SUR L'UNICITÉ DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION D'ABEL-SCHRÖDER ET L'ITÉRATION CONTINUE

R. COIFMAN

(received 21 June 1964)

1.

Soit $f(x)$ continue strictement croissante pour $x \in [0, a_0]$ et telle que $0 < f(x) < x$ pour $x \in (0, a_0]$.

Il est connu que l'équation fonctionnelle d'Abel

$$A(f(x)) = A(x) - 1$$

ainsi que l'équation de Schröder

$$S(f(x)) = aS(x), \qquad 0 < a < 1,$$

possèdent une infinité de solutions continues strictement croissantes.

En posant

$$A(x) = S(x) + 1/(a-1),$$

cette dérnière équation se réduit à

$$A(f(x)) = aA(x) - 1$$

qui pour $a = 1$ est celle d'Abel. Enfin en posant $\varphi(x) = A^{-1}(x)$ les deux equations peuvent être mises sous la forme

$$f(\varphi(x)) = \varphi(ax-1) \qquad 0 < a \leqq 1 \tag{1,1}$$

qui parait être la mieux indiquée pour le problème en vue.

On entend par famille d'itérées de $f(x)$, toute famille $f_\sigma(x)$ telle que (1,2) $f_1(x) = f(x)$ et $f_\sigma(f_\mu(x)) = f_{\sigma+\mu}(x)$ pour tout σ, μ réels.

Le problème de l'itération continue, c-a-d l'étude de l'existence et l'unicité d'une famille d'itérées de $f(x)$, étant équivalent à la résolution de l'équation d'Abel-Schröder, est ainsi ramené à l'étude de l'équation (1,1).

On peut assurer l'unicité de la solution φ de l'equation (1,1) en imposant à φ un certain comportement asymptotique régulier.

La définition ainsi que les propriétés essentielles de ce comportement régulier sont données au § 2. Au § 3. nous donnerons par les théorèmes I et II les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions régulières de (1,1). Quant aux rapports de ces théorèmes au problème de l'itération continue ils sont formulés au § 4. par les théorèmes III, IV. Enfin au § 5. nous montrons jusqu'à quel point les théorèmes I—IV donnent des extensions des résultats connus jusqu'à présent.

2.

Definition A; La fonction continue φ sera dite régulière-A en b, $|b| < \infty$, si

$$\lim_{x\to+0} \frac{\varphi(\lambda x+b)-\varphi(x+b)}{\varphi(\lambda_0 x+b)-\varphi(x+b)}$$

existe pour tout $\lambda > 0$, λ_0 étant fixe.

La fonction φ sera dite régulière-A en $-\infty$ si $\varphi(\lg(x))$ est régulière-A en 0.

Definition B; La fonction dérivable φ sera dite régulière-B en b, $|b| < \infty$, si $\varphi' > 0$ et si

$$\lim_{x\to+0} \varphi'(b+\lambda x)/\varphi'(b+x)$$

existe pour tout $\lambda > 0$.

La fonction φ sera dite régulière-B en $-\infty$ si $\varphi(\lg(x))$ l'est en 0.

Les propriétés essentielles des fonctions régulières-A resp. régulières-B ont été données par R. Bojanic et J. Karamata [1] resp. J. Karamata [2] et N. G. De Bruijn [3]. Les propriétés dont on aura besoin sont les suivantes:

1) Si φ est régulière-A en b ($|b| < \infty$) alors il existe un $\eta \in \boldsymbol{R}$ tel que

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi(b+\lambda t)-\varphi(b+t)}{\varphi(b+\lambda_0 t)-\varphi(b+t)} = A_\eta(\lambda) \tag{2,1}$$

avec

$$A_\eta(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\eta-1}{\lambda_0^\eta-1}, & \eta \neq 0 \\ \dfrac{\lg\lambda}{\lg\lambda_0}, & \eta = 0 \end{cases} \qquad \text{(voir [1])}$$

2) Si φ est régulière-B en b ($|b| < \infty$) alors il existe un $\eta' \in \boldsymbol{R}$ tel que

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi'(b+\lambda t)}{\varphi'(b+t)} = \lambda^{\eta'} \qquad \text{(voir [2][3])} \tag{2,2}$$

3) Les limites (2,1) et (2,2) ont lieu uniformement sur tout intervalle fini $[\lambda_1, \lambda_2]$, $\lambda_1 > 0$ (voir [3] et [1]).

4) Si φ est régulière-B en b alors φ est réguliers-A en b et $\eta = \eta'+1$.

En effet, d'aprés 3)

$$\int_t^{\lambda t} \varphi'(b+u)du \simeq t\varphi'(b+t) \int_1^{\lambda} u^{\eta'} du, \qquad (t \to +0) \tag{2,3}$$

et puisque d'aprés 2) φ reste bornée sur tout intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha_1 > 0$ il s'en suit que la limite (2,1) existe avec $\eta = \eta'+1$.

5) La fonction φ étant régulière-A en b ($|b| < \infty$), pour que $\eta \neq 0$ il faut et il suffit que pour tout $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi(b+\lambda t)}{\varphi(b+t)} = \lambda^{\eta}$$

existe (voir [1]).

6) Si φ est régulière-A en b ($|b| < \infty$) et $\lambda_i > 0$ $i = 1, 2, 3, 4$, alors

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi(b+\lambda_1 t)-\varphi(b+\lambda_2 t)}{\varphi(b+\lambda_3 t)-\varphi(b+\lambda_4 t)} = \frac{A_\eta(\lambda_1)-A_\eta(\lambda_2)}{A_\eta(\lambda_3)-A_\eta(\lambda_4)} \tag{2,4}$$

Cette relation est une conséquence immédiate de 1).

7) Si φ est régulière-A en b ($|b| < \infty$) et $\eta = 0$ alors pour tout $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi(b+\lambda t)}{\varphi(b+t)} = 1. \qquad ([1])$$

3.

Théorème I. *Soit $f(x)$ continue strictement croissante sur $[0, a_0]$ telle que*

$$\begin{cases} 0 < f(x) < x \text{ pour } x \in (0, a_0] \text{ et soit} \\ f_{n+1}(x) = f(f_n(x)),\ f_0(x) = x;\ a_n = f_n(a_0), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3,0}$$

a) *Si l'equation fonctionnelle* (1,1) *possède une solution φ régulière-A en b, ou $b = 1/(a-1)$ pour $0 < a < 1$ et $b = -\infty$ pour $a = 1$, alors*

$$\begin{cases} \text{la limite } \lim_{n=\infty} \dfrac{f_n(x)-a_n}{a_n-a_{n+1}} = A(x) \text{ existe, cette limite à lieu uniformement} \\ \text{sur } [\varepsilon, a_0],\ \varepsilon > 0 \text{ et } A(x) \text{ est strictement croissante sur } (0, a_0). \end{cases} \tag{3,1}$$

b) *Il existe une seule solution φ telle que $\varphi(\alpha_0) = a_0$, ($\alpha_0 > b$)*

c) *Réciproquement si les conditions* (3,1) *sont satisfaites l'equation fonctionnelle* (1,1) *possède une solution régulière-A en b.*

En outre la fonction f est alors nécessairement dérivable en $+0$ et

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{x} > 0.$$

Démonstration du théorème I. Remarquons d'abord que des hypothèses sur $f(x)$ il découle

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0$$

D'autre part de l'equation fonctionnelle (1,1) nous obtenons

$$(3,2) \qquad f_n(\varphi(x)) = \varphi\left(a^n x - \frac{a^n - 1}{a-1}\right), \quad n = 0, 1, \cdots$$

d'où φ étant continue pour $x > b$ et la limite ci dessus ayant lieu uniformement en x, on a

$$(3,3) \qquad \varphi(b+0) = +0, \quad -\infty \leqq b < \infty$$

Pour montrer les affirmations (a)(b) supposons d'abord que $0 < a < 1$. De (3,0) et (3,2) il découle que

$$\frac{f_n(\varphi(x)) - a_n}{a_{n+1} - a_n} = \frac{\varphi(a^n(x-b)+b) - \varphi(a^n(\alpha_0 - b)+b)}{\varphi(aa^n(\alpha_0-b)+b) - \varphi(a^n(\alpha_0-b)+b)}$$

d'où en vertu de la régularité-A de φ en b et de (2,4) nous obtenons

$$(3,4) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f_n(\varphi(x)) - a_n}{a_{n+1} - a_n} = \frac{A_\eta(x-b) - A_\eta(\alpha_0 - b)}{A_\eta(a(\alpha_0-b)) - A_\eta(\alpha_0 - b)}$$

et cette limite a lieu uniformement en x sur $[b+\varepsilon, \alpha_0]$, $\varepsilon > 0$ (propr. 3) § 2 et (2,4). La monotonie de φ en découle car $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$ et (3,4) entraînent que $x_0 = x_1$.

De (3,3) et de la monotonie de φ il découle que la limite (3,1) existe uniformement en x sur $[\varepsilon, a_0]$, $\varepsilon > 0$.

Si $\eta \neq 0$ nous avons en vertu de (5), § 2), (3,2)

$$(3,5) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f_n(\varphi(x))}{a_n} = \left(\frac{x-b}{\alpha_0 - b}\right)^\eta$$

et en choisissant $x = a\alpha_0 - 1$ on obtient

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a^\eta$$

Comme $a_{n+1} < a_n$ et $0 < a < 1$ il en découle que $\eta > 0$, et en vertu de (3,5) $A(x)$ est strictement croissante pour $x \in (0, a_0)$ en plus de (3, 5) il vient

$$(3,6) \qquad \varphi^{-1}(x) = b + (\alpha_0 - b)\left(\lim_{n=\infty} \frac{f_n(x)}{a_n}\right)^{1/\eta}$$

Si $\eta = 0$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n(\varphi(x))-a_n}{a_{n+1}-a_n} = \frac{\log\,(x-b)/(\alpha_0-b)}{\lg a}$$

d'où $A(x)$ est strictement croissante pour $x \in (0, a_0)$ et

(3,7) $$\varphi^{-1}(x) = b+(\alpha_0-b) \exp\,(-A(x) \log a)$$

L'unicité de φ découle des formules (3,6) et (3,7).

Lorsque $a = 1$ il suffit de poser $\Psi(x) = \varphi(\log x)$; on obtient alors

$$f(\Psi(x)) = \Psi(x/e)$$

où Ψ est régulière-A en 0. En répetant alors les calculs précédents on obtient l'affirmation.

Pour montrer l'affirmation c) posons $a^* = A(a_1)-A(a_2)$ et $b^* = 1/(a^*-1)$ pour $a^* \neq 1$, $b^* = -\infty$ pour $a^* = 1$.
Nous montrerons d'abord que la fonction $\varphi^*(x) = A^{-1}(x)$ est la solution régulière-A en b^* de l'equation

(3,8) $$f(\varphi^*(x)) = \varphi^*(a^*x-1)$$

avec $\varphi^*(0) = a_0$.

Pour obtenir la solution $\varphi(x)$ régulière-A en b de l'equation (1,1) telle que $\varphi(\alpha_0) = a_0$, il suffira de poser

(3,9) $$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi^*\left(\dfrac{[(x-b)/(\alpha_0-b)]^\eta-1}{1-a^*}\right), & \text{pour } a^* < 1,\ a < 1, \text{ et } a^\eta = a^* \\ \varphi^*\left(-\dfrac{\log\,[(x-b)/(\alpha_0-b)]}{\log a}\right), & \text{pour } a^* = 1,\ a < 1 \\ \varphi^*\left(\dfrac{\exp(\eta(x-\alpha_0))-1}{\exp(-\eta)-1}\right), & \text{pour } a^* = e^{-\eta},\ a = 1 \\ \varphi^*(x-\alpha_0), & \text{pour } a^* = 1,\ a = 1 \end{cases}$$

(3,10) Posons $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ on a

(3,11) $$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta a_n} = a^* \text{ et } 0 < a^* \leqq 1$$

En effet de (3,1) et (3,10) il découle que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta a_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n+1}} - \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+2}-a_n}{a_n-a_{n+1}} = A(a_1)-A(a_2)$$

$A(x)$ étant strictement croissante nous avons $a^* > 0$, d'autre part de la limite de (3,11) il découle que

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a^*$$

d'où $0 < a^* \leqq 1$.
Ceci établi, de

$$A(f(x)) = \lim_{n=\infty} \frac{(f_{n+1}(x) - a_{n+1})\Delta a_{n+1}}{(\Delta a_{n+1})(\Delta a_n)} - 1 \tag{3,12}$$

on obtient

$$A(f(x)) = a^* A(x) - 1$$

d'où l'on déduit que la fonction $\varphi^*(x) = A^{-1}(x)$ vérifie l'equation fonctionnelle (3,8), de $A(a_0) = 0$ il vient $\varphi^*(0) = a_0$. Montrons que φ^* est régulière-A en b^*.

Soit $0 < a < 1$; de (3,2) on obtient en posant $\lambda = \varphi^{*-1}(x) - b^*$ et $\lambda_0 = \varphi^{*-1}(a_0) - b^*$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi^*(a^n\lambda + b^*) - \varphi^*(a^n\lambda_0 + b^*)}{\Delta a_n} = \lambda - \lambda_0$$

d'où

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi^*(a^n\lambda\mu + b^*) - \varphi^*(a^n\mu + b^*) + \varphi^*(a^n\mu + b^*) - \varphi^*(a^n\lambda_0 + b^*)}{\Delta a_n} = \lambda\mu - \lambda_0$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi^*(\lambda a^n\mu + b^*) - \varphi^*(a^n\mu + b^*)}{\varphi^*(\lambda_0 a^n\mu + b^*) - \varphi^*(a^n\mu + b^*)} = \frac{\lambda - 1}{\lambda_0 - 1}$$

En vertu de l'hypothèse cette limite est uniforme en $\mu \in [a^*, 1]$ on peut donc poser $t = a^n\mu$ et la régularité-A en b^* en découle. Soit $a^* = 1$; on a

$$f_n(x) = \varphi^*(\varphi^{*-1}(x) - n),$$

et en posant $\lambda = \varphi^{*-1}(x)$ on obtient comme précédemment

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi^*(\lambda - n) - \varphi^*(-n)}{\Delta a_n} = \lambda$$

et en vertu de l'uniformité de cette limite en $\lambda \in [0, 1]$ on obtient

$$\lim_{t=-\infty} \frac{\varphi^*(\lambda + t) - \varphi^*(t)}{\varphi^*(1 + t) - \varphi^*(t)} = \lambda$$

ce qui équivaut à la régularité-A en 0 de $\varphi^*(\log x)$.

En plus $f(x)/x = \varphi(a(\varphi^{-1}(x) - b) + b)/\varphi(\varphi^{-1}(x) - b) + b)$ d'où en vertu de la régularité-A de φ, $\lim f(x)/x$, $(x \to +0)$ existe.

THÉORÈME II. *Supposons que la fonction $f(x)$ vérifie la condition* (3,0) *et que $f(x)$ est dérivable à dérivée bornée sur* $(0, a_0)$ *et continue en* $+0$, *telle que* $f'(+0) > 0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'equation fonctionnelle (1,1) *possède une solution régulière-B en b est que*

$$\lim_{n=\infty} \frac{f'_n(x)}{a_n - a_{n+1}} = a(x) \tag{3,13}$$

existe, que $a(x) > 0$ *et que cette limite soit uniforme sur* $[\varepsilon, a_0]$ $\varepsilon > 0$.

Cette dérnière condition est en particulier satisfaite lorsque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{a_{n+1} \leqq t \leqq a_n} |f'(a_n) - f'(t)| < \infty. \tag{3,14}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II. Pour montrer que la condition (3,13) est nécessaire supposons d'abord que $a < 1$. La fonction φ étant par hypothèse régulière-B en b, on a d'apres (2,3)

$$\Delta a_n = \varphi(a^{n+1}(\alpha_0 - b) + b) - \varphi(a^n(\alpha_0 - b) + b) \simeq a^n(\alpha_0 - b)^{\eta'+1} \varphi'(b + a^n) \int_1^a u^{\eta'} du.$$

d'où

$$\frac{f'_n(x)}{\Delta a_n} \simeq \frac{\varphi'(a^n(\varphi^{-1}(x) - b) + b)\, \varphi^{-1\prime}(x)}{\varphi'(b + a^n)(\alpha_0 - b)^{\eta'+1} \int_1^a u^{\eta'} du}, \qquad (n \to \infty)$$

En vertu de la régularité de φ le second membre de cette equation converge uniformement vers une limite, par suite

$$\lim_{n=\infty} \frac{f'_n(x)}{\Delta a_n} = \frac{(\varphi^{-1}(x) - b)^{\eta'} \varphi^{-1\prime}(x)}{(\alpha_0 - b)^{\eta'+1} \int_1^a u^{\eta'} du},$$

et cette limite a lieu uniformement en x sur $[\varepsilon, a_0]$, $\varepsilon > 0$. Lorsque $a = 1$ on peut répéter le raisonnement sur la fonction $\Psi(x) = \varphi(\log x)$, supposée régulière-$B$ en 0.

Pour montrer que la condition (3,13) est suffisante, remarquons comme au théorème I qu'il suffit de montrer l'existence d'une solution φ régulière-B en b avec $a = f'(+0)$; pour les autres valeurs de a, la solution régulière s'obtient des formules (3,9).

On a

$$f'_{n+1}(x) = f'_n(x) f'(f_n(x)) \tag{3,15}$$

et

$$\frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta a_n} = \frac{f'_n(x) \Delta a_{n+1}}{\Delta a_n f'_{n+1}(x)} f'(f_n(x))$$

on obtient

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta a_n} = a, \quad \text{puisque } \lim_{n=\infty} f'(f_n(x)) = a.$$

Comme $f'(x)$ est par hypothèse bornée sur $[0, a_0]$ il en est de même pour $f'_n(x)$, et la limite (3,13) ayant lieu uniformement on a

$$\lim_{n=\infty} \int_{a_0}^{x} \frac{f'_n(t)}{\Delta a_n} dt = \lim_{n=\infty} \frac{f_n(x)-a_n}{\Delta a_n} = \int_{a_0}^{x} a(t)dt = A(x).$$

Donc la fonction $\varphi(x) = A^{-1}(x)$ satisfait à l'equation (1,1). Il reste à vérifier la régularité-B en b.

Lorsque $0 < a < 1$ on a

$$\frac{f'_n(x)}{f'_n(y)} = \frac{\varphi'(a^n(\varphi^{-1}(x)-b)+b)a(x)}{\varphi'(a^n(\varphi^{-1}(y)-b)+b)a(y)}$$

posons $\lambda = \varphi^{-1}(x)-b$, $\lambda_0 = \varphi^{-1}(y)+b$ on obtient

$$\frac{\varphi'(a^n\lambda+b)}{\varphi'(a^n\lambda_0+b)} = \frac{a(y)\Delta a_n f'_n(x)}{f'_n(y)a(x)\Delta a_n}$$

mais le second membre tend vers 1 uniformement sur $[\varepsilon, a_0]$ d'où

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\varphi'(\lambda t+b)}{\varphi'(t+b)} = 1.$$

Lorsque $a = 1$, on a

$$\frac{f'_n(x)a(y)}{f'_n(y)a(x)} = \frac{\varphi'(A(x)-n)}{\varphi'(A(y)-n)}$$

d'où

$$\lim_{t\to -\infty} \frac{\varphi'(t+\lambda)}{\varphi'(t)} = 1$$

ce qui entraîne que $\varphi(\log x)$ est régulière-B en 0, c.q.f.d. Il nous reste à montrer que la condition (3,14) suffit pour obtenir la limite (3,13).

En posant

$$u_n = \sup_{a_{n+1}\leqq x,\, y\leqq a_n} |f'(x)-f'(y)| \tag{3,16}$$

il est evident que (3.14) equivaut à la condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \tag{3,17}$$

On a

$$\frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta a_n} = \frac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{a_{n+1}-a_n} = f'(a'_n), \quad \text{où } a_{n+1} < a'_n < a_n$$

Posons

$$a_n(x) = f'_n(x)/\Delta a_n$$

nous obtenons

$$a_{n+1}(x)-a_n(x) = a_n(x)(f'(f_n(x))-f'(a'_n))(\Delta a_n/\Delta a_{n+1}).$$

mais comme $a_{n+1} \leqq f_n(x) \leqq a_n$ pour $x \in [a_1, a_0]$ on obtient en vertu de (3,16)

$$a_{n+1}(x) = a_n(x)(1+0(u_n)), \quad x \in [a_1, a_0], \qquad (n \to \infty)$$

En outre (3,15) et $f'(+0) > 0$ entraînent que $a_n(x) > 0$ d'où

$$\lim_{n=\infty} a_n(x) = a(x) > 0$$

et cette limite a lieu uniformement sur $[a_1, a_0]$.

Ceci montré on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'_n(f_k(x))}{\Delta a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'_{n+k}(x)\Delta a_{n+k}}{\Delta a_{n+k}\Delta a_n f'_k(x)}$$

d'où

$$a(f_k(x))f'_k(x) = a^k a(x).$$

Mais tout $y \in [a_{k+1}, a_k]$ peut être mis sous la forme $y = f_k(x)$ avec $x \in [a_1, a_0]$, d'où il résulte la convergence uniforme sur $[a_{k+1}, a_k]$ et par suite la limite (3,13) a lieu uniformement sur $[\varepsilon, a_1]$, $\varepsilon > 0$.

4.

Ces résultats s'appliquent directement au problème de l'itération continue de $f(x)$. En effet une famille d'itérées de f s'obtient en considérant une solution de l'equation (1,1) et en posant

$$(4,1) \qquad f_\sigma(x) = \varphi\left(a^\sigma\varphi^{-1}(x) - \frac{a^\sigma - 1}{a-1}\right) \quad \text{pour } 0 < a < 1$$

$$(4,2) \qquad f_\sigma(x) = \varphi(\varphi^{-1}(x)-\sigma) \qquad \text{pour } a = 1.$$

Une solution du problème de l'itération continue peut être obtenue comme suit;

THÉORÈME III. *Soit $f(x)$ une fonction qui satisfait aux conditions du théorème I. Pour que $f(x)$ possède une famille d'itérées $f_\sigma(x)$ continue strictement monotone en σ et x, telle que*

$$\lim \frac{f_\sigma(x)-x}{f(x)-x} \qquad (x \to +0)$$

existe pour tout σ, il faut et il suffit que l'équation (1,1) *possède une solution régulière-A en b.*

Cette famille d'itérées est alors donnée par (4,1) *où* (4,2) *et elle est unique.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III. Soit φ une solution régulière-A en b de l'equation (1,1) et $f_\sigma(x)$ la famille d'itérées définie par (4,1) où (4,2), en vertu de (4,1) nous obtenons

$$\lim_{x=+0} (f_\sigma(x)-x)/(f(x)-x) = (a^\sigma-1)/(a-1), \quad \text{avec } a = \lim_{x=+0} f(x)/x$$

où nous faisons la convention de remplacer $(a^\sigma-1)/(a-1)$ par σ lorsque $a=1$.

La solution φ^* régulière-A en b^* de l'equation (3,8) est liée à φ par les formules (3,9) on vérifie que la famille d'itérées $f_\sigma(x)$ obténue à l'aide de φ est la même que celle obténue par φ^*. Ainsi la famille d'itérees définie par une solution régulière est unique.

Réciproquement soit $f_\sigma(x)$ une famille d'itérées de $f(x)$ continue et strictement monotone en σ et x.

En posant $\varphi(\sigma) = f_{-\sigma}(a_0)$, il découle de (1,2) que

$$f(\varphi(\sigma)) = \varphi(\sigma-1), \quad \text{et} \quad f_\sigma(x) = \varphi(\varphi^{-1}(x)-\sigma).$$

Par suite, en posant $t = \varphi^{-1}(x)$ on a

$$\frac{\varphi(t-\sigma)-\varphi(t)}{\varphi(t-1)-\varphi(t)} = \frac{f_\sigma(x)-x}{f(x)-x}$$

et comme en vertu de (4,2), $t \to -\infty$ lorsque $x \to +0$, il s'en suit que $\lim_{t\to-\infty}(\varphi(t-\sigma)-\varphi(t))/(\varphi(t-1)-\varphi(t))$ existe pour tout σ ce qui equivaut au fait que φ est régulière-A en $-\infty$.

THÉORÈME IV. *Soit $f(x)$ une fonction qui satisfait aux conditions du théorème II. Pour que $f(x)$ possède une famille d'itérées $f_\sigma(x)$ dérivable en σ et x, telle que*

$$(\partial f_\sigma(x)/\partial\sigma) < 0 \quad \textit{et} \quad f'_\sigma(+0) = (f'(+0))^\sigma \tag{4,3}$$

il faut et il suffit que l'equation fonctionelle (1.1) *possède une solution régulière-B en b.*

Cette famille d'itérées est alors donné par (4,1) *ou* (4,2).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME IV. Soit φ une solution régulière-B en b de (1,1), de (4,1) nous obtenons

$$f'_\sigma(x) = \varphi'(a^\sigma\varphi^{-1}(x)-(a^\sigma-1)/(a-1))a^\sigma/\varphi'(\varphi^{-1}(x)). \tag{4,4}$$

Lorsque $a<1$ posons $t = \varphi^{-1}(x)-b$, il vient

$$f'_\sigma(x) = \varphi'(a^\sigma t+b)a^\sigma/\varphi'(t+b) \tag{4,5}$$

et comme φ est régulière-B en b la limite du second membre existe lorsque $t \to +0$ c-a-d $x \to +0$ et il existe $\eta > 0$ tel que

$$\lim_{x\to+0} f'_\sigma(x) = a^{\eta\sigma} \quad \text{où} \quad a^\eta = f'(+0).$$

Lorsque $a = 1$ posons dans (4,3) $t = \varphi^{-1}(x)$ nous aurons alors $f'_\sigma(x) = \varphi'(t-\sigma)/\varphi'(t)$, mais φ étant régulière-B en $-\infty$, $\varphi(\log(x))$ l'est en 0, et on aura;

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi'(t-\sigma)/\varphi'(t) = \lim_{x\to+0} (\varphi(\log(x)-\sigma))'/(\varphi(\log(x))' = \exp(-\eta\sigma)$$

d'où

$$\lim_{x\to+0} f'_\sigma(x) = (f'(+0))^\sigma.$$

Réciproquement définissons $\varphi(x) = f_{-x}(a_0)$, par hypothèse $\varphi'(\sigma) > 0$, de (4,4) et (4,5) il découle que φ est régulière-B en $-\infty$, c.q.f.d.

5.

Remarquons enfin que les conditions suffisantes de l'existence de cette famille d'itérées à savoir

1. $f'(+0) = 1$ et $\int_0^{a_0} |df'(x)| < \infty$
2. $f'(x) = a+0(x^\delta), \quad 0 < a < 1, \quad 0 < \delta$
3. $f'(x) = 1-\alpha(\beta+1)x+0(x^{\beta+\delta}), \quad 0 < \beta, \delta$
4. $0 < f'(+0) < 1$ et $|f'(x)-f'(y)| \leqq K|x-y|, \quad x, y \in (0, a_0]$

qui ont été données respectivement par P. Lévy [4] G. Szekeres [5], [6] et M. Kuczma [7] sont toutes contenues dans la condition (3,14).

Il est évident que les conditions 1., 4., entrainent (3,14). Pour montrer que c'est le cas pour 2. remarquons que de 2. et (3,0) il découle que

$$a_{n+1} = aa_n + 0(a_n^{1+\delta}) \qquad (n \to \infty)$$

par suite

$$a_{n+1}/a_n = a + 0(a_n^\delta) \qquad (n \to \infty)$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\delta < \infty, \qquad \text{puisque } 0 < a < 1.$$

D'autre part de (3,16) on a

$$u_n \leqq 2 \sup_{a_{n+1}\leqq x \leqq a_n} |f'(x)-a| \leqq Ma_n^\delta, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

La condition 3. entraine (4,13) car

$$u_n \leqq 2 \sup_{a_{n+1}\leqq x\leqq a_n} |f'(x)-1|' \leqq \alpha(\beta+1)(a_n^\beta - a_{n+1}^\beta) + Ma_n^{\beta+\delta}.$$

Or comme l'a montré G. Szekeres ([6] th Ic)

$$a_n \simeq (\alpha\beta n)^{-1/\beta} \qquad (n \to \infty)$$

ce qui implique la convergence de la série $\sum u_n$.

Notons que les méthodes utilisées par ces auteurs pour obtenir la famille d'itérées telle que la limite

$$\lim \left(f_\sigma(x) - x\right)/\left(f(x) - x\right) \qquad (x \to +0) \tag{5,1}$$

existe pour tout σ, diffèrent suivant les conditions envisagées. Or dans tous ces cas on peut obtenir la famille $f_\sigma(x)$ par un même algorithme donné par P. Lévy.

La condition (5,1) a été donnéé par P. Lévy comme condition d'unicité, pour $a = 1$, et lorsque $0 < a < 1$ par G. Szekeres sous la forme $\lim_{x \to +0} f_\sigma(x)/x = a^\sigma$. Or cette condition a elle seule permet de définir la famille d'itérées que ces auteurs ont désignée par "famille régulière d'itérées".

References

[1] R. Bojanic et J. Karamata, On a class of functions of regular asymptotic behaviour, *Math. Research. center Madison Wisc., Technical Summary Report* 436 (1963).

[2] J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière des fonctions, *Mathematica* (*Cluj*) (1930), 38—53.

[3] T. Van Aardenne-Ehrenfest, N. G. De Bruijn, J. Korevaar, A note on slowly oscillating functions, *Nieuw Archief vor Wiskunde* (2) 23 (1949), 77—86.

[4] P. Lévy, Fonctions á croissance régulière et itération d'ordre fractionnaire, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4), 5 (1928) p. 282.

[5] G. Szekeres, On a theorem of P. Lévy, *Publ. Math. Hungarian Acad. Sc.*, série A, 5 (1960), 277—282.

[6] G. Szekeres, Regular iterations of real and complex functions, *Acta Math.* 100 (1958), 203—258.

[7] M. Kuczma, A remark on commutable functions and continuous iterations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 13 (1962).

Institut de Mathématique,
Université de Genève,
Suisse.