Beiträge zur Angewandten Analysis und Informatik

Helmut Brakhage zu Ehren

Herausgeber
Eberhard Schock
Fachbereich Mathematik
Universität Kaiserslautern

Shaker Verlag
Aachen 1994

Verschärfung des Polynomialitätsbeweises für die erwartete Anzahl von Schattenecken im Rotationssymmetrie-Modell

K. H. Borgwardt
Institut für Mathematik der Universität Augsburg
Universitätsstraße 14, 86159 Augsburg

Prof. Dr. Helmut Brakhage zur Emeritierung gewidmet

Zusammenfassung

In den Arbeiten [3] und [4] wurde für nach dem Rotationssymmetrie-Modell verteilte lineare Optimierungsprobleme die erwartete Anzahl von Schattenecken $E_{m,n}(S)$ bei m Ungleichungsnebenbedingungen und n Variablen nach oben durch eine Funktion $m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^3 \cdot Const.$ abgeschätzt.
Diese Oberschranke bezieht sich auf alle Dimensionspaare $(m \geq n)$ und alle Verteilungen, die Unabhängigkeit, Identität und Rotationssymmetrie garantieren.
Sie ist allerdings nicht scharf in der Abhängigkeit von n. Eine asymptotische Unterschranke wurde in der Höhe von $m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^2 \cdot Const.$ nachgewiesen, wobei asymptotisch für n fest, $m \to \infty$ steht. Gleichzeitig aber ist aus [2] und [4] bekannt, daß es eine asymptotische Oberschranke der Form $m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^2 \cdot Const.$ gibt. Die Diskrepanz zur generellen Oberschranke wird verständlich, wenn man sich das Ziel der Analyse vor Augen führt. Es soll eine gleichmäßige Oberschranke für alle rotationssymmetrischen Verteilungen und alle denkbaren Dimensionspaare $(m \geq n)$ gewonnen werden. Dadurch entstehen beweistechnische Schwierigkeiten einmal in der genauen Erfassung von Raumwinkeln und zum zweiten durch die Beliebigkeit der rotationssymmetrischen Verteilung.
In dieser Arbeit wird ein wesentlicher Schritt in Richtung Präzisierung getan, indem eine verbesserte Raumwinkelabschätzung verwendet wird.
Wir gelangen schließlich zu einer generell gültigen neuen Oberschranke der Größenordnung

$$m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^{\frac{5}{2}} \cdot Const.$$

1 Einleitung und Notationseinführung

In dieser Arbeit versuchen wir, den Polynomialitätsbeweis aus [4] für $E_{m,n}(S)$, die erwartete Anzahl von Schattenecken in linearen Optimierungsproblemen des Typs

$$\text{maximiere } v^T x \text{ unter } a_1^T x \leq 1, \ldots, a_m^T x \leq 1 \text{ mit } x, v, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

zu verschärfen und zu vereinfachen. Wir unterstellen dabei eine Verteilung der linearen Optimierungsprobleme gemäß dem stochastischen Modell (RSM):

> Die Vektoren $a_1, \ldots, a_m, v$ und ein Hilfsvektor u seien auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ unabhängig, identisch und rotationssymmetrisch verteilt. (2)

Diese Unterstellung rechtfertigt die Konzentration auf die fast sicheren Nichtentartungsfälle.

> Man spricht von Nichtentartung, wenn je n Vektoren aus $\{a_1, \ldots, a_m, v, u\}$ linear unabhängig und je $n+1$ Vektoren aus $\{a_1, \ldots, a_m, v, u\}$ in allgemeiner Lage sind. (3)

Die Größe $E_{m,n}(S)$ mißt nun für Probleme des Typs (1) mit m Ungleichungen und n Variablen die erwartete Zahl der Schattenecken unter Projektion auf $Span(u, v)$.

> Sei X der Zulässigkeitsbereich $\{x \mid a_1^T x \le 1, \ldots, a_m^T x \le 1\}$. Eine Ecke x_* heißt Schattenecke von X bezüglich u und v, wenn bei orthogonaler Projektion auf $Span(u, v)$ dieses x_* auf eine Ecke des zweidimensionalen Bildes von X in $Span(u, v)$ abgebildet wird. (4)

Für S konnte in [4] eine duale Charakterisierung im Raum der a_i angegeben werden, die mit Mitteln der stochastischen Geometrie eine Integraldarstellung für $E_{m,n}(S)$ erlaubt. Diese beschreibt die Ereigniswahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Basislösung von Problem (1) tatsächlich Schattenecke ist, und multipliziert diese Wahrscheinlichkeit mit der Kandidatenanzahl, nämlich $\binom{m}{n}$. Die so gewonnene Integraldarstellung kann durch zwei Koordinatentransformationen erheblich vereinfacht werden, wodurch man zu folgender Form gelangt:

$$E_{m,n}(S) = \binom{m}{n} \cdot n \cdot \{(n-2)!\}^2 \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n) \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \cdot$$
$$\int_0^1 G(h)^{m-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} |\Theta - c_n^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1, \ldots, c_{n-1})\}|^2 \cdot$$
$$W(c_1, \ldots, c_{n-1}) f(c_1) \cdots f(c_{n-1}) \, d\bar{c}_1 \ldots d\bar{c}_{n-1} \, d\Theta f(c_n) \, d\bar{c}_n \, dh. \quad (5)$$

Diese Integraldarstellung beschreibt geometrisch die erwartete Anzahl von Facetten des Polytops $KH(a_1, \ldots, a_m)$, welche von $Span(u, v)$ geschnitten werden. Als sehr gewinnbringend erweist sich ein Vergleich mit einer verwandten Größe $E_{m,n}(Z)$, die geometrisch die erwartete Anzahl von Facetten beschreibt, welche vom Strahl $\mathbb{R}^+ v$ geschnitten werden. Die Integraldarstellung hierfür lautet:

$$E_{m,n}(Z) = \binom{m}{n} \cdot n \cdot \{(n-2)!\}^2 \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n) \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \cdot$$
$$\int_0^1 G(h)^{m-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} |\Theta - c_n^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1, \ldots, c_{n-1})\}|^2 \cdot$$
$$V(c_1, \ldots, c_n) f(c_1) \cdots f(c_{n-1}) \, d\bar{c}_1 \cdots d\bar{c}_{n-1} \, d\Theta f(c_n) \, d\bar{c}_n \, dh. \quad (6)$$

Der Vergleich ist insofern vorteilhaft, als bekannt ist, daß

$$E_{m,n}(Z) \leq 1, \tag{7}$$

und daß deshalb gilt

$$E_{m,n}(S) \leq \frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)}. \tag{8}$$

Durch die Ähnlichkeit der Integrale in Zähler und Nenner läßt sich der Quotient sehr viel leichter abschätzen als der Ausdruck (5), wovon wir jetzt Gebrauch machen werden.

Doch zunächst erklären wir die aufgetretenen Begriffe.

Wir verwenden die Abkürzungen *Span*, KH, KK für die lineare Hülle, die konvexe Hülle sowie den konvexen Kegel.

Ω_k und ω_k stehen für Einheitskugel und Einheitssphäre im $\mathbb{R}^k$, also

$$\Omega_k := \{x \mid \|x\| \leq 1,\ x \in \mathbb{R}^k\} \text{ und } \omega_k := \{x \mid \|x\| = 1,\ x \in \mathbb{R}^k\}. \tag{9}$$

λ_k steht für das k-dimensionale Lebesguemaß, demnach gilt

$$\lambda_n(\Omega_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \text{ und } \lambda_{n-1}(\omega_n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \tag{10}$$

$c_1, \ldots, c_n$ sind (Spalten-)Vektoren in $\mathbb{R}^n$, also $c = (c^1, \ldots, c^n)^T$.

$\overline{c} = (c^1, \ldots, c^{n-1})^T$ und $\overline{\overline{c}} = (c^1, \ldots, c^{n-2})^T$ bezeichnen zugehörige gestutzte Vektoren.

Nach unseren speziellen Koordinatentransformationen soll gelten:

$c_1^n = \ldots = c_n^n = h,\ c_1^{n-1} = \ldots = c_{n-1}^{n-1} = \Theta$ mit $h \geq 0$, $\Theta \geq 0$, wobei $h, \Theta \in \mathbb{R}$.

Mit f bezeichnen wir die Dichtefunktion unserer Verteilung auf $\mathbb{R}^n$ und mit F die Wahrscheinlichkeit $F(r) := P(\|x\| \leq r)$ für $r \in [0, \infty]$, ($F(r)$ ist also die Radialverteilungsfunktion). (11)

Die Randverteilungsfunktion zur gegebenen Verteilung heiße G, also gilt $G(h) := P(x^n \leq h)\ \forall h \in \mathbb{R}$. (12)

$W(c_1, \ldots, c_{n-1})$ stellt den Raumwinkel von $KK(c_1, \ldots, c_{n-1})$, beziehungsweise den Anteil dar, den dieser konvexe Kegel innerhalb der Hyperebene $H(0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ aus der zugehörigen Einheitskugel ausschneidet:

$$\begin{aligned} W(c_1, \ldots, c_{n-1}) &:= \frac{\lambda_{n-1}(\Omega_n \cap KK(c_1, \ldots, c_{n-1}))}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \\ &= \frac{\lambda_{n-2}(\omega_n \cap KK(c_1, \ldots, c_{n-1}))}{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}. \end{aligned} \tag{13}$$

Entsprechend ist die Größe $V(c_1, \ldots, c_n)$ aus Formel (6) zu verstehen als Raumwinkel bzw. Ausschnittsanteil des Kegels $KK(c_1, \ldots, c_n)$:

$$V(c_1, \ldots, c_n) := \frac{\lambda_n(\Omega_n \cap KK(c_1, \ldots, c_n))}{\lambda_n(\Omega_n)} = \frac{\lambda_{n-1}(\omega_n \cap KK(c_1, \ldots, c_n))}{\lambda_{n-1}(\omega_n)}. \tag{14}$$

Wir werden nun eine konsequente Weiterentwicklung des Prinzips vom punktweisen Vergleich einsetzen, um die Beziehung zwischen W und V besser beschreiben zu können. Dies ermöglicht eine verfeinerte Abschätzung des Quotienten, welche sich der Anwendung des Cavalierischen Prinzips als überlegen erweist. Danach wird mit verbesserten Parametern der Beweisgang aus [4] simuliert. Wir gelangen so zu der Einsparung eines Faktors $O(\sqrt{n})$.

Theorem 1
Für alle Verteilungen gemäß unserem Rotationssymmetrie-Modell (2) gilt

$$E_{m,n}(S) \leq m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^{\frac{5}{2}} \cdot Const. \tag{15}$$

Korollar 1
Damit läßt sich auch die aus [4] bekannte Oberschranke für die erwartete Pivotschrittzahl s_t des Dimensionssteigerungsalgorithmus zur kompletten Lösung von (1) verbessern auf

$$E_{m,n}(s_t) \leq m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^{\frac{7}{2}} \cdot Const. \tag{16}$$

2 Eine Ausnutzung des Prinzips vom punktweisen Vergleich

Den Schlüssel zur Gewinnung einer Oberschranke für $\frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)}$ bildet nach unserer bisherigen Methodik der punktweise Vergleich für gleiche Werte von $t := \sqrt{h^2 + \Theta^2}$. Dies ermöglicht eine starke Vereinfachung des Integralquotienten, weil bei festgehaltenem t etliche Größen im Zähler- und Nennerintegral invariant bleiben. Denn

- die interne Verteilung der Größen $(\hat{\bar{c}}, \Theta, h)^T$ innerhalb von $\{c \mid c^n = h,\ c^{n-1} = \Theta\}$ ist für alle Paare (h, Θ) mit konstantem $t := \sqrt{h^2 + \Theta^2}$ gleich,
- das stochastische Gewicht jeder dieser Konstellationen mit übereinstimmendem t ist im wesentlichen gleich,
- die sphärischen Maße $W(c_1, \ldots, c_{n-1})$ verändern sich nicht, wenn $\bar{\bar{c}}_1, \ldots, \bar{\bar{c}}_{n-1}$ und t gleich bleiben, aber gleichzeitig h und Θ variieren.

Nach der Substitution $t := \sqrt{h^2 + \Theta^2}$, $T := \sqrt{t^2 - h^2}$ gelangen wir zu

$$\frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)} = \frac{n \int_0^1 t \int_0^t G(h)^{m-n} T^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |T - c_n^{n-1}|}{\int_0^1 t \int_0^t G(h)^{m-n} T^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |T - c_n^{n-1}|} \cdot \frac{\cdot \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1, \ldots, c_{n-1})\}|^2}{\cdot \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1, \ldots, c_{n-1})\}|^2}.$$

$$\frac{\cdot W(c_1,\ldots,c_{n-1})\, f(c_1)\cdots f(c_{n-1})\, d\bar{c}_1\cdots d\bar{c}_{n-1}\, f(c_n)\, d\bar{c}_n\, dh\, dt}{\cdot V(c_1,\ldots,c_n)\, f(c_1)\cdots f(c_{n-1})\, d\bar{c}_1\cdots d\bar{c}_{n-1}\, f(c_n)\, d\bar{c}_n\, dh\, dt} \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \frac{n\int\limits_0^t G(h)^{m-n}T^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |T-c_n^{n-1}|}{\int\limits_0^t G(h)^{m-n}T^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |T-c_n^{n-1}|}$$

$$\frac{\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1,\ldots,c_{n-1})\}|^2}{\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1,\ldots,c_{n-1})\}|^2}$$

$$\frac{\cdot W(c_1,\ldots,c_{n-1})\, f(c_1)\cdots f(c_{n-1})\, d\bar{c}_1\cdots d\bar{c}_{n-1}\, f(c_n)\, d\bar{c}_n\, dh}{\cdot V(c_1,\ldots,c_n)\, f(c_1)\cdots f(c_{n-1})\, d\bar{c}_1\cdots d\bar{c}_{n-1}\, f(c_n)\, d\bar{c}_n\, dh}. \qquad (17)$$

Wir beachten, daß $W(c_1,\ldots,c_{n-1})$ proportional ist zu

$$\lambda_{n-2}(\omega_n \cap KK(c_1,\ldots,c_{n-1})) = \int\limits_{KH(c_1,\ldots,c_{n-1})} \frac{\sqrt{h^2+\Theta^2}}{\sqrt{h^2+\Theta^2+\hat{c}^T\hat{c}}^{\,n-1}}\, d\hat{c}$$

wobei $(\hat{c},T,h)^T$ ein Element innerhalb des (T,h)- Bereichs und $w = \frac{(\hat{c},T,h)}{|(\hat{c},T,h)^T|}$ ist. Über die Partition des (T,h)-Bereichs in infinitesimal kleine Flächenelemente $d\hat{c}$ haben wir so indirekt die Oberfläche von $\omega_n \cap KK(c_1,\ldots,c_{n-1})$ in infinitesimal kleine Flächenelemente $M(w)$ partitioniert (von durchaus unterschiedlicher Ausdehnung, aber winzig klein). Mit diesen Größen $M(w)$ gelingt auch eine Beschreibung von $\lambda_{n-1}(\omega_n \cap KK(c_1,\ldots,c_n))$. Denn

$$\omega_n \cap KK(c_1,\ldots,c_n) = \bigcup_{w\in\omega_n\cap KK(c_1,\ldots,c_n)} [KK\{c_n, M(w)\} \cap \omega_n].$$

Bezeichnen wir $KK\{c_n, M(w)\} \cap \omega_n$ durch $\bar{M}(c_n,w)$, dann ergibt sich

$$\lambda_{n-2}(\omega_n \cap KK(c_1,\ldots,c_{n-1})) = \int\limits_{KK(c_1,\ldots,c_{n-1})\cap\omega_n} \lambda(dw) \quad \text{und}$$

$$\lambda_{n-1}(\omega_n \cap KK(c_1,\ldots,c_n)) = \int\limits_{KK(c_1,\ldots,c_{n-1})\cap\omega_n} \frac{\lambda_{n-1}(\bar{M}(c_n,w))}{\lambda_{n-2}(M(w))}\lambda(dw). \qquad (18)$$

Wir interpretieren $M(w)$ als Resultat einer Projektion von $d\hat{c}$ auf ω_n. Das Oberflächenelement $M(w)$ ist jeweils abhängig von (T,h) und $\hat{c}$. Damit können wir kumulieren über alle w, die sich bei festem t und festem $\hat{c}$, aber variierendem (T,h) ergeben, und erhalten (unter Verwendung von I für die Indikatorfunktion eines Ereignisses):

$$\frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)} \leq \sup_{t\in[0,1]} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \lambda_{n-1}(\omega_n)\cdot n \cdot \int\limits_0^t G(h)^{m-n}\, T^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |T-c_n^{n-1}|\cdot}{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \int\limits_0^t G(h)^{m-n}\, T^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |T-c_n^{n-1}|\cdot}$$

$$\frac{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1,\ldots,c_{n-1})\}|^2\, I(\dot{\hat{c}} \in KH(\bar{\bar{c}}_1 \ldots \bar{\bar{c}}_{n-1}))\cdot}{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1,\ldots,c_{n-1})\}|^2\, I(\dot{\hat{c}} \in KH(\bar{\bar{c}}_1,\ldots,\bar{\bar{c}}_{n-1}))\cdot}$$
$$\frac{\lambda_{n-2}(M(w(\dot{\hat{c}},T,h)))\, f(c_1)\cdots f(c_{n-1})\, d\bar{\bar{c}}_1 \cdots d\bar{\bar{c}}_{n-1}\, f(c_n)\, d\bar{c}_n\, dh\, d\hat{c}}{\lambda_{n-1}(\tilde{M}(c_n, w(\dot{\hat{c}},T,h)))\, f(c_1)\cdots f(c_{n-1})\, d\bar{\bar{c}}_1 \cdots d\bar{\bar{c}}_{n-1}\, f(c_n)\, d\bar{c}_n\, dh\, d\hat{c}} \leq$$
$$\leq \sup_{t\in[0,1]}\ \sup_{\dot{\hat{c}}\in\mathbb{R}^{n-2}} \frac{\lambda_{n-1}(\omega_n)\cdot n \cdot \int_0^t G(h)^{m-n}\, T^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |T - c_n^{n-1}|\cdot}{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \int_0^t G(h)^{m-n}\, T^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |T - c_n^{n-1}|\cdot}$$
$$\frac{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1,..,c_{n-1})\}|^2\, I(\dot{\hat{c}} \in KH(\bar{\bar{c}}_1,..,\bar{\bar{c}}_{n-1}))}{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}\{KH(c_1,..,c_{n-1})\}|^2\, I(\dot{\hat{c}} \in KH(\bar{\bar{c}}_1,..,\bar{\bar{c}}_{n-1}))}$$
$$\frac{\cdot\lambda_{n-2}(M(w(\dot{\hat{c}},T,h)))\, f(c_1)\cdots f(c_{n-1})\, d\bar{\bar{c}}_1 \cdots d\bar{\bar{c}}_{n-1}\, f(c_n)\, d\bar{c}_n\, dh}{\cdot\lambda_{n-1}(\tilde{M}\{c_n, w(\dot{\hat{c}},T,h)\})\, f(c_1)\cdots f(c_{n-1})\, d\bar{\bar{c}}_1 \cdots d\bar{\bar{c}}_{n-1}\, f(c_n)\, d\bar{c}_n\, dh}. \tag{19}$$

Zur Vereinfachung soll $\lambda_{n-1}(\tilde{M}\{c_n, w(\dot{\hat{c}},.,.)\})$ mit Hilfe von $\lambda_{n-2}(M(w))$ abgeschätzt werden.

3 Eine genauere Analyse des Raumwinkels

In [4] wurde das Prinzip von Cavalieri eingesetzt, um zu einer Abschätzung von $V(c_1,\ldots,c_n)$ mit Hilfe von $W(c_1,\ldots,c_{n-1})$ zu kommen. Diesmal schätzen wir feiner ab.

Sei dazu w ein Oberflächenpunkt von ω_n, der gleichzeitig in $KK(c_1,\ldots,c_{n-1})$ liegt. Dieses w wird induziert durch einen Punkt $(\hat{c},T,h)^T$ innerhalb $KH(c_1,\ldots,c_{n-1})$, dessen Projektion auf ω_n unser w ist. Sei $M(w)$ ein infinitesimal kleiner Bereich um w in ω_n und $\tilde{M}(w)$ die Schnittmenge von $KK(M(w))$ mit dem Tangentialraum bei w zu ω_n, beides innerhalb der Hyperebene $H(0,c_1,\ldots,c_{n-1})$ (Hyperebene durch diese Punkte). Dann ist $Dim(\tilde{M}(w)) = n-2$. Orthogonal zur affinen Hülle von $\tilde{M}(w)$ ist $Span(w,z)$, wobei z der (zu e_n orientierte und normierte) Normalenvektor zu $W(c_1,\ldots,c_{n-1})$ ist, also $\tilde{M}(w)) \subset w + Span(w,z)^{\perp}$. Bei genügender Kleinheit von $M(w)$ stellt $\tilde{M}(w)$ eine ausreichend gute Approximation für $M(w)$ dar. Wir interessieren uns für den Raumwinkel (bzgl. ω_n), den $M(w)$ in Verbindung mit einem beliebigen Punkt $q \in \omega_n$ verursacht, d.h. für

$$\frac{\lambda_{n-1}(KK\{q, M(w)\} \cap \omega_n)}{\lambda_{n-1}(\omega_n)}. \tag{20}$$

O.B.d.A. sei $q = e_n$ und $w \in Span(e_n, e_{n-1})$, d.h. $w = (0,\ldots,w^{n-1},w^n)^T$. Zur Abkürzung schreiben wir $\tilde{M}(w) := \tilde{M}\{e_n, w\}$. Dann bestimmt sich der Raumwinkel des angegebenen Kegels durch die drei Formeln

$$\text{Raumwinkel} = \text{Öffnungswinkel} \cdot \text{Öffnungstiefe}, \tag{21}$$

Öffnungswinkel von e_n auf $M(w) :=$

$$\frac{\lambda_{n-2}\{x \mid \|x\| = 1, x^n = 0, Span(x, e_n) \cap M(w) \neq \emptyset\}}{\lambda_{n-2}\{x \mid \|x\| = 1,\ x^n = 0\}} \tag{22}$$

$$\text{Öffnungstiefe von } e_n \text{ auf } M(w) = \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot \int_{w^n}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh. \tag{23}$$

Bekanntlich ist $\frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot \sqrt{1-h^2}^{\,n-3}$ die Randdichte des Oberflächenanteils von ω_n entlang der n-ten Koordinate. Für alle Punkte x der „Äquator-Menge" im obigen Zähler von (22) laufen wir auf $\omega_n \cap Span(e_n, x)$ von e_n so weit in Richtung Äquator ($x^n = 0$), bis $M(w)$ erreicht ist. Wegen der Infinitesimalität von $M(w)$ ist dies angenähert bis $h = w^n$.

Bemerkung 1
Für obigen Öffnungswinkelanteil erhalten wir die Formel

$$\frac{\lambda_{n-2}(M(w)) \cdot \cos(\angle(z, \hat{w}^{\perp}))}{(1-(w^n)^2)^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{24}$$

wobei $\hat{w}^{\perp}$ *für* $(0, \ldots, 0, -w^n, w^{n-1})^T$ *steht, also der zu* e_n *orientierte Tangentialvektor an* $\omega_n \cap Span(e_n, e_{n-1})$ *bei* w *ist.* $\angle$ *bezeichnet jeweils den Winkel zwischen den angegebenen Vektoren.*
Der gesamte Raumwinkel ergibt sich so zu

$$\frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot \int_{w^n}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh \cdot \frac{\lambda_{n-2}(M(w)) \cdot \cos(\angle(z, \hat{w}^{\perp}))}{(1-(w^n)^2)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{25}$$

Diese Formel gilt selbstverständlich auch bei $w^n < 0$. Dort ist die Öffnungsweite die gleiche (Symmetrie zwischen e_n und $-e_n$). Anders verhält sich die Öffnungstiefe, wo der überschrittene Winkel zwischen e_n und w jetzt über $\frac{\pi}{2}$ hinausgeht.
Zur Abkürzung schreiben wir (wenn vorteilhaft) $\eta := w^n$.

Lemma 1
Der betrachtete Raumwinkel läßt sich folgendermaßen umrechnen.

$$\frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot \int_{w^n}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh \cdot \frac{\lambda_{n-2}(M(w)) \cdot \cos(\angle(z, \hat{w}^{\perp}))}{(1-\eta^2)^{\frac{n-2}{2}}} = \tag{26}$$

$$= \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot \int_{|w^n|}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} h\, dh \cdot \frac{\lambda_{n-2}(M(w)) \cdot \cos(\angle(z, \hat{w}^{\perp}))}{(1-\eta^2)^{\frac{n-2}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\int_{w^n}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh}{\int_{|w^n|}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} h\, dh} =$$

$$= \left\langle \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \lambda_{n-2}(M(w)) \cdot \cos\left(\angle(z,\hat{w}^{\perp})\right) \right\rangle \cdot$$

$$\cdot \frac{\int_{w^n}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh}{\int_{|w^n|}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} h\, dh}$$

Dabei gibt der Ausdruck in $\langle\rangle$ die Cavalieri- Abschätzung für den Raumwinkel an.

Bemerkung 2
Der Ausdruck $(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\angle(z,\hat{w}^{\perp}))$ beschreibt gerade den Abstand des Punktes e_n zur Hyperebene $H(0,c_1,\ldots,c_{n-1})$ (mit Normalenvektor z) .

Beweis:

$$e_n = ({e_n}^T\hat{w}^{\perp})\hat{w}^{\perp} + ({e_n}^T w)w = (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\hat{w}^{\perp} + \eta w$$

$$\Longrightarrow z^T e_n = (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}(z^T\hat{w}^{\perp}) = (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\cos(\angle(z,\hat{w}^{\perp})). \quad \square$$

Bemerkung 3
Multipliziert man obige Höhe (Abstand) mit $\frac{1}{n-1} \cdot \lambda_{n-2}(M(w)) \cdot \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)}$, dann entsteht genau die Abschätzung aus [4] mit Hilfe der Formel von Cavalieri, wobei nun $M(w)$ anstelle von $\omega_n \cap KK(c_1,\ldots,c_{n-1})$ getreten ist.

Beweis:
Die Abschätzung nach dem Prinzip von Cavalieri verläuft folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_n(KH\{0,\bar{M}(w)\})}{\lambda_{n-1}(KH\{0,M(w)\})} \frac{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})}{\lambda_n(\Omega_n)} \geq \\ \geq \; & \frac{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})}{n\cdot\lambda_n(\Omega_n)}(\text{Höhe von } e_n \text{ auf } H(0,c_1,\ldots,c_{n-1})) = \\ = \; & \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{(n-1)\cdot\lambda_{n-1}(\omega_n)}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\angle(z,\hat{w}^{\perp})) \; \square \end{aligned} \tag{27}$$

Betrachten wir nun wieder Lemma 1. Der darin neu gewonnene Faktor außerhalb von $\langle\rangle$ geht für $w^n \to -1$ gegen ∞. Bei $w^n = 0$ liefert er bereits eine Vergrößerung des Nennerintegrals um $\frac{1}{\mu_n}$ mit der im folgenden häufig benutzten Bezeichnung

$$\mu_n := \frac{2\cdot\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{(n-1)\lambda_{n-1}(\omega_n)}.$$

Bemerkung 4
Für μ_n gelten nach [4] folgende Beziehungen

$$\sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)^2\pi}} \leq \mu_n = \frac{2\cdot\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{(n-1)\lambda_{n-1}(\omega_n)} \leq \sqrt{\frac{2}{(n-1)\pi}}. \tag{28}$$

Lemma 2
Der Ausdruck

$$\frac{\int\limits_{w^n}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh}{(n-1)\int\limits_{|w^n|}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} h dh} = \frac{\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh}{(n-1)\int\limits_{|\eta|}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} h dh} = \frac{\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh}{(1-\eta^2)^{\frac{n-1}{2}}} \tag{29}$$

stellt eine monoton fallende, konvexe Funktion von $w^n = \eta$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ *dar.*

Beweis:
Die 1. Ableitung hat folgenden Wert

$$\frac{-(1-\eta^2)^{\frac{n-3}{2}}(1-\eta^2)^{\frac{n-1}{2}} + \int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh \cdot \eta (1-\eta^2)^{\frac{n-3}{2}}(n-1)}{(1-\eta^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{-(1-\eta^2)^{\frac{n-1}{2}} + \int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh \cdot \eta(n-1)}{(1-\eta^2)^{\frac{n-1}{2}+1}} \tag{30}$$

Daraus wird ersichtlich, daß der Ableitungswert bei $\eta = 0$ gerade -1 ist.
Bei $\eta < 0$ zeigt sich die Konvexität unmittelbar. Denn der Zähler ist immer negativ und wächst gegen -1. Seine Ableitung ist gerade $\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh \cdot (n-1)$.
Der Nenner ist positiv und wird mit wachsendem η größer.
Also steigt die Ableitung des Gesamtausdrucks mit η an.
Um diese Aussage auch für den Fall $\eta > 0$ zu bestätigen, werden wir zusätzliche Umformungen vornehmen, die so nur hier zulässig sind.

$$(30) \;=\; \frac{-\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\frac{n-3}{2}} h\, dh \cdot (n-1) + \int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\frac{n-3}{2}} dh \cdot \eta(n-1)}{(1-\eta^2) \int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\frac{n-3}{2}} h\, dh} =$$

$$= -\frac{1}{1+\eta} \cdot \frac{\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\frac{n-3}{2}} \cdot \frac{h-\eta}{1-\eta}\, dh}{\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\frac{n-3}{2}} \cdot h\, dh} =$$

$$= -\frac{1}{1+\eta} \cdot \left[\frac{\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\frac{n-3}{2}} \cdot \frac{h-\eta}{1-\eta}\, dh}{\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\frac{n-3}{2}}\, dh} \right] \cdot \left[\frac{\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\frac{n-3}{2}} \cdot h\, dh}{\int\limits_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\frac{n-3}{2}}\, dh} \right]^{-1} .$$

Der erste Quotient wird kleiner bei wachsendem η. Der Rest stellt die Relation zwischen zwei Erwartungswerten her. Durch wachsendes η erfolgt eine Umgewichtung zugunsten höherer Werte von h, dadurch steigt der Erwartungswert in der letzten Klammer. Für die Zielgröße im ersten Erwartungswert $\frac{h-\eta}{1-\eta}$ wirkt sich dies jedoch sogar entgegengesetzt aus. Je größer η wird, desto steiler ist der relative Abfall der Dichtefunktion. Deshalb bekommen große Werte dieser Zielgröße dann immer weniger Gewicht. Also sinkt diese Relation. Somit wächst der negative Gesamtausdruck und die Ableitung steigt. □

Jetzt wollen wir die erzielte Verbesserung quantifizieren. Problematisch ist dabei die Einschätzung von $\int_{w^n}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh$. Bei $w^n >> 0$ gelingt eine Approximation einfach durch

$$\int_{w^n}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh \sim \int_{w^n}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} \cdot h\, dh = \frac{1}{n-1} \cdot (1-(w^n)^2)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{31}$$

Bei $1 > h > w^n > Const.$ hat man damit das Integral allenfalls um den Faktor $Const.$ unterschätzt. Nun entwickeln wir eine Abschätzung für alle $w^n > 0$ und schreiben η für w^n.

Lemma 3

$$\frac{\int_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} \cdot h\, dh}{\int_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh} \leq \eta + (1-\eta) \cdot \frac{2 \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{(n-1)\lambda_{n-1}(\omega_n)} \; \forall \eta > 0. \tag{32}$$

Beweis:

$$\frac{\int_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} \cdot h\, dh}{\int_{\eta}^{1} \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh} = \eta + \frac{\int_{0}^{1} \sqrt{1-[\eta+(1-\eta)x]^2}^{\,n-3} \cdot x\, dx}{\int_{0}^{1} \sqrt{1-[\eta+(1-\eta)x]^2}^{\,n-3} dx} \cdot (1-\eta) \leq^{*}$$

$$\leq \; \eta + \frac{\int_{0}^{1} \sqrt{1-[x]^2}^{\,n-3} \cdot x\, dx}{\int_{0}^{1} \sqrt{1-[x]^2}^{\,n-3} dx} \cdot (1-\eta) = \eta + (1-\eta) \cdot \frac{2 \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{(n-1)\lambda_{n-1}(\omega_n)}. \tag{33}$$

* gilt, weil für $0 \leq x_k \leq x_g \leq 1$:

$$\frac{1-x_k^2}{1-x_g^2} = \frac{(1-x_k)(1+x_k)}{(1-x_g)(1+x_g)} \leq \frac{1-x_k}{1-x_g}$$

$$\Longrightarrow \frac{1-x_k^2}{1-x_g^2} \leq \frac{(1-\eta)^2(1-x_k^2) + 2\eta(1-\eta)(1-x_k)}{(1-\eta)^2(1-x_g^2) + 2\eta(1-\eta)(1-x_g)} = \frac{1-[\eta+(1-\eta)x_k]^2}{1-[\eta+(1-\eta)x_g]^2}.$$

Dies bedeutet eine stärkere Gewichtung zugunsten großer x-Werte, wenn η kleiner wird, am extremsten also bei $\eta = 0$. Deshalb ist dann der Erwartungswert von x am größten. □

Korollar 2
Für den gesamten Raumwinkel liegt bei $\eta = w^n > 0$ folgende Unterschranke vor:

$$\frac{\lambda_{n-1}(\tilde{M}(w))}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \geq$$
$$\geq \left[\frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \frac{1}{n-1} \cdot (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\angle(z, \hat{w}^{\perp})) \cdot \lambda_{n-2}(M(w))\right] \frac{1}{\eta + (1-\eta)\cdot\mu_n}$$

Bemerkung 5
Die neu gewonnene Korrektur besteht aus dem Faktor $\frac{1}{\eta+(1-\eta)\cdot\mu_n}$ und wird besonders dann zu einer Verkleinerung des Gesamtausdrucks (19) beitragen, wenn $\eta << 1$. Bei $\eta \to 0$ wird dieser Faktor gegen $\frac{(n-1)\lambda_{n-1}(\omega_n)}{2\cdot\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} = \frac{1}{\mu_n}$ konvergieren.

Bemerkung 6
Formuliert man Korollar 2 für Vollkugelanteile in der aus [4] bekannten Schreibweise, dann erhält man:

$$\frac{\lambda_n(KK\{e_n, M(w)\} \cap \Omega_n)}{\lambda_n(\Omega_n)} \geq$$
$$\frac{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})}{n\cdot\lambda_n(\Omega_n)} \frac{\text{Höhe von } \frac{c_n}{\|c_n\|} \text{ auf } H(0, c_1, \ldots, c_{n-1})}{\eta + (1-\eta)\mu_n} \lambda_{n-1}(KH\{0, M(w)\}). \quad (34)$$

4 Einfügung in den alten Beweisgang

w ist bekanntlich entstanden durch Normierung eines Vektors $(\hat{\hat{c}}, T, h)^T$ mit $\hat{\hat{c}} \in \mathbb{R}^{n-2}$, wobei $T = \sqrt{t^2 - h^2}$. Nun sollen $\hat{\hat{c}}$ und t fixiert und dann alle möglichen Werte von h (also auch von T) durchlaufen werden. w stellt sich dar als Funktion von $(\hat{\hat{c}}, T, h)$, nämlich

$$w(\hat{\hat{c}}, T, h) = \frac{1}{\sqrt{h^2 + T^2 + \hat{\hat{c}}^T\hat{\hat{c}}}} \begin{pmatrix} \hat{\hat{c}} \\ T \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \hat{\hat{c}}^T\hat{\hat{c}}}} \begin{pmatrix} \hat{\hat{c}} \\ T \\ h \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Wie aus §3 bekannt, erhalten wir bei Kombination eines Punktes w mit einem Punkt $q = \frac{c_n}{\|c_n\|}$ einen Verbesserungsfaktor gegenüber der bisherigen Abschätzung, den wir

$$\Phi(w^T \frac{c_n}{\|c_n\|}) = \Phi(w(\hat{\hat{c}}, T, h)^T \frac{c_n}{\|c_n\|}) = \Phi(\eta) = \frac{\int_\eta^1 \sqrt{1-h^2}^{\,n-3} dh}{(1-\eta^2)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-1}} \quad (36)$$
$$\text{mit } \eta = w^T \frac{c_n}{\|c_n\|}$$

nennen wollen. Dieser Verbesserungsfaktor Φ ist auch deutbar als monoton fallende Funktion von η mit $\Phi : [-1, +1] \to \mathbb{R}^+$. Damit ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)} \leq \frac{\frac{\lambda_n(\Omega_n)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot n^2 \cdot \int_0^t G(h)^{m-n} T^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |T - c_n^{n-1}| f(c_n)\, d\bar{c}_n\, dh}{\int_0^t G(h)^{m-n} \frac{h}{Tt} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |T - c_n^{n-1}|^2 \frac{1}{\|c_n\|} \Phi(w(\hat{\hat{c}}, T, h)^T \frac{c_n}{\|c_n\|}) f(c_n) d\bar{c}_n\, dh} \quad (37)$$

Zur Vereinfachung wollen wir die in Lemma 2 bewiesene Konvexität von Φ ausnutzen. Wir betrachten ein c_n und kumulieren jeweils über ein Quadrupel von daraus gewonnenen Punkten c_{ni}, $i = 1,2,3,4$, bzw. über die $\xi_i := \frac{1}{|c_{ni}|}c_{ni}$. Mit $c_{n1} := c_n$ seien folgende vier Punkte gegeben

$$\xi_1 := \frac{1}{|c_n|}c_{n1} := \frac{1}{|c_n|}\begin{pmatrix} \overline{\overline{c_n}} \\ c_n^{n-1} \\ h \end{pmatrix} \quad , \quad \xi_2 := \frac{1}{|c_n|}c_{n2} := \frac{1}{|c_n|}\begin{pmatrix} -\overline{\overline{c_n}} \\ c_n^{n-1} \\ h \end{pmatrix},$$

$$\xi_3 := \frac{1}{|c_n|}c_{n3} := \frac{1}{|c_n|}\begin{pmatrix} \overline{\overline{c_n}} \\ -c_n^{n-1} \\ h \end{pmatrix} \quad , \quad \xi_4 := \frac{1}{|c_n|}c_{n4} := \frac{1}{|c_n|}\begin{pmatrix} -\overline{\overline{c_n}} \\ -c_n^{n-1} \\ h \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Das Baryzentrum der vier Punkte c_{ni} liegt in $(\overline{\overline{0}}, 0, h)^T$, das der Punkte ξ_i liegt im Punkt $\frac{h}{|c_n|}e_n = \frac{1}{|c_n|}(\overline{\overline{0}}, 0, h)^T$.

Lemma 4
Wir erreichen eine Verkleinerung des Nenners von (37), wenn wir dort statt $\frac{c_n}{|c_n|}$ jeweils den Punkt $\frac{h}{|c_n|}e_n$ im Argument von Φ verwenden.

Beweis:
Im Nenner von (37) haben alle Punkte c_{ni} gleiche Dichte f. c_{n1} und c_{n2} werden sogar vollkommen gleich bewertet (außerhalb Φ), denn in diese Gewichtung geht nur die $(n-1)$te Koordinate ein. Gleiches gilt für die beiden anderen Punkte c_{n3} und c_{n4}.

Sei o. B. d. A. $c_n^{n-1} \leq 0$ und $\hat{\hat{c}}^T \overline{\overline{c_n}} \leq 0$ sowie $w = \frac{1}{\sqrt{h^2+T^2+\hat{\hat{c}}^T\hat{\hat{c}}}}\begin{pmatrix} \hat{\hat{c}} \\ T \\ h \end{pmatrix}$ mit $T > 0$.

Also werden auch die beiden Punkte ξ_1 und ξ_2 höher gewichtet als das Paar ξ_3 und ξ_4 , denn $|T - c_n^{n-1}| > |T + c_n^{n-1}|$. Nun gilt aufgrund der Konvexität von Φ:

$$\frac{|T - c_n^{n-1}|^2 \cdot (\Phi(w^T\xi_1) + \Phi(w^T\xi_2)) + |T + c_n^{n-1}|^2 \cdot (\Phi(w^T\xi_3) + \Phi(w^T\xi_4))}{|T - c_n^{n-1}|^2 \cdot 2 + |T + c_n^{n-1}|^2 \cdot 2} \geq$$

$$\geq \Phi\left(w^T \frac{|T - c_n^{n-1}|^2 \cdot (\xi_1 + \xi_2) + |T + c_n^{n-1}|^2 \cdot (\xi_3 + \xi_4)}{|T - c_n^{n-1}|^2 \cdot 2 + |T + c_n^{n-1}|^2 \cdot 2}\right) =: \Phi(w^T\xi). \tag{39}$$

Dabei ist ξ ein Vektor mit $\overline{\overline{\xi}} = 0$, $\xi^{n-1} \leq 0$, $\xi^n = \frac{h}{|c_n|}$. Da aber Φ mit kleiner werdendem $\eta = w^T x$ steigt, und weil gilt

$$w^T\xi = \frac{h^2 + T\xi^{n-1}}{|c_n|\sqrt{h^2 + T^2 + \hat{\hat{c}}^T\hat{\hat{c}}}} \leq \frac{h^2}{|c_n|\sqrt{h^2 + T^2 + \hat{\hat{c}}^T\hat{\hat{c}}}} = w^T\frac{h}{|c_n|}e_n, \tag{40}$$

liefert die angegebene Ersetzung einen kleineren Nennerwert. □

Weil auf jeden Fall gilt

$$w^T\frac{h}{|c_n|}e_n = \eta \geq 0, \tag{41}$$

können wir die folgende Abschätzung verwenden.

Lemma 5
Der Nenner von (37) wird verkleinert, wenn man $\Phi(w(\hat{\hat{c}}, T, h)^T \frac{c_n}{\|c_n\|})$ ersetzt durch

$$\frac{1}{\eta + (1-\eta)\mu_n} = \frac{1}{\frac{w^n h}{\|c_n\|} + (1 - \frac{w^n h}{\|c_n\|})\mu_n}. \tag{42}$$

Lemma 6
Für gegebene t und h ist nach der Festlegung auf $\frac{h}{\|c_n\|} e_n$ als Bezugspunkt der schlechtestmögliche (geringste) Verbesserungsfaktor gemäß (42) (über alle Werte von $\hat{\hat{c}}$ variiert):

$$\Psi(h, t, r) := \frac{1}{\frac{h \cdot h}{\|c_n\| \cdot t} + (1 - \frac{h \cdot h}{\|c_n\| \cdot t})\mu_n}. \tag{43}$$

Beweis:
Ausdruck (42) ist monoton fallend bei wachsendem w^n. Das höchste w^n in (35) liefert aber

$$\hat{\hat{c}} = 0 \text{ und } w = \frac{1}{\sqrt{h^2 + T^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ T \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 \\ T \\ h \end{pmatrix}. \square \tag{44}$$

Damit erhält man

$$\frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)} \le \frac{\lambda_n(\Omega_n) \cdot n^2 \cdot \int_0^t G(h)^{m-n} T^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |T - c_n^{n-1}| f(c_n) d\bar{c}_n \, dh}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1}) \int_0^t G(h)^{m-n} \frac{h}{Tt} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |T - c_n^{n-1}|^2 \frac{1}{\|c_n\|} \Psi(h, t, r) f(c_n) d\bar{c}_n \, dh} \tag{45}$$

5 Gewinnung der durchschnittlichen Anzahl

Wir gehen zu Polarkoordinaten über und benutzen $\|c_n\| = r = r(c_n), h, \gamma(c_n) \in \omega_{n-1}$, so daß

$$c_n = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - h^2}\,\gamma(c_n) \\ h \end{pmatrix} \text{ und } \bar{c}_n = \sqrt{r^2 - h^2}\,\gamma(c_n)$$

sowie zur Abkürzung $R := R(r, h) = \sqrt{r^2 - h^2}$.
Bei der Analyse von (45) nutzen wir aus, daß für festes $r(c_n)$ gilt:

$$\frac{1}{r(c_n)} \left[\int_{\omega_{n-1}(R)} |T - c_n^{n-1}|^2 d\gamma_R(\bar{c}_n) \right] = \frac{1}{r(c_n)} \left[T^2 + \frac{1}{n-1} R^2 \right] R^{n-2} \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}). \tag{46}$$

Für den Zähler erhalten wir entsprechend

$$\int_{\omega_{n-1}(R)} |T - c_n^{n-1}| d\gamma_R(\bar{c}_n) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{c_n^{n-1}\le -T\le 0} T + |c_n^{n-1}| d\gamma_R(\overline{c_n}) + \int\limits_{0\le T\le c_n^{n-1}} |c_n^{n-1}| - T d\gamma_R(\overline{c_n}) \\
&+ \int\limits_{-T\le c_n^{n-1}\le 0} T + |c_n^{n-1}| d\gamma_R(\overline{c_n}) + \int\limits_{0\le c_n^{n-1}\le T} T - |c_n^{n-1}| d\gamma_R(\overline{c_n}) \\
&= \int\limits_{-T\le c_n^{n-1}\le T} T\, d\gamma_R(\overline{c_n}) + \int\limits_{|T|\le |c_n^{n-1}|} |c_n^{n-1}|\, d\gamma_R(\overline{c_n}) \\
&= T\cdot \int\limits_{\omega_{n-1}(R)} d\gamma_R(\overline{c_n}) + \int\limits_{|T|\le |c_n^{n-1}|} |c_n^{n-1}| - T\, d\gamma_R(\overline{c_n}) \\
&\le \int\limits_{\omega_{n-1}(R)} \max\{R,T\}\, d\gamma_R(\overline{c_n}).
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Nun haben wir eine Oberschranke für unseren Quotienten

$$
\frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)} \le \frac{\lambda_n(\Omega_n)\cdot n^2 \cdot \int\limits_0^t G(h)^{m-n}\, T^{-1} \int\limits_h^1 R^{n-3} r^{-n+2} \max\{T,R\}\, dF(r)\, dh}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1}) \int\limits_0^t G(h)^{m-n} \frac{h}{Tt} \int\limits_h^1 R^{n-3} r^{-n+1} (T^2 + \frac{1}{n-1}R^2) \Psi(h,t,r)\, dF(r)\, dh}.
\tag{48}
$$

Durch die sehr pessimistische Ungleichung

$$
T^2 + \frac{1}{n-1}R^2 \ge \frac{1}{n-1}\cdot \max\{T^2, R^2\}
\tag{49}
$$

erreichen wir

$$
\frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)} \le \frac{\lambda_n(\Omega_n) n^2\, (n-1) \int\limits_0^t G(h)^{m-n}\, T^{-1} \int\limits_h^1 R^{n-3}\, r^{-n+2} \max\{T,R\}\, dF(r)\, dh}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1}) \int\limits_0^t G(h)^{m-n} \frac{h}{Tt} \int\limits_h^1 R^{n-3} r^{-n+1} \max\{T^2,R^2\} \Psi(h,t,r)\, dF(r)\, dh}
\tag{50}
$$

Wir werden nun den Integrationsbereich $(r,h)\in [h,1]\times[0,t]$ in verschiedene Teilbereiche partitionieren und für jeden Teil den entsprechenden Integralquotienten nach oben abschätzen. Die schlechteste der so gewonnenen Oberschranken bildet — nach dem Prinzip vom punktweisen Vergleich — eine Oberschranke für den gesamten Integralquotienten.

Dazu empfiehlt sich eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

$$
\begin{aligned}
\frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)} \le\ & \frac{\lambda_n(\Omega_n) n^2\, (n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})}\,\cdot \\
& \cdot \left\{ \frac{\int\limits_0^t \int\limits_0^r G(h)^{m-n}\, T^{-1} R^{n-3}\, r^{-n+2} T\, dh\, dF(r) +}{\int\limits_0^t \int\limits_0^r G(h)^{m-n} T^{-1} h t^{-1} R^{n-3} r^{-n+1} T^2 \Psi(h,t,r)\, dh\, dF(r) +} \right.
\end{aligned}
$$

$$\left.\frac{+\int_t^1\int_0^t G(h)^{m-n}T^{-1}R^{n-3}r^{-n+2}R\,dh\,dF(r)}{+\int_t^1\int_0^t G(h)^{m-n}T^{-1}ht^{-1}R^{n-3}r^{-n+1}R^2\Psi(h,t,r)\,dh\,dF(r)}\right\}. \quad (51)$$

Die Unterteilungsbereiche werden sein:

$$B_1 := \{(r,h)|0\le r\le t\wedge 0\le h\le \mu_n r\}\cup\{(r,h)|t\le r\le 1\wedge 0\le h\le \mu_n t\}$$

$$B_2 := \{(r,h)|0\le r\le t\wedge \mu_n r\le h\le \mu_n t\} \quad (52)$$

$$B_3 := \{(r,h)|t\le r\le 1\wedge \mu_n t\le h\le t\}\cup\{(r,h)|\mu_n t\le r\le t\wedge \mu_n t\le h\le t\}.$$

(Wegen $r\ge h$ kann die Kombination $r\le \mu_n t\le h$ nicht vorkommen.)
Für jeden dieser Bereiche lassen sich Abschätzungen für $\Psi(h,t,r)$ angeben.

Lemma 7
In B_1 gilt :

$$\Psi(h,t,r)=\frac{1}{\frac{h\cdot h}{r(c_n)\cdot t}+(1-\frac{h\cdot h}{r(c_n)\cdot t})\mu_n}\ge\frac{1}{\mu_n+(1-\mu_n)\mu_n}\ge\frac{1}{2\mu_n}. \quad (53)$$

In B_2 gilt :

$$\Psi(h,t,r)=\frac{1}{\frac{hh}{r(c_n)t}+(1-\frac{hh}{r(c_n)t})\mu_n}\ge\frac{1}{\frac{h}{r(c_n)}\mu_n+(1-\frac{h}{r(c_n)}\mu_n)\mu_n}\ge$$

$$\ge\frac{1}{\frac{h}{r(c_n)}\{1+\mu_n\}}\ge\frac{1}{2\frac{h}{r}} \quad (54)$$

In B_3 gilt bei $t\le r$

$$\Psi(h,t,r)=\frac{1}{\frac{h\cdot h}{r(c_n)\cdot t}+(1-\frac{h\cdot h}{r(c_n)\cdot t})\mu_n}\ge\frac{1}{\frac{h}{t}+(1-\frac{h}{t})\mu_n}\ge\frac{1}{2\frac{h}{t}} \quad (55)$$

und bei $r\le t$

$$\Psi(h,t,r)=\frac{1}{\frac{h\cdot h}{r(c_n)\cdot t}+(1-\frac{h\cdot h}{r(c_n)\cdot t})\mu_n}\ge\frac{1}{\frac{h}{r}+(1-\frac{h}{r})\mu_n}\ge\frac{1}{2\frac{h}{r}}. \quad (56)$$

Im Rest der Arbeit gewinnen wir Oberschranken für (51) auf den verschiedenen Bereichen. Die jeweiligen Integral-Quotienten bezeichnen wir mit Q_1, Q_2, Q_3.

Satz 1
Auf $B_1=\{(r,h)|0\le r\le t\wedge 0\le h\le \mu_n r\}\cup\{(r,h)|t\le r\le 1\wedge 0\le h\le \mu_n t\}$ gilt

$$Q_1\le\frac{4\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)e^{\frac{1}{\pi}}}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})\sqrt{1-\mu_n{}^2}}. \quad (57)$$

Beweis:

$$Q_1 \leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot$$

$$\frac{\int\limits_0^t \int\limits_0^{\mu_n r} G(h)^{m-n} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh\, dF(r) + \int\limits_t^1 \int\limits_0^{\mu_n t} G(h)^{m-n} T^{-1} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh\, dF(r)}{\int\limits_0^t \int\limits_0^{\mu_n r} G(h)^{m-n} \frac{Th}{tr\mu_n} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh\, dF(r) + \int\limits_t^1 \int\limits_0^{\mu_n t} G(h)^{m-n} \frac{h}{Tt\mu_n} R^{n-1} r^{-n+1}\, dh\, dF(r)}$$

$$\leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)\mu_n}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})\sqrt{1-\mu_n{}^2}} \cdot$$

$$\frac{\int\limits_0^t \int\limits_0^{\mu_n r} G(h)^{m-n} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh\, dF(r) + \int\limits_t^1 \int\limits_0^{\mu_n t} G(h)^{m-n} T^{-1} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh\, dF(r)}{\int\limits_0^t \int\limits_0^{\mu_n r} G(h)^{m-n} \frac{h}{r} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh\, dF(r) + \int\limits_t^1 \int\limits_0^{\mu_n t} G(h)^{m-n} \frac{h}{Tt} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh\, dF(r)}$$

$$\leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)\mu_n}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})\sqrt{1-\mu_n{}^2}} \cdot$$

$$\max\left\{ \max_{0\leq r\leq t} \frac{\int\limits_0^{\mu_n r} G(h)^{m-n} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh}{\int\limits_0^{\mu_n r} G(h)^{m-n} \frac{h}{r} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh},\ \max_{t\leq r\leq 1} \frac{\int\limits_0^{\mu_n t} G(h)^{m-n} T^{-1} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh}{\int\limits_0^{\mu_n t} G(h)^{m-n} \frac{h}{Tt} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh} \right\}$$

$$\leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)\mu_n}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})\sqrt{1-\mu_n{}^2}} \cdot$$

$$\max\left\{ \max_{0\leq r\leq t} \frac{\int\limits_0^{\mu_n r} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh}{\int\limits_0^{\mu_n r} \frac{h}{r} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh},\ \max_{t\leq r\leq 1} \frac{\int\limits_0^{\mu_n t} T^{-1} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh}{\int\limits_0^{\mu_n t} \frac{h}{Tt} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh} \right\}$$

(Hier wurde ausgenutzt, daß $G(h)$ wächst mit $\frac{h}{r}$ bzw $\frac{h}{t}$.)

Im ersten Quotienten herrscht Konstanz bezüglich aller r's.
Im zweiten Quotienten ist $\frac{R}{r} \cdot \frac{t}{T}$ monoton wachsend mit $\frac{h}{t}$, daher ist dort das Maximalargument $r = t$. Wir erhalten

$$Q_1 \leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)\mu_n}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})\sqrt{1-\mu_n{}^2}} \cdot \frac{\int\limits_0^{\mu_n t} T^{n-3} t^{-n+2}\, dh}{\int\limits_0^{\mu_n t} h t^{-1} T^{n-3} t^{-n+2}\, dh}.$$

Nun ist aber auf $[0, \mu_n t]$ der Ausdruck $\frac{T^{n-3}}{t^{n-3}} = \sqrt{1-\frac{h^2}{t^2}}^{\,n-3}$ nahezu konstant, denn er ist 1 bei $h = 0$, im Inneren des Intervalles monoton fallend, und bei $h = \mu_n t$ gilt

$$\sqrt{1-\mu_n^2}^{\,n-3} \geq \sqrt{1-\frac{2}{(n-1)\pi}}^{\,n-3} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)} > e^{-\frac{1}{\pi}}.$$

Deshalb können wir die Zählerdichte komplett auf $\frac{1}{t}$ setzen (vergrößern) und die Nennerdichte komplett auf $\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{\pi}}$ (Nenner verkleinert, Bruch vergrößert) und erhalten damit

$$Q_1 \leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)\frac{1}{t}e^{\frac{1}{\pi}}\mu_n}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})\sqrt{1-\mu_n{}^2}\frac{1}{t}} \cdot \frac{\int_0^{\mu_n t} dh}{\int_0^{\mu_n t} ht^{-1}\,dh} = \frac{4\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)e^{\frac{1}{\pi}}}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})\sqrt{1-\mu_n{}^2}}. \square$$

Satz 2
Für $B_2 = \{(r,h)|0 \leq r \leq t \wedge \mu_n r \leq h \leq \mu_n t\}$ *erhalten wir*

$$Q_2 \leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})\sqrt{1-\mu_n{}^2}}. \tag{58}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} Q_2 &\leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2\,(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_0^t \int_{\mu_n r}^{\mu_n t} G(h)^{m-n}\, R^{n-3}\, r^{-n+2}\, dh\, dF(r)}{\int_0^t \int_{\mu_n r}^{\mu_n t} G(h)^{m-n} Tt^{-1}hr^{-1}rh^{-1}R^{n-3}r^{-n+2}\, dh\, dF(r)} \\ &\leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})\sqrt{1-\mu_n{}^2}}\text{, weil nämlich auf } B_2 \text{ gilt } \tfrac{T}{t} \geq \sqrt{1-\mu_n{}^2}. \ \square \end{aligned}$$

Nun steht noch das Restintegral ($h > \mu_n t$) zur Auswertung an. Hier können wir den Einfluß von $G(h)$ (monoton wachsend) nicht ignorieren, denn er sorgt dafür, daß $\frac{R}{r}$ sehr klein werden kann (er drängt h nach oben, d.h. zu t). Deshalb bewältigen wir das Wachstum von $G(h)$ anders. Wir berücksichtigen nämlich das Integral erst ab dem $\hat{h}$, wo $G(\hat{h}) = (1-\frac{1}{m-n+1})$. Das Restintegral ist dann mit einfachen Argumenten zu erledigen.
Zur Diskussion steht der Ausdruck für den 3. Bereich B_3

$$Q_3 \leq \frac{2\lambda_n(\Omega_n)n^2\,(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_{\mu_n t}^{t} \int_{\mu_n t}^{r} G(h)^{m-n}\, R^{n-3}\, r^{-n+2}\, dh\, dF(r) + \int_t^1 \int_{\mu_n t}^{t} G(h)^{m-n} T^{-1} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh\, dF(r)}{\int_{\mu_n t}^{t} \int_{\mu_n t}^{r} G(h)^{m-n} \frac{Thr}{trh} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh\, dF(r) + \int_t^1 \int_{\mu_n t}^{t} G(h)^{m-n} \frac{Rht}{Trth} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh\, dF(r)} \tag{59}$$

Hier können wir, wie in [4] genau beschrieben, einen höheren Wert als Q_3 erzielen, indem wir zu einer Verteilungsfunktion $\overline{F}$ übergehen, so daß für ein bestimmtes $\overline{r}$ gilt

$$\overline{F}(r) = \begin{cases} 0 & r \leq \overline{r} \\ F(r) & r > \overline{r} \end{cases}. \tag{60}$$

Dabei ist $\bar{r}$ so gewählt, daß dort der Einpunkt-Verteilungs- Quotient

$$\frac{\int_{\mu_n t}^{t} G(h)^{m-n} T^{-1} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh}{\int_{\mu_n t}^{t} G(h)^{m-n} T^{-1} R r^{-1} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh} \text{ maximal wird über } r \in [t, 1]. \tag{61}$$

Werte mit $r \leq t$ liefern kleinere Einpunkt-Verteilungs-Quotienten in (59), weil

$$\frac{\int_{\mu_n t}^{r} G(h)^{m-n} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh}{\int_{\mu_n t}^{r} G(h)^{m-n} T t^{-1} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh} \leq \frac{\int_{\mu_n t}^{t} G(h)^{m-n} T^{n-3} t^{-n+2}\, dh}{\int_{\mu_n t}^{t} G(h)^{m-n} T t^{-1} T^{n-3} t^{-n+2}\, dh}. \tag{62}$$

Man beachte dazu, daß $\frac{T}{t}$ auf $[\mu_n t, t]$ monoton fällt. Die kleinsten Werte dieser „Zielvariablen" werden bei $h \approx t$ angenommen. Nun wird aber hier eine Umgewichtung gemäß

$$\begin{cases} \frac{R^{n-3}}{T^{n-3}} & \text{für} \quad h \leq r \\ 0 & \text{für} \quad r \leq h \leq t \end{cases} \quad \text{(monoton fallend mit } h) \tag{63}$$

von rechts nach links in (62) vorgenommen. Somit unterstützt die Umgewichtung größere Werte von $\frac{T}{t}$ und verkleinert den rechten Quotienten aus (62).
Also wählen wir ein $\bar{r} \geq t$ mit maximalem Quotienten und konzentrieren alles Gewicht der $r \leq \bar{r}$ auf dieses $\bar{r}$, d.h. wir arbeiten jetzt mit dem Quotienten

$$Q_3' = \frac{2\lambda_n(\Omega_n) n^2\, (n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_t^1 \int_{\mu_n t}^{t} G(h)^{m-n} T^{-1} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh\, d\overline{F}(r)}{\int_t^1 \int_{\mu_n t}^{t} G(h)^{m-n} T^{-1} R r^{-1} R^{n-2} r^{-n+2}\, dh\, d\overline{F}(r)}. \tag{64}$$

Es gilt $Q_3 \leq Q_3'$, denn, weil gleichzeitig auch noch der Ausdruck

$$\int_{\mu_n t}^{r} G(h)^{m-n} R^{n-3} r^{-n+2}\, dh = \int_{\frac{\mu_n t}{r}}^{1} G(qr)^{m-n} \sqrt{1-q^2}^{\,n-3} dq \tag{65}$$

monoton wächst wegen der Monotonie von G, beobachten wir eine Gewichtsvergrößerung bei wachsendem r bis t. Danach ($r > t$) steigt das Gewicht wegen der Monotonie von $\frac{R}{r}$. Demnach haben wir mehr Gewicht, als vorher auf den Radien $r \in [\mu_n t, \bar{r}]$ lag, nun auf den allerungünstigsten Extremalradius $\bar{r}$ verlegt. Deshalb ist der Integralquotient gesunken.
Wir werten den Q_3'-Quotienten nur auf $[\max\{\mu_n t, \bar{h}\}, t]$ aus, wobei $\bar{h}$ so gewählt ist, daß

$$G_F(\bar{h}) := G(\bar{h}) = 1 - \frac{1}{m-n+1}. \tag{66}$$

Für die durch $\overline{F}$ induzierte Verteilung gilt dann jedenfalls

$$G_F(\bar{h}) = 1 - \frac{1}{m-n+1} \geq G_{\overline{F}}(\bar{h}) \text{ wegen } G_{\overline{F}}(h) \leq G_F(h)\ \forall\, h. \tag{67}$$

Wir haben somit $\forall h \in [\mu_n t, t]$ mit $h < \bar{h}$: $G_{\overline{F}}(h) \leq G_F(h) \leq 1 - \frac{1}{m-n+1}$. (68)

Der punktweise Integralquotient aus Q_3' ist für festes h:

$$\frac{\int_t^1 R^{n-2} r^{-n+2} d\overline{F}(r)}{\int_t^1 R^{n-1} r^{-n+1} d\overline{F}(r)} \leq \left[\int_t^1 R^{n-1} r^{-n+1} d\overline{F}(r)\right]^{-\frac{1}{n-1}} \quad \text{wegen} \quad \int_t^1 d\overline{F}(r) = 1. \tag{69}$$

Daneben gilt folgende Beziehung aufgrund der Definition von G:

$$\int_h^1 R^{n-1} r^{-n+1} d\overline{F}(r) = (n-1) \int_h^1 \int_{\frac{h}{r}}^1 (1-\sigma^2)^{\frac{n-3}{2}} \sigma d\sigma d\overline{F}(r) \geq$$

$$\geq \; 2 \cdot \frac{\lambda_{n-1}(\omega_n)}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \int_h^1 \int_{\frac{h}{r}}^1 (1-\sigma^2)^{\frac{n-3}{2}} d\sigma d\overline{F}(r) = \; 2[1 - G_{\overline{F}}(h)]. \tag{70}$$

Also wissen wir für den punktweisen Integralquotienten jeweils

$$\frac{\int_t^1 R^{n-2} r^{-n+2} d\overline{F}(r)}{\int_t^1 R^{n-1} r^{-n+1} d\overline{F}(r)} \leq \{2[1 - G_{\overline{F}}(h)]\}^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{71}$$

Für alle $h < \bar{h}$ ist so gewährleistet, daß der punktweise Quotient nicht größer wird als

$$2^{-\frac{1}{n-1}} \cdot [m-n+1]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{72}$$

Es bleibt noch $[\max\{\mu_n t, \bar{h}\}, t]$ zu untersuchen .
Der darauf eingeschränkte Integralquotient heiße Q_3''. Im betrachteten Bereich gilt ja

$$G(h) \geq 1 - \frac{1}{m-n+1} \quad \text{und damit} \quad [G(h)]^{m-n} \geq e^{-1}.$$

Daraus folgt im nichttrivialen Fall $\bar{h} < t$

$$Q_3'' \leq \frac{2e\lambda_n(\Omega_n) n^2 \,(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_t^1 \int_{\max\{\bar{h},\mu_n t\}}^t T^{-1} R^{n-2} r^{-n+2} \, dh \, d\overline{F}(r)}{\int_t^1 \int_{\max\{\bar{h},\mu_n t\}}^t T^{-1} R^{n-1} r^{-n+1} \, dh \, d\overline{F}(r)}. \tag{73}$$

Sei ζ die Untergrenze des Innenintegrals. Für jedes r kennen wir folgende Abschätzung.

Lemma 8

$$\frac{\int_\zeta^t T^{-1} R^{n-1} r^{-n+1} \, dh}{\int_\zeta^t T^{-1} R^{n-2} r^{-n+2} \, dh} \geq \frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{3}(r^2 - \zeta^2)}. \tag{74}$$

Beweis:

$$\frac{\int_\zeta^t \frac{1}{\sqrt{t^2-h^2}} \frac{\sqrt{r^2-h^2}^{\,n-1}}{r^{n-1}}\,dh}{\int_\zeta^t \frac{1}{\sqrt{t^2-h^2}} \frac{\sqrt{r^2-h^2}^{\,n-2}}{r^{n-2}}\,dh} \geq \frac{\int_\zeta^t \frac{h}{\sqrt{t^2-h^2}} \frac{\sqrt{r^2-h^2}^{\,2}}{r^2}\,dh}{\int_\zeta^t \frac{h}{\sqrt{t^2-h^2}} \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r}\,dh} \geq$$

$$\geq \frac{1}{r}\left[\frac{\int_\zeta^t \frac{h}{\sqrt{t^2-h^2}}(r^2-h^2)\,dh}{\int_\zeta^t \frac{h}{\sqrt{t^2-h^2}}\,dh}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\int_0^{\sqrt{t^2-\zeta^2}} (r^2-t^2+u^2)du}{r^2 \int_0^{\sqrt{t^2-\zeta^2}} du}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{3}(t^2-\zeta^2)+(r^2-t^2)\right]^{\frac{1}{2}}}{r} = \frac{\left[\frac{1}{3}(r^2-\zeta^2)+\frac{2}{3}(r^2-t^2)\right]^{\frac{1}{2}}}{r}$$

Die erste Zeile nutzt aus, daß der Erwartungswert einer Zielvariablen sinkt, wenn die Dichte multipliziert wird mit einer Funktion, die mit der Zielvariablen monoton fällt. □

Einsetzen in (73) liefert

$$Q_3'' \leq \frac{2e\sqrt{3}\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_t^1\int_\zeta^t T^{-1}R^{n-2}r^{-n+2}\,dh\,d\overline{F}(r)}{\int_t^1\int_\zeta^t T^{-1}R^{n-2}r^{-n+2}\,dh\,\frac{\sqrt{r^2-\zeta^2}}{r}d\overline{F}(r)}. \tag{75}$$

Ersetzt man in der Integralobergrenze t durch τ und läßt man τ sinken auf ζ_+, dann wächst

$$\frac{2e\sqrt{3}\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_t^1\int_\zeta^\tau \frac{1}{\sqrt{t^2-\zeta^2}}R^{n-2}r^{-n+2}\,dh\,d\overline{F}(r)}{\int_t^1\int_\zeta^\tau \frac{1}{\sqrt{t^2-\zeta^2}}R^{n-2}r^{-n+2}\,dh\,\frac{\sqrt{r^2-\zeta^2}}{r}d\overline{F}(r)}, \tag{76}$$

denn dann erfolgt eine Umgewichtung zugunsten kleinerer Werte von r . Wir folgern daraus

$$\begin{aligned}
Q_3'' \;&\leq\; \frac{2e\sqrt{3}\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{t^2-\zeta^2}} \frac{\sqrt{r^2-\zeta^2}^{\,n-2}}{r^{n-2}}\,d\overline{F}(r)}{\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{t^2-\zeta^2}} \frac{\sqrt{r^2-\zeta^2}^{\,n-2}}{r^{n-2}} \frac{\sqrt{r^2-\zeta^2}}{r}d\overline{F}(r)} = \\
&=\; \frac{2e\sqrt{3}\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_t^1 \frac{\sqrt{r^2-\zeta^2}^{\,n-2}}{r^{n-2}}\,d\overline{F}(r)}{\int_t^1 \frac{\sqrt{r^2-\zeta^2}^{\,n-1}}{r^{n-1}}\,d\overline{F}(r)} \\
&\leq\; \frac{2e\sqrt{3}\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \max\left\{(m-n+1)^{\frac{1}{n-1}},\; \frac{1}{\sqrt{1-{\mu_n}^2}}\right\}.
\end{aligned} \tag{77}$$

Satz 3
In $B_3 = \{(r,h) | t \leq r \leq 1 \wedge \mu_n t \leq h \leq t\} \cup \{(r,h) | \mu_n t \leq r \leq t \wedge \mu_n t \leq h \leq t\}$
gilt

$$Q_3 \leq \frac{2e\sqrt{3}\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \max\left\{(m-n+1)^{\frac{1}{n-1}}, \frac{1}{\sqrt{1-\mu_n{}^2}}\right\}. \tag{78}$$

Theorem 2

$$E_{m,n}(S) \leq \sqrt{2\pi} \cdot 2 \cdot e \cdot \sqrt{3} \cdot (n)^{\frac{3}{2}} \cdot (n-1) \cdot \max\left\{(m-n+1)^{\frac{1}{n-1}}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{(n-1)\pi}}}\right\}. \tag{79}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E_{m,n}(S) &\leq \frac{2e\sqrt{3}\lambda_n(\Omega_n)n^2(n-1)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \cdot \max\left\{(m-n+1)^{\frac{1}{n-1}}, \frac{1}{\sqrt{1-\mu_n{}^2}}\right\} \\ &\leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \cdot n^2(n-1) \cdot 2e\sqrt{3} \cdot \max\left\{(m-n+1)^{\frac{1}{n-1}}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{(n-1)\pi}}}\right\}, \end{aligned}$$

weil sich die Konstanten der Abschätzung aus Satz 3 als maximal herausstellen. □

Literatur

[1] Borgwardt, K. H. : Untersuchungen zur Asymptotik der mittleren Schrittzahl von Simplexverfahren in der linearen Optimierung, Dissertation Kaiserslautern, 1977

[2] Borgwardt, K. H. : Some Distribution-Independent Results About the Asymptotic Order of the Average Number of Pivot Steps of the Simplex Method, Mathematics of Operations Research 7, 1982, 441–462

[3] Borgwardt, K. H. : The Average Number of Pivot Steps Required by the Simplex-Method is Polynomial, Zeitschrift für Operations Research 26, 1982, 157–177

[4] Borgwardt, K. H. : The Simplex Method, A Probabilistic Analysis, Springer Verlag, Heidelberg,1987