

Rudakov commença ses travaux sur les conditions de stabilité pour généraliser les conditions de stabilité introduites par King pour les représentations d'algèbres, dont on discutera dans le prochain chapitre. Dans cet esprit, on montre la proposition suivante qui généralise un des résultats parus dans [44].

Proposition 7.1.7. *Soit $p \in \mathcal{P}$. Alors la sous-catégorie pleine*

$$\mathcal{A}_p = \{0\} \cup \{M \in \mathcal{A} : M \text{ est } \phi\text{-semi-stable et } \phi(M) = p\}$$

est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{A}$.

Démonstration. D'abord, la propriété bascule implique que $\mathcal{A}_p$ est additive.

Il suffit de montrer que $\mathcal{A}_p$ est stable par les noyaux et les conoyaux. Soit $f : M \to N$ un morphisme dans $\mathcal{A}_p$.

Si f est le morphisme nul, la preuve est immédiate.

Si f est un épimorphisme, on a la suite exacte courte $0 \to \ker f \to M \to N \to 0$. Alors $\phi(\ker f) = p$ car ϕ est une fonction de stabilité et $\phi(M) = \phi(N) = p$. Ainsi, Ker $f \in \mathcal{A}_p$. Si f est un monomorphisme, la preuve de ce que Coker$f \in \mathcal{A}_p$ est duale.

Finalement, prenons un morphisme non nul $f : M \to N$ qui n'est ni un monomorphisme ni un épimorphisme et considérons les suites exactes courtes suivantes

$$0 \to \ker f \to M \to \mathrm{im} f \to 0$$

$$0 \to \mathrm{im} f \to N \to \mathrm{coker} f \to 0.$$

Il est clair que dans ce cas tous les objets sont non nuls. Maintenant, la semi-stabilité de M implique que $\phi(\mathrm{im} f) \geq \phi(M) = p$ et, en même temps, la semi-stabilité de N implique que $\phi(\mathrm{im} f) \leq \phi(N) = p$. Ainsi $\phi(\mathrm{im} f) = p$. Donc $\phi(\ker f) = p$ et $\phi(\mathrm{coker} f) = p$ car ϕ est une fonction de stabilité.

Il nous reste prouver que $\ker f$ et coker$f$ sont des objets ϕ-semi-stables. Pour faire cela, il suffit de remarquer que chaque sous-objet L de $\ker f$ est aussi un sous-objet de M. Donc $\phi(L) \leq \phi(M) = \phi(\ker f)$. Ainsi $\ker f$ est un objet ϕ-semi-stable. De façon duale on prouve que coker$f$ est ϕ-semi-stable. Ceci achève la preuve. $\square$

Remarque 7.1.8. Il est facile à voir que les objets ϕ-stables S tels que $\phi(S) = p$ coïncident avec les objet simples de $\mathcal{A}_p$.

En analogie avec la Proposition 7.1.7, nous définissons les sous-catégories pleines de $\mathcal{A}$ suivantes :

— $\mathcal{A}_{\geq p} = \{0\} \cup \{M \in \mathcal{A} : M$ est ϕ-semi-stable et $\phi(M) \geq p\}$;

— $\mathcal{A}_{\leq p} = \{0\} \cup \{M \in \mathcal{A} : M$ est ϕ-semi-stable et $\phi(M) \leq p\}$;

— $\mathcal{A}_{<p} = \{0\} \cup \{M \in \mathcal{A} : M$ est ϕ-semi-stable et $\phi(M) < p\}$;

— $\mathcal{A}_{>p} = \{0\} \cup \{M \in \mathcal{A} : M \text{ est } \phi\text{-semi-stable et } \phi(M) > p\}$.

Ces catégories ne sont pas abéliennes en général. On étudiera leurs propriétés par la suite.

Le théorème suivant, paru dans [52], implique que les morphismes entre les objets ϕ-semi-stables respectent l'ordre induit par ϕ, c'est-à-dire, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$ si M et N sont ϕ-semi-stables et $\phi(M) > \phi(N)$.

Théorème 7.1.9. *[52, Theorem 1] Soient M et N des objets ϕ-semi-stables tels que $\phi(M) \geq \phi(N)$ et $f : M \to N$ un morphisme non nul dans $\mathcal{A}$. Alors*

(a) $\phi(M) = \phi(N)$;

(b) Si N est ϕ-stable, alors f est un épimorphisme ;

(c) If M est ϕ-stable, alors f est un monomorphisme.

Comme conséquence immédiate du théorème précédent on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 7.1.10. *Soient M et N deux objets ϕ-stables non isomorphes tels que $\phi(M) = \phi(N)$. Alors* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$. □

On dit que un objet X d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est une **brique** si $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) \cong k$.

Remarque 7.1.11. Comme Rudakov observa dans [52], le Théorème 7.1.9 implique que les objets ϕ-stables sont des briques. Ceci implique en particulier que tout objet ϕ-stable est indécomposable. En fait on peut voir que les objets ϕ-stables sont toujours indécomposables, pour n'importe quelle catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

7.1.2 Filtration de Harder-Narasimhan

Dans la définition suivante on prend la terminologie utilisée dans [20], mais il faut remarquer que ces concepts furent déjà étudiés dans [52].

Définition 7.1.12. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec longueur et soit $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ non nul.

(a) Une paire (N, p) consistant en un objet $N \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ non nul et un épimorphisme $p : M \to N$ est appelée un **quotient déstabilisateur maximal (QDM)** de M si $\phi(M) \geq \phi(N)$ et, pour tout autre épimorphisme $p' : M \to N'$, on a que $\phi(N') \geq \phi(N)$, et, en outre, si $\phi(N) = \phi(N')$, alors le morphisme p' se factorise par p.

(b) Dualement, une paire (L, i) consistant en un objet $L \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ non nul et un monomorphisme $i : L \to M$ est appelée un **sous-objet déstabilisateur minimal (SDM)** de M si $\phi(M) \leq \phi(L)$ et, pour tout autre monomorphisme $i' : L' \to L$, on a que $\phi(L') \leq \phi(L)$, et, en outre, si $\phi(L) = \phi(L')$ alors le morphisme i' se factorise par i.

Remarque 7.1.13. Soit M un objet non nul de $\mathcal{A}$ et supposons qu'il existe un quotient déstabilisateur maximal (N, p). Alors, la définition d'objet déstabilisateur maximal implique que N n'est pas isomorphe à l'objet nul.

Par abus de notation, on note N à la place de (N, p) lorsque ce dernier es un quotient déstabilisateur maximal.

Lemme 7.1.14. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $\phi : \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité et M un objet non nul de $\mathcal{A}$.*

(a) *S'il existe un quotient déstabilisateur maximal* (N, p) *par* M*, alors il est* ϕ*-semi-stable et unique à isomorphisme près ;*

(b) *S'il existe un sous-objet déstabilisateur minimal* (L, i) *pra* M*, alors il est* ϕ*-semi-stable et unique à isomorphisme près.*

Démonstration. On va a prouver seulement (a) puisque la preuve de (b) est duale.

Supposons qu'il existe un quotient déstabilisateur maximal (N, p) par M, soit $\tilde{p} : N \to \tilde{N}$ un épimorphisme, où $\tilde{N}$ est un objet non nul. Donc la composition $\tilde{p}p : M \to \tilde{N}$ est aussi un épimorphisme et $\tilde{N}$ est un quotient de M. Donc, $\phi(\tilde{N}) \geq \phi(N)$ en vertu de la définition du quotient déstabilisateur maximal. Conséquemment N est ϕ-semi-stable.

Maintenant, supposons que (N', p') est un autre quotient déstabilisateur maximal de M. Alors il suit de la définition des quotient déstabilisateur maximaux que $\phi(N) = \phi(N')$. En outre, la Définition 7.1.12 nous assure l'existence de deux morphismes $f : N \to N'$ et $f' : N' \to N$ tels que $p = f'p'$ et $p' = fp$. Donc $p = f'p' = f'fp$. Ainsi la composition $f'f$ est le morphisme identité de N parce que p est un épimorphisme. On prouve de façon analogue que ff' est l'identité de N'. Donc N et N' sont isomorphes. Ceci achève la preuve. □

Comme le Lemme 7.1.14 nous assure que, si ils existent, les quotients déstabilisateurs maximaux (respectivement les sous-objets déstabilisateurs minimaux) d'un objet non nul $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ sont uniques à isomorphisme près, on notera (N, p) «le» quotient déstabilisateur maximal de M et (L, i) «le» sous-objet déstabilisateur minimal de M.

Le prochain théorème/définition, prouvé dans [52], nous montre que, étant donné une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ et une fonction de stabilité ϕ, on peut trouver pour chaque objet $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ une filtration de M qui respecte l'ordre induit par ϕ. Cette filtration est appelée la *filtration de Harder-Narasimhan* en l'honneur d'un résultat d'algèbre commutative prouvé par Harder et Narasimhan dans [41]. En outre, ce résultat implique en particulier que tout objet admet un quotient déstabilisateur maximal et un sous-objet déstabilisateur minimal. La démonstration du prochain théorème est omise dans cette thèse.

Théorème 7.1.15. *[52, Theorem 2, Proposition 1.13] Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $\phi : \mathrm{Obj}\mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité et M un objet non nul dans $\mathcal{A}$. Alors M admet, à isomorphisme près, une unique* ***filtration de Harder-Narasimhan****, c'est-à-dire, une filtration*

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

telle que les quotients $F_i = M_i/M_{i-1}$ sont ϕ-semi-stables et que $\phi(F_n) < \phi(F_{n-1}) < \cdots < \phi(F_2) < \phi(F_1)$. En outre, $F_1 = M_1$ et $F_n = M_n/M_{n-1}$ sont le sous-objet déstabilisateur minimal et le quotient déstabilisateur maximal de M, respectivement.

Le résultat suivant est aussi paru dans [52]. La démonstration est elle aussi omise.

Théorème 7.1.16. *[52, Theorem 3] Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $\phi : \mathrm{Obj}\mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité et M un objet ϕ-semi-stable. Alors il existe une filtration*

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

telle que les quotients $G_i = M_i/M_{i-1}$ sont ϕ-stables et $\phi(M) = \phi(G_n) = \cdots = \phi(G_2) = \phi(G_1)$. En outre, l'ensemble des facteurs de composition $\{G_i : 1 \leq i \leq n\}$ est unique à isomorphisme et près.

Exemple 7.1.17. Considérons l'algèbre de chemins $A = k(\ 1 \longrightarrow 2\ )$ et prenons la catégorie mod$A$ de A-modules de type fini. Considérons les fonctions ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 ayant pour images

$$\begin{array}{lll}
\phi_1 : \mathrm{mod}A \to \mathbb{Z} & \phi_2 : \mathrm{mod}A \to \mathbb{Z} & \phi_3 : \mathrm{mod}A \to \mathbb{Z} \\
\phi_1(\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}) = -1 & \phi_2(\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}) = 0 & \phi_3(\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}) = 1 \\
\phi_1(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}) = 0 & \phi_2(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}) = 1 & \phi_3(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}) = 0 \\
\phi_1(\begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix}) = 1 & \phi_2(\begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix}) = -1 & \phi_3(\begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix}) = -1
\end{array}$$

L'image de tout autre A-module est définie par le biais de $\phi(M) = \phi(N) + \phi(L)$ si $M = N \oplus L$.

Premièrement, on voit que ϕ_2 n'est pas une fonction de stabilité car la propriété de bascule n'est pas respectée pour la suite exacte courte $0 \to \begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \to 0$.

D'autre part, notons que la longueur des filtrations de Harder-Narasimhan d'un module dépend de la fonction de stabilité. Par exemple, si on prend le module $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, sa filtration de Harder-Narasimhan par rapport à ϕ_1 est $0 \subsetneq \begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix} \subsetneq \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$. Cependant, sa filtration de Harder-Narasimhan par rapport à ϕ_3 est $0 \subsetneq \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, parce que $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ est lui même un A-module ϕ_3-stable.

7.2 Paires de torsion

Dans cette section on prouve comment une fonction de stabilité $\phi : \mathrm{Obj}\mathcal{A} \to \mathcal{P}$ induit une paire de torsion $(\mathcal{T}_p, \mathcal{F}_p)$ dans $\mathcal{A}$ pour chaque $p \in \mathcal{P}$, où

$$\mathcal{T}_p = \{0\} \cup \{M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \mid M \neq 0 \text{ et } \phi(M') \geq p, \text{ où } M' \text{ est le QDM de } M\}$$

$$\mathcal{F}_p = \{0\} \cup \{M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \mid M \neq 0 \text{ et } \phi(M'') < p, \text{ où } M'' \text{ est le SDM de } M\}$$

Nous débutons la section avec la proposition suivante, où on montre que $\mathcal{T}_p$ est une classe de torsion et, en outre, on donne plusieurs définitions équivalentes de $\mathcal{T}_p$.

Proposition 7.2.1. *Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité et $\mathcal{T}_p = \{0\} \cup \{M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \mid M \neq 0$ et $\phi(M') \geq p$, où M' est le quotient déstabilisateur maximal de $M\}$. Alors $\mathcal{T}_p$ est une classe de torsion. En outre :*

- $\mathcal{T}_p = \mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{\geq p})$;
- $\mathcal{T}_p = \mathrm{Filt}(\mathrm{Fac}\mathcal{A}_{\geq p})$;
- $\mathcal{T}_p = \{M \in \mathcal{A} : \phi(N) \geq p$ pour tout quotient non nul N de $M\}$.

Démonstration. On commence pour montrer que $\mathcal{T}_p$ est une classe de torsion. Pour faire cela on doit montrer que $\mathcal{T}_p$ est stable pour les extensions et les quotients.

D'abord on prouve que $\mathcal{T}_p$ est stable pour les extensions. Supposons que

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

est une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$ avec $L, N \in \mathcal{T}_p$ et (M', p_M) le quotient déstabilisateur maximal de M. Alors nous pouvons construire le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_M"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{im}(p_M f) \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & M' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & \mathrm{coker} f' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Soient (L', p_L) et (N', p_N) les quotients déstabilisateurs maximaux de L et N, respectivement. En vertu de la définition de quotient déstabilisateur maximal on a que

$\phi(\mathrm{im}(p_M f)) \geq \phi(L') \geq p$ et $\phi(\mathrm{coker} f') \geq \phi(N') \geq p$. Donc la propriété de bascule implique que $\phi(M') \geq p$. Ainsi $\mathcal{T}_p$ est stable pour les extensions.

Pour montrer que $\mathcal{T}_p$ est stable pour les quotients, prenons $M \in \mathcal{T}_p$ et soit N un quotient de M. Soient M' et N' les quotients déstabilisateurs maximaux de M et N, respectivement. Alors, il est facile de voir que N' est un quotient de M. Donc la définition de quotient déstabilisateur maximal implique que $\phi(N') \geq \phi(M') \geq p$. Ainsi, $\mathcal{T}_p$ est stable pour les quotients.

Alors, comme $\mathcal{T}_p$ est stable par quotients et extensions, c'est une classe de torsion dans $\mathcal{A}$.

Dans un deuxième temps, on montre que $\mathcal{T}_p = \mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{\geq p}) = \mathrm{Filt}(\mathrm{Fac}\mathcal{A}_{\geq p})$. Il est immédiat que $\mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{\geq p}) \subseteq \mathrm{Filt}(\mathrm{Fac}\mathcal{A}_{\geq p})$. En outre, la Proposition [32, Proposition 3.3] implique que $\mathrm{Filt}(\mathrm{Fac}\mathcal{A}_{\geq p})$ est la plus petite classe de torsion contenant $\mathcal{A}_{\geq p}$ et, étant donné que $\mathcal{A}_{\geq p} \subseteq \mathcal{T}_p$, nous avons que $\mathrm{Filt}(\mathrm{Fac}\mathcal{A}_{\geq p}) \subseteq \mathcal{T}_p$. Il nous reste à prouver que $\mathcal{T}_p \subseteq \mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{\geq p})$. Soit $M \in \mathcal{T}_p$ et M' son quotient déstabilisateur maximal. Alors $\phi(M') \geq p$ en vertu de la définition de $\mathcal{T}_p$. Donc on peut construire la filtration de Harder-Narasimhan de M puis le Théorème 7.1.15 implique que $M \in \mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{\geq p})$.

Finalement on prouve que $\mathcal{T}_p = \{M \in \mathcal{A} : \phi(N) \geq p \textit{ pour tout quotient } N \textit{ de } M\}$. Soient $M \in \mathcal{T}_p$, M' son quotient déstabilisateur maximal et N un quotient non nul de M. Alors $\phi(N) \geq \phi(M') \geq p$ pour tout quotient N de M en vertu de la Définition 7.1.12. Ainsi $\mathcal{T}_p \subseteq \{M \in \mathcal{A} : \phi(N) \geq p$ pour tout quotient N non nul de $M\}$. L'autre inclusion est immédiate. Ceci achève la preuve. □

Si on change à la vision duale des arguments utilisés dans la preuve précédente, on peut prouver la proposition suivante.

Proposition 7.2.2. *Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité et soit* $\mathcal{F}_p = \{0\} \cup \{M \in$

$\mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \mid M \neq 0 \phi(M') < p$, où M' est le sous-objet déstabilisateur minimal de $M\}$. *Alors $\mathcal{F}_p$ est une classe sans torsion. En outre :*

— $\mathcal{F}_p = \mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{<p})$ *;*

— $\mathcal{F}_p = \mathrm{Filt}(\mathrm{Fac}\mathcal{A}_{<p})$ *;*

— $\mathcal{F}_p = \{M \in \mathcal{A} : \phi(N) < p$ pour tout sous-objet non nul N de $M\}$.

On termine cette section en prouvant que $(\mathcal{T}_p, \mathcal{F}_p)$ est une paire de torsion.

Proposition 7.2.3. *Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité et $p \in \mathcal{P}$. Alors $(\mathcal{T}_p, \mathcal{F}_p)$ est une paire de torsion dans $\mathcal{A}$.*

Démonstration. D'abord on prouve que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}_p, \mathcal{F}_p) = 0$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$, où $M \in \mathcal{T}_p$ et $N \in \mathcal{F}_p$ sont non nuls. Prenons M' le quotient déstabilisateur maximal de M et N'' le sous-objet déstabilisateur minimal de N. Alors est immédiat que $\mathrm{im} f$ est un quotient de M et qu'il est un sous-objet de N. Supposons que $f \neq 0$. Alors les définitions de quotient déstabilisateur maximal et de sous-objet déstabilisateur minimal impliquent que $\phi(\mathrm{im} f) \geq \phi(M') \geq p$ et que $\phi(\mathrm{im} f) \leq \phi(N'') < p$. C'est absurde. Donc $f = 0$.

Maintenant on prouve que tout N tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{T}_p$ appartient à $\mathcal{F}_p$. Soit N un tel objet. Alors, en particulier, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N) = 0$ pour tout objet ϕ-semi-stable M' de $\mathcal{T}_p$. Ainsi, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', \tilde{N}) = 0$ pour tout sous-objet $\tilde{N}$ de N. En particulier, si N'' est le sous-objet déstabilisateur minimal de N, on a que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N'') = 0$. Si $\phi(N'') \geq p$, alors $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(N'') = 0$ parce que N'' est ϕ-semistable. C'est absurde. Ainsi $N \in \mathcal{F}_p$.

La preuve que tout M tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$ pour tout $N \in \mathcal{F}_p$ appartient à $\mathcal{T}_p$ est analogue en utilisant les arguments duaux. Ceci achève la preuve. $\square$

7.3 Suites vertes maximales dans les catégories abéliennes à longueur

Dans la section précédente on s'est intéressés aux paires de torsion $(\mathcal{T}_p, \mathcal{F}_p)$ induites par une fonction de stabilité ϕ dans $\mathcal{A}$, pour chaque $p \in \mathcal{P}$. Maintenant, on remarque que si $p < q$ alors $\mathcal{T}_q \subseteq \mathcal{T}_p$ et $\mathcal{F}_p \subseteq \mathcal{F}_q$. Donc une fonction de stabilité induit une chaîne (peut être infinie) de classes de torsion dans $\mathcal{A}$. Cette section est dédiée à l'étude de ces chaînes.

En général, si on a une fonction de stabilité ϕ et $p, q \in \mathcal{P}$ tels que $p < q$ il n'est pas toujours vrai que l'inclusion de $\mathcal{T}_q$ dans $\mathcal{T}_p$ est stricte. C'est pour cela que l'on définit une relation d'équivalence à partir du résultat suivant.

Proposition 7.3.1. *Soit $\phi : \mathrm{Obj}\mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité. La relation $\sim$ définie sur $\mathcal{P}$ par*

$$p \sim q \textit{ si et seulement si } \mathcal{T}_p = \mathcal{T}_q$$

est une relation d'équivalence. $\square$

Maintenant on donne la définition qui a motivé cette partie de la thèse.

Définition 7.3.2. Une **suite verte** dans $\mathcal{A}$ est une chaîne finie de classes de torsion $\mathcal{X}_0 \subsetneq \mathcal{X}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{X}_{n-1} \subsetneq \mathcal{X}_n$ telle que $\mathcal{X}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{X}_n = \mathcal{A}$. En outre, la suite verte est dite **maximale** si elle ne peut pas être raffinée, c'est-à-dire, que pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ l'existence d'une classe de torsion $\mathcal{X}$ telle que $\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_{i+1}$, implique $\mathcal{X} = \mathcal{X}_i$ ou $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{i+1}$.

Étant donnée une fonction de stabilité ϕ, on dira qu'elle **induit** une suite verte maximale si la chaîne des classes de torsion induite par ϕ est une suite verte maximale.

On veut donner une caractérisation des fonctions de stabilité induisant des suites vertes maximales. Pour cela on a besoin des résultats suivants.

Lemme 7.3.3. *Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité et supposons que $\mathcal{P}$ a un élément maximal $\overline{p}$. Alors $\mathcal{T}_{\overline{p}} \neq \{0\}$ si et seulement s'il existe un objet non nul M dans $\mathcal{A}$ tel que $\phi(M) = \overline{p}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{T}_{\overline{p}} \neq \{0\}$. Alors il existe $M \in \mathcal{A}$ non nul tel que $\phi(M') \geq \overline{p}$, où M' est le quotient déstabilisateur maximal de M. Cependant $\overline{p}$ est l'élément maximal de $\mathcal{P}$, alors $\phi(M') = \overline{p}$.

Dans l'autre sens, supposons qu'il existe un objet M non nul de $\mathcal{A}$ tel que $\phi(M) = \overline{p}$. Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$. Comme $\overline{p}$ est maximal dans $\mathcal{P}$ on a que $\phi(L) \leq \phi(M)$ et $\phi(N) \leq \phi(M)$. Cela implique que $\phi(L) = \phi(M) = \phi(N) = \overline{p}$ parce que ϕ est une fonction de stabilité. Ceci est vrai pour toute suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$, donc M est ϕ-semi-stable. Ainsi, M est son propre quotient déstabilisateur maximal. Donc $M \in \mathcal{T}_{\overline{p}}$. $\square$

Lemme 7.3.4. *Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité. On suppose que $\mathcal{P}$ a un élément maximal $\overline{p}$ et un élément minimal $\underline{p}$. Alors :*

1. *Il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $\mathcal{T}_p = \{0\}$ si et seulement si $\phi(M) \neq \overline{p}$ pour tout $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$;*
2. *Il existe $q \in \mathcal{P}$ tel que $\mathcal{T}_q = \mathcal{A}$ si et seulement si $\phi(M) \neq \underline{p}$ pour tout $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$.*

Démonstration. On prouve *1*, la démonstration de *2* étant duale.

Si $\phi(M) \neq \overline{p}$ pour tout $M \in \mathcal{A}$, alors il suit automatiquement du Lemme 7.3.3 que $\mathcal{T}_{\overline{p}} = 0$.

Comme $\overline{p} \geq p$ pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a que $\mathcal{T}_{\overline{p}}$ est contenu dans $\mathcal{T}_p$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Donc, s'il existe un objet M non nul tel que $\phi(M) = \overline{p}$, on a que $\mathcal{T}_{\overline{p}} \neq \{0\}$ en vertu du Lemme 7.3.3. Donc $\{0\} \neq \mathcal{T}_{\overline{p}} \subset \mathcal{T}_p$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. □

Suivant la terminologie utilisée par Engenhorst dans [33], on dira que ϕ est **discrète en** p si pour tous $M, N \in$Obj$(\mathcal{A})$ ϕ-stables, si $\phi(M) = \phi(N) = p$, alors M est isomorphe à N. En outre, on dit que ϕ est **discrète** si ϕ est discrète pour tout $p \in \mathcal{P}$.

Proposition 7.3.5. *Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité. Soient $p, q \in \mathcal{P}$ tels que $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T}_q$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *ϕ est discrète en q et il n'existe aucun $r \in \mathcal{P}$ tel que $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T}_r \subsetneq \mathcal{T}_q$.*
2. *Si $\mathcal{T}$ est une classe de torsion telle que $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_q$, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_p$ ou $\mathcal{T} = \mathcal{T}_q$.*

Démonstration. *1.* implique *2.* Le fait qu'il n'existe pas $r \in \mathcal{P}$ tel que $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T}_r \subsetneq \mathcal{T}_q$ nous permet de supposer, sans perte de généralité, que

$$q = \max\{t \in \mathcal{P} : t < p \text{ et il existe un objet } \phi\text{-stable } N_t \text{ tel que } \phi(N_t) = t\}.$$

En outre, comme ϕ est discrète en q, on sait que N_q est l'unique objet ϕ-stable de phase q à isomorphisme près.

Supposons que $\mathcal{T}$ est une classe de torsion telle que $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_q$. Nous prétendons que $\mathcal{T}_q \subseteq \mathcal{T}$. Soit $M \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_p$ et M' le quotient déstabilisateur maximal de M. Alors $\phi(M') < p$ parce que $M \notin \mathcal{T}_p$. Cependant, $\phi(M') \geq q$ parce que $M \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_q$. Comme M' est un objet ϕ-semi-stable, le Théorème 7.1.16 implique que M' a une filtrationdont l'ensemble des sous-quotients succesifs, $\{G_i : 1 \leq i \leq n\}$, est fait d'objets ϕ-stables tels que $\phi(G_i) = \phi(M')$ pour tout i. Or, si N est un module ϕ-stable tel que $q \leq \phi(N) < p$ on a, par hypothèse, que $\phi(N) = q$. Donc $\phi(G_i) = \phi(M') = q$

pour tout i. Cela implique que $M' \in \mathcal{A}_q$. Comme ϕ est discrète en q, on a que M' est filtré par N_q. En particulier, N_q est un quotient de M' et, par conséquent, de M. Donc $N_q \in \mathcal{T}$. Alors $\mathcal{T}_q = \mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{\geq q})$ par la Proposition 7.2.2. En outre, comme ϕ est discrète dans q, on a que $\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_{\geq p} \cup \{N_q\}$. Donc $\mathcal{T}_q = \mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{\geq p} \cup \{N_q\}) \subset \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est stable par les extensions. Cela établit notre affirmation.

2. implique *1.* Il suit immédiatement de notre hypothèse qu'il n'existe pas de $r \in \mathcal{P}$ tel que $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T}_r \subsetneq \mathcal{T}_q$. Donc, comme dans l'autre implication, on peut supposer sans perte de généralité que

$$q = \max\{t \in \mathcal{P} : t < p \text{ et il existe un objet } \phi\text{-stable } N_t \text{ tel que } \phi(N_t) = t\}.$$

On montre que ϕ est discrète en q par l'absurde. Supposons qu'il existe deux objets ϕ-stables non isomorphes M et N tels que $\phi(M) = \phi(N) = q$. Considérons l'ensemble $\mathcal{T} = \mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{\geq p} \cup \{N\})$. On prétend que $\mathcal{T}$ est une classe de torsion telle que $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_q$, ce qui contredira notre hypothèse.

Premièrement, comme $\phi(N) = q < p$, $N \notin \mathcal{T}_p$. Donc $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T}$. En plus, il suit du Théorème 7.1.7 et du Corollaire 7.1.9 que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}, M) = 0$. Cela implique que $M \notin \mathcal{T}$. Donc $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_q$. Dès lors $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_q$.

Il reste à prouver que $\mathcal{T}$ est une classe de torsion. Par définition, $\mathcal{T}$ est stable par extension. Donc il suffit de prouver que $\mathcal{T}$ est stable pour les quotient pour achever la démostration.

Soient $T \in \mathcal{T}$, $g : T \to T'$ un épimorphisme où T' est non nul et Q le quotient déstabilisateur maximal de T. Si $\phi(Q) \geq p$, alors $T \in \mathcal{T}_p$ puis $T' \in \mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}_p$ est une classe de torsion. Sinon, $T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_p$. Donc $\phi(Q) = q$ parce que $T \in \mathcal{T}_q$. Prenons la filtration de Harder-Narasimhan de T.

$$0 = T_0 \subsetneq T_1 \subsetneq T_2 \subsetneq \cdots \subsetneq T_{n-1} \subsetneq T_n = T$$

Alors le Théorème 7.1.15 nous dit que $Q \cong T_n/T_{n-1}$. Donc Q est filtré par N parce que $\mathcal{T} = \mathrm{Filt}(\mathcal{A}_{\geq p} \cup \{N\})$.

Maintenant, soit Q' le quotient déstabilisateur maximal de T'. Si $\phi(Q') \geq p$, alors $T' \in \mathcal{T}_p$ et donc $T' \in \mathcal{T}$. Sinon $\phi(Q') = q$ et la définition de quotient déstabilisateur maximal nous dit que l'épimorphisme $gf' : T \to Q'$ se factorise par l'épimorphisme $f : T \to Q$. C'est-à-dire que $gf' = fg'$ pour un certain $g' : Q \to Q'$. Donc Q' est un quotient de Q. Soit

$$0 \to \ker g' \to Q\overset{g'\,'}{Q} \to 0$$

la suite exacte courte associée à g'. La propriété bascule implique que $\phi(\ker g') = q$. En outre, la Proposition 7.1.7 avec le Théorème 7.1.16 impliquent que l'ensemble de sous-quotients de Q est égal à l'union des ensembles de sous-quotients de $\ker g'$ et Q'. Maintenant, comme le seul élément de l'ensemble de sous-quotients de Q est N, l'ensemble de sous-quotients de Q' est soit vide, soit contient seulement N. Mais comme $Q' \neq 0$, cet ensemble n'est pas vide. Donc Q' est filtré par N.

Soit

$$0 = T'_0 \subsetneq T'_1 \subsetneq T'_2 \subsetneq \cdots \subsetneq T'_{m-1} \subsetneq T'_m = T'$$

la filtration de Harder-Narasimhan de T'. Alors $Q' \cong T'/T'_{m-1}$ et

$$q = \phi(Q') < \phi(T'_{m-1}/T'_{m-2}) < \cdots < \phi(T'_2/T'_1) < \phi(T'_1/T'_0).$$

Conséquemment $T'_i/T'_{i-1} \in \mathcal{T}_p$ pour tout i. Donc $T' \in \mathrm{Filt}(A_p \cup \{N\}) = \mathcal{T}$. Ceci achève la preuve. $\square$

Maintenant on est capables de prouver le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 7.3.6. *Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ une fonction de stabilité. Supposons que les éléments maximaux et minimaux de $\mathcal{P}$, s'il existent, n'appartiennent pas à $\phi(\mathcal{A})$.*

Alors ϕ induit une suite verte maximale si et seulement si ϕ est discrète et l'ensemble de classes d'équivalence de $\mathcal{P}/\sim$ est fini.

Démonstration. Supposons que ϕ induit une suite verte maximale

$$\{0\} = \mathcal{T}_{p_0} \subsetneq \mathcal{T}_{p_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{T}_{p_n} = \mathcal{A}.$$

Alors il est immédiat que l'ensemble de classes d'équivalences de $\mathcal{P}/\sim$ est fini. En outre la Proposition 7.3.5 implique que ϕ est discrète.

Inversement, supposons que ϕ est discrète et induit un nombre fini de classes d'équivalence dans $\mathcal{P}/\sim$. Alors ϕ induit une chaîne de classes de torsion comme suit

$$\mathcal{T}_{p_0} \subsetneq \mathcal{T}_{p_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{T}_{p_n}.$$

Étant donné que les éléments maximaux et minimaux de $\mathcal{P}$ n'appartiennent pas à $\phi(\mathcal{A})$, le Lemme 7.3.4 implique que $\mathcal{T}_{p_0} = \{0\}$ et que $\mathcal{T}_{p_n} = \mathcal{A}$, c'est-à-dire que ϕ induit une suite verte. En outre, la Proposition 7.3.5 nous dit que cette suite verte est maximale parce que ϕ est discrète. $\square$

Chapitre 8

Conditions de stabilité de King et τ-inclinaison

Dans ce chapitre on étudie les conditions de stabilité introduites par King dans [44] pour les catégories de modules d'une algèbre A. Comme on verra au cours du chapitre, ces conditions de stabilité permettent d'associer à chaque algèbre un objet géométrique, que on appelle *structure de parois et chambres*. Nous utilisons ici un *complexe de cônes*, inspiré du complexe simplicial défini par Demonet, Iyama et Jasso dans [32], qui sera inclus dans la structure de parois et chambres de mod$A$ pour associer à chaque chambre une classe de torsion dans mod$A$ et, à l'aide de la théorie de τ-inclinaison, nous donnerons une description explicite des chambres auxquelles nous associons une classe de torsion fonctoriellement finie.

La structure du chapitre est la suivante. Dans la première section nous donnons la définition des conditions de stabilité pour une algèbre arbitraire A, introduite par King dans [44], et la structures de chambres et parois que ces conditions de stabilité induisent dans $(\mathbb{R}^t)^*$, où $t = rg(K_0(A))$. Dans la deuxième section nous considérons les conditions de stabilité $\theta_{\alpha(M-P)}$ qui sont induites par les g-vecteurs d'une paire τ-rigide (M, P) et nous donnons une description explicite des catégories de modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-stables dans le Théorème 8.2.4. Enfin, nous étudions les conséquences géométriques du Théorème 8.2.4, ce qui nous permet de montrer que certaines chambres et certaines parois sont induites par des paires τ-rigides. Finalement, nous achevons le chapitre en montrant qu'on peut associer à chaque chambre $\mathfrak{C}$ une classe de torsion $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}}$ et que si la chambre $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ est induite par une paire τ-inclinante (M, P), alors $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}_{(M,P)}}$ coïncide avec Fac$M$.

Il faut remarquer que certains des résultats inclus dans cet chapitre ont été prouvés indépendamment par Speyer et Thomas [59].

8.1 Définition

Ici on donnera les définitions de base des conditions de stabilité de King et la notation qui nous permettra de travailler par la suite.

Définition 8.1.1. [44, Definition 1.1] Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et soit $\theta : K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ une fonction additive sur le groupe de Grothendieck de $\mathcal{A}$. Alors un objet M est dit **θ-stable** (ou **θ-semi-stable**) si $\theta([M]) = 0$ et $\theta([M']) < 0$ (ou $\theta([M']) \leq 0$) pour tout sous-objet non trivial M' de M.

Même si dans sa définition originale les conditions de stabilité de King s'expriment pour les catégories abéliennes, dorénavant, A désignera une algèbre et on travaillera avec sa catégorie de modules mod$A$.

On sait que (étant donnée une algèbre A) le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ de A

est isomorphe à $\mathbb{Z}^t$, où t est le nombre de A-modules simples non isomorphes. Alors, il existe une aplication $\Phi : K_0(A) \to \mathbb{R}^t$ de $K_0(A)$ dans $\mathbb{R}^t$ défini par $\Phi(M) = [M]$. Cela nous amène à la définition d'espace de stabilité d'un module.

Définition 8.1.2. Soient A une algèbre telle que $rg(K_0(A)) = t$, $(\mathbb{R}^t)^*$ l'espace dual de $\mathbb{R}^t$ et M un A-module. On définit l'**espace de stabilité de** M, noté $\mathfrak{D}(M)$, comme étant

$$\mathfrak{D}(M) = \{\theta \in (\mathbb{R}^t)^* : M \text{ est } \theta\text{-semi-stable}\}.$$

Remarquons que chaque A-module non nul M induit un élément φ_M dans le bidual $(\mathbb{R}^t)^{**}$ de $\mathbb{R}^t$ défini par $\varphi_M(\theta) = \theta([M])$. Il s'ensuit immédiatement que l'espace de stabilité de tout module est contenu dans un hyperplan de $(\mathbb{R}^t)^*$.

Dans le restant de la thèse, étant donné un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^t$, on dit que S est de **codimension** $t - r$ si

$$r = \max\{\#(\{v_1, \ldots, v_n\}) : \{v_1, \ldots, v_n\} \text{est linéairement indépendant et } \{v_1, \ldots, v_n\} \subset S\}.$$

Définition 8.1.3. Soient A une algèbre telle que $rg(K_0(A)) = t$, $(\mathbb{R}^t)^*$ l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ et M un A-module non nul. On dit que l'espace de stabilité $\mathfrak{D}(M)$ de M est une **paroi** si la codimension de $\mathfrak{D}(M)$ est égale à 1.

Maintenant, notons qu'il n'est pas vrai que tout point de $(\mathbb{R}^t)^*$ appartient à une paroi. Par exemple si nous prenons la fonctionnelle

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_t) = \sum_{i=1}^{t} x_i$$

on peut voir facilement que $\theta([M]) > 0$ pour tout A-module M non nul. Donc θ n'appartient à aucune paroi.

Définition 8.1.4. Soient A une algèbre telle que $rg(K_0(A)) = t$ et $(\mathbb{R}^t)^*$ l'espace dual de $\mathbb{R}^t$. Considérons l'ensemble

$$\mathfrak{R} = (\mathbb{R}^t)^* \setminus \overline{\bigcup_{M \in \mathrm{mod} A} \mathcal{D}(M)}$$

de tous les points qui n'appartiennent à la fermeture, par rapport à la topologie euclidienne, de l'union de tous les espaces de stabilité des A-modules. Alors une **chambre** est une composante connexe $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{R}$.

Définition 8.1.5. Soit A une algèbre. Alors on appelle la **structure de parois et chambres de** A la donnée de $(\mathbb{R}^t)^*$ et de toutes les parois et chambres induites par les A-modules.

Étant donnée une chambre $\mathfrak{C}$, on dira qu'une parois $\mathfrak{D}(M)$ est une parois de $\mathfrak{C}$ si l'intersection entre $D(M)$ et la frontière de $\mathfrak{C}$ a codimension 1.

Pendant le reste du chapitre on va travailler sur $(\mathbb{R}^t)^*$, l'espace dual de $\mathbb{R}^t$. Donc, pour pouvoir représenter graphiquement certains de nos résultats et pour alléger la notation, chaque $\theta \in (\mathbb{R}^t)^*$ sera identifié à l'unique vecteur $v \in \mathbb{R}^t$ tel que $\theta(v') = \langle v, v' \rangle$ pour tout $v' \in \mathbb{R}^t$, où $\langle -, - \rangle$ indique le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^t$.

Sous ces conditions, pour toute algèbre A, les ensembles

$$\mathbb{R}^t_{>0} = \{v = (v_1, \ldots, v_t) : v_i > 0 \text{ pour tout } i\}$$

et

$$\mathbb{R}^t_{<0} = \{v = (v_1, \ldots, v_t) : v_i < 0 \text{ pour tout } i\}$$

sont des chambres dans la structure des chambres et parois de A. En outre, dans les deux cas les parois associées à ces chambres sont définit par les A-modules simples.

Pour finir cette section on montre un exemple d'une structure de parois et chambres.

Exemple 8.1.6. Considérons l'algèbre $A = k(\,1 \longrightarrow 2\,)$. Il est bien connu qu'il existe seulement trois classes d'isomorphisme de modules indécomposables dans mod$A$, à savoir $S(1) = {\scriptstyle 1}$, $S(2) = {\scriptstyle 2}$ et $P(1) = {\scriptstyle \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}$. Ces trois modules ont comme vecteurs dimension $[{\scriptstyle 1}] = (1,0)$, $[{\scriptstyle 2}] = (0,1)$ et $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] = (1,1)$, respectivement. Donc, suivant les notations que l'on vient de donner on peut voir, après un petit calcul, que

$$\mathfrak{D}(S(1)) = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\};$$

$$\mathfrak{D}(S(2)) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\};$$

$$\mathfrak{D}(P(1)) = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}.$$

Remarquons que $\mathfrak{D}(P(1))$ n'est pas la droite $\{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ au complet puisque $S(2)$ est un sous-module de $P(1)$. On peut voir la structure de parois et chambres de A dans la Figure 8.1.

8.2 Modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-semi-stables

Avant de commencer le développement mathématique de cette section, on veut avertir le lecteur peu familiarisé avec les g-vecteurs que l'on utilisera les définitions et résultats de la Section 6.2 librement. On rappelle aussi que chaque fois que l'on écrit $hom(M,N)$ on veut dire $\dim_k(\mathrm{Hom}_A(M,N))$.

Dans cette section, étant donnée une algèbre A, fixons une paire τ-rigide (M,P) de mod$A$ telle que M et P sont des A-modules sobres. Supposons que M et P peuvent s'écrire comme $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ et $P = \bigoplus_{j=k+1}^{r} P_j$ où chaque M_i et P_j sont indécomposables, respectivement. Soient

$$\{g^{M_1}, g^{M_2}, \ldots, g^{M_k}, -g^{P_{k+1}}, \ldots, -g^{P_r}\}$$

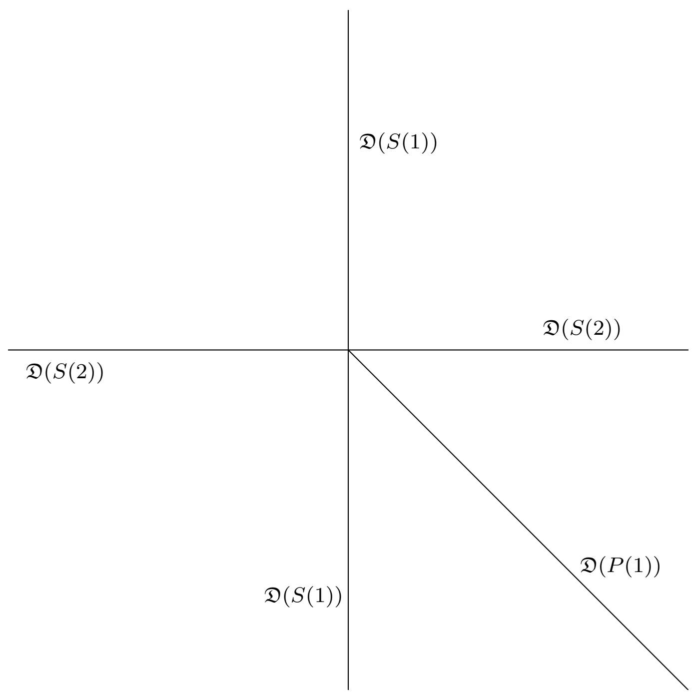

Figure 8.1 – La structure de parois et chambres de A

les g-vecteurs des facteurs indécomposables de M et P, lesquels sont linéairement indépendants en vertu du Théorème 6.2.6.

Étant donné $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, avec $\alpha_i > 0$, notons $\alpha(M - P)$ le vecteur

$$\alpha(M-P) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g^{M_i} - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j g^{P_j}.$$

L'objectif de cette section est donner une description détaillée de la catégorie des modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-semi-stables.

Par la suite on utilisera librement les notions sur les paires de torsion introduites dans la Section **??**. Avant de donner le théorème principal de cette section, on montrera quelques lemmes.

Lemme 8.2.1. *Soient (M, P) une paire τ-rigide, où $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ et $P = \bigoplus_{j=k+1}^{r} P_j$ sont des modules sobres, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ un vecteur réel à coefficients positifs et $(\mathrm{Fac}M, M^{\perp})$ la paire de torsion engendrée par M. Considérons le vecteur $\alpha(M-P) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g^{M_i} - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j g^{P_j}$ et prenons la fonctionnelle linéaire $\theta_{\alpha(M-P)}(-)$ associée à $\alpha(M-P)$. Alors $\theta_{\alpha(M-P)}([tN]) \geq 0$ pour chaque $N \in \mathrm{mod}A$.*

Démonstration. Soit N un A module et soit

$$0 \to tN \to N \to N/tN \to 0$$

la suite canonique de N induite par la paire de torsion $(\mathrm{Fac}M, M^{\perp})$. Alors comme $tN \in \mathrm{Fac}M$ on obtient que $hom(M, tN) \geq 0$, que $hom(tN, \tau M) = 0$ et qu'il existe un épimorphisme $p : M^k \to tN$ pour un $k \in \mathbb{N}$ donné. Maintenant, comme P est projectif, chaque morphisme $f : P \to tN$ se factorise par M^k. Or, $\mathrm{Hom}_A(P, M) = 0$. Donc $hom(P, tN) = 0$. Si nous notons $\beta = \min_{i=1}^{r}\{\alpha_i\}$, il suit du Corollaire 6.2.4 que

$$\theta_{\alpha(M-P)}([tN]) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(M_i, tN) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(tN, \tau M_i) - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j hom(P_j, tN)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(M_i, tN) \geq \beta hom(M, tN) \geq 0$$

comme annoncé. □

Remarque 8.2.2. Soit N un A-module tel que tN est non nul. Alors $\theta_{\alpha(M-P)}(tN) > 0$. Donc N n'est pas un module $\theta_{\alpha(M-P)}$-semistable.

Lemme 8.2.3. *Soit (M, P) une paire τ-rigide où $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ et $P = \bigoplus_{j=k+1}^{r} P_j$ sont des modules sobres et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est un vecteur réel à coefficients positifs. Considérons le vecteur $\alpha(M-P) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g^{M_i} - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j g^{P_j}$ et prenons la fonctionnelle linéaire $\theta_{\alpha(M-P)}(-)$ associée à $\alpha(M-P)$. Alors N est un A-module $\theta_{\alpha(M-P)}$-semi-stable si et seulement si $N \in {}^{\perp}\tau M \cap M^{\perp} \cap P^{\perp}$.*

Démonstration. Soit $\beta = \max_{i=1}^{r}\{\alpha_i\}$. Supposons que $N \in {}^{\perp}\tau M \cap M^{\perp} \cap P^{\perp}$. Alors

$$\theta_{\alpha(M-P)}([N]) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(M_i, N) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(N, \tau_A M_i) - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j hom(P_j, N)$$

Or $hom(M, N) = hom(N, \tau_A M) = hom(P, N) = 0$ car $N \in {}^{\perp}\tau M \cap M^{\perp} \cap P^{\perp}$. Donc $\theta_{\alpha(M-P)}([N]) = 0$.

En outre, pour chaque sous-module L de N on a que $hom(M, L) = 0$ puisque $hom(M, N) = 0$. Avec le même raisonnement on déduit que $hom(P, L) = 0$. Donc $\theta_{\alpha(M-P)}([L]) \leq -\beta hom(N, \tau M) \leq 0$.

Ainsi N est un A-module $\theta_{\alpha(M-P)}$-semi-stable.

Maintenant supposons que N est un module $\theta_{\alpha(M-P)}$-semi-stable. Alors $\theta_{\alpha(M-P)}([L]) \leq 0$ pour chaque sous-module L de N. En particulier $\theta_{\alpha(M-P)}([tN]) \leq 0$. Donc $\theta_{\alpha(M-P)}([tN]) =$

0 en vertu du Lemme 8.2.1. D'où

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(M_i, tN) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(tN, \tau_A M_i) - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j hom(P_j, tN) = 0.$$

Comme $tN \in \mathrm{Fac}M$ et M est τ-rigide, on obtient que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(tN, \tau_A M_i) = 0$. Avec le même type de raisonnement on peut montrer que $\sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j hom(P_j, tN) = 0$. Dès lors, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(M_i, tN) = 0$, et $tN = 0$.

Ainsi $hom(M, N) = 0$. En outre $hom(N, \tau M) = hom(P, N) = 0$ parce que

$$\theta_{\alpha(M-P)}([N]) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i hom(M_i, N)$$

et $\theta_{\alpha(M-P)}([N]) = 0$. Alors $N \in {}^{\perp}\tau M \cap M^{\perp} \cap P^{\perp}$, et cela achève la preuve. $\square$

Maintenant on peut démontrer le théorème principal de la section.

Théorème 8.2.4. *Soient (M, P) une paire τ-rigide où $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ et $P = \bigoplus_{j=k+1}^{r} P_j$ sont des modules sobres et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est un vecteur réel à coefficients positifs. Considérons le vecteur $\alpha(M - P) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g^{M_i} - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j g^{P_j}$ et prenons la fonctionnelle linéaire $\theta_{\alpha(M-P)}(-)$ associée à $\alpha(M - P)$. Alors il existe une algèbre $\tilde{B}$ telle que la catégorie de modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-semi-stables est équivalente à $\mathrm{mod}\tilde{B}$. En outre il y a exactement $rg(K_0(A)) - r$ classes d'isomorphisme de modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-stables non nuls.*

Démonstration. La première partie de l'énoncé suit directement du Lemme 8.2.3 et du Théorème 3.3.3, où $\tilde{B}$ est définit à partir de la completion de Bongartz de la paire (M, P).

Maintenant, en vertu de la construction de $\tilde{B}$ faite dans le Théorème 3.3.3, on a que $rg(K_0(\tilde{B})) = rg(K_0(A)) - r$.

En outre, le foncteur $F : {}^{\perp}\tau M \cap P^{\perp} \cap M^{\perp} \to mod\tilde{B}$ du Théorème 3.3.3 preserve les inclutions. De plus, les modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-stables sont les objets simples dans la catégorie des modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-semistables. D'où F induit une bijection entre les modules simples de mod$\tilde{B}$ et les modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-stables dans mod$A$. Donc le nombre de modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-stables coïncide avec $rg(K_0(\tilde{B})) = rg(K_0(A)) - r$, et la preuve est finie. □

Dans toute cette section nous avons considéré un vecteur α de coordonnées positives arbitraire. Dans la prochaine section on utilisera ce fait pour déduire des conséquences géométriques du théorème précédent.

8.3 Conséquences géométriques du Théorème 8.2.4

Dans cette section nous utiliserons le Théorème 8.2.4 pour montrer que chaque paire τ-inclinante (M, P) induit une chambre $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ dans la structure de parois et chambres de A (Proposition 8.3.2) et on donnera une description complète de ces chambres (Corollaire 8.3.5).

Nous commençons par donner la définition du cône d'une paire τ-rigide.

Définition 8.3.1. Soit (M, P) une paire τ-rigide où M et P sont des modules sobres écrits par $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ et $P = \bigoplus_{j=k+1}^{r} P_j$. On définit le **cône $\mathcal{C}_{(M,P)}$ de** (M, P) comme étant

$$\mathcal{C}_{(M,P)} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g^{M_i} - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j g^{P_j} : \alpha_i > 0 \text{ pour tout } i \right\}$$

Suivant [32], on dit qu'une algèbre est *τ-finie* si l'ensemble de classes d'équivalences de modules τ-rigides indécomposables non-isomorphes est fini.

Proposition 8.3.2. *Soit (M, P) une paire τ-inclinante. Alors le cône $\mathcal{C}_{(M,P)}$ de (M, P) est une chambre $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ dans la structure de chambres et parois de A. En outre, si (M, P) et (M', P') sont deux paires τ-inclinantes différentes, alors $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ est différente de $\mathfrak{C}_{(M',P')}$. En plus, si l'algèbre est τ-finie, toute chambre est de cette forme.*

Démonstration. Soit $\alpha(M-P) \in \mathcal{C}_{(M,P)}$. Alors le Théorème 8.2.4 nous dit que la catégorie de modules $\theta_{\alpha(M-P)}$-semi-stables est réduite au module 0 car $|M|+|P| = t$. Maintenant, comme $\mathcal{C}_{(M,P)}$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^t$, il existe une chambre $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ le contenant. En outre, il est immédiat que $\mathcal{C}_{(M,P)}$ est connexe, donc $\mathcal{C}_{(M,P)} \subseteq \mathfrak{C}_{(M,P)}$. Soit $\beta(M - P)$ un vecteur dans la frontière de $\mathcal{C}_{(M,P)}$. Alors

$$\beta(M - P) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i g^{M_i} - \sum_{j=k+1}^{t} \beta_j g^{P_j}$$

où $\beta_i \geq 0$ pour tout i et $\beta_i = 0$ pour un cenrtain i. Donc, $\beta(M, P)$ est un vecteur appartenant à le cône d'une paire τ-rigide qui n'est pas τ-inclinante. Ainsi, on peut appliquer encore une fois le Théorème 8.2.4 pour obtenir l'existence d'au moins un module N non nul qui est $\theta_{\beta(M-P)}$-semi-stable. Cela montre qu'en fait $\mathcal{C}_{(M,P)} = \mathfrak{C}_{(M,P)}$.

Finalement, deux paires τ-inclinantes différentes ont des g-vecteurs différentes par le Théorème 6.2.5. Donc elles induisent deux chambres différentes dans la structure de stabilité de A. En outre, une simple vérification permet de voir que les chambres induites par les paires τ-inclinantes sont en bijection avec les simplex de dimension maximal défini dans [32]. Alors [32, Theorem 1.5] implique que si l'algèbre est τ-finie, alors toute chambre est induite par une paire τ-inclinante. $\square$

Rappelons que pour chaque paire τ-inclinante presque complète il existe exactement deux paires τ-inclinantes (M_1, P_1) et (M_2, P_2) telles que M est un facteur direct de chaque M_i et P est facteur direct de chaque P_i. En outre, une d'entre elles, par exemple (M_1, P_1), est telle que $\text{Fac}M = \text{Fac}M_1$. En plus, on sait aussi qu'il existe un A-module τ-rigide indécomposable M' tel que $M_2 = M \oplus M'$ parce que $\text{Fac}M \subsetneq \text{Fac}M_2$.

Proposition 8.3.3. *Soient (M, P) une paire τ-inclinante presque complète et M' comme ci-dessus. Alors le cône $\mathcal{C}_{(M,P)}$ de (M, P) est inclus dans la paroi définie par N, où N est le conoyau de la* $\text{add}M$*-approximation à droite de M'.*

Démonstration. Soit M' comme dans l'énoncé et considérons la suite exacte courte

$$0 \to tM' \xrightarrow{i} M' \xrightarrow{p} N \to 0$$

telle que $tM' \in \text{Fac}M$ et N est le conoyau de la $\text{add}M$-approximation à droite de M'. La définition de N implique que $\text{Hom}_A(M, N) = 0$.

On a aussi que $\text{Hom}_A(P, M') = \text{Hom}_A(M', \tau M) = 0$ car $(M_2, P_2) = (M \oplus M', P)$ est une paire τ-inclinante.

Comme P est projectif, tout morphisme $f : P \to N$ se factorise par M', donc $\text{Hom}_A(P, N) = 0$. Comme $p : M' \to N$ est un épimorphisme et $\text{Hom}_A(M', \tau M) = 0$, on a que $\text{Hom}_A(N, \tau M) = 0$. Dès lors $N \in {}^{\perp}\tau M \cap P^{\perp} \cap M^{\perp}$.

Maintenant on peut appliquer le Lemme 8.2.3 pour conclure que N est un module $\theta_{\alpha(M-P)}$-semi-stable pour chaque $\alpha(M - P) \in \mathcal{C}_{(M,P)}$. Donc $\mathcal{C}_{(M,P)} \subset \mathfrak{D}(N)$. En outre $\mathcal{C}_{(M,P)}$ est de codimension 1 en vertu du Théorème 6.2.6. Donc $\mathfrak{D}(N)$ est une paroi. $\square$

Remarque 8.3.4. Il n'est pas vrai que toutes les parois sont induites par les cônes d'une paire τ-inclinante presque complète. Par exemple, si on prend l'algèbre $A' =$

$k(1 \rightrightarrows 2)$ et on considère le A'-module

$$M = \; k \underset{0}{\overset{1}{\rightrightarrows}} k$$

on voit que

$$\mathfrak{D}(M) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}$$

est une paroi mais il n'existe pas de A'-module N τ-rigide tel que $g^N = (1, -1)$.

Comme corollaire nous obtenons une description complète des chambres induites par les paires τ-inclinantes. Il faut remarquer que le résultat suivant est une généralisation de [37, Lemme 2.9 et Théorème 5.12].

Corollaire 8.3.5. *Soit (M, P) une paire τ-inclinante. Alors la chambre $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ (voir Proposition* **??***) a exactement t parois, toutes de la forme $\{\mathfrak{D}(N_1), \mathfrak{D}(N_2), \ldots, \mathfrak{D}(N_t)\}$, où $N_1, N_2, \ldots, N_t \in \operatorname{mod} A$ peuvent être calculés explicitement.*

Démonstration. Le fait que (M, P) induise une chambre $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ est prouvé dans la Proposition 8.3.2.

Maintenant supposons que $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ et $P = \bigoplus_{j=k+1}^{t} P_j$. Alors la Proposition 8.3.3 nous dit que chacun des cônes des t paires presque complètes que l'on peut construire à partir de (M, P) est inclus dans une paroi. De plus, dans cette même Proposition, on calcule explicitement chaque N_i. Cela montre que les parois associés à $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ sont exactement $\mathfrak{D}(N_1), \mathfrak{D}(N_2), \ldots, \mathfrak{D}(N_t)$.

Finalement comme chaque parois dans la frontière de $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ est induite par les g-vecteurs des paires τ-rigides presque complètes, le Théorème 6.2.6 implique que $\mathfrak{D}(N_i) \neq \mathfrak{D}(N_j)$ si $i \neq j$. $\square$

On finit cette section avec un exemple.

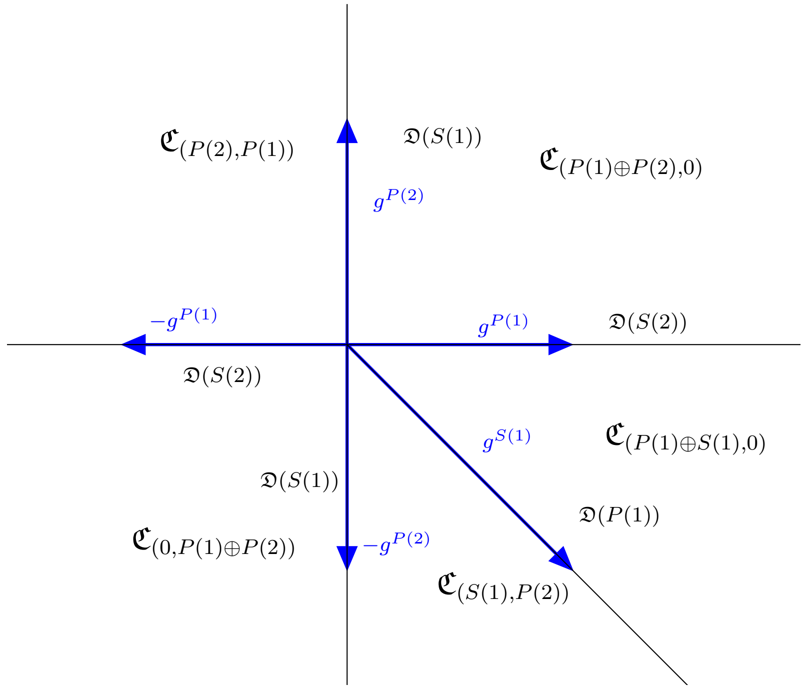

Figure 8.2 – Structure de chambres et parois de l'algèbre A

Exemple 8.3.6. Voici la continuation de l'Exemple 8.1.6. Considérons encore une fois l'algèbre $A = k(1 \longrightarrow 2)$. Dans la Figure 8.2 on peut voir la structure de chambres et parois de A où on a ajouté les g-vecteurs qui forment les paires τ-inclinant presque complètes. On peut voir qu'ils se trouvent exactement sur les parois induites par les modules stables, tel que l'indique la Proposition 8.3.3. En outre, chaque chambre est étiquetée avec la paire τ-inclinante qui l'induit. On rappele au lecteur qu'on identifi les fonctiones linéaires $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec les vecteurs v de $\mathbb{R}^2$ tels que $\theta(w) = \langle v, w \rangle$, pour tout $w \in \mathbb{R}^2$.

8.4 Classes de torsion associées aux chambres

Dans cette section on va associer à chaque chambre $\mathfrak{C}$ une classe de torsion $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}}$. En outre, on va prouver que si une chambre $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ est induite par une paire τ-inclinante (M, P) alors $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}_{(M,P)}} = \mathrm{Fac}M$.

Avant de commencer, on rappelle que Bridgeland a montré dans [21, Lemma 6.6] qu'à chaque fonctionnelle $\theta \in (\mathbb{R}^t)^*$ on peut associer une classe de torsion $\mathcal{T}_\theta$, où $\mathcal{T}_\theta$ est définie comme suit :

$$\mathcal{T}_\theta = \{M \in \mathrm{mod}A : \theta([N]) > 0 \text{ pour chaque quotient non nul } N \text{ de } M\}.$$

La prochaine proposition associe une classe de torsion à chaque chambre.

Proposition 8.4.1. *Soit $\mathfrak{C}$ une chambre et*

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{C}} = \{M \in modA : \theta(N) > 0 \text{ pour chaque quotient non nul } N \text{ de } M \text{ et chaque } \theta \in \mathfrak{C}\}.$$

Alors $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}}$ est une classe de torsion.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}} = \bigcap_{\theta \in \mathfrak{C}} \mathcal{T}_\theta$ et de se rappeler qu'une intersection arbitraire d'une famille de classes de torsion est aussi une classe de torsion. □

Maintenant on va donner une description plus détaillée des classes de torsion des chambres qui sont induites par une paire τ-inclinante.

Proposition 8.4.2. *Soient (M, P) une paire τ-inclinante, $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ la chambre qu'elle induit (voir Proposition 8.3.2), $\mathfrak{D}(N_1), \mathfrak{D}(N_2), \ldots, \mathfrak{D}(N_t)$ les parois qui entourent $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ et soit $\mathcal{N} = \{N_i : \theta(N_i) > 0$ pour chaque $\theta \in \mathfrak{C}\}$. Alors $\mathcal{T}_{\mathfrak{C}_{(M,P)}} = FacM = T(\mathcal{N})$, où $T(\mathcal{N})$ est la plus petite classe de torsion contenant $\mathcal{N}$.*

Démonstration. Soit $(\mathrm{Fac}M, M^{\perp})$ la paire de torsion induite par (M, P) et soit N un A-module arbitraire. Prenons

$$0 \to tN \to N \to N/tN \to 0$$

la suite exacte canonique de N associée à $(\mathrm{Fac}M, M^{\perp})$. Alors le résultat dual du Lemme 8.2.1 implique que $N \in \mathcal{T}_{\mathfrak{C}_{(M,P)}}$ seulement si $N/tN = 0$. En outre, si $N/tN = 0$ alors $N = tN$. Donc $N \in \mathrm{Fac}M$ dû au Lemme 8.2.1. Conséquenctement, $N \in \mathcal{T}_{\mathfrak{C}_{(M,P)}}$ si et seulement si $N \in \mathrm{Fac}M$.

Maintenant on va prouver que $\mathrm{Fac}M = T(\mathcal{N})$. Supposons que M et P sont écrits comme $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$ et $P = P_{k+1} \oplus \cdots \oplus P_t$, où chaque M_i et chaque P_j est indécomposable.

Quitte à renuméroter $N_1, \ldots, N_t$, onpeut supposer que l'intersection de chacune des parois $\mathfrak{D}(N_i)$ avec la frontière de $\mathfrak{C}_{(M,P)}$ est égale au cône $\mathcal{C}_{(M/M_i,P)}$ si $1 \leq i \leq k$ ou au cône $\mathcal{C}_{(M,P/P_i)}$ si $k+1 \leq i \leq t$.

Soit i un indice arbtraire entre 1 et t. Considérons les suites exactes $M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \to C_i \to 0$, où f_i est la $\mathrm{add}(M/M_i)$-approximation à droite de M_i. Il est immédiat que $C_i \in \mathrm{Fac}M$. En plus, la Proposition 8.3.3 nous indique que $N_i = C_i$ si la classe de torsion engendrée par la paire obtenue par la mutation en M_i de (M, P) est contenue dans la classe de torsion engendrée par (M, P). Enfin, le Lemme 8.2.1 implique que $\theta(N_i) > 0$ pour chaque $\theta \in \mathfrak{C}_{(M,P)}$ si et seulement si N_i appartient à $\mathrm{Fac}M$. Cela implique que $\theta(N_i) > 0$ si et seulement si $N_i = C_i$. Alors on peut appliquer [32, Lemma 3.7] pour conclure que $\mathrm{Fac}M = T(\mathcal{N})$. □

Remarque 8.4.3. Pour toute paire τ-inclinante (M, P), pour tout $\theta \in \mathfrak{C}_{(M,P)}$, on a $\mathcal{T}_\theta = \mathrm{Fac}M$.

On termine ce chapitre avec un exemple.

Exemple 8.4.4. C'est une autre continuation de l'exemple 8.1.6 où on montre, cette fois-ci, les classes de torsion associées à chaque chambre. Voir la Figure 8.3.

8.5 Chemins verts

Dans cette section on montre que les conditions de stabilité au sens de Rudakov et de King sont compatibles. On commence avec la définition de chemin vert.

Définition 8.5.1. Soient A une algèbre telle que $rg(K_0(A)) = t$ et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^t$ une fonction continue. Alors γ est un **chemin vert** si $\gamma(0) = (1,1,\dots,1)$, $\gamma(1) = (-1,-1,\dots,-1)$ et pour tout A-module M il existe un unique $t_M \in [0,1]$ tel que $\theta_{\gamma(t_M)}([M]) = 0$.

Remarque 8.5.2. Si on fixe un A-module non nul M, tout fonction continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^t$ telle que $\gamma(0) = (1,1,\dots,1)$ et $\gamma(1) = (-1,-1,\dots,-1)$ induit une fonction continue $\rho_M : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\rho_M(t) = \theta_{\gamma(t)}([M])$. On peut voir que $\rho_M(0) > 0$ et que $\rho_M(1) < 0$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de $t_M \in]0,1[$ tel que $\rho_M(t_M) = \theta_{\gamma(t_M)}([M]) = 0$. Par conséquent, les chemins verts sont les chemins pour lesquels ce scalaire t_M est unique, pour chaque M.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition de chemin vert.

Lemme 8.5.3. *Soit γ un chemin vert. Alors $\theta_{\gamma(t)}([M]) > 0$ si et seulement si $t < t_M$. Dualement, $\theta_{\gamma(t)}([M]) < 0$ si et seulement si $t > t_M$.*

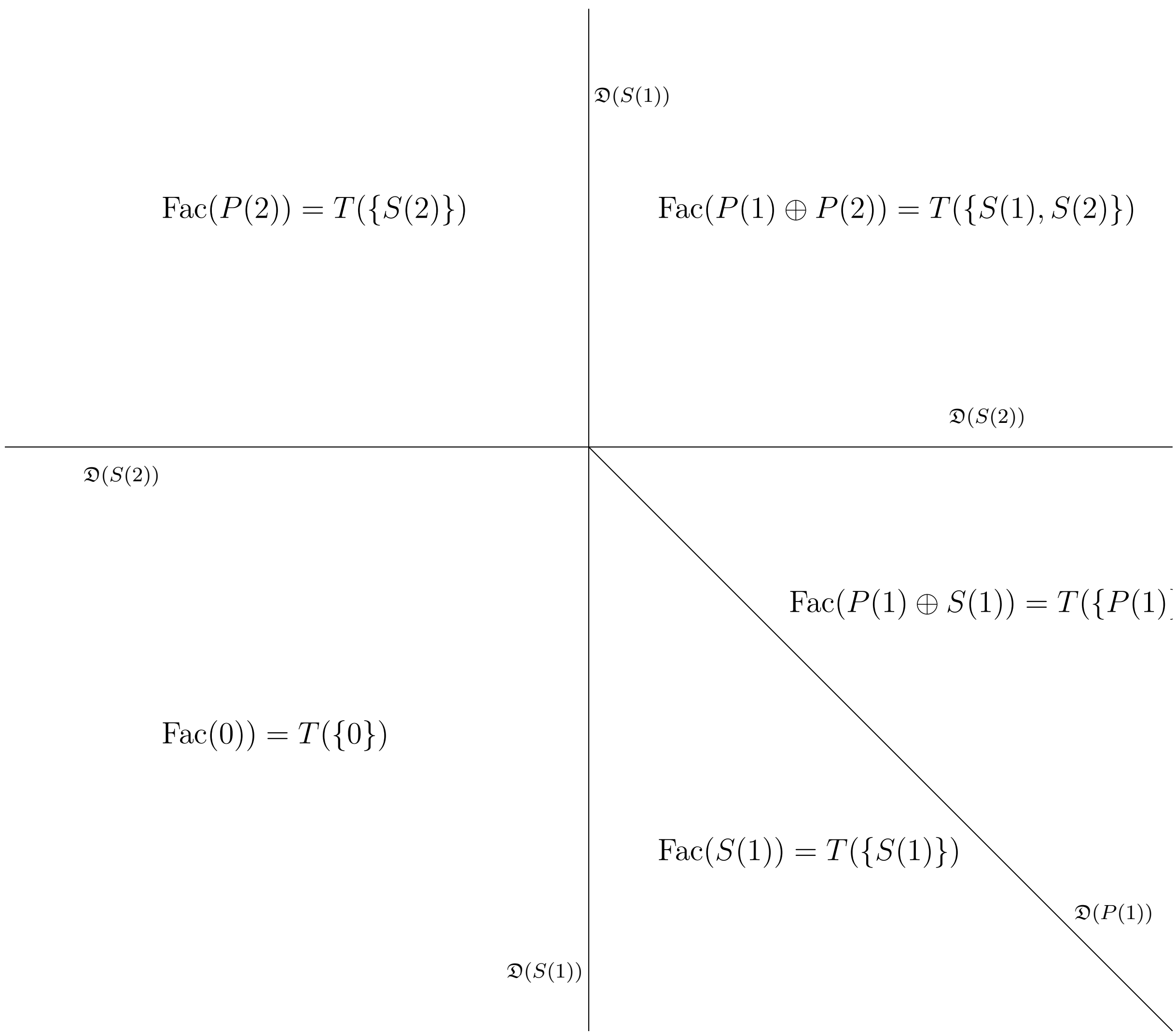

Figure 8.3 – Classes de torsion associées aux chambres

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition des chemins verts et du fait que la fonction ρ_M induite par γ est continue. $\square$

Proposition 8.5.4. *Chaque chemin vert γ induit une structure de stabilité ϕ_γ : $\operatorname{mod}A \to [0,1]$ définie par $\phi_\gamma(M) = t_M$, où, pour tout M, t_M est le réel tel que $\theta_{\gamma(t_M)}([M]) = 0$. En outre, M est ϕ_γ-semi-stable si et seulement si M est $\theta_{\gamma(t_M)}$-semi-stable.*

Démonstration. Soit γ un chemin vert. Alors ϕ_γ est bien défini en vertu de la définition de chemin vert.

On prouve d'abord que ϕ_γ est une structure de stabilité dans $\operatorname{mod}A$. Considérons une suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ de $\operatorname{mod}A$ et supposons que $\phi_\gamma([L]) < \phi_\gamma([M])$. Alors $\theta_{\gamma(t_M)}([L]) < 0$ en vertu du Lemme 8.5.3. Donc $\theta_{\gamma(t_M)}([N]) = \theta_{\gamma(t_M)}([M] - [L]) = \theta_{\gamma(t_M)}([M]) - \theta_{\gamma(t_M)}([L]) > 0$. Ainsi $\phi_\gamma([L]) < \phi_\gamma([M]) < \phi_\gamma([N])$. Les autres deux conditions de la propriété de la bascule sont prouvées de façon semblable. Ceci implique que ϕ_γ est une induit une structure de stabilité au sens de la Définition 7.1.1.

Maintenant, soit M un A-module ϕ_γ-semi-stable. Ceci implique que $\phi_\gamma(L) \leq \phi_\gamma(M)$ pour chaque sous-module L non nul de M. Cela équivaut à dire que $t_L \leq t_M$, ou encore $\theta_{\gamma(t_M)}([L]) \leq 0$, pour tout sous-module non-trivial L de M en vertu du Lemme 8.5.3. Ainsi M est un A-module $\theta_{\gamma(t_M)}$-semi-stable.

Dans l'autre sens, si M est un A-module $\theta_{\gamma(t_M)}$-semi-stable, alors $\theta_{\gamma(t_M)}([L]) \leq 0$ pour chaque sous-module non nul L de M. Alors $t_L \leq t_M$ pour tout sous-module L de M. Cela implique que $\phi_\gamma(L) \leq \phi_\gamma(M)$ pour tout sous-module L de M et donc M est un module ϕ_γ-semi-stable. $\square$

Remarque 8.5.5. D'autres types de chemins ont été déjà considérés dans la littérature, tels que les *lignes casées* de Gross-Hacking-Keel-Kontsevich (voir [37]), les *chemins $\mathfrak{D}$-génériques* de Bridgeland (voir [21]) ou les *chemins discrets* de Engenhorst (voir [33]). La principale différence entre ces chemins et les chemins verts c'est que aucune condition sur les parois est imposée aux chemins verts.

On rappelle au lecteur que, étant donnée une fonction de stabilité ϕ, on note par $\mathcal{T}_x$ à

$$\mathcal{T}_x = \mathrm{Filt}(\{N : N \text{ est un module } \phi_\gamma\text{-stable tel que } t_N \geq x\})$$

pour tout $x \in \mathcal{P}$. En outre on a prouvé dans la Proposition 7.2.2 que $\mathcal{T}_x$ est une classe de torsion pour tout $x \in \mathcal{P}$. D'autre part Bridgeland a defini dans [21, Lemme 6.6] une classe de tosion $\mathcal{X}_\theta$ pour chaque $\theta \in (\mathbb{R}^t)^*$ défini par

$$\mathcal{X}_\theta = \{M \in \mathrm{mod}A : \theta([N]) > 0 \text{ pour chaque quotient non nul } N \text{ de } M\}.$$

La compatibilité entre les deux conditions de stabilité qu'on considère dans cette thèse induit aussi une compatibilité entre les classes de torsion engendrées par elles.

Lemme 8.5.6. *Soient γ un chemin vert et (M, P) une paire τ-inclinante. Supposons que $\theta\gamma(t_0) \in \mathfrak{C}_{(M,P)}$ pour un certain $t_0 \in [0,1]$. Alors $\mathcal{T}_{t_0} = FacM$.*

Démonstration. Soient γ un chemin vert et ϕ_γ la fonction de stabilité induite par γ. Considérons t_0 comme dans les hypothèses et $\mathcal{T}_{t_0}$ sa classe de torsion associée et N un A-module ϕ_γ-stable tel que $N \in \mathcal{T}_{t_0}$ et N' un quotient non trivial de N. Alors comme N est ϕ_γ-stable on obtient que $t_{N'} > t_N$. Donc le Lemme 8.5.3 implique que $\theta_{\gamma(t_0)}([N']) > 0$, d'où $N \in \mathcal{X}_{\theta_{\gamma(t_0)}}$. Ainsi $\mathcal{T}_{t_0} \subset \mathcal{T}_{\theta_{\gamma(t_0)}} = \mathrm{Fac}M$ en vertu de la Remarque 8.4.3.

Dans l'autre sens, soit $M' \in \mathrm{Fac}M$ et N' le quotient déstabilisateur maximal de M' relativement à la structure de stabilité induite par ϕ_γ. Alors la Proposition 8.4.2

implique que $\theta_{\gamma(t_0)}([N']) > 0$. Donc $t_0 < t_{N'}$ en vertu du Lemme 8.5.3. Ceci implique que $N' \in \mathcal{T}_{t_0}$ en vertu de la Proposition 7.2.2. Ainsi Fac$M \subset \mathcal{T}_{t_0}$. $\square$

Comme corollaire du Théorème 7.3.6 on obtient le résultat suivante.

Corollaire 8.5.7. *Soit A une algèbre et soit γ un chemin vert dans la structure de chambres et parois de A. Alors γ induit une suite verte maximale si et seulement si γ est un chemin vert tel que γ croise un nombre fini de parois $\mathfrak{D}(N_1), \mathfrak{D}(N_2), \ldots, \mathfrak{D}(N_n)$ ayant la propriété suivante : si t_i et t_j sont tels que $\gamma(t_i) \in \mathfrak{D}(N_i)$ et $\gamma(t_j) \in \mathfrak{D}(N_j)$ avec $i \neq j$, alors $t_i \neq t_j$.* $\square$

En outre, cela nous amène à la conjecture suivante.

Conjecture 8.5.8. Toute suite verte maximale est induite par un chemin vert de cette forme.

Bibliographie

[1] T. Adachi, O. Iyama, and I. Reiten. τ-tilting theory. *Compos. Math.*, 150(3) :415–452, 2014.

[2] M. Alim, S. Cecotti, C. Cordova, S. Espahbodi, A. Rastogi, and C. Vafa. N=2 quantum field theories and their bps quivers. 2011.

[3] L. Angeleri Hügel, D. Happel, and H. Krause, editors. *Handbook of tilting theory*, volume 332 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[4] I. Assem. Torsion theories induced by tilting modules. *Canad. J. Math.*, 36(5) :899–913, 1984.

[5] I. Assem, T. Brüstle, and R. Schiffler. Cluster-tilted algebras and slices. *J. Algebra*, 319(8) :3464–3479, 2008.

[6] I. Assem, T. Brüstle, and R. Schiffler. Cluster-tilted algebras as trivial extensions. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 40(1) :151–162, 2008.

[7] I. Assem, T. Brüstle, and R. Schiffler. Cluster-tilted algebras without clusters. *J. Algebra*, 324(9) :2475–2502, 2010.

[8] I. Assem, J. C. Bustamante, J. Dionne, P. L. Meur, and D. Smith. Representation theory of partial relation extensions. *arXiv*, math.RT(1604.01269), 2016.

[9] I. Assem, J. A. Cappa, M. I. Platzeck, and M. Verdecchia. *Módulos inclinantes y álgebras inclinadas*. Notas de Álgebra y Análisis [Notes on Algebra and Analysis], 21. Universidad Nacional del Sur, Instituto de Matemática, Bahía Blanca, 2008.

[10] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.

[11] I. Assem and D. Zacharia. Full embeddings of almost split sequences over split-by-nilpotent extensions. *Colloq. Math.*, 81(1) :21–31, 1999.

[12] M. Auslander, M. I. Platzeck, and I. Reiten. Coxeter functors without diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 250 :1–46, 1979.

[13] M. Auslander and I. Reiten. Modules determined by their composition factors. *Illinois J. Math.*, 29(2) :280–301, 1985.

[14] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Corrected reprint of the 1995 original.

[15] M. Auslander and S. O. Smalø. Addendum to : "Almost split sequences in subcategories". *J. Algebra*, 71(2) :592–594, 1981.

[16] M. A. Bertani-Ø kland, S. Oppermann, and A. Wrå lsen. Constructing tilted algebras from cluster-tilted algebras. *J. Algebra*, 323(9) :2408–2428, 2010.

[17] K. Bongartz. Tilted algebras. In *Representations of algebras (Puebla, 1980)*, volume 903 of *Lecture Notes in Math.*, pages 26–38. Springer, Berlin-New York, 1981.

[18] K. Bongartz and P. Gabriel. Covering spaces in representation-theory. *Invent. Math.*, 65(3) :331–378, 1981/82.

[19] S. Brenner and M. C. R. Butler. Generalizations of the Bernstein-Gel′fand-Ponomarev reflection functors. In *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, volume 832 of *Lecture Notes in Math.*, pages 103–169. Springer, Berlin-New York, 1980.

[20] T. Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *Ann. of Math. (2)*, 166(2) :317–345, 2007.

[21] T. Bridgeland. Scattering diagrams, hall algebras and stability conditions. *arXiv*, 1603.00416, 2016.

[22] T. Brüstle, G. Dupont, and M. Pérotin. On maximal green sequences. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16) :4547–4586, 2014.

[23] T. Brüstle, S. Hermes, K. Igusa, and G. Todorov. Semi-invariant pictures and two conjectures on maximal green sequences. *J. Algebra*, 473 :80–109, 2017.

[24] T. Brüstle, D. Smith, and H. Treffinger. Stability conditions, τ-tilting theory and maximal green sequences. *arXiv*, 1705.08227, 2017.

[25] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, and G. Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Adv. Math.*, 204(2) :572–618, 2006.

[26] A. B. Buan, R. J. Marsh, and I. Reiten. Cluster-tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(1) :323–332 (electronic), 2007.

[27] A. B. Buan and Y. Zhou. A silting theorem. *J. Pure Appl. Algebra*, 220(7) :2748–2770, 2016.

[28] P. Caldero, F. Chapoton, and R. Schiffler. Quivers with relations arising from clusters (A_n case). *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(3) :1347–1364, 2006.

[29] S. Cecotti, C. Cordova, and C. Vafa. Braids, walls, and mirrors. 2011.

[30] R. Colpi, G. D'Este, and A. Tonolo. Quasi-tilting modules and counter equivalences. *Journal of Algebra*, 191(2) :461 – 494, 1997.

[31] E. Cormier, P. Dillery, J. Resh, K. Serhiyenko, and J. Whelan. Minimal length maximal green sequences and triangulations of polygons. *J. Algebraic Combin.*, 44(4) :905–930, 2016.

[32] L. Demonet, O. Iyama, and G. Jasso. τ-tilting finite algebras and g-vectors. *arXiv*, 1503.00285, 2015.

[33] M. Engenhorst. Tilting and refined Donaldson-Thomas invariants. *J. Algebra*, 400 :299–314, 2014.

[34] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :497–529 (electronic), 2002.

[35] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen. I. *Manuscripta Math.*, 6 :71–103 ; correction, ibid. 6 (1972), 309, 1972.

[36] D. Gaiotto, G. W. Moore, and A. Neitzke. Wall-crossing, hitchin systems, and the wkb approximation. 2009.

[37] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, and M. Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *arXiv*, 1411.1394, 2014.

[38] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[39] D. Happel, I. Reiten, and S. O. Smalø. Tilting in abelian categories and quasi-tilted algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 120(575) :viii+ 88, 1996.

[40] D. Happel and C. M. Ringel. Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2) :399–443, 1982.

[41] G. Harder and M. S. Narasimhan. On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. *Math. Ann.*, 212 :215–248, 1974/75.

[42] G. Jasso. Reduction of τ-tilting modules and torsion pairs. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16) :7190–7237, 2015.

[43] B. Keller. On cluster theory and quantum dilogarithm identities. In *Representations of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 85–116. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[44] A. D. King. Moduli of representations of finite dimensional algebras. *QJ Math*, 45(4) :515–530, 1994.

[45] P. Le Meur. Topological invariants of piecewise hereditary algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(4) :2143–2170, 2011.

[46] S. Liu. Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver. *J. London Math. Soc. (2)*, 47(3) :405–416, 1993.

[47] S. Liu. Another characterization of tilted algebras. *Arch. Math. (Basel)*, 104(2) :111–123, 2015.

[48] R. Martínez-Villa and J. A. de la Peña. The universal cover of a quiver with relations. *J. Pure Appl. Algebra*, 30(3) :277–292, 1983.

[49] G. Muller. The existence of a maximal green sequence is not invariant under quiver mutation. *Electron. J. Combin.*, 23(2) :Paper 2.47, 23, 2016.

[50] M. Oryu and R. Schiffler. On one-point extensions of cluster-tilted algebras. *J. Algebra*, 357 :168–182, 2012.

[51] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*, volume 1099 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[52] A. Rudakov. Stability for an abelian category. *Journal of Algebra*, 197 :231–245, 1997.

[53] R. Schiffler. *Quiver representations.* CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, Cham, 2014.

[54] R. Schiffler and K. Serhiyenko. Induced and coinduced modules in cluster-tilted algebras. *arXiv*, math.RT(1410.1732v2), 2014.

[55] A. Skowroński. Generalized standard Auslander-Reiten components without oriented cycles. *Osaka J. Math.*, 30(3) :515–527, 1993.

[56] A. Skowroński. Regular Auslander-Reiten components containing directing modules. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(1) :19–26, 1994.

[57] S. O. Smalø. Torsion theories and tilting modules. *Bull. London Math. Soc.*, 16(5) :518–522, 1984.

[58] P. Suarez. Ph.d. thesis. In preparation.

[59] H. Thomas and D. Speyer. Labelling the τ-tilting fan. In preparation.

[60] H. Treffinger. τ-tilting theory and τ-slices. *Journal of Algebra*, 481 :362 – 392, 2017.