

Die

WURZEL

Zeitschrift für Mathematik

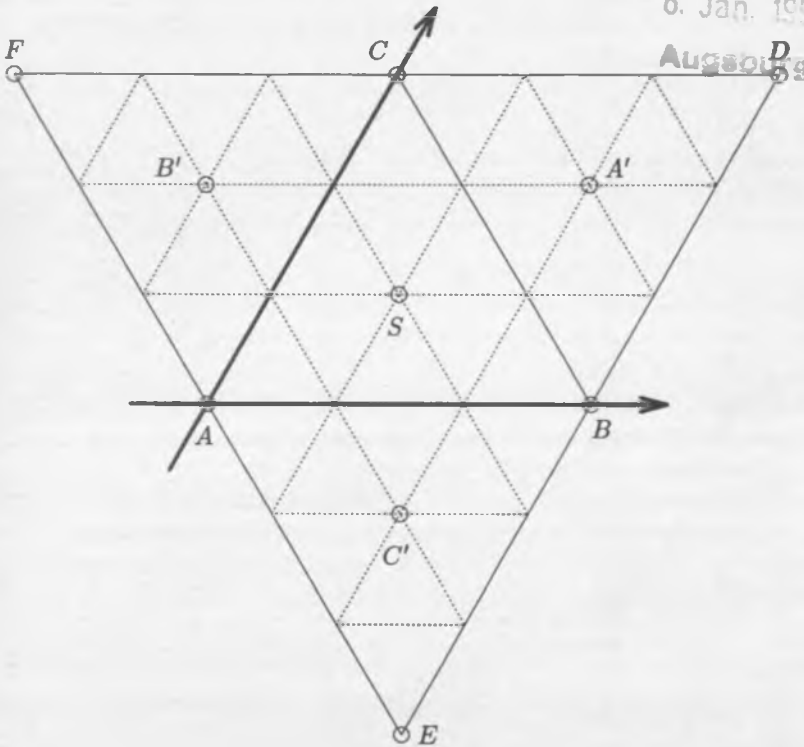
94-0

1,00 DM

*gab es auch bei
Universitätsbibliothek*

8. Jan. 1998

Augsburg



Zwangläufig bewegliche Polyeder

In [5] haben wir u. a. die orientierten Matroide der Platonischen Körper und Archimedische Körper studiert. Die zugehörigen (p_3 -maximalen) Pseudogradenarrangements (kurz PGAs) besaßen Querverbindungen zu vielen anderen Gebieten, die wir (teilweise) nur in Bildern angedeutet haben. Eine weitere Verbindung führt zu sogenannten *zwangläufigen Polyedern* [14]. Bewegliche Stabwerke und Polyeder sind schon seit längerem bekannt, z. B. [3, 13, 2, 10] und [15]. Von O. Roeschel wurde eine Klasse beschrieben, die direkt mit p_3 -maximalen PGAs in Verbindung steht. Wie in [5] erwähnt, codieren orientierte Matroide bzw. orientierte PGAs topologische Informationen. Das heißt, um aus einem PGA ein zwangläufiges Polyedermodell zu erstellen, muß man dem zugehörigen Stabgerüst Längen zuweisen, die eine Bewegung ermöglichen.

Die *Kinematik* oder *Bewegungslehre* befaßt sich mit Gesetzmäßigkeiten bei Lageänderungen starrer Körper. Als *ebene kinematische Kette* wird ein System von N Gliedern (starre Scheiben, Stäbe, usw.) S_i , $i = 1, \dots, N$ und G Gelenken G_k , $k = 1, \dots, G$ bezeichnet, die sich alle in oder parallel zu einer Bezugsebene bewegen [7]. Wir setzen weiter voraus, daß jedes Glied S_i mit mindestens einem anderen Glied S_j über ein *Gelenk* G_k verbunden ist. Gelenke können mechanisch verschieden ausgeführt sein und sich im *Gelenkfreiheitsgrad* F_k unterscheiden.

Um z. B. ein vorliegendes Getriebe zu untersuchen, ist es oft sinnvoll, ein *Ersatzgetriebe* zu betrachten, in dem die einzelnen (Gelenk-)Bestandteile durch Ersatzgelenke dargestellt werden. Diese dienen als Symbolik, um ein Gelenk qualitativ zu beurteilen, unabhängig von der tatsächlichen mechanischen Realisation. Abb. 1 enthält mögliche mechanische Realisationen, während in den Ersatzgetrieben von Abb. 2 die Drehgelenke nur noch durch Punkte symbolisiert werden.

Ein *Getriebe* (oder *Mechanismus*) ist eine ebene kinematische Kette, bei der ein Glied festgehalten wird, das sog. *Gestellglied*. Die Beweglichkeit eines Ersatzgetriebes wird durch den *Gesamtfreiheitsgrad* F beschrieben; ein Getriebe mit: $F < 0$ heißt *überstarr*, $F = 0$ heißt *starr*, $F = 1$ heißt *zwangläufig* und $F > 1$ heißt *frei beweglich*. Ein Gelenkglied hat in der Ebene den maximalen Freiheitsgrad $b = 3$ (Verschiebung in x - und y -Richtung und Drehung) und im Raum $b = 6$ (Verschiebung in x -, y - und z -Richtung

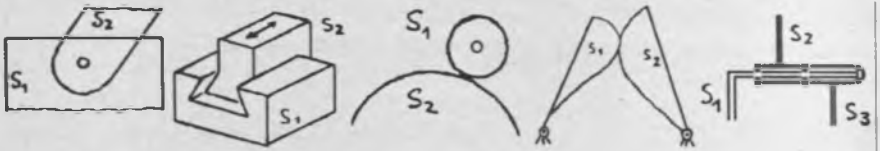


Abbildung 1: Beispiele für ebene Gelenke: a) Drehgelenk $F = 1$, b) Schubgelenk $F = 1$, c) Wälzgelenk $F = 1$, d) Gleitwälzgelenk $F = 2$ und e) p -fach Drehgelenk $F = p - 1$ (hier $p = 2$).

sowie Drehungen in drei zueinander senkrechten Ebenen). Der Gesamtfreiheitsgrad eines Getriebes errechnet sich nach der *topologischen Formel von Kutzbach* wie folgt:

$$F := b(N - 1) - \sum_{k=1}^G (b - F_k) \quad \begin{cases} b = 3 & \text{ebenes Getriebe} \\ b = 6 & \text{räumliches Getriebe} \end{cases} \quad (1)$$

Der Zwanglauf eines Getriebes hat zur Folge, daß die Positionen aller Glieder eindeutig durch die Vorgabe der Position eines sog. *Antriebsgliedes* (das natürlich nicht das Gestellglied ist) bestimmt ist. Zwangläufige Getriebe werden daher zur Bewegungsübertragung benutzt. Wir nehmen im folgenden an, daß alle ebenen Gelenke einfach sind, d. h. nur einen Freiheitsgrad ($F_k = 1$) haben. Dazu ersetzen wir beispielsweise ein p -faches Drehgelenk durch p einfache Drehgelenke. Für zwangläufige Getriebe folgt dann aus (1) die *Zwanglaufbedingung von Grübler*, [7]: $3N - 2G = 4$. Abb. 2 zeigt einige Beispiele zur Berechnung der Freiheitsgrade einfacher ebener Getriebe.

Allerdings gibt es Fälle, in denen (1) bei Wahl spezieller Abmessungen korrigiert werden muß, vgl. [8, S. 112] und Abb. 2 d). Wir wollen nun solche Spezialfälle von Getrieben betrachten, die in ihrer Struktur von p_3 -maximalen PGAs bestimmt werden. Zur Erinnerung: Ein *Pseudogeradenarrangement* aus n Pseudogeraden ist eine Menge von n einfachen Kurven, die sich „in der Art von Geraden“ schneiden. Dabei betrachten wir die Darstellung in der projektiven Ebene, um sicherzustellen, daß sich je zwei Pseudogeraden genau einmal schneiden. (Die projektive Ebene stelle man sich als Kreis vor, bei dem gegenüberliegende Punkte des Kreisrandes identifiziert werden, vgl. Abb. 4.) In einem *einfachen* PGA schneiden sich in jedem Schnittpunkt genau zwei Pseudogeraden. Schließlich heißt ein einfaches PGA *p_3 -maximal*, wenn die Anzahl der Pseudodreiecke maximal ist. Für $n \geq 4$ liegt dann jedes Pseudogeradensegment an genau einem Dreieck. Nach Voraussetzung wird jede Pseudogerade von jeder der verbleibenden $(n - 1)$ Pseudogeraden

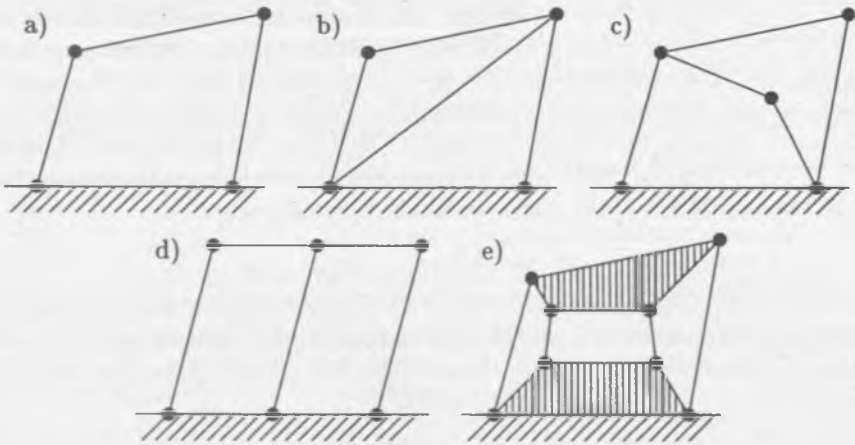


Abbildung 2: Einfache ebene Getriebe: a) zwangsläufig mit $N = 4, G = 4, F = 1$, b) starr mit $N = 5, G = 6, F = 0$, c) ebenfalls zwangsläufig mit $N = 6, G = 7, F = 1$, d) zwangsläufig mit $N = 7, G = 8, F = 2$ da ein sog. Nullstab vorkommt und e) überstarr mit $N = 6, G = 8, F = -1$.

genau einmal geschnitten, also in $(n - 1)$ Segmente unterteilt. Weil es daher $n(n - 1)$ Segmente gibt, gibt es in einem p_3 -maximalen PGA $\frac{n(n-1)}{3}$ Dreiecke. Außerdem gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte (Gelenke), vgl. Abb. 4.

Aufgabe: Wie kann man zeigen, daß es in einem einfachen PGA genau $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Zellen (Flächen) gibt?

Zur Berechnung des Gesamtfreiheitsgrades eines „ p_3 -maximalen ebenen Getriebes“ kann man für die Glieder des Getriebes entweder die einzelnen Segmente benutzen (Stabwerk, dann liegen 3-fache Gelenke vor) oder aber die Dreiecke (System starrer Scheiben), das Ergebnis ist jeweils dasselbe:

a) Ebene Rechnung mit Stäben als Elementen:

$$N = n(n - 1), \quad G = 3 \frac{n(n - 1)}{2} \Rightarrow F = -3.$$

b) Ebene Rechnung mit Dreiecken als Elementen:

$$N = \frac{n(n - 1)}{3}, \quad G = \frac{n(n - 1)}{2} \Rightarrow F = -3.$$

Die p_3 -maximalen Getriebe können im Raum auf einer Kugeloberfläche (einer „doppelten“ projektiven Ebene) realisiert werden, indem man zwei identische PGAs miteinander verklebt (dabei kommt man zu Pseudogroßkreisen, die sich auf der Kugeloberfläche genau *zweimal* schneiden). Die Zahl der Dreiecke als Glieder verdoppelt sich also. Bildet man die Gelenke als Drehgelenke um zwei Achsen ($F_k = 2$) aus (wie beim Bastelbogen¹ in Abb. 3), so liefert (1) für diese räumlichen Getriebe ($b = 6$):

$$N = \frac{2}{3}n(n-1), \quad G = n(n-1) \Rightarrow F = -6.$$

D. h. im allgemeinen Fall sind p_3 -maximale Getriebe überstarr. Wählt man aber die Abmessungen der einzelnen Stäbe bzw. Scheiben richtig, dann ist doch eine zwangläufige Bewegung möglich.

Betrachtet man nicht zweifache Drehgelenke in den Ecken, sondern z. B. Knickgelenke, wie sie durch Gummischlauchstücke realisiert werden können, dann ist das Gebilde nicht mehr starr bzw. zwangläufig. Abb. 5 zeigt das Stabwerk des sog. Heureka-Polyeders aus dünnen Stangen und Verbindungsstücken aus Gummischlauch. In jedem Gelenk sind jetzt Drehungen um 3 Drehachsen möglich ($F_k = 3$), und aus (1) folgt $F = \frac{1}{2}n(n-1) - 6$, d. h. die Beweglichkeit nimmt mit der Anzahl der Pseudogeraden zu. Hier lassen sich sehr viele Formen erreichen, vgl. [3] und Abb. 5 (Mitte).

Mit den in [6] beschriebenen Methoden ist es möglich, Stabwerke zu vorgelegten PGAs zu finden. Bislang existieren noch keine Existenzaussagen, zu welchen p_3 -maximalen PGAs tatsächlich zwangläufige Polyeder existieren. Die Klasse der p_3 -maximalen bietet auf alle Fälle reichhaltige Auswahl an Kandidaten, da es vermutlich ab $n = 18$ immer mehrere p_3 -maximale PGAs gibt, [1]. Ist die Symmetrie ein wichtiger Hinweis auf eine zwangläufige Realisation eines Getriebes, dann sind evtl. p_3 -maximale PGAs ohne kombinatorische Symmetrie aussichtsreiche Kandidaten, für die nur überstarre Realisationen existieren. Man kann nun umgekehrt folgern, daß p_3 -maximale PGAs ohne (kombinatorische) Symmetrie evtl. keine zwangläufige Realisation besitzen. Das kleinste bekannte p_3 -maximale PGA ohne Symmetrie hat allerdings schon $n = 30$ Elemente, so daß die zugehörigen Gleichungen recht komplex sind (die p_3 -maximalen PGAs sind bis einschließlich $n = 18$ vollständig bekannt, ab $n = 22$ sind nur die p_3 -maximalen PGAs mit einer Symmetrie bekannt, und es ist offen, ob evtl. ein p_3 -maximales PGA ohne Symmetrie existiert). Durch die große Anzahl der Dreiecke in p_3 -maximalen

¹erhältlich bei Prof. Dr. O. Röschel, Institut für Geometrie, TU Graz, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz, Österreich

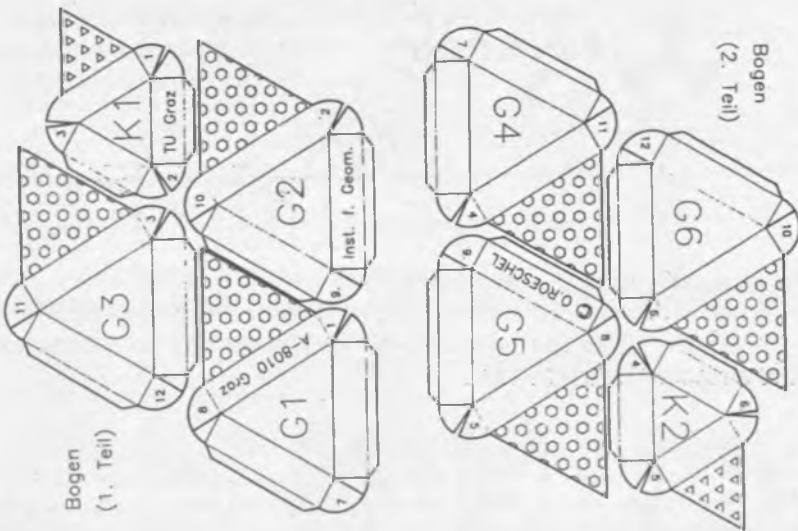


Abbildung 3: Bastelbögen für das zwangsläufige Polyeder #1 [9].

PGAs ist es möglich, überstarre bzw. bei geeigneter Symmetrie zwangsläufige Getriebe zu erzeugen. Es gibt auch zwangsläufige Strukturen, die auf dem gleichen Gelenkmechanismus aufbauen, aber nicht von p_3 -maximalen PGAs abstammen, vgl. Abb. 6. Es ist offen, ob es neben den p_3 -maximalen PGAs weitere Klassen von PGAs gibt, zu denen zwangsläufige Getriebe existieren.

Die nachfolgende Literaturliste stellt nur einen kleinen Teil des zu diesem Thema verfügbaren Materials dar. Eine umfangreichere Liste sowie weitere Bastelbögen für zwangsläufige Polyeder können gegen Einsendung eines mit DM 2,- frankierten C3-Rückumschlags bei den Autoren bestellt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Bokowski, J., Roudneff, J.-P., Stempel, T.-K.: 1997, Cell decompositions of the projective plane with Petrie polygons of constant length, *Disc. Comp. Geom.*, 17, pp377-392.
- [2] Connely, R.: 1978, A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 47, pp333-338.
- [3] DaMert: 1989, Vector Flexor, *DaMert Company, 900 75th Ave., Oakland, California 94621, USA.*

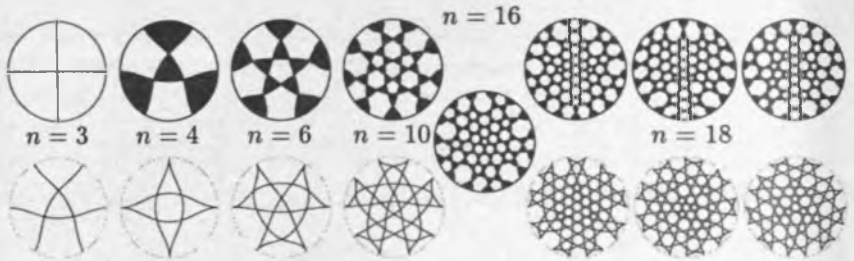


Abbildung 4: Die ersten p_3 -maximalen PGAs mit bis zu 18 Elementen. Die oberen Bilder unterscheiden sich von den unteren dadurch, daß eine Pseudogerade auf den Kreisrand gelegt wurde. Bereits für $n = 18$ gibt es drei verschiedene p_3 -maximale PGAs.

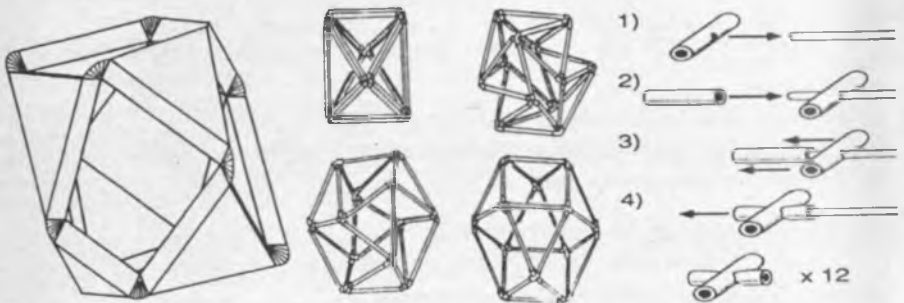


Abbildung 5: (Links) Darstellung des zwangläufigen Polyeders aus Abb. 3 [9], (Mitte) das zugehörige bewegliche Stabwerk, (rechts) Anleitung zur Herstellung der flexiblen Verbindungsstücke aus Gummischlauch [3].

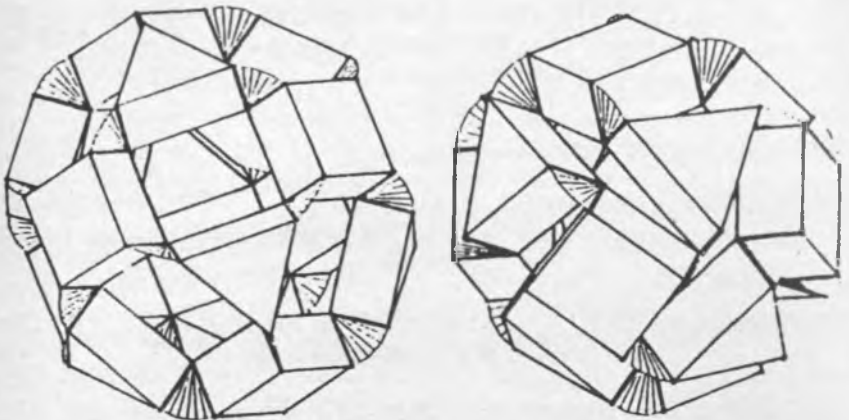


Abbildung 6: Bewegung eines zwangläufigen Polyeders [9], das nicht von einem PGA abstammt.

- [4] Groß, C., Stempel, T.-K.: 1997, On Regular Maps & Oriented Matroids, *Manuskript*, 21p.
- [5] Groß, C., Stempel, T.-K.: 1997, Orientierte Matroide — Ein anderer Blick auf die Platonischen Körper, \sqrt{WURZEL} , 31/7, pp152-159.
- [6] Groß, C., Stempel, T.-K.: 1997, Diagramme und Seifenblasen, \sqrt{WURZEL} , 31/6, pp116-121.
- [7] Hoschek, J.: 1990, Kinematik ebener und räumlicher Getriebe, *Vorlesung an der TH Darmstadt*.
- [8] Müller, H. R.: 1963, Kinematik, *Sammlung Göschen 584/584a*, Walter de Gruyter, Berlin, 171p
- [9] Roeschel, O.: 1995, Zwangsläufig bewegliche Polyedermodelle I, *Mathematica Pannonica*, 6/1, pp267-284.
- [10] Schattschneider, D., Walker, W.: 1987, M. C. Escher Kaleidozyklen, *TACO*, Berlin.
- [11] Stachel, H.: 1991, The Heureka Polyhedron, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, pp447-459.
- [12] Stachel, H.: 1992, Zwei bemerkenswerte bewegliche Strukturen, *J. Geom.*, 43, pp14-29.
- [13] Steffen, K.: 1978, Flexing Sphere $f_0 = 9$, $f_1 = 21$, $f_2 = 14$, *Bastelbogen*.
- [14] Stempel, T.-K.: 1996, Zur Erzeugung, Klassifizierung und Einbettung kombinatorischer Mannigfaltigkeiten und Komplexe, *TH Darmstadt, Dissertation*, 128p.
- [15] Wohlhart, K.: 1993, Heureka Octahedron and Brussels Folding Cube as Special Cases of The Turning Tower, *The Sixth IFToMM International Symposium on Linkages and Computer Aided Design Methods - Theory and Practice of Mechanisms, II*, pp303-312.

Christian Groß, Torsten-Karl Stempel
• Technische Hochschule Darmstadt, Fachbereich Mathematik
Schloßgartenstr. 7, 64289 Darmstadt
gross/stempel@mathematik.th-darmstadt.de