JAHRBUCH

DER

UNIVERSITÄT AUGSBURG

1989

Band I

Universität Augsburg
1990

Verteilung des Jahrbuchs

Präsidialreferat der Universität, Universitätsstr. 2, 8900 Augsburg: H. Allinger

Gedruckt mit Unterstützung der Gesellschaft der Freunde der Universität Augsburg

Gesamtherstellung: Cicero Lasersatz GmbH, Augsburg

ISSN 0722-5385

GEOMETRIE UND KOSMOLOGIE

J.-H. ESCHENBURG

1. Der Mensch betrat laut biblischem Schöpfungsbericht erst am 6. Schöpfungstag die Weltbühne und war daher bei der Erschaffung der Welt nicht dabei. Daher haben sich neben den empirischen auch stets die spekulativen Wissenschaften (Philosophie und Mathematik) mit den Fragen nach dem Ursprung und der Ausdehnung der Welt beschäftigt. Einen Höhepunkt in der philosophischen Diskussion dieser Frage stellt das Antinomien-Kapitel der „Kritik der Reinen Vernunft" von Imannuel Kant dar. Wenn irgend ein Buch über Philosophie spannend genannt werden darf, dann dieses: Wir finden darin nämlich vier Satzpaare bewiesen, die sich offensichtlich gegenseitig ausschließen. Das erste dieser Paare lautet (B 454):

Die Welt hat einen Anfang in der Zeit, und ist dem Raum nach auch in Grenzen eingeschlossen.	Die Welt hat keinen Anfang, und keine Grenzen im Raume, sondern ist, sowohl in Ansehung der Zeit, als des Raumes, unendlich.

Hätte die Welt nämlich keinen Anfang, so argumentiert Kant, dann wäre der heutige Tag das (vorläufige) *Ende* einer *unendlichen* Folge von aufeinanderfolgenden Zuständen, was dem Begriff „unendlich" widerspricht. Hätte sie dagegen einen Anfang, so hätte diesem eine leere Zeit vorhergehen müssen, in der aber auch nichts anfangen kann. Die Auflösung dieses Widerspruchs erfolgt erst 70 Seiten später (B 525–B 535): Keiner der beiden Sätze ist richtig, denn die Welt als Gesamtheit der Erscheinungen ist kein an sich existierendes Ganzes, weder ein endliches, noch ein unendliches; sie ist als Ganzes nicht *gegeben,* sondern *aufgegeben,* nämlich als Aufgabe der Vernunft, die Erscheinungen in ihrem Neben- und Nacheinander immer weiter zu verfolgen.

2. Kant redet allerdings von der Welt der empirischen Erscheinungen und nicht etwa von Raum und Zeit. Raum und Zeit sind nach Kant nämlich *a priori,* d. h. *vor* aller Erfahrung: Sie sind *Ordnungsprinzipien* der Erfahrungen und können daher nicht selbst auf Erfahrung beruhen. Schon den Titel dieses Aufsatzes hätte Kant also für Unsinn gehalten, denn die Geometrie als Lehre vom Raum könnte keine Aussage über die Erfahrungswelt (Kosmos), z. B. über deren Größe und Alter treffen, sondern nur über die a priori gültigen Gesetze, nach denen wir unsere Erfahrungen ordnen (nämlich die der euklidischen Geometrie). Wir müssen also zunächst fragen, welche Veränderung die Lehre vom Raum seit Kant erfahren hat, daß eine solche Untersuchung möglich wird.

3. Das Kant'sche Argument für die Apriorizität des Raumes ist nicht für alle räumlichen Vorstellungen gleich einleuchtend. Sicher würde es schwer fallen, etwa die Dreidimensionalität des Raumes, die Kant als Beispiel wählt (B 41), oder den stetigen Zusammenhang empirisch zu begründen. Jede Versuchsanordnung zum Nachweis würde die postulierten Eigenschaften bereits voraussetzen. Solche Eigenschaften des Raumes, die eher qualitativer als quantitativer Natur sind, nennen wir heute *topologisch.* Anders verhält es sich jedoch mit den *Maßverhältnissen,* denn das Messen stellt ja geradezu die Grundlage der empirischen Wissenschaften dar. Für Kant und die Mathematik seiner Zeit waren aber die Maßverhältnisse noch notwendig mit dem Begriff des Raumes verbunden.

4. Den Schritt, die topologischen Eigenschaften des Raumes von den metrischen begrifflich zu trennen, hat Bernhard Riemann in seinem berühmten Habilitationsvortrag „über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" vor der philosophischen Fakultät in Göttingen am 10. Juni 1854 getan. Er entwickelt darin den Begriff einer „n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit", d.h. eines Raumes *ohne* Vorgabe von Maßverhältnissen, dessen Punkte lokal durch die Angabe von n veränderliche Zahlen (Koordinaten) $x_1, \ldots, x_n$ beschrieben werden können. Seit Descartes beschreiben wir Geometrie durch Koordinaten: Zwei Koordinaten legen einen Punkt in der Ebene fest (z.B. die Abstände zu zwei orthogonalen Geraden, oder der Abstand zu einem festen Punkt („Ursprung") sowie der Winkel zu einem festen Strahl durch den Ursprung), drei Koordinaten bestimmen einen Punkt im Raume (z.B. die Abstände zu drei sich orthogonal schneidenden Ebenen, oder geographische Länge und Breite sowie die Höhe über dem Meeresspiegel). Koordinaten sind von uns willkürlich zum Zwecke der Unterteilung des Raumes eingeführt und hängen von unseren Vorgaben ab, z.B. dem orthogonalen Geradenpaar oder dem gewählten Ursprung und Strahl. Daher liegt der Gedanke nahe, daß wir Koordinaten auch nur in dem Teilbereich des Raumes einführen können, den wir sozusagen selbst überblicken, also lokal. Anderswo mag der Raum durch andere Koordinatensysteme unterteilt werden. Im Überlappungsbereich von zwei solchen Koordinatensystemen aber soll das eine aus dem anderen durch stetige Deformation gewonnen werden können. Dies ist Riemann's lokale Beschreibung des Raums, die weder die Maßverhältnisse (also Längen- und Abstandsmessung) noch die Gestalt des Raumes im Großen präjudiziert.

5. Zum *Messen* ist zusätzlich die Vorgabe von einer Art transportablem Maßstab erforderlich, der es gestattet, Größen an verschiedenen Orten miteinander zu vergleichen. Heute nennen wir so etwas eine *Metrik.* Eine Metrik ordnet zwei Punkten x und x' des Raumes eine positive Zahl zu, die *Entfernung* von x nach x'. Da sich größere Entfernungen aus kleinen zusammensetzen, genügt es, dies für sehr nahe benachbarte Punkte x und $x' = x + dx$ zu tun, deren Koordinaten sich also nur um einen sehr kleinen Zuwachs $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$ unterscheiden. Einer kleinen Strecke dx am Ort x wird also eine positive Länge ds(x,dx) zugeordnet. Riemann führt weiter aus, daß dieselbe Mannigfaltigkeit verschiedene Metriken tragen kann und daß deshalb „der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden muß". Die einfachsten dieser Metriken sind vom Typ

$$(1) \quad ds(x,dx) = \sqrt{g(x,dx)},$$

wobei g eine positive quadratische Form in den Koordinaten von dx sein soll. Im Falle der euklidischen Metrik ist für jedes x

$$(2) \quad g(x,dx) = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + \ldots + dx_n{}^2,$$

und für festes x läßt sich *jede* solche Metrik durch Wahl geeigneter Koordinaten auf diese Gestalt bringen; sie ist also „in den kleinsten Teilen euklidisch". Diese Metriken nennen wir heute *riemannsch.* Die riemannschen zeichnen sich unter den übrigen Metriken durch die Möglichkeit der freien Beweglichkeit in den kleinsten Teilen aus, wie Hermann von Helmholtz wenig später feststellt.[1] Somit wird also die Apriorizität der euklidischen Geometrie in gewisser Weise wiederhergestellt, allerdings nur in den kleinsten Teilen, während über die Maßverhältnisse im Großen nur die Erfahrung Auskunft geben kann. Hier kann die Aufgabe des Geometers in Hinblick auf Kosmologie beginnen, nämlich die möglichen Weltmodelle zu untersuchen und ihre empirischen Konsequenzen herauszuarbeiten. Insbesondere kann man nun, wie Riemann bemerkt, bei der Frage der Ausdehnung der Welt (vgl. § 1) zwischen „in Grenzen eingschlossen" und „endlich" unterscheiden, denn es gibt endliche Raummodelle, die nicht begrenzt, sondern in sich geschlossen sind, ähnlich wie in zwei Dimensionen die Kugelfläche.

6. Unser heutiges Bild von der Welt wird durch die Relativitätstheorie von Albert Einstein geprägt. Hier lassen sich Raum und Zeit nicht mehr trennen. Die „Welt" ist die Menge aller *Ereignisse;* sie bildet eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit W, die lokal durch drei Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und eine Zeitkoordinate x_0 parametrisiert werden kann. Lassen Sie mich kurz und ohne Begründung die Unterschiede dieser Raumzeit-Geometrie gegenüber der bisher beschriebenen räumlichen Geometrie vorstellen. Anstelle der räumlichen Metrik des Riemannschen Raumes tritt eine raumzeitliche:

$$(3) \qquad ds(x,dx) = \sqrt{|g(x,dx)|}$$

wobei g wieder eine quadratische Form in den Koordinaten von dx ist, die jetzt aber nicht mehr positiv ist, sondern sich in jedem festen Punkt x auf die Form der Metrik der Speziellen Relativitätstheorie

$$(4) \qquad g(x,dx) = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

bringen läßt. Die unterschiedlichsten Vorzeichen (Zeitkoordinate positiv, Raumkoordinaten negativ) entspringen der Sonderrolle der Zeitkoordinate und beschreiben die Kausalstruktur der Raum-Zeit-Welt: Wir nennen dx kausal, wenn

$$g(x,dx) \geq 0$$

und *zeitartig,* wenn die strenge Ungleichung gilt. Entsprechend heißen Linien in W kausal oder zeitartig, wenn ihre tangentialen Streckenelemente kausal oder zeitartig sind. Zwei Ereignisse x und y können sich nur dann kausal beeinflussen, wenn sie durch eine kausale Linie verbindbar sind. Wir sagen dann „x ist in der Vergangenheit von y" oder „y ist in der Zukunft von x" oder einfach „$x \leq y$". Die stetige Auswahl einer der beiden Möglichkeiten $x \leq y$ oder $y \leq x$ für jede zwei durch eine kausale Linie verbundene Ereignisse x und y ist neben der Metrik eine zusätzliche Struktur auf W, die *Zeitorientierung* genannt wird. Diese *Kausalitätsrelation* $\leq$ ersetzt die verloren gegangene absolute Zeit (die Zeitkoordinate x_0 ist ja weitgehend willkürlich, vgl. § 4): wir können immerhin von gewissen Ereignispaaren (eben den kausal verbundenen) noch ein zeitliches Nacheinander „absolut" (also unabhängig von willkürlich gewählten Koordinaten) feststellen, wenn auch die dazwischenliegende Zeitspanne nichst absolut quantifizierbar ist.

Die Bewegung schwerer Körper wird durch kausale Linien in W dargestellt, sogenannte *Weltlinien.* Ist der Körper keinen anderen als den Gravitationskräften ausgesetzt, so ist diese Linie eine „geradeste Linie" *(Geodätische)* der Metrik ds. Eine solche kausale oder zeitartige Geodätische ist aber merkwürdigerweise nicht kürzeste, sondern

1 H. v. Helmholtz: *Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen.* Nachr. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen *9,* 193–221 (1868)

längste Verbindung ihrer Punkte, da der räumliche Anteil (4) nicht zugezählt, sondern abgezogen wird. Die Metrik ds bzw. die quadratische Form g bestimmt also die Bahn der schweren Körper; sie ist demnach das Schwerefeld. Die Länge der Bahnkurven bezüglich ds wird als die Zeit gedeutet, die auf einer mit dem Körper mitgeführten Uhr angezeigt wird *(Eigenzeit)*. Raum-Zeit-Metrik und Gravitationsfeld sind also identisch.

Bei allen Unterschieden sind die räumliche (Riemannsche) und die raumzeitliche (Einsteinsche) Geometrie sich doch so ähnlich, daß wir i. f. räumliche Bilder zur Beschreibung raumzeitlicher Situationen verwenden können.

7. Das in §6 Gesagte könnte man als die Apriori-Struktur des Ereignisraums ansehen. Die spezielle Gestalt der Metrik ds ist nach Einstein physikalisch bestimmt, wie es Riemann vorausgesagt hat, nämlich durch die Verteilung der Materie. Formal wird dies durch die Gleichheit zweier anderer quadratischer Formen in den Koordinaten der dx ausgedrückt:

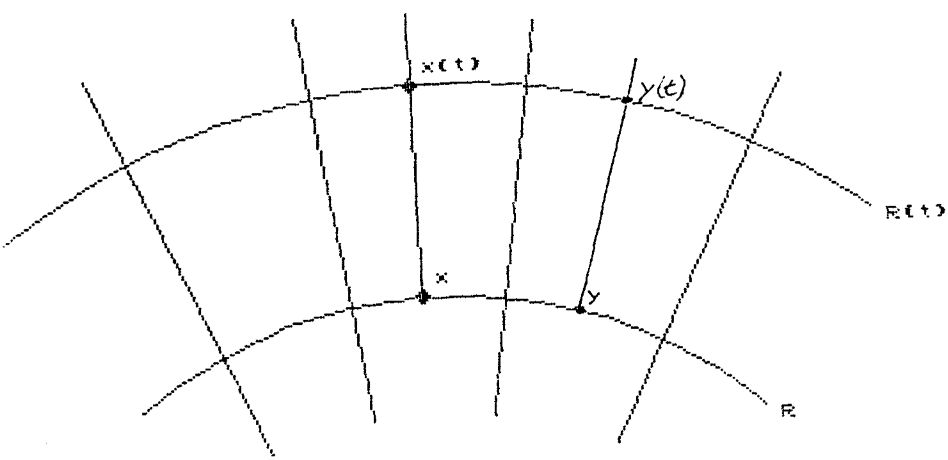
(E) $\quad r(x,dx) = m(x,dx)$

(Einstein'sche Feldgleichung). Dabei beschreibt m die Materie- und Energieverteilung, und man hat guten Grund zu der Annahme, daß diese Energiedichte nicht negativ ist:

(P) $\quad m(x,dx) \geq 0$

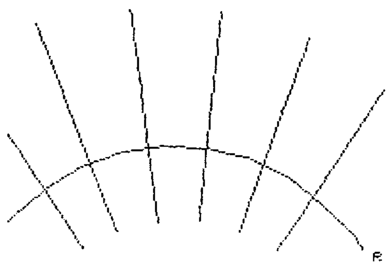
für zeitartiges dx.

Auf der linken Seite steht eine rein geometrische Größe, die nur von g und seinen ersten und zweiten Ableitungen abhängt, die *Riccikrümmung*. Diese kontrolliert im Mittel den Abstand benachbarter Geodätischer. Um die geometrische Bedeutung von r(x,dx) für zeitartiges dx zu verstehen, stellen wir uns durch x eine kleine raumartige isotrope 3-dimensionale Fläche R in unserem Ereignisraum W vor, auf der dx senkrecht steht.[2] Dann ist ds auf R eine Riemannsche Metrik. Zu jedem Ereignispunkt y in R sei y(t) der Punkt im Eigenzeit-Abstand t in der Zukunft von y auf der zu R senkrechten Geodätischen durch y, und R(t) sei die 3-dimensionale Ereignisfläche, die durch alle y(t) gebildet wird, die *Parallelfläche im Abstand* t.

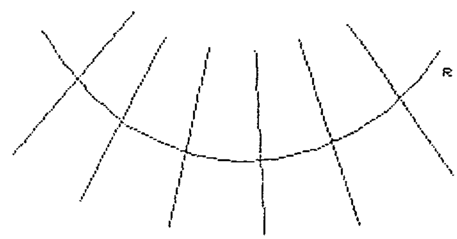


2 Eine Untermannigfaltigkeit R von W heißt *raumartig* wenn $g(x,dy) < 0$ für jedes an R tangentiale dy in jedem $x \varepsilon R$. Sie heißt *isotrop* in x, wenn sie bei x in allen Richtungen gleich aussieht. Zwei Streckenelemente dx und dy in x stehen (bezüglich g) aufeinander *senkrecht*, wenn $g(x,dx + dy) = g(x,dx) + g(x,dy)$.

Mit V(t) bezeichnen wir das Volumen (den Rauminhalt) eines kleinen Stücks von R(t) um x. Die Änderung von V bei fortschreitender Zeit t (erste Ableitung) wird dann allein dadurch bestimmt, wie stark R in W gekrümmt ist, d.h. wie stark die Geodätischen y(t) anfänglich auseinander- oder zusammenlaufen:



Expansion

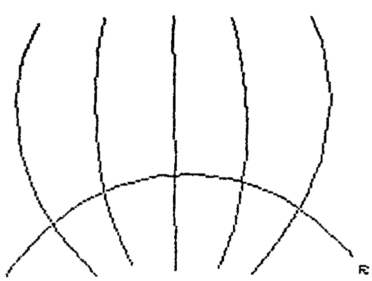


Kontraktion

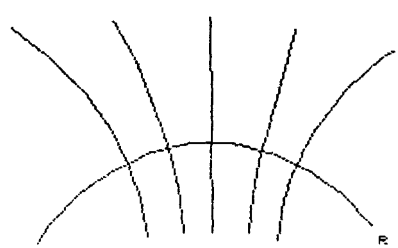
Die Änderung der Änderung (zweite Ableitung) aber wird durch die Riccikrümmung bestimmt: Ist $L(t) = \sqrt[3]{V(t)}$, so gilt, falls $g(x,dx) = 1$,

$$\text{(K)} \quad r(x,dx) = -(L''(0)/L(0)).$$

Im Bild sieht das so aus:



$r > 0$



$r < 0$

Ist R nicht isotrop bei x, so gilt „≤" statt „=" in (K), d.h. eine Anisotropie wirkt wie ein Vergrößerung der Riccikrümmung. Die Bedingung (P) bedeutet also, daß benachbarte zeitartige Geodätische die Tendenz haben, sich einander zu nähern.

8. Die 4-dimensionale Raum-Zeit-Welt W ist durchzogen von den Weltlinien der Sterne und Galaxien. Da der völlige Verzicht auf die Vorstellung von einem 3-dimensionalen räumlichen Universum sehr schwer fällt, sind die meisten Weltmodelle so aufgebaut, daß man sich global eine 3-dimensionale Fläche R in W vorstellt, die alle diese Weltlinien senkrecht schneidet. Wir interpretieren diese Fläche so, daß R die „heutige" Position aller Sterne beschreibt. Zum Eigenzeitpunkt t haben alle Sterne die Parallelfläche R(t) erreicht; diese stellt also das Weltall zur Zeit t dar. Auf diese Weise hat man wieder eine globale Zeitmessung zurückgewonnen. Die Bedingung (P) hat aber zur Folge, daß die relativen Abstände der Stern-Weltlinien, also die Entfernungen in R(t) mit t variieren; das Weltall kann also nicht statisch sein, die „Fix"-Sterne verändern ihre Position! Diese Konsequenz war für Einstein so unglaubhaft, daß er seine Theorie abänderte, um sie zu vermeiden: Anstelle von (E) führte er die erweiterte Feldgleichung

$$\text{(E')} \quad r(x,dx) = m(x,dx) - \Lambda . g(x, dx)$$

ein, wobei Λ eine positive Konstante ist, die sog. *kosmologische Konstante.* Der Zusatzterm kann die Positivität des Materieterms ausgleichen und ermöglicht statische Lösungen auch bei positiver Massendichte. Einstein soll diese Korrektur später als „the biggest blunder of my life" bezeichnet haben, denn sie hinderte ihn daran, die Expansion des Weltalls vorherzusagen, die 1929 von E. Hubble aufgrund der Rotverschiebung der Sternlicht-Spektra entdeckt wurde. Dennoch war dieser „Fehler" erstaunlich fruchtbar. Er führte u.a. zur Untersuchung der Lösungen von (E') für $m = 0$, den sogenannten Einstein-Mannigfaltigkeiten, die in der Geometrie eine große Rolle spielen, die aber auch in neueren Theorien der Physiker wieder vorkommen („Gravitational instantons"). Außerdem nimmt man heute an, daß quantentheoretische Effekte in einem sehr frühen Stadium des Universums eine kosmologische Konstante verursachten, die den Masseterm sogar überwog, so daß r negativ wurde und das Weltall sich explosionsartig ausdehnte („Inflationstheorie"). Dieses Stadium lassen wir im folgenden außer Betracht.

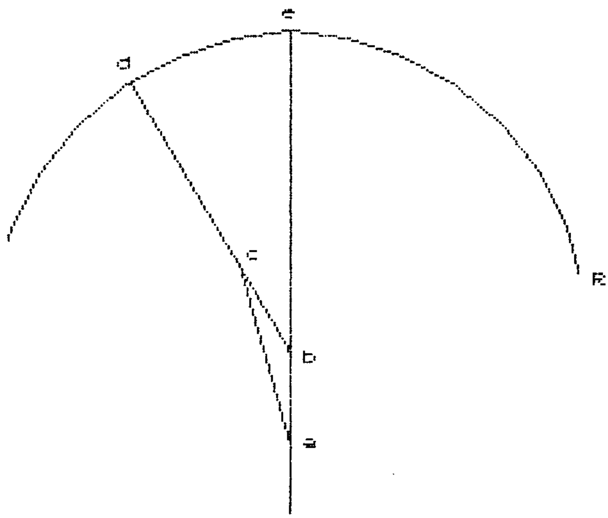
9. Die Bedingungen (E) und (P) haben noch merkwürdigere Konsequenzen, nämlich die sogenannten Unvollständigkeits- oder Singularitätensätze, die von R. Penrose und S. W. Hawking[3] in den 60'er Jahren entdeckt wurden. Sie besagen, daß unter bestimmten Voraussetzungen kausale Geodätische nicht beliebig weit fortsetzbar sind, also eine endlich lange Vergangenheit oder Zukunft haben. Einer dieser Sätze (von *Hawking* 1967) lautet:

Satz: Wenn es „heute" ein geschlossenes endliches expandierendes Universum R gibt mit der Eigenschaft, daß jede Weltlinie, die in der Vergangenheit von R anfängt, irgendwann R trifft, so hat R eine endliche Vergangenheit, d.h. die Weltlinien der Ereignisse auf R können nur bis zu einer bestimmten Eigenzeit zurückverfolgt werden.

Die Idee des Beweises ist, daß wir „den Film rückwärts laufen lassen": Wie in §7 betrachten wir die Parallelflächen R(t) zu R, aber diesmal für negative t-Werte, also in die Vergangenheit. Wegen (P) und (K) und der anfänglichen Kontraktion in negativer t-Richtung gilt bei jedem Punkt x von R, daß die Volumenfunktion V(t) bei x innerhalb eines beschränkten t-Bereiches $[-a, 0]$ gegen 0 gehen muß. Also kommen die senkrecht von R startenden Geodätischen y(t) spätestens bei $t = -a$ zusammen und hören danach auf, längste Verbindung zu R zu sein, d.h. es gibt von da an längere Verbindungs-

3 cf. *S. W. Hawking, G. E. R. Ellis: The Large Scale Structure of Spacetime.* Cambridge 1973.

kurven zu R. (In der folgenden Figur ist die analoge Situation in der euklidischen Geometrie dargestellt.) Somit kann keine senkrecht von R in der Vergangenheit startende Geodätische länger als a sein.



Nehmen wir jetzt an, es gäbe einen Punkt y in der Vergangenheit von R, der mit R durch eine Weltlinie verbunden ist, deren Eigenzeitlänge größer als a ist. Weil R geschlossen und endlich ist, gibt es eine absolut längste unter den Weltlinien, die y mit R verbinden, ihre Länge wäre also noch größer. Diese längste Verbindung wäre eine Geodätische, die R senkrecht träfe; nach dem vorigen Argument könnte ihre Länge also nicht größer als a sein, ein Widerspruch!

Setzt man die von Hubble gemessene Größe der heutigen Expansion voraus, so kommen wir für a auf einen Wert von ca. 20 Milliarden Jahren, den man als eine obere Schranke für das Alter des Weltalls ansehen kann.

10. Neuere Sätze zeigen, daß auch unter allgemeineren Voraussetzungen geodätische Weltlinien mit unendlicher Zukunft und Vergangenheit nicht die Regel, sondern die Ausnahme sind, z. B.:

Satz: (Eschenburg – Galloway 1987)

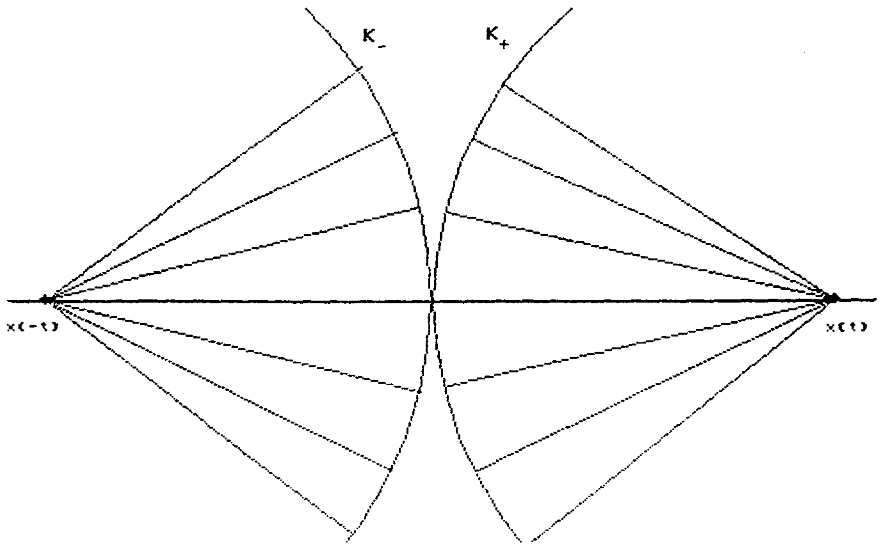
Wenn der Ereignisraum global hyperbolisch[4] *ist und eine zeitartige Geodätische* γ *mit unendlicher Zukunft und Vergangenheit existiert, die längste Verbindung aller ihrer Punkte ist, so gibt es ein statisches Unternehmen.*

Der Grund hierfür ist die in § 6 erwähnte Tendenz benachbarter Geodätischer, sich einander zu nähern und dmait aufzuhören, längste Verbindungen zu sein. Das Argument ist ganz analog zu dem folgenden (von J. Cheeger und D. Gromoll) für den

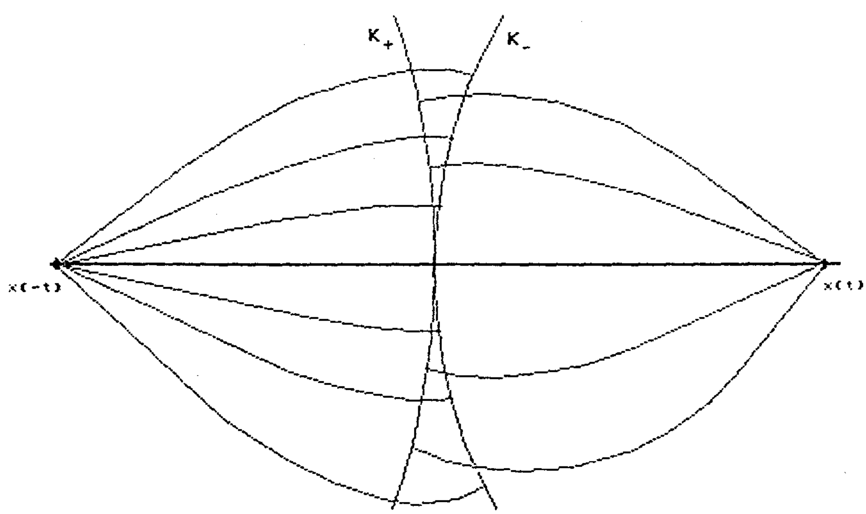
---

4 „Global hyperbolisch" ist eine häufige Voraussetzung an kosmologische Modelle. Sie bedeutet: 1.) Keine Weltlinie kommt sich selbst wieder beliebig nahe. 2.) Für alle Ereignisse y, z mit $y \leq z$ ist die Menge der „dazwischen liegenden" Ereignisse $\{x; y \leq x \leq z\}$ kompakt.

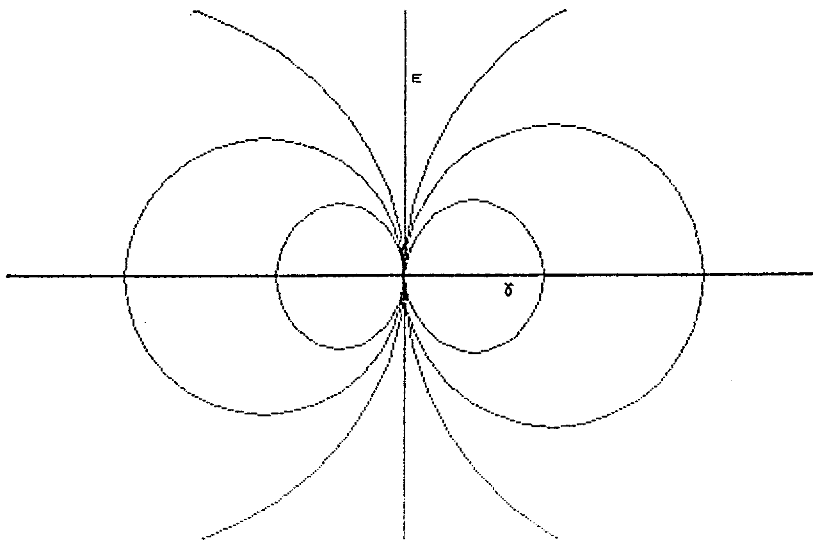
Riemannschen Fall, wo Geodätische kürzeste (statt längster) Verbindung sind: Sind x(t) die Punkte auf γ, parametrisiert nach Bogenlänge, so betrachten wir für sehr großes t die metrischen Kugeln vom Radius t um x(t) und x(-t). Da γ zwischen x(-t) und x(t) Kürzeste ist, können sich die beiden Kugeln nur am Rand schneiden:



Aber wegen r ≥ 0 haben sehr große Kugeln die Tendenz, konkav zu werden, d. h. die Radien fangen schon wieder an, zu konvergieren:



Der einzige Kompromiß zwischen diesen widerstreitenden Eigenschaften sieht aus wie im euklidischen Raum: Die Kugeln werden zwar nicht wirklich konkav, aber sie nähern sich von beiden Seiten an eine Ebene E senkrecht zu γ an, und die Radien gehen schließlich in Parallelen zu γ über. Diese Ebene E entspricht dem statischen Universum.



11. Diese Beispiele sollten zeigen, wie Geometrie auf kosmologische Fragen angewandt werden kann. Wie steht es nun mit Kant's anfänglich erwähntem Argument, daß die Welt als Ganzes nicht gegeben sondern aufgegeben ist? Haben wir die Welt nicht wie ein gegebenes Ganzes behandelt? Nein, wir haben nur *Modelle* vorgestellt und untersucht, die sicherlich einen beschränkten Anwendungsbereich haben. Bei sehr starker Massenkonzentration, wie man sie z. B. für ein frühes Stadium des Weltalls, aber auch am Ende eines jeden Sternenlebens erwarten muß, versagen die Modelle von Einsteins Gravitationstheorie, da diese die Quantentheorie nicht miteinbezieht. Sie erheben also nicht den Anspruch, die Welt als Gesamtheit aller Erscheinungen zu erfassen.

Allerdings zeichnete sich in den 80'er Jahre die Möglichkeit einer weitergehenden Theorie ab, die Quantentheorie und Relativitätstheorie vereinigt. Dies ist auch der Inhalt des 1988 erschienenen Buches von S. W. Hawking: „Eine kurze Geschichte der Zeit". Nach Hawking ist es vorstellbar, daß auch für die 4-dimensionale Raum-Zeit-Welt die Alternative „in Grenzen eingeschlossen" oder „unendlich" durch ein Drittes aufgehoben werden kann, nämlich „endlich und doch unbegrenzt", wie dies schon früher für den Raum alleine durch Riemann bemerkt wurde (cf. § 5). Dies wäre allerdings eine völlig andere Lösung der eingangs zitierten Antinomie, als Kant sie sich gedacht hat.