

Der Übergang vom sekundären zum tertiären Bildungsbereich im Fach Mathematik stellt in den vergangenen Jahren ein zentrales Interesse der mathematikdidaktischen Forschung dar. Das Forschungsfeld macht hierbei drei grundlegende Bedingungsfaktoren aus: epistemologische und kognitive, soziologische und kulturelle sowie didaktische Schwierigkeiten. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf dem ersten Bereich, der den sich wandelnden Charakter der Mathematik inkludiert. Für viele Studienanfängerinnen und -anfänger ist der Wechsel von der Schule zur Universität "traumatisch", da sich das Anforderungsprofil an der Hochschule doch deutlich von dem bisher Gewohnten abhebt. Gerade die Studieneingangsphase ist für den späteren Studienerfolg als wichtigster Abschnitt anzusehen; werden die vielfach vorhandenen fachlichen Defizite sowie falschen Vorstellungen nicht beseitigt, führt dies oft zu einem vorzeitigen Studienabbruch. Untersuchungen zur mathematischen Begriffsbildung über einen längeren Zeitraum im Verlauf eines Hochschulstudiums fehlen bislang. Hieraus ergibt sich die Motivation für das in dieser Arbeit beschriebene Forschungsprojekt, das sich in drei Teile gliedert.

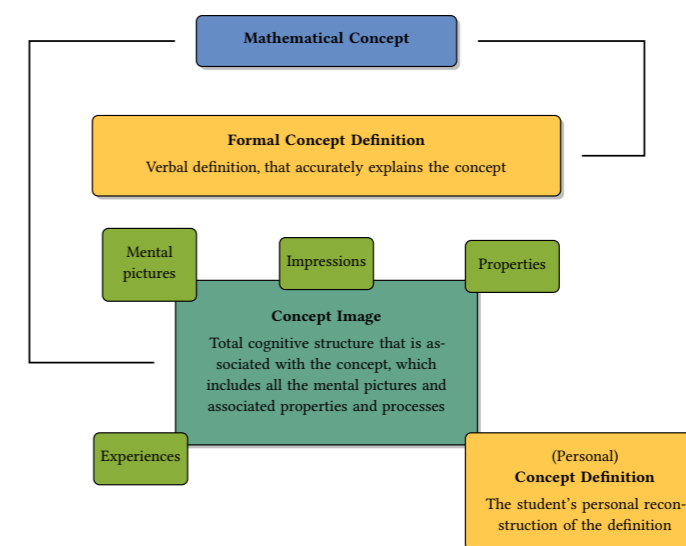
Der erste Teil fasst den Stand der Forschung zum Übergang Schule – Hochschule im Fach Mathematik zusammen. Der Fokus richtet sich dabei auf den sich wandelnden Charakter der Mathematik sowie die unterschiedlichen Anforderungen in Bezug auf die Begriffsbildung. Der zweite Teil stellt mathematisches Vorwissen als möglichen Bedingungsfaktor für den Studienerfolg dar und beschreibt anschließend Konzeption, Auswertung sowie die Diskussion der Ergebnisse eines Fragebogens zum Hintergrundwissen Mathematik. Der dritte Teil der Arbeit beschreibt eine qualitative und längsschnittlich durchgeführte, leitfadengestützte Interviewstudie, in deren Rahmen die gleiche Stichprobe im Laufe der ersten beiden Semester zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten befragt wurde. Im Hinblick auf die praktische Relevanz für die Lehre wurden anhand der Äußerungen der Studierenden Fehlvorstellungen hinsichtlich der mathematischen Konzepte identifiziert und kategorisiert. Weiter wird eine Klassifikation der studentischen Vorstellungen hinsichtlich deren wissenschaftlichen Qualität vorgenommen sowie die Entwicklung dieser über die drei Interviewzeitpunkte hinweg beschrieben.

Die Ergebnisse der Arbeit zeigen einerseits massive Defizite der Studienanfängerinnen und -anfänger in Kenntnissen und Fertigkeiten mathematischen Grundwissens. Darüber hinaus erfolgt auch die Begriffsbildung resp. -entwicklung hinsichtlich zentraler mathematischer Konzepte der Hochschulmathematik auf sehr niedrigem Niveau. Als Indiz hierfür zeugen die vielfältig identifizierten Fehlvorstellungen, die sich über alle Interviewzeitpunkte hinweg zeigten. Hieraus resultiert eine verstärkte Notwendigkeit der Förderung der Begriffsbildung sowie -entwicklung in der Studieneingangsphase.

DISSERTATION

Qualitative Entwicklung der Begriffsbildung im Fach Mathematik in der Studieneingangsphase

Wolfgang Pfeffer





DISSERTATION

Qualitative Entwicklung der
Begriffsbildung im Fach Mathematik in
der Studieneingangsphase

Wolfgang Pfeffer

März 2017

Dissertation zur Erlangung des akademischen Doktorgrades der Philosophischen Fakultät im
Fach Didaktik der Mathematik an der Universität Passau.

Erstgutachter:

Prof. Dr. Matthias Brandl

Professur für Didaktik der Mathematik,
Fakultät für Informatik und Mathematik,
Universität Passau

Zweitgutachterin:

Prof. Dr. Jutta Mägdefrau

Lehrstuhl für Erziehungswissenschaft mit Schwerpunkt
empirische Lehr-/Lernforschung,
Philosophische Fakultät,
Universität Passau

Vorwort

Die vorliegende Arbeit reichte ich im März 2017 an der Philosophischen Fakultät der Universität Passau als Dissertation ein. Beweggrund für diese Arbeit war mein Interesse an den Übergangsschwierigkeiten zwischen Schule und Hochschule vieler Studierender im Fach Mathematik. Aufgrund vielfältiger Lehrerfahrungen an der Universität richtete ich den Fokus speziell auf das zu Studienbeginn vorhandene Hintergrundwissen im Fach Mathematik sowie auf den Begriffsbildungsprozess in der Studieneingangsphase. Ziel meiner Arbeit war es, den Kenntnisstand zu Studienbeginn sowie die Entwicklung der Vorstellungen hinsichtlich zentraler mathematischer Konzepte im Laufe der ersten beiden Semester zu beschreiben.

Diese Arbeit wäre ohne die Unterstützung einer Reihe von Personen nicht möglich gewesen. Zunächst möchte ich mich bei meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Matthias Brandl bedanken. Er ermöglichte es mir, im Fachgebiet Didaktik der Mathematik zu promovieren und stand mir in den letzten Jahren unterstützend zur Seite. Darüber hinaus förderte er meine Teilnahme an verschiedenen Tagungen und Konferenzen, die in Bezug auf meine Arbeit einen großen Gewinn darstellten. Bedanken möchte ich mich auch ganz besonders bei Frau Prof. Dr. Jutta Mägdefrau für die Übernahme des Zweitgutachtens und dafür, dass sie mir bei Fragen zur Planung und Auswertung des empirischen Teils mit Rat und Tat zur Seite stand. Aus den gemeinsamen Gesprächen konnte ich einerseits Motivation, andererseits viele wichtige Erkenntnisse ziehen.

Ein besonderes Wort des Dankes möchte ich an Herrn Karl Wisspeintner richten, ohne dessen finanzielles Engagement ein Verbleib an der Universität Passau und daraus resultierend die Promotion nicht möglich gewesen wäre. Ebenso gebührt mein herzlicher Dank Ute Heuer und Heinz Iglhaut für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die Zusammenarbeit im Laufe der letzten vier Jahre.

Dankbar bin ich darüber hinaus meinen Kolleginnen und Kollegen an der Fakultät für Informatik und Mathematik, speziell meiner ehemaligen Bürokollegin Anna Schwarz für die wunderbare Zeit. Bedanken möchte ich mich auch bei Frau Dr. Nada Sissouno für die Zweitkodierung der Interviewpassagen.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie. Vielen Dank für eure Anregungen und Unterstützung in allen Bereichen meines Lebens.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meiner Partnerin Christiane bedanken. Gerade in schwierigen Phasen der Promotion konnte ich durch Deine Unterstützung Mut und Kraft schöpfen.

Passau im März 2017

Wolfgang Pfeffer

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|-----------------------|----------|
| 1 | Zur Einführung | 1 |
|----------|-----------------------|----------|

TEIL EINS

DER ÜBERGANG SCHULE – HOCHSCHULE IM FACH MATHEMATIK: ZUM STAND DER FORSCHUNG

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2 | Bedingungsfaktoren, Studienabbruchquoten und Kompensationsmaßnahmen | 7 |
| 2.1. | Schwierigkeiten beim Übergang von der Schule zur Hochschule | 9 |
| 2.2. | Studienabbruchquote in Mathematik | 18 |
| 2.2.1 | Empirische Ergebnisse zur Studienabbruchquote..... | 18 |
| 2.2.2 | Die Situation an der Universität Passau | 20 |
| 2.3. | Vorkurse und Entwicklungsprojekte | 23 |
| 2.3.1 | Der Mathematik-Brückenkurs an der Universität Passau | 23 |
| 2.3.2 | Mathematik-Brückenkurse an anderen Universitäten | 26 |
| 2.3.3 | Das Projekt 'Mathematik studieren!' an der Universität Augsburg | 29 |
| 2.3.4 | Die Projekte 'Mathematik Neu Denken' und 'Mathematik Besser Verstehen' | 30 |
| 2.3.5 | Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (KHDM) | 36 |
| 3 | Wandel des Charakters der Mathematik | 39 |
| 3.1. | Theorien zum Erlernen von Mathematik | 42 |
| 3.1.1 | Der Drei-Welten-Ansatz von David Tall..... | 43 |
| 3.1.1.1 | Die Conceptual-Embodied-World | 44 |
| 3.1.1.2 | Die Proceptual-Symbolic-World | 45 |
| 3.1.1.3 | Die Axiomatic-Formal-World | 47 |
| 3.1.1.4 | Schwierigkeiten im Übergang zwischen den drei Welten | 49 |
| 3.1.1.5 | Zusammenhang mit Begabung und mathematischem Leistungsvermögen | 53 |
| 3.1.2 | Die APOS-Theorie nach Ed Dubinsky..... | 56 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.2. | Theorien zur Aneignung und zum Verständnis mathematischer Begriffe | 60 |
| 3.2.1 | Begriffsentwicklung im Mathematikunterricht | 62 |
| 3.2.2 | Möglichkeiten und Grenzen von Visualisierungen | 67 |
| 3.2.3 | Concept Image und Concept Definition | 71 |
| 3.2.3.1 | Begriffsdefinition..... | 71 |
| 3.2.3.2 | Wechselwirkung im Begriffsbildungsprozess | 75 |
| 3.2.3.3 | Wechselwirkung bei mathematischen Problemstellungen | 78 |
| 4 | Forschungsfragen | 85 |
| 4.1. | Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn | 86 |
| 4.2. | Qualität der Begriffsentwicklung in der Studieneingangsphase | 86 |

TEIL ZWEI

KENNTNISSTAND IN MATHEMATIK ZU STUDIENBEGINN

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Motivation für die Durchführung | 91 |
| 5.1. | Mathematisches Vorwissen als möglicher Bedingungsfaktor für Studienerfolg | 91 |
| 5.2. | Die Bedeutung des FHM im Hinblick auf die EmMa-Studie | 93 |
| 6 | Messung des mathematischen Kenntnisstandes | 95 |
| 6.1. | Konzeption des FHM | 96 |
| 6.2. | Durchführung der Befragungen mit FHM-1 und FHM-2..... | 98 |
| 6.3. | Durchführung von FHM-D | 99 |
| 6.4. | Stichproben..... | 100 |
| 6.4.1 | Stichprobe FHM-1 | 100 |
| 6.4.2 | Stichprobe FHM-2..... | 102 |
| 7 | Auswertung, Einordnung und Diskussion der Ergebnisse | 105 |
| 7.1. | Bewertungskategorien | 106 |
| 7.1.1 | Erläuterung und Exemplifikation | 106 |
| 7.1.2 | Auswertungsobjektivität..... | 109 |

| | | |
|------|---|-----|
| 7.2. | Ergebnisse von FHM-1..... | 110 |
| 7.3. | Einordnung der Ergebnisse von FHM-1 durch FHM-2..... | 133 |
| 7.4. | Vergleich der FHM-Ergebnisse mit den Erwartungen der Dozierenden..... | 139 |
| 7.5. | Vergleich der Ergebnisse von FHM-1 und FHM-2 mit ähnlichen Studien..... | 142 |
| 7.6. | Zusammenfassung und Diskussion..... | 145 |

TEIL DREI

BEGRIFFSBILDUNG IN DER STUDIENEINGANGSPHASE

| | | |
|----------|--|------------|
| 8 | Methodisches Vorgehen und Durchführung der Studie | 151 |
| 8.1. | Zur Erhebung von Vorstellungen | 152 |
| 8.1.1 | Wahl der qualitativen Methode: Leitfadengestützte Interviewbefragung | 154 |
| 8.1.2 | Entwicklung des Kategorienschemas | 156 |
| 8.1.2.1 | Bewertung der mentalen Modelle | 156 |
| 8.1.2.2 | Fehlvorstellungen und formale Fertigkeiten | 159 |
| 8.2. | Anmerkungen zum Transkribieren | 159 |
| 8.3. | Durchführung der Studie | 160 |
| 8.3.1 | Datenerhebung | 160 |
| 8.3.2 | Stichprobe..... | 161 |
| 9 | Ergebnisse: Mentales Modell nach sieben Wochen Mathematikstudium | 165 |
| 9.1. | Aufbau des Interviews | 166 |
| 9.2. | Abbildungen | 167 |
| 9.2.1 | Definition und Vorüberlegungen | 167 |
| 9.2.2 | Kategorienschema | 172 |
| 9.2.3 | Bewertung der mentalen Modelle | 173 |
| 9.2.4 | Fehlvorstellungen..... | 176 |
| 9.3. | Injektivität und Surjektivität | 182 |
| 9.3.1 | Definition und Vorüberlegungen | 182 |
| 9.3.2 | Kategorienschema | 183 |
| 9.3.3 | Bewertung der mentalen Modelle | 185 |
| 9.3.3.1 | Injektivität | 185 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 9.3.3.2 | Surjektivität..... | 188 |
| 9.3.4 | Fehlvorstellungen..... | 190 |
| 9.3.4.1 | Injektivität..... | 190 |
| 9.3.4.2 | Surjektivität..... | 196 |
| 9.4. | Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem..... | 200 |
| 9.4.1 | Definition und Vorüberlegungen..... | 200 |
| 9.4.2 | Kategorienschema..... | 201 |
| 9.4.3 | Bewertung der mentalen Modelle..... | 202 |
| 9.4.4 | Fehlvorstellungen..... | 205 |
| 10 | Ergebnisse: Mentales Modell am Ende des ersten Semesters | 211 |
| 10.1. | Aufbau des Interviews..... | 212 |
| 10.2. | Injektivität und Surjektivität..... | 212 |
| 10.2.1 | Bewertung der mentalen Modelle..... | 212 |
| 10.2.1.1 | Injektivität..... | 212 |
| 10.2.1.2 | Surjektivität..... | 215 |
| 10.2.2 | Fehlvorstellungen..... | 217 |
| 10.2.2.1 | Injektivität..... | 217 |
| 10.2.2.2 | Surjektivität..... | 217 |
| 10.3. | Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem..... | 220 |
| 10.3.1 | Bewertung der mentalen Modelle..... | 220 |
| 10.3.2 | Fehlvorstellungen..... | 222 |
| 11 | Ergebnisse: Mentales Modell zur Mitte des zweiten Semesters | 225 |
| 11.1. | Aufbau des Interviews..... | 226 |
| 11.2. | Injektivität und Surjektivität..... | 226 |
| 11.2.1 | Bewertung der mentalen Modelle..... | 226 |
| 11.2.1.1 | Injektivität..... | 227 |
| 11.2.1.2 | Surjektivität..... | 229 |
| 11.2.2 | Fehlvorstellungen..... | 231 |
| 11.2.2.1 | Injektivität..... | 231 |
| 11.2.2.2 | Surjektivität..... | 232 |
| 11.3. | Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem..... | 232 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 11.3.1 | Bewertung der mentalen Modelle | 232 |
| 11.3.2 | Fehlvorstellungen | 235 |
| 11.4. | Folgen und Folgenkonvergenz..... | 236 |
| 11.4.1 | Definition und Vorüberlegungen | 236 |
| 11.4.1.1 | Folgen und Folgenkonvergenz an der Universität | 236 |
| 11.4.1.2 | Konvergieren vs. Stabilisieren: Der Konvergenzbegriff in der Schule | 241 |
| 11.4.2 | Kategorienschema | 244 |
| 11.4.3 | Bewertung der mentalen Modelle | 245 |
| 11.4.4 | Fehlvorstellungen | 247 |
| 12 | Ergebnisse: Entwicklung der mentalen Modelle | 253 |
| 12.1. | Injektivität | 254 |
| 12.2. | Surjektivität | 261 |
| 12.3. | Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem | 263 |
| 13 | Zusammenfassung und Diskussion | 267 |
| 13.1. | Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse | 268 |
| 13.1.1 | Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn | 270 |
| 13.1.2 | Begriffsbildung in der Studieneingangsphase | 272 |
| 13.1.2.1 | Abbildungen, Injektivität und Surjektivität | 272 |
| 13.1.2.2 | Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem..... | 273 |
| 13.1.2.3 | Folgen- und Folgenkonvergenz..... | 274 |
| 13.1.2.4 | Generalisierte Ergebnisse | 275 |
| 13.2. | Einordnung der Ergebnisse im Hinblick auf deren praktische Relevanz..... | 276 |
| 13.3. | Forschungsd desiderata und Ausblick | 282 |
| | Bibliographie | 283 |
| | Abbildungsverzeichnis | 305 |
| | Tabellenverzeichnis | 309 |

Anhang

315

KAPITEL 1 Zur Einführung

„How is it that there are so many minds that are incapable of understanding mathematics? Is there not something paradoxical in this? Here is a science which appeals only to the fundamental principles of logic, to the principle of contradiction, for instance, to what forms, so to speak, the skeleton of our understanding, to what we could not be deprived of without ceasing to think, and yet there are people who find it obscure, and actually they are the majority.“
(Poincare, 1914, S. 117)

„Vergessen Sie bitte alles, was Sie bisher gemacht haben“ – Nicht selten beginnt die erste Mathematikvorlesung an der Universität mit diesen Worten, die bereits sehr viel über den Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik aussagen. Auch wenn derartige Äußerungen plakativ und bestimmt wenig zielführend sind, lässt sich nicht bestreiten, dass hier ein signifikanter Bruch stattfindet. Anfängerinnen und Anfänger eines Studiengangs mit Mathematikanteil stellen zu Beginn ihres Studiums oft fest, dass sich die Mathematik an der Hochschule von der gewohnten Schulmathematik doch in erheblichem Maße unterscheidet. Anwendungsorientierte Problemstellungen und das Lösen von zuvor bereits eingeübten Aufgaben weichen einer formalen und axiomatisch-deduktiv aufgebauten Struktur aus Definitionen, Sätzen und Beweisen. Dieser Bruch beim Wechsel zwischen den Bildungsinstitutionen ist kein neues Phänomen, wurde er doch bereits von Felix Klein Anfang des 20. Jahrhunderts unter dem Begriff der „Doppelten Diskontinuität“ proklamiert. Nach Engelbrecht (2010) ist der Wechsel von der Schule an die Universität für viele Studienanfängerinnen und -anfänger „traumatisch“, da sich das Anforderungsprofil an der Hochschule doch deutlich von dem bisher Gewohnten abhebt; für viele bedeutet Erfolg in Mathematik ausschließlich das reine Anwenden von Lösungsmustern (ebd., S.1). Neben einer falschen Vorstellung von der Hochschulmathematik werden auch verstärkt Mängel an mathematischem Grundwissen und Rechenfähigkeiten ausgemacht (u.a. Thomas et al., 2015; Hong et al., 2009; Brandell et al., 2008). Diese werden aber als wichtiger Faktor für den Studienerfolg angesehen (u.a. Cretchley et al., 2007). So starten einige, wenn nicht sogar die Mehrheit der Studienanfängerinnen und -anfänger mit einem Defizit an Grundwissen und Grundfertigkeiten in das Studium. Doch gerade die Studieneingangsphase

ist für den späteren Studienerfolg als wichtigster Abschnitt anzusehen; werden die vielfach vorhandenen fachlichen Defizite sowie falschen Vorstellungen nicht beseitigt, führt dies oft zu einem vorzeitigen Studienabbruch (Gensch & Kliegl, 2011). Diese Situation ist weder für Studierende, noch für Dozierende zufriedenstellend. Letztere stehen der Leistungsheterogenität der Studienanfängerinnen und -anfänger jedoch oftmals ratlos gegenüber (Ableitinger & Herrmann, 2014; Hefendehl-Hebeker, 2013).

Die Übergangsschwierigkeiten Schule – Hochschule *im Fach Mathematik* sind in den letzten Jahren verstärkt in den Fokus nationaler und internationaler Forschungsprojekte gerückt (Hong et al., 2009). Vereinzelt untersuchten dabei querschnittlich die Vorstellungen von Studierenden hinsichtlich mathematischer Begriffe (u.a. Vinner & Dreyfus, 1989; Vinner, 1983). Untersuchungen zur mathematischen Begriffsentwicklung über einen längeren Zeitraum im Verlauf eines Hochschulstudiums fehlen bislang. Hieraus ergab sich die Motivation für ein größeres Forschungsprojekt, dessen Ablauf bereits in Pfeffer & Brandl (2015) dargestellt wurde (vgl. Abbildung 1.1). Im Forschungsfokus stehen hierbei aus Studierendensicht der Kenntnisstand zu Studienbeginn, die zu Studienbeginn vorhandene und sich im weiteren Verlauf des Studiums verändernde subjektive Wahrnehmung des Charakters der Mathematik, das individuelle universitäre Lernverhalten sowie die Ausprägung von *Concept Image* und *Concept Definition* hinsichtlich ausgewählter zentraler mathematischer Begriffe in der Studieneingangsphase. Aus dem Blickwinkel der Hochschuldozentinnen und -dozenten ist von Interesse, wie diese die vier eben beschriebenen Bereiche wahrnehmen und einschätzen. Weitere Fragen beschäftigen sich mit der Diskrepanz zwischen der realen und hypothetischen Ausprägung der vier oben genannten Bereiche im Perspektivenwechsel Studierende – Dozierende.

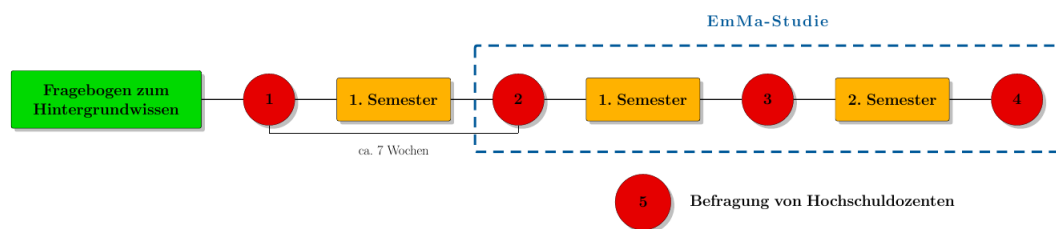


Abbildung 1.1: Übersicht über den Ablauf des Forschungsprojekts (Interviewzeitpunkte).

Das Projekt begleitete eine Stichprobe, bestehend aus Studienanfängerinnen und -anfängern im Fach Mathematik an der Universität Passau im Laufe der ersten beiden Semester, um diese zu vier Zeitpunkten mit Hilfe eines leitfadengestützten Interviews zu befragen. Zur Abrundung

der Studie werden diese Daten mit den Erwartungen und Einschätzungen von Hochschuldozentinnen und -dozenten verglichen, die ebenfalls qualitativ durch Interviews erhoben wurden. Abbildung 1.1 zeigt einen Überblick über die vier Interviewzeitpunkte im Laufe der ersten beiden Semester. Dabei fand der erste Termin noch vor dem 1. Semester, also insbesondere vor der ersten Mathematik-Vorlesung statt. Hier wurden die Erwartungen an das Mathematikstudium, die subjektive Wahrnehmung in Bezug auf Mathematik sowie das bisherige Lernverhalten festgehalten. Termin 2 fand rund sieben Wochen nach Studienbeginn statt. Ab diesem Zeitpunkt wurde die Stichprobe neben ähnlichen Fragen wie bei Termin 1 auch zu ausgewählten Begriffen aus der Mathematikvorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ befragt. Ähnlich verliefen die Interviews zu Zeitpunkt 3, der kurz vor der Klausur am Ende des ersten Semesters und zu Zeitpunkt 4, der Mitte des zweiten Semesters stattfand.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Teilprojekte „Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn“, der anhand eines Fragebogens zum Hintergrundwissen Mathematik (FHM) gemessen wird, sowie die EmMa-Studie, ein Akronym für „Entwicklung des **m**entalen **M**odells von Studienanfängerinnen und -anfänger hinsichtlich ausgewählter zentraler mathematischer Begriffe in der Studieneingangsphase“. In Bezug auf die EmMa-Studie sind die Interviews zu den Zeitpunkten 2 bis 4 (s. Abbildung 1.1) relevant.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. Der erste Teil fasst den Stand der Forschung zum Übergang Schule – Hochschule im Fach Mathematik zusammen. Dazu bietet Kapitel 2 einen allgemeinen Überblick über postulierte Bedingungsfaktoren, Studienabbruchquoten sowie Kompensationsmaßnahmen, die sich mit einer Neukonzeption der Studieneingangsphase befassen. In Kapitel 3 richtet sich der Fokus anschließend auf den sich wandelnden Charakter der Mathematik sowie die unterschiedlichen Anforderungen in Bezug auf die Begriffsbildung. Dazu werden das theoretische Modell von Tall (2004c) zu drei unterschiedlichen „Welten von Mathematik“ sowie das Modell von *Concept Image* und *Concept Image* von Tall & Vinner (1981) als Grundlagen verwendet. Basierend auf den theoretischen Überlegungen formuliert Kapitel 4 Forschungsfragen, die im Rahmen der Arbeit beantwortet werden sollen. Diese beschäftigen sich einerseits mit dem Kenntnisstand der angehenden Studierenden zu Studienbeginn sowie der Begriffsbildung hinsichtlich zentraler mathematischer Begriffe in der Studieneingangsphase.

Mit dem Kenntnisstand zu Studienbeginn setzt sich Teil 2 der Arbeit auseinander. Dazu stellt Kapitel 5 zunächst mathematisches Vorwissen als möglichen Bedingungsfaktor für den Stu-

dienerfolg in den Mittelpunkt. Kapitel 6 beschreibt anschließend Konzeption und Durchführung des FHM. Auswertung sowie eine Einordnung und Diskussion der Ergebnisse finden sich in Kapitel 7.

Der dritte Teil der Arbeit beschreibt die qualitative und längsschnittlich durchgeführte EmMa-Studie, in deren Rahmen die gleiche Stichprobe im Laufe der ersten beiden Semester zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten befragt wurde. Im Hinblick auf die praktische Relevanz für die Lehre wurden anhand der Äußerungen der Studierenden Fehlvorstellungen hinsichtlich der mathematischen Konzepte identifiziert und kategorisiert. Das methodische Vorgehen sowie eine Beschreibung der Durchführung der Studie finden sich in Kapitel 8. Kapitel 9 enthält allgemeine theoretische Überlegungen zu den einzelnen Begriffen sowie die zur Kodierung verwendeten Kategorienschemata. Weiter beinhaltet es die Ergebnisse des zweiten Interviews, das rund sieben Wochen nach Semesterbeginn stattfand. In Kapitel 10 bzw. Kapitel 11 sind die Ergebnisse des dritten bzw. vierten Interviewtermins dargestellt. Kapitel 12 beschäftigt sich mit der Entwicklung der mentalen Modelle über die drei Termine hinweg. Abschließend werden in Kapitel 13 die Ergebnisse zusammengefasst, kritisch diskutiert sowie im Hinblick auf deren praktische Relevanz für die Lehre eingeordnet.

TEIL EINS

DER ÜBERGANG SCHULE –
HOCHSCHULE IM FACH
MATHEMATIK: ZUM STAND DER
FORSCHUNG

KAPITEL 2 Bedingungsfaktoren, Studienabbruchquoten und Kompensationsmaßnahmen

„Die Kluft, die den angehenden Studierenden des Faches Mathematik den Übergang von der Schule zur Universität schwer macht und sie mitunter scheitern lässt, liegt nicht nur in fehlenden mathematischen (Basis-)Kenntnissen begründet, sondern in einem offenbar in der Schule eingeübten, tief eingepprägten „Verständnis“ von Mathematik und mathematischem Arbeiten als verfahrensorientiertem Rechnen.“
(Hamann et al., 2014, S. 375)

Überblick:

| | |
|---|----|
| 2.1 Schwierigkeiten beim Übergang von der Schule zur Hochschule | 9 |
| 2.2 Studienabbruchquote in Mathematik | 18 |
| 2.2.1 Empirische Ergebnisse zur Studienabbruchquote | 18 |
| 2.2.2 Die Situation an der Universität Passau | 20 |
| 2.3 Vorkurse und Entwicklungsprojekte | 23 |
| 2.3.1 Der Mathematik-Brückenkurs an der Universität Passau | 23 |
| 2.3.2 Mathematik-Brückenkurse an anderen Universitäten | 26 |
| 2.3.3 Das Projekt 'Mathematik studieren!' an der Universität Augsburg | 29 |
| 2.3.4 Die Projekte 'Mathematik Neu Denken' und 'Mathematik Besser Verstehen' | 30 |
| 2.3.5 Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (KHDM) | 36 |

Zunächst erfolgt ein Überblick über mögliche Aspekte, die als Bedingungsfaktoren für die Schwierigkeiten im Übergang Schule – Hochschule in Frage kommen können. Danach werden kurz empirische Ergebnisse zur Studienabbruchquote im Fach Mathematik sowie die Situation an der Universität Passau dargestellt. Das Kapitel schließt mit einem kurzen Abschnitt zu

Mathematik-Brückenkursen und Entwicklungsprojekten, die sich mit einer Neuorientierung von Mathematik-Studiengängen befassen. In Bezug auf die Brückenkurse wird zunächst der Vorkurs an der Universität Passau reflektiert. Anschließend erfolgt eine Erläuterung von Kursen, die an anderen Universitäten konzipiert wurden.

Bevor verschiedene Bedingungsfaktoren für Schwierigkeiten im Übergang von der Schule zur Hochschule dargestellt werden, soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, dass dies nicht die einzige signifikante Transition im Laufe der mathematischen Ausbildung ist. Gueudet et al. (2016) bezeichnen die mathematische Ausbildung als „*Story of Change*“, Heinze & Grüßing (2009) publizierten einen Sammelband, der sich mit den verschiedenen Übergängen zwischen Kindergarten und Studium oder Beruf beschäftigt. Auch Gueudet et al. (2016) listen eine Vielzahl an Übergängen auf (S. 16):

During their studies, students experience many transitions of educational institution: from pre-school to primary school, from primary to secondary school, sometimes from lower to higher secondary school or technical college, from higher secondary to university, from professional school or university to the workplace, etc.

Ein signifikanter Übergang bzw. „*critical transition*“ meint in diesem Zusammenhang:

Critical transition is viewed as a learning situation that is found to involve a noticeable change of point of view. This change could become apparent as an epistemological obstacle, as a cognitive discontinuity or as a didactical gap. A transition would be identified as a necessity for entering into a different type of discourse (in terms of the language, symbols, tools and representations involved) or more broadly as changing 'lenses' used to view the concept at hand.

(Yerushalmy, 2005, S. 37)

Aufgrund der Thematik der Arbeit wird nachfolgend nur der Übergang zwischen Schule und Hochschule behandelt.

2.1 Schwierigkeiten beim Übergang von der Schule zur Hochschule

Es gibt eine Vielzahl von Gründen, aus denen sich Schwierigkeiten im Wechsel von der Schule zur Hochschule ableiten lassen. Winsløw (2014) subsumiert diese unter dem Begriff „*institutional transition problems*“ (S. 2476). An dieser Schnittstelle stehen sich Institutionen gegenüber, „die historisch gesehen ganz unterschiedlichen Zielen verpflichtet waren und sich teilweise auch noch in dieser Tradition bewegen“ (Lorbeer & Reiss, 2010).

In der Literatur ist der Begriff „Diskontinuität“ zur Zeit das prägende Schlagwort in Bezug auf den Übergang zwischen Schule und Hochschule. Dabei ist diese Problematik im Wechsel zwischen den Bildungsinstitutionen kein neues Phänomen. Schon Anfang des 20. Jahrhunderts schrieb Felix Klein in seinem Werk „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“ sogar von der „Doppelten Diskontinuität“; doppelt deswegen, weil viele Studierende zwei Bruchstellen im Fach Mathematik erfahren. Die erste Bruchstelle findet sich im Übergang von der Schule zur Hochschule. Klein (1908) schreibt hierzu (S. 1):

Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergi[ss]t er daher alle diese Sachen rasch und gründlich.

Lehramtsstudierende des Fachs Mathematik erfahren später noch eine zweite Bruchstelle; sie wechseln von der Hochschule zurück an die Schule, an der sie als Lehrende Schulmathematik unterrichten. Es mangelt vielfach an sinn- und identitätsstiftenden Erfahrungen (Danckwerts, 2006). Auch diesen Bruch erwähnt Klein (1908) bereits Anfang des 20. Jahrhunderts (S. 1):

Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einflu[ss] hat.

Winsløw & Grønbaek (2014) unterscheiden hinsichtlich der von Klein proklamierten Doppel-

ten Diskontinuität folgende drei Dimensionen: (1) den institutionellen Kontext (Universität vs. Schule), (2) die unterschiedliche Rolle innerhalb der Institutionen (Schüler / Student in der Schule / Universität vs. Mathematiklehrkraft) und (3) den Unterschied hinsichtlich des mathematischen Inhalts (Elementar vs. Wissenschaftlich).

Dass diese Thematik auch heute noch hoch aktuell ist, zeigt etwa das Werk von Ableitinger et al. (2013), das sich mit Ansätzen zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen sowie Erfordernissen auseinandersetzt. Des Weiteren wird ein Überblick zu unterschiedlichen methodischen und didaktischen Konzepten sowie deren Umsetzung in Lehrveranstaltungen gegeben. Insbesondere für die Lehrerinnen- und Lehrerausbildung ist eine frühzeitige Verzahnung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik zu bejahen, „weil hier Bewusstheit für die unterschiedlichen Denktraditionen und ihre wechselseitige Verschränkung im kreativen Findungs- und dann im Beweisprozess geschaffen werden muss“ (Lorbeer & Reiss, 2010, S. 92). Auch für Blum & Henn (2003) ist eine frühzeitige Verbindung von fachinhaltlichem Wissen, pädagogischem Kontextwissen sowie schulpraktischem Handlungswissen wesentlich: „Tatsächlich steht dies oft isoliert nebeneinander, und man hofft, dass sich dies in den Köpfen der Studenten von selbst zusammenfügt – eine empirisch längst widerlegte Hoffnung. Die universitäre Lehrerausbildung benötigt eine Brückendisziplin, welche die verschiedenen Komponenten zusammenbringt“ (S. 75). Eine Studie von Buchholtz et al. (2013) zeigt, dass viele angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer während ihres Studiums keine Kompetenzen erwerben, mit denen sie Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern abbauen bzw. elementare mathematische Probleme einfach lösen können. Die Lehrerinnen- und Lehrerausbildung versagt darin, Mathematiklehramtsstudierende ausreichend mit inhaltlichem sowie pädagogisch-inhaltlichem Wissen auszustatten (Gueudet et al., 2016, S. 14). Solche Brücken zwischen Universität und Schule zu bauen, sollte gemeinsame Aufgabe der Fachwissenschaft und Fachdidaktik sein (Danckwerts et al., 2004). Einen möglichen Ansatz für die Verzahnung der beiden Bereiche liefert ein Artikel von Bauer & Partheil (2009) zu Schnittstellenmodulen in der Lehramtsausbildung. In Reiss et al. (2010) ist eine Übersicht über weitere Initiativen zu finden, die es sich zum Ziel gesetzt haben, „zukünftige Lehrerinnen und Lehrer besser auf ihren Beruf vorzubereiten“ (S. 91). Besonders herausgehoben werden an dieser Stelle die Projekte „Mathematik Neu Denken“ von Albrecht Beutelspacher (Gießen) und Rainer Danckwerts (Siegen), „Mathematik Besser Verstehen“ von Lisa Hefendehl-Hebeker, Christoph

Ableitinger und Angela Herrmann (Essen) sowie „Impulse für die Lehramtsausbildung: TUM School of Education“ von Kristina Reiss und Manfred Prenzel (München). Die Entwicklungsprojekte „Mathematik Neu Denken“ sowie „Mathematik Besser Verstehen“ werden aufgrund ihrer Innovativität in Abschnitt 2.3.4 noch detailliert erläutert.

In Bezug auf die „Doppelte Diskontinuität“ nehmen besonders die Übergangsschwierigkeiten zwischen Schule und Hochschule im Fach Mathematik in der aktuellen Forschung eine zentrale Rolle ein. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit der ersten „Bruchstelle“. An dieser Stelle werden nun im Überblick bisherige Erkenntnisse der Forschung dazu erläutert. Forschungsergebnisse, die zweite Bruchstelle betreffend, finden sich u.a. in Winsløw (2014) und Winsløw & Grønbaeck (2014).

Das Forschungsfeld macht drei grundlegende Schwierigkeiten für den Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik aus (vgl. etwa de Guzmán et al., 1998; Ableitinger & Herrmann, 2014; Gueudet et al., 2016):

- (1) Epistemologische und kognitive Schwierigkeiten
- (2) Soziologische und kulturelle Schwierigkeiten
- (3) Didaktische Schwierigkeiten

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf dem ersten Bereich, der den sich wandelnden Charakter der Mathematik, auf den in Kapitel 3 detailliert eingegangen wird, inkludiert. In Anlehnung an de Guzmán et al. (1998) wird ein kurzer Überblick über alle drei Bereiche gegeben, aus welchen Übergangsschwierigkeiten resultieren können:

Epistemologische und kognitive Schwierigkeiten

Der Übergang von der Schule zur Hochschule bringt wissenschafts-erkenntnistheoretisch einen entscheidenden Sprung hinsichtlich Begriffsbildung und konzeptionellen Fähigkeiten mit sich. Der Charakter der Mathematik, mit dem die Schülerinnen und Schülern bzw. Studentinnen und Studenten konfrontiert werden, erlebt einen signifikanten Wandel. Hierunter fällt nicht nur, dass an Schule und Universität unterschiedliche Themen behandelt werden, sondern vielmehr die unterschiedliche Herangehensweise resp. Tiefe. Dieser Sprung wird in der Literatur oft auch als Wandel von „*Elementary Mathematical Thinking*“ hin zu „*Advanced*

Mathematical Thinking“ (Tall, 1991a) bezeichnet. Gute Noten in der Schulmathematik gehen oft mit der Fähigkeit einher, Aufgaben nach gewissen Algorithmen oder Schemata zu lösen. Ein tiefreichendes Verständnis der behandelten Themen wird hingegen nicht benötigt. An der Universität reicht es aber nicht aus, mathematisches Wissen lediglich zu reproduzieren, es wird von den Studentinnen und Studenten eigenständiges mathematisches Denken gefordert. Es genügt nun nicht mehr, Begriffe isoliert zu betrachten und anzuwenden; erforderlich ist hier ein tiefgehendes sowie konsistentes Verständnis. Kapitel 3 der Arbeit beschäftigt sich ausführlich mit den theoretischen Erkenntnissen zum Wandel des Charakters der Mathematik sowie Theorien zur Begriffsbildung.

Soziologische und kulturelle Schwierigkeiten

Nach Crafter & Maunder (2012) können Schwierigkeiten in Übergängen am besten durch einen soziologisch-kulturellen Ansatz erklärt werden. Dieser Bereich umfasst eine große Spanne an Faktoren, von denen manche auch nur lokale Relevanz besitzen. Folglich ist es sehr schwierig, diese in ihrer Gesamtheit zu erfassen. Ein Grund, den de Guzmán et al. (1998) anführen, ist die hohe Anzahl der Studierenden in Vorlesungen und Übungen. Angehende Studentinnen und Studenten sind es aus der Schule gewohnt, in überschaubaren Klassengemeinschaften zu lernen. An der Universität sind sie lediglich eine oder einer unter vielen und müssen sich u.a. bezüglich des Leistungsstandes neu einordnen. Dies kann sowohl positive wie auch negative Auswirkungen auf die Entwicklung motivationaler Merkmale haben. Wichtige theoretische Ansätze, unter welchen Bedingungen sich etwa intrinsische sowie extrinsische Motivation ausbilden, liefern hier die Selbstbestimmungstheorie von Deci & Ryan (1993) (siehe hierzu etwa Deci & Ryan, 2008; Rach, 2014; Schiefele & Köller, 2010; Wild et al., 2006) sowie die Person-Umwelt-Passung (siehe hierzu etwa Rach, 2014; Nagy, 2007). Nach Rach (2014) kann aus beiden Theorien geschlossen werden, „dass ein bestimmtes Maß an Passung zwischen Erwartungen sowie Fähigkeiten der Lernenden und den Anforderungen eines Lehr-Lern-Prozesses notwendig ist, um eine gelungene Angebotsnutzung sicherzustellen und somit erfolgreiche Lernprozesse durchführbar sind“ (S. 130 f). Aufgrund der sich ändernden Anforderungen ist auch der Übergang zwischen den Bildungsinstitutionen Schule und Hochschule als kritischer Punkt für Motivation und Interesse hinsichtlich Mathematik zu sehen (Daskalogianni & Simpson, 2002). In einer Studie von Liebendörfer & Hochmuth (2013) verzeichneten Studienanfängerinnen und -anfänger in den ersten sechs Wochen ihres Studiums einen erheblichen Rückgang an

Interesse, basierend auf „*a mismatch of their beliefs and the mathematics they encountered*“ (S. 3). Ein ähnliches Phänomen stellt auch der sog. „Big-Fish-Little-Pond“-Effekt dar, der sich mit der Entwicklung von subjektiver Einschätzung in Hinsicht auf das Fähigkeitsselbstkonzept auseinandersetzt. Der Effekt meint hierbei, dass Lernende je nach Bezugsgruppe ein unterschiedlich hohes Selbstkonzept entwickeln (Moschner & Dickhäuser, 2010). Das Selbstkonzept einer Person (*fish*) kann sich je nach Stärke der Vergleichsgruppe (*pond*) erhöhen bzw. verringern. Folglich kann der Big-Fish-Little-Pond-Effekt vor allem beim Übergang zwischen Bildungsinstitutionen als möglicher Erklärungsansatz herangezogen werden, da sich hierbei die Bezugsgruppe häufig in ihren Leistungen homogenisiert (Rach, 2014).

Neben den Auswirkungen auf Motivation und Selbstkonzept kann der Übergang auch rein soziologische Auswirkungen mit sich bringen (de Guzmán et al., 1998, S 8):

While some students deal quite easily with the new environment, others find that moving from a 'human-size' high school, where most people know each other, to the anonymity of a large university campus is quite a frightful experience. It is only in the rare case that the student will be known as an individual to the teacher.

Eine gewünschte, längerfristige Bildung von Lerngruppen ist zudem dadurch erschwert, dass sich jedes Semester die Gruppen in Vorlesungen und Übungen neu zusammensetzen.

De Guzmán et al. (1998) führen weiter an, dass in vielen Ländern aufgrund einer „Demokratisierung von Bildung“ vermehrt auch leistungsschwächere Studentinnen und Studenten Zugang zur Universität erhalten. Gerade bei diesen Studierenden tritt vermehrt die Problematik auf, den Unterschied zwischen Schule und Hochschule zu erkennen und zu bewältigen (S. 756):

For such students, their relation to knowledge is often not up to what is being expected to them: they meet difficulties in reaching the required level of abstraction and they confine themselves in mere actions and applications of recipes, unaware of the conceptual shift they must accomplish.

Lehramtsstudierende oder Studierende, die Mathematik lediglich als Begleitfach belegen, stellen oft die Frage, aus welchem Grund sie sich überhaupt mit der vertieften Mathematik beschäftigen sollen, obwohl sie diese später gar nicht unterrichten oder anwenden müssen: „*They will often be at a loss to relate their calculus or linear algebra course to their foreseen profession*“ (de Guzmán et al., 1998, S. 756). Ergo ist es gerade hier entscheidend, diesen Studierenden die

Bedeutung und den Nutzen der Beschäftigung mit der Hochschulmathematik zu vermitteln, um sie nicht frühzeitig zu verlieren. Dieser Problematik entgegen zu wirken, war ein zentrales Anliegen der beiden Projekte „Mathematik Neu Denken“ und „Mathematik Besser Verstehen“, die sich mit einer Neuorientierung der Mathematiklehrerinnen und -lehrerausbildung befassen (vgl. Abschnitt 2.3.4).

Als letzten Grund, der an oben genannte Punkte andockt bzw. als Multiplikator wirken kann, nennen de Guzmán et al. (1998) die Tatsache, dass Hochschuldozentinnen und -dozenten oftmals überhaupt nicht für studentische Probleme sensibilisiert bzw. dafür pädagogisch ausgebildet sind: *„The lack of pedagogical awareness of some teachers may stem from the fact that they are expected to conduct research, and thus their motivation and commitment to teaching may not be as strong as that of secondary school teachers, whose sole responsibility is teaching”* (Harel & Trgalová, 1996, S. 676)“ (S. 756). Wissenschaftliche Anerkennung erhält man fast ausschließlich durch erfolgreiche Forschung. Lehre wird, wenn überhaupt, nur als schmückendes Beiwerk, oftmals sogar als lästige Nebenaufgabe angesehen.

Didaktische Schwierigkeiten

De Guzmán et al. (1998) verwenden hier den Oberbegriff *„Didactical Difficulties“*. Dabei verstehen sie einerseits den *„style of teaching“* und die *„performance of teachers“*, andererseits auch das Lernverhalten sowie die Verwendung spezifischer Lernstrategien. Eine Zusammenfassung der dadurch hervorgerufenen Probleme bietet folgendes Zitat von Ableitinger & Herrmann (2014) (S. 328):

Und schließlich hat der Bruch zwischen Schule und Universität auch einen lernstrategischen Aspekt. Das Lernen wird zum großen Teil in die Selbstverantwortung der Studierenden gelegt – viele von ihnen müssen aber erst lernen, wie man bezogen auf ein Mathematikstudium erfolgreich lernt. Wie bereitet man eine Vorlesung nach? Wie gelangt man zu einem tieferen Begriffsverständnis? Wie lernt man Beweisen? Wie bereitet man sich effektiv für eine Klausur oder Zwischenprüfung vor? Etc.

Mit Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium sowie daraus ableitbaren Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester beschäftigt sich die Dissertation von Rach (2014). In der Einleitung nennt sie als eine spezifische Besonderheit des Übergangs die „Lernumgebung, die sich durch einen hohen Anteil an Selbststudiumsphasen kennzeichnen

lässt“ und deduziert hieraus, dass für eine optimale Nutzung des Lehrangebots selbstregulative und elaborative Lernstrategien notwendig seien. Eine Übersicht einer Lernstrategieklassifikation, die sich an Schiefele & Wild (1994) orientiert, findet sich in Wild (2005).

Schiefele & Wild (1994) klassifizieren hierbei Lernstrategien im weiteren Sinne in die drei Teilbereiche kognitive Strategien, metakognitive Strategien sowie ressourcenbezogene Strategien. Kognitive Strategien werden weiter in oberflächenorientierte Strategien (Wiederholungsstrategien) sowie tiefenorientierte Strategien (Organisationsstrategien, Elaborationsstrategien, Kritisches Denken) unterteilt. Unter metakognitiven Strategien verstehen sie die Fähigkeiten, Lernschritte zu planen, zu überwachen und zu regulieren. Besonders den selbstregulativen Fähigkeiten (vgl. etwa Schmitz & Wiese, 2006) kommt in der Studieneingangsphase große Bedeutung zu, da viele Studienanfängerinnen und Studienanfänger enorme Schwierigkeiten haben, sich in der neuen Lernumgebung „Universität“ zurechtzufinden. Den Studierenden kommt in dieser Phase eine aktive Rolle zu, da sie – im Gegensatz zur Schule – die Verantwortung für ihren Lernerfolg in großem Maße selbst tragen. Gerade diese Kompetenz der Studierenden birgt allerdings häufig Defizite in sich, wodurch sich ein Förderungsbedarf ergibt (Bellhäuser & Schmitz, 2014). De Guzmán et al. (1998) machen ähnliche Schwierigkeiten im Zusammenhang mit selbstregulativem Lernen aus (S. 757):

It is quite clear that some of these difficulties arise from the way students have been practicing and learning mathematics at the secondary level; for instance, many students arriving at university do not know how to take notes during a lecture, how to read a textbook, how to plan for the study of a topic, which questions to ask themselves before they get asked by the teacher.

Wie Engelbrecht (2010) herausstellt, sind im Zusammenhang mit der Hochschulmathematik besonders selbstregulative Fähigkeiten und eigenständiges Arbeiten entscheidend (S. 152 f):

This process of understanding is also misleading. Mathematics can be the easiest subject in the world if you watch somebody else do it. A good teacher explains difficult mathematics so well that you are convinced that you understand everything – s/he makes it look so simple. It is only when you try to do it yourself that you suddenly are confronted by the intricacies, the cognitive depth of a concept. It is only then that you realise how thin your first layer of understanding really was.

Expertinnen und Experten präsentieren Mathematik in den Vorlesungen oft als fertiges Pro-

dukt. Studien zu mathematischer Expertise, insbesondere zu Lernverhalten und Denkweisen von Mathematikern finden sich in Dubinsky (1991); Lakoff & Núñez (2000); Schoenfeld (1985); Schoenfeld (1992); Sfard (1992); Vinner (1991). Nur wenige der Studierenden sind allerdings in der Lage, mathematische Ideen in ihre Einzelkomponenten zu zerlegen oder selbständig anzuwenden (Wilkerson & Wilensky, 2011). Duffin & Simpson (2000) unterscheiden im Bezug auf mathematisches Wissen in diesem Zusammenhang die drei Stufen *building*, *having* und *enacting*. Es reicht allein nicht aus „Wissen zu haben“, sondern man muss es auch selbständig anwenden sowie weiterentwickeln können.

Auch Zucker (1996) hebt den unterschiedlichen Anspruch an das Lernverhalten der beiden Bildungsinstitutionen heraus (S. 863):

The fundamental problem is that most of our current high school graduates don't know how to learn or even what it means to learn (a fortiori to understand) something. In effect, they graduate high school feeling that learning must come down to them from their teachers. That may be suitable for the goals of high school, but it is unacceptable at the university level. That the students must also learn on their own, outside the classroom, is the main feature that distinguishes college from high school.

Er bezieht sich dabei zwar auf den Unterschied zwischen High School und College in den Vereinigten Staaten, jedoch ist dies durchaus übertragbar auf die Schnittstelle Schule – Hochschule in Deutschland.

In Bezug auf die Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit Hochschuldozentinnen und -dozenten stehen, nennen de Guzmán et al. (1998) sieben Faktoren, die hier nur kurz erläutert werden:

- **Fehlen pädagogischer und didaktischer Fähigkeiten**

„*I know the subject and this is sufficient*“ (ebd., S. 757) als grundlegende Philosophie. Eine weitverbreitete Meinung unter Dozierenden ist, es sei ausreichend, das Themengebiet tiefgehend verstanden zu haben. Dieser Ansicht widersprechen de Guzmán et al. (1998). Sie postulieren, nicht die- oder derjenige unterrichte ein Fach am besten, der das tiefreichendste Verständnis mitbringe, sondern viel wichtiger sei es, den Lernenden wichtige Vorstellungen und Fertigkeiten beizubringen: „*This requires from the teacher*

many different skills (mathematical as well as didactical ones) that are rarely present in a spontaneous form.“ (ebd., S. 757).

- **Fehlen angemessener Vorbilder**

Junge Dozentinnen und Dozenten orientieren sich oft an den „alteingesessenen“ Dozierenden: *„But much too often this is rather a counterexample showing how NOT to teach mathematics“* (ebd., S. 757).

- **Geringschätzung der Methodik-Vermittlung**

Mathematik verlangt ein anderes Arbeiten und Lernen als andere Fächer. Den Studierenden ist dies zu verdeutlichen und die wissenschaftlichen Methoden sind ihnen zugänglich zu machen.

- **Fehlen innovativer Lehrmethoden**

„Many teachers tend to confine themselves to 'unimaginative teaching methods' (Robert & Schwarzenberger, 1991, S. 129), the style of teaching most frequently practiced at the university level being that of a lecture presentation of polished mathematics ('the teacher talks and the student takes notes')“ (ebd., S. 757)

- **Sorglosigkeit in der Kursgestaltung**

Hochschuldozentinnen und -dozenten machen sich nur selten Gedanken über den aktuellen Wissensstand der Studierenden sowie über das dem überwiegenden Teil des Auditoriums angemessene Tempo in der Vorlesung.

- **Fehlen von Feedback-Maßnahmen**

Oftmals fehlt es auch an geeigneten Evaluationsmöglichkeiten der Veranstaltungen, so dass die Dozierenden nur wenig bis gar keine Rückmeldung durch die Studierenden erfahren. Rückmeldungen über den Kenntnisstand der Studentinnen und Studenten bereits während des Semesters wären wünschenswert, um überprüfen zu können, ob das, was „gelehrt“ wurde, auch tatsächlich „gelernt“ wurde.

- **Fehlen von Bewertungsfähigkeiten**

Leistungsbewertungen finden meist anhand von Klausuren am Ende des Semesters statt. Alternative Prüfungsmethoden wie etwa Portfolios oder mündliche Prüfungen sind nur

noch selten zu finden. „*The easiest solution to evaluation, and possibly the poorest one, is of course the written examination – eventually, for large groups, one which the machine can take care of*“ (ebd., S. 758).

2.2 Studienabbruchquote in Mathematik

Es ist an dieser Stelle sinnvoll, einen kurzen Blick auf die Studienabbruchquote zu richten, da diese „als ein wichtiger Indikator für die Attraktivität und Effektivität der akademischen Ausbildung und somit für die Leistungsfähigkeit des tertiären Bildungssektors angesehen [wird]“ (Dieter, 2012, S. 1). Zuerst stehen allgemein empirische Ergebnisse zur Studienabbruchquote im Fokus, anschließend erfolgt ein kurzer Blick auf die Situation an der Universität Passau. Unter Studienabbruchquote wird in Anlehnung an Briedis et al. (2008) der Anteil eines Studienanfängerjahrgangs verstanden, der sein Erststudium nicht erfolgreich beendet hat. Ein Fach- oder Hochschulwechsel wird folglich nicht als Studienabbruch gewertet. Ein solcher Wechsel findet in manchen Studien unter dem Begriff „Schwund“ Berücksichtigung. In diesem Zusammenhang ist von Schwundwert und Schwundbilanz die Rede: „Der Schwundwert gibt Auskunft darüber, wieviel Studienanfänger eines Jahrgangs keinen Abschluss in dem Bereich ablegen, in dem sie sich ursprünglich immatrikulierten. In diese[n] Wert geht demzufolge der Studienabbruch und die Abwanderung aus diesem Bereich ein“ (Briedis et al., 2008, S. 57). „In der Schwundbilanz wird der Schwund unter den Studienanfängern eines Jahrgangs in einem bestimmten Bereich mit der Zuwanderung von Studienanfängern desselben Jahrgangs in einem bestimmten Bereich verrechnet. Die Schwundbilanz gibt damit Auskunft über den Saldo von Ab- und Zuwanderung. Sie wird gebildet, indem zuerst die Anteile der Studienabbrecher und Abwanderer aus einem bestimmten Bereich addiert und anschließend von diese Summe der Anteil der Zuwanderer in diesen Bereich subtrahiert wird“ (Heublein et al., 2012, S. 53).

2.2.1 Empirische Ergebnisse zur Studienabbruchquote

Ein Artikel von Spiegel Online (2014) schildert, dass jeder vierte Bachelor-Student vorzeitig die Hochschule verlässt. In Mathematik scheitert sogar fast jeder Zweite (Abbrecherquote: 47 Prozent). Der Artikel beruft sich dabei auf eine Studie des Deutschen Zentrums für Hochschul-

und Wissenschaftsforschung (DZHW). Das DZHW veröffentlichte 2014 zum siebten Mal differenzierte Quoten zum Studienabbruch bei deutschen Studierenden; die Studien umfassen die Absolventenjahrgänge 1999, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010 und 2012. Die Darlegung der Studienabbruchquoten erfolgt dabei rein deskriptiv. Allerdings ist geplant, „belastbare Erkenntnisse zu den Gründen der unterschiedlichen Abbruchquoten [vorzulegen]“ (Heublein et al., 2014, S. 1).

Während die Studien des DZHW sehr allgemein gehalten sind, beschäftigt sich die Dissertation von Dieter ausschließlich mit Abbruchquoten in mathematischen Studienfächern. Die Daten dieser Untersuchung beruhen auf dem Datenmaterial aus der Studierenden- und Prüfungsstatistik des Statistischen Bundesamtes und können folglich als „präzise und vollständig“ eingestuft werden (Dieter & Törner, 2010). Dieter (2012) spricht im Zusammenhang mit Studienfachwechseln von frühen Fachwechslern (Fachwechsel während der ersten beiden Semester) und späten Fachwechslern (Fachwechsel in höheren Semestern). Die Studienfachwechselquote im Diplom- bzw. Bachelorstudiengang Mathematik lag bei Studienbeginn im Wintersemester 2004 / 2005 etwa bei 35 %. Nach acht Semestern lag diese bei durchschnittlich 65 %. Die Erfolgsquote, d.h. der Anteil der Studierenden, die ihr Studium erfolgreich abschließen, wird im Studienfach Mathematik auf etwa 19.6 % beziffert (Dieter, 2012, S. 51). In einer von der Deutschen Telekom Stiftung geförderten Publikation sprechen Dieter & Törner (2010) davon, dass die Erfolgsquote des gesamten Studiums, d.h. das Verhältnis von Studienanfängerinnen und Studienanfängern zur Anzahl der erfolgreich absolvierten Abschlussprüfungen im Fach Mathematik im Mittel nur auf etwas über 20 % geschätzt wird (Dieter & Törner, 2010).

Weitere Zahlen zu Studienabbruchquoten liefert die „Hochschul Informations System GmbH“ (HIS), welche von Bund und Ländern getragen wird und einen wichtigen Bestandteil des deutschen Hochschulsystems darstellt. Im Jahr der Mathematik 2008 wurde eine vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) in Auftrag gegebene Studie zu „Studienaufnahme, Studium und Berufsverbleib von Mathematikern“ veröffentlicht (Briedis et al., 2008). Der Studie zufolge war für den Studienbereich Mathematik (hier ohne Lehramt) ein steigender Studienabbruch kennzeichnend (s. Abbildung 2.1).

Unerheblich, ob Studienabbruch oder Studienfachwechsel, die hohe Zahl der Studentinnen und Studenten, die im Fach Mathematik keinen Abschluss erreichen, ist desolat, zumal Studienabbruch und Studienfachwechsel mit hohen individuellen und gesellschaftlichen Kosten

Tabelle 2.1: Studienabbruch im Fach Mathematik an Universitäten (in %) (Quelle: Briedis et al., 2008, S. 56).

| Studienbereich | Jahr | Studienabbruch | Schwund | Schwundbilanz |
|----------------|------|----------------|---------|---------------|
| Mathematik | 2005 | 32 | 62 | 53 |
| | 2004 | 23 | 62 | 49 |
| | 2002 | 26 | 65 | 52 |
| | 1999 | 12 | 58 | 51 |

verbunden sind (Lorbeer & Reiss, 2010).

Im Rahmen des an der Universität Augsburg stattfindenden Projekts „Mathematik studieren!“ wurden 83 Studenten verschiedener Mathematik-Veranstaltungen nach den Gründen für Studienabbrüche befragt. Die Antworten konnten dabei in folgende Kategorien eingestuft werden (nach Brandl (2013b), ins Deutsche übersetzt):

- Unzureichende Vorstellung über die Anforderungen im Mathematik-Studium
- Starke Diskrepanz zwischen Mathematik an der Schule und Universität
- Ungewohntes Ausmaß von Eigenverantwortung und Selbstmanagement
- Kaum erkennbarer Zusammenhang zum späteren Beruf

Vor allem den ersten beiden Aspekten kann durch gezielte Maßnahmen in der Vorphase des Studiums bzw. Studieneingangsphase entgegengewirkt werden, konkrete Ansätze werden in Abschnitt 2.3 beschrieben.

2.2.2 Die Situation an der Universität Passau

Die in Abschnitt 2.2.1 dargestellten empirischen Ergebnisse zur Studienabbruchquote in Mathematik werden auch durch die Situation an der Universität Passau bestätigt. Daher nahm die Universität bereits 2008 an dem von der bayerischen Wirtschaft, vertreten durch vbw, VBM und BayME¹, ins Leben gerufene Dachprojekt „Wege zu mehr MINT-Absolventen“ teil. Das Projekt war eine Reaktion auf den Fachkräftemangel insbesondere in den Bereichen Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik und sollte besonders dem Studienabbruch

¹Dabei handelt es sich um die bayerischen Arbeitgeberverbände „Vereinigung der Bayrischen Wirtschaft e.V.“ (vbw), „Bayerischer Unternehmensverband Metall und Elektro e.V.“ (BayME) sowie „Verband der Bayerischen Metall- und Elektro-Industrie e.V.“ (VBM).

in diesen Fächern begegnen (Börensens & Gensch, 2009). Die Universität Passau nahm mit dem Teilprojekt „MINTMentoring“ teil. Im Zwischenbericht dieses Projektes wurde bereits in der Schilderung der Ausgangssituation darauf verwiesen, dass die Studieneingangsphase die für den Studienerfolg entscheidende Phase sei. Weiter wird berichtet, an der Universität Passau würden vor allem Leistungsprobleme zu Beginn des Studiums als kritischer Faktor, der einen Studienabbruch versuchen könne, angesehen (Börensens & Gensch, 2009). So würden mehr als 30 Prozent der Studierenden im Fach Informatik an der Universität Passau ihren Studiengang bis zum dritten Fachsemester verlassen (ebd., S. 76). Das „MINTMentoring“-Projekt beschränkte sich auf die Studiengänge Informatik (B.Sc.) sowie Internet Computing (B.Sc.). Die Studierenden des ersten Studiengangs belegen laut Studienverlaufsplan zumindest die Vorlesungen „Lineare Algebra und analytische Geometrie 1“ und „Analysis 1“ innerhalb der ersten beiden Semester. Das Projekt setzt sich aus den drei Säulen Übungsevaluation, Auswertung von Prüfungsergebnissen und Studienverläufen sowie der schriftlichen Befragung von Studierenden zusammen. Nähere Informationen zu diesen drei Bereichen finden sich in Börensens & Gensch (2009). Es wurden dabei hauptsächlich Defizite in Mathematik festgestellt. Daraus resultierte die Etablierung eines Mathematik-Brückenkurses für zukünftige Erstsemester, „der sie auf das Anforderungsniveau der Vorlesungen vorbereiten soll“ (ebd., S. 80). Der Kurs wurde erstmals vor dem Wintersemester 2009 / 2010 angeboten und fand in der Woche vor Vorlesungsbeginn statt (Gensch & Kliegl, 2011). Obwohl sich der Kurs aufgrund der Zielgruppe des Projektes zunächst nur an Studierende der oben genannten Bachelorstudiengänge richtete, fand er dennoch bereits im ersten Durchlauf große Resonanz bei Lehramtsstudierenden; so waren rund ein Viertel der Teilnehmer Studierende mit dem Abschluss Lehramt. Im folgenden Jahr stieg dieser Prozentsatz auf über die Hälfte an (Gensch & Kliegl, 2011). Das Format des Brückenkurses an der Universität Passau wird in Abschnitt 2.3.1 noch weiter erläutert. Als Zielsetzungen des Projektantrags sind formuliert: „[E]in Klima des gegenseitigen Vertrauens zwischen den Studierenden und den Universitätsmitarbeitern zu schaffen. Probleme können gemeinsam gelöst werden; ein Studienabbruch ohne vorherige Konsultation soll verhindert werden“ (ebd., S. 96). Diese Vorgaben waren am Ende der Projektzeit allerdings nur schwer überprüfbar (Gensch & Kliegl, 2011), jedoch sind sowohl der Brückenkurs sowie verpflichtende Beratungsgespräche mit Professorinnen und Professoren in den Bachelorstudiengängen bis heute fest an der FIM verankert.

Weiter zeigt sich an der Fakultät für Informatik und Mathematik der Universität Passau bereits in den Einstiegsvorlesungen eine sehr niedrige Bestehensquote. So waren im Wintersemester 2014 / 2015 zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ 165 Teilnehmerinnen und Teilnehmer eingetragen². Zur Klausur haben sich davon 54 Studierende angemeldet, von denen lediglich 42 auch erschienen sind. Dies verwundert, da nach der neuen Prüfungsordnung nur noch maximal drei Versuche zum Bestehen der Vorlesung gewährt werden. Von den 42 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 12 die Klausur bestanden; Abbildung 2.1 zeigt hierzu die Notenverteilung.

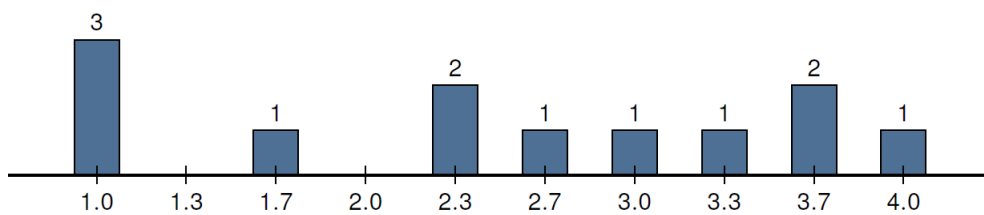


Abbildung 2.1: Notenverteilung der 1. Klausur zur Linearen-Algebra-I im Wintersemester 2014 / 2015.

Noch bedenklicher stellte sich die Situation bei der Nachholklausur dar. Von den 75 angemeldeten Teilnehmern erschienen 49 zur Klausur; davon haben fünf die Klausur bestanden. Abbildung 2.2 zeigt hierzu die Notenverteilung.

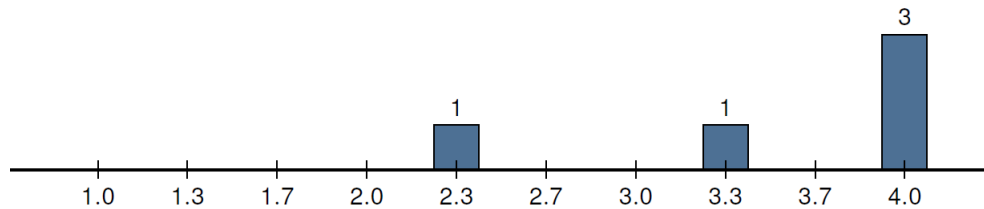


Abbildung 2.2: Notenverteilung der 2. Klausur zur Linearen-Algebra-I im Wintersemester 2014 / 2015.

Fasst man beide Klausuren zusammen, haben von 165 Studentinnen und Studenten, die in Stud.IP für die Veranstaltung eingeschrieben waren, 17 den Lineare-Algebra-I Schein erhalten. Gerade für eine Einstiegsvorlesung sind dies äußerst besorgniserregende Zahlen.

²Es lässt sich an dieser Stelle leider nicht genau erfassen, wie viele tatsächlich ernsthaft an der Vorlesung teilgenommen haben bzw. wie viele sich zwar eingetragen haben, aber nicht an Vorlesung und Übung teilgenommen haben.

2.3 Vorkurse und Entwicklungsprojekte

Vorkurse, die zum Ziel haben, Inhalte der Schulmathematik vor Beginn des Hochschulstudiums zu wiederholen, finden sich seit einigen Jahren an fast allen Universitäten in Deutschland. Das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (KHDM) hielt 2011 eine Arbeitstagung zu Konzepten und Perspektiven mathematischer Vor- und Brückenkurse ab. Ein Ziel der Tagung war, Vor- und Brückenkurse wechselseitig bekannt zu machen. Vergleicht man hier Konzepte verschiedener Universitäten, stellt man fest, dass die Kurse in unterschiedlichsten Formaten und differierendem Umfang stattfinden. An manchen Hochschulen sind Vorkurse sogar verpflichtend und deren Bestehen ist Zugangsvoraussetzung zum Studium (Lorbeer & Reiss, 2010). Cramer & Walcher (2010) berichten, dass es aufgrund der sinkenden Kenntnisse und Fertigkeiten der Studienanfängerinnen und -anfänger als Reaktion der Hochschulen zu einer Umgestaltung der Vorkurse kam. An der RWTH Aachen beispielsweise wurden die Einführungskurse im Jahr 2007 grundlegend verändert. Während früher bereits Vorgriffe auf Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher Standard waren, liegt der Fokus seit der Umstellung auf der Wiederholung der Sekundarstufen I und II. Kritisch zu hinterfragen ist aber, was ein derartiger Vorkurs zu leisten vermag, denn: in Anbetracht der kurzen Zeit kann keine Geläufigkeit und Sicherheit im Umgang mit diesen Themen erzielt werden. Fehlen sogar elementare Grundlagen aus der Schule, so sind diese nach Cramer & Walcher (2010) kaum mehr aufzuholen.

Im Folgenden wird zunächst das Format des Kurses an der Universität Passau vorgestellt. Um diesen hinsichtlich Konzeption und Umfang besser einordnen zu können, erfolgt in Abschnitt 2.3.2 zum Vergleich exemplarisch ein Blick auf Vorkurse an anderen Universitäten.

2.3.1 Der Mathematik-Brückenkurs an der Universität Passau

An der Fakultät für Informatik und Mathematik der Universität Passau gibt es, wie bereits in Abschnitt 2.2.2 erläutert wurde, seit dem Wintersemester 2009 / 2010 einen Brückenkurs-Mathematik mit einem Umfang von etwa vier Tagen. Dieser findet jährlich, meist ein bis zwei Wochen vor Vorlesungsbeginn des Wintersemesters statt. Vor dem Sommersemester findet kein Kurs statt. Der Vorkurs wird von Studierenden höherer Semester, die kurz vor dem

Staatsexamen stehen, geleitet und behandelte bis einschließlich Wintersemester 2015 / 2016³

Inhalte zu folgenden Gebieten:

(1) **Grundlagen**

Elemente der Aussagenlogik, Mengen und Quantoren sowie Summen- und Produktzeichen.

(2) **Rechnen mit reellen Zahlen**

Beträge und Ungleichungen, Bruchrechnung, Potenzen und Wurzel, Logarithmen sowie Lösen von Gleichungssystemen.

(3) **Funktionen**

Funktionsbegriff, Eigenschaften von Funktionen, Spezielle Funktionen (Folgen, Polynomfunktionen, Trigonometrische Funktionen) und Konstruktion neuer Funktionen (Addition, Multiplikation und Hintereinanderausführung von Funktionen).

(4) **Folgen und Grenzwerte**

Einfache Zahlenfolgen sowie deren Konvergenz.

(5) **Differenzial- und Integralrechnung**

Stetigkeit, Differenzierbarkeit sowie Ableitungsregeln.

(6) **Komplexe Zahlen**

Definition und wichtige Rechenregeln in Bezug auf komplexe Zahlen.

Zunächst wiederholen die Tutorinnen und Tutoren Inhalte aus oben genannten Gebieten. Im Anschluss daran bearbeiten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer alleine oder in kleinen Gruppen Übungsblätter mit Aufgaben zu den jeweiligen Themen. Die Lösungen werden anschließend zusammen besprochen. Im Rahmen des „MINT-Mentoring“-Projekts wurde der Brückenkurs evaluiert. Die Ergebnisse auf die Frage „Durch den Kurs fühle ich mich besser auf mein Studium vorbereitet“ finden sich in Abbildung 2.3.

Diese Daten wurden jeweils am letzten Kurstag mittels eines Fragebogens erhoben. Es bleibt unklar, inwieweit diese Zahlen den tatsächlichen Nutzen dieses Kurses widerspiegeln. Wie sollen Studienanfängerinnen und -anfänger einschätzen, ob sie sich besser auf das Studium vorbereitet einschätzen, wenn sie noch gar nicht konkret wissen, was im Studium auf sie wartet? So zeigte sich etwa in einer Befragung von Mathematikstudierenden an der Universität

³ Ab dem Wintersemester 2016 / 2017 kam es auch aufgrund erster Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit zu einer Neustrukturierung des Brückenkurses Mathematik. Diese wird in Kapitel 13 am Ende der Arbeit erläutert.

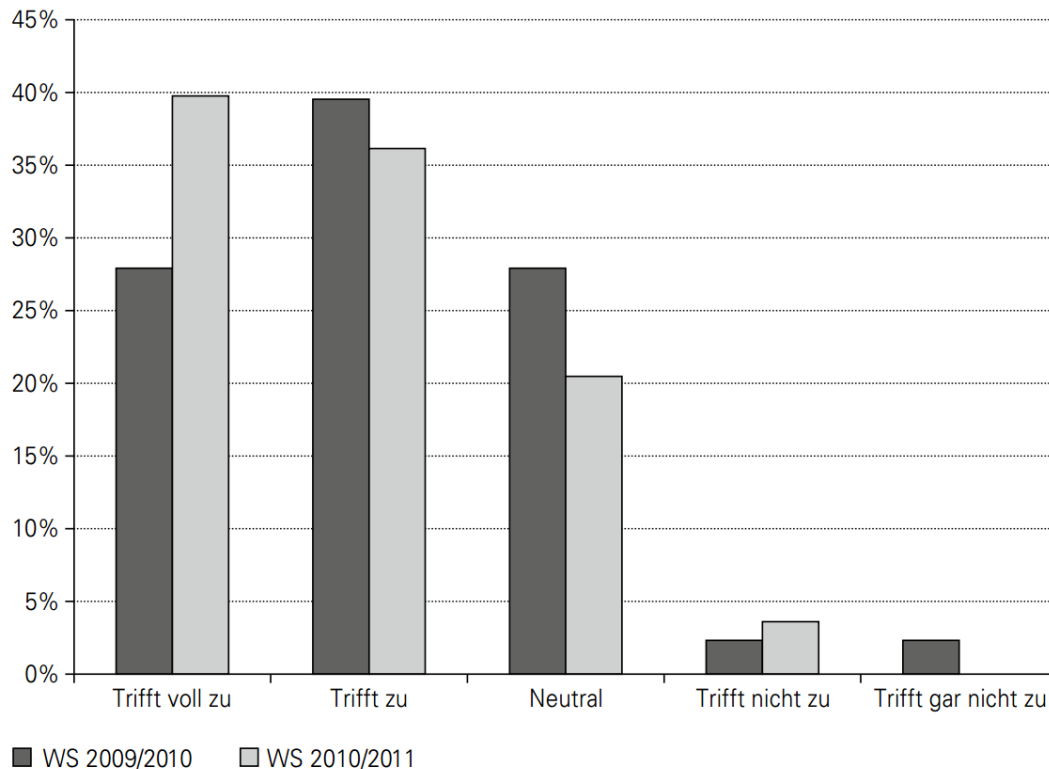


Abbildung 2.3: Befragung der Teilnehmerinnen und Teilnehmer am „Brückenkurs Mathematik“ der Universität Passau. (Quelle: Gensch & Kliegl, 2011, S. 93).

Augsburg, dass die Studierenden oft mit völlig falschen Erwartungen ihr Studium begonnen haben (Börensens & Gensch, 2009, S. 28). Als Konsequenz mussten sie ihre Erfahrungen zu Beginn ihres Studiums neu bewerten und einige entschlossen sich in der Folge, ihr Studium abzubrechen. Ein ähnliches Bild zeigte sich auch in Interviewbefragungen mit 31 Studienanfängerinnen und -anfängern aller Studiengänge der Fakultät für Informatik und Mathematik an der Universität Passau⁴, die sowohl vor dem Studium (während des Brückenkurses) als auch sieben Wochen nach Studienbeginn mit derselben Stichprobe geführt wurden. Waren während der ersten Interviewphase noch alle der Ansicht, dass der Brückenkurs eine sehr gute Unterstützung für den Start ins Studium darstellt, mehrten sich beim zweiten Interviewtermin negative Äußerungen über den Nutzen des Vorkurses. Exemplarisch dafür stehen nachfolgende Interviewausschnitte:

⁴Hierbei handelt es sich um dieselbe Stichprobe wie in Abschnitt 8.3.2 beschrieben

- 1 **S03:** Aber im Endeffekt haben wir das, was wir gemacht haben, gar nicht mehr gemacht. Weil da
2 haben wir auch noch gerechnet und sowas machen wir gar nicht mehr. Also es war/ ich mein,
3 kann man machen, muss man nicht.
- 1 **S04:** Vielleicht die Summenschreibweise und so, was wir noch wiederholt haben. Aber sonst grund-
2 sätzlich noch mal wiederholen, aber für die Vorlesung an sich hat man da nur wenig brauchen
3 können.
- 1 **S06:** Ja der Brückenkurs hat ja eigentlich bloß wiederholt, was wir in der Schule gemacht haben im
2 Grunde ((Mhm)) und ein bisschen vertieft und noch ein bisschen erweitert. Aber, ja, das was
3 wir jetzt an der Uni machen hat jetzt wenig mit dem Unterricht zu tun in der Schule eigentlich.
4 Deswegen war das jetzt nicht so wichtig/ also ein paar Sachen waren schon, die mir was gebracht
5 haben, wo ich gesagt hab, ja, das kann ich jetzt mitnehmen aus dem Brückenkurs, aber nicht
6 viel ((Mhm)).
- 1 **S07:** Vielleicht ein bisschen bei den/ es existiert oder für alle gilt/ also für bestimmte Sachen, aber
2 das ist so minimal, dass ich sag, eigentlich hätt ich's mir glaub ich sparen können.

Insgesamt lässt sich aus den Antworten einiger Teilnehmerinnen und Teilnehmer suggerieren, dass ihnen der Kurs ein falsches Bild vom Mathematikstudium vermittelt hat. Aufgrund der behandelten Themen im Kurs dachten einige, dass die Schulmathematik auf etwas höherem Niveau weitergeführt wird. Ein Wandel weg von algorithmischen Lösungsmustern hin zu einem stringenten Aufbau, wie er in den Vorlesungen präsentiert wird, war ihnen nicht ersichtlich.

2.3.2 Mathematik-Brückenkurse an anderen Universitäten

Zur Kontrastierung und besseren Einordnung des Brückenkurses an der Universität Passau werden kurz Vorkurse an anderen Universitäten beschrieben: zum einen die Brückenkurse der Technischen Universität München (TUM) bzw. der Ludwig-Maximilians-Universität München (LMU), zum anderen das VEMINT-Projekt der Universitäten Paderborn, Darmstadt, Kassel und Lüneburg.

Die Beschreibung der „Münchner Brückenkurse“ orientiert sich an einem Artikel von Reichersdorfer et al. (2014). Das den Kursen zugrundeliegende Konzept wurde in Kooperation der Lehrstühle für Mathematikdidaktik der LMU und TUM entwickelt und ist seit 2010 bzw. 2011

an der TUM, LMU sowie an der Universität Regensburg implementiert. Der Vorbereitungskurs erstreckt sich über die Dauer von zwei Wochen und findet unmittelbar vor Semesterbeginn statt. Weiter unterteilt er sich in klassische Vorlesungen sowie in Übungen mit Kleingruppen, „wobei die Diskussion und Präsentation von eigenen Ideen unter Anleitung von Tutorinnen und Tutoren gefördert wird“ (ebd., S. 46). Die Veranstaltung wurde bewusst als Hilfe für den Übergang Schule – Hochschule konzipiert und unterstützt dabei folgende fünf Zielbereiche:

(1) **Arbeitsweisen der Mathematik**

Dieser Bereich „bezieht sich auf Arbeitsweisen, Herangehensweisen und Strategien, die für die akademische Mathematik typisch sind und die Studienanfängerinnen und -anfänger nach einer gezielten Förderung kennen und anwenden sollen. Insbesondere Prozesse mathematischen Arbeitens, die in regulären Vorlesungen nicht expliziert werden, wie das Generieren von mathematischen Aussagen, das Finden von adäquaten (Gegen-)Argumenten für diese Aussage bis hin zur Formulierung einer deduktiven Beweiskette in einer formal-axiomatischen Theorie“ (ebd., S. 42) werden dabei fokussiert.

(2) **Einführung und Vermittlung neuer Lernstrategien**

Diese Strategien konzentrieren sich insbesondere auf den Begriffserwerb. Hierbei „sollen instruktionale Maßnahmen die Lernenden bei der Vernetzung von *Concept Image* und *Concept Definition* unterstützen“ (ebd., S. 43). Zudem soll durch die Vermittlung von Elaborationsstrategien auch der Aufbau eines *Concept Image* zu den formal-axiomatischen Definitionen gefördert werden. Diese beiden Begriffe spielen in dieser Arbeit eine zentrale Rolle und werden in Abschnitt 3.2.3.1 detailliert beschrieben.

(3) **Aufbau von Methodenwissen**

Hierbei geht es hauptsächlich um „Wissen über die Akzeptierbarkeit mathematischer Argumente“ (ebd., S. 44). Grundlage dieses Zielbereichs bildet die DNR-Theorie (duality – necessity – repeated) von Harel (2008).

(4) **Thematisierung neuer Fertigkeiten**

Darunter fallen Kompetenzen, die „spezifisch für die akademische Mathematik sind, aber in der Schulmathematik nicht zentral sind“ (Reichersdorfer et al., 2014, S. 44). Als Beispiele hierfür werden Grundprinzipien der Logik sowie der Umgang mit formalen Elementen der Mathematik genannt.

(5) **Studienorganisation**

Spezielle Vorbereitungsprogramme zum Kennenlernen der räumlichen und organisatorischen Gegebenheiten an der Universität, so dass daraus resultierend eine stärkere Fokussierung der Studentinnen und Studenten auf die Studieninhalte erfolgen kann.

Insgesamt liegt ein besonderer Fokus auf der Vermittlung neuer Lernstrategien. Durch die Gegenüberstellung der formal-axiomatischen Definitionen mit der Begriffsvorstellung aus der Schule soll gezielt die Begriffsentwicklung der akademischen Mathematik aufgezeigt und gefördert werden. Die Thematisierung der Arbeitsweisen der Mathematik betont den Prozesscharakter dieser Wissenschaft: „Im Vordergrund stehen dabei Erfahrungen bei der Generierung eines Theoriebausteins im formal axiomatischen Aufbau, um so zielführende Vorgehensweisen und hilfreiche Strategien insbesondere für das Beweisen kennenzulernen“ (ebd., S. 48). Ein besonderes Augenmerk liegt auf der Prozesshaftigkeit, beginnend bei der Hypothesengenerierung bis hin zur Formulierung eines formal-axiomatischen Beweises.

Das Brückenkurskonzept wurde evaluiert und es zeigten sich signifikant bessere Leistungen der Studierenden, die an einem der Vorkurse teilgenommen hatten. Bei der Auswertung der Rückmeldungen stach heraus, dass vor allem die Vermittlung der mathematischen Denk- und Arbeitsweisen für die Studierenden in der Studieneingangsphase eine große Unterstützung bot: „Die mathematische Denk- und Sprachweise. Erster Einblick in Beweistechniken hat am Anfang sehr viel erleichtert! Universitäres Umfeld kennengelernt, erste Kontakte geknüpft’, ‘Wie die Mathematik überhaupt aufgebaut ist mit ihren Sätzen und Definitionen. Ohne den Brückenkurs hätte ich in der Vorlesung einen Schock gekriegt“ (ebd., S. 49).

Das VEMINT-Projekt entstand aus den Projekten „Multimedia-Vorkurs Mathematik“ sowie „Virtuelles Eingangstutorium Mathematik“ und läuft an den Partneruniversitäten Paderborn, Darmstadt, Kassel und Lüneburg (Biehler et al., 2014b). „Ziel des Projekts ist es unter anderem, ein interaktives Buch auf multimedialer Basis zu entwickeln, das sowohl als Ergänzungsmaterial zu Lehrveranstaltungen als auch zum Selbststudium genutzt werden kann und mit dem Studienanfängerinnen und -anfänger die Möglichkeit erhalten, in ihrem eigenen Lerntempo neue Inhalte zu erarbeiten, bekannte Inhalte zu wiederholen und individuelle Defizite zu beseitigen“ (ebd., S. 261). Um Möglichkeiten zur Selbstreflexion und -einschätzung zu bieten, wurden elektronische Vor- und Nachtests entwickelt und via Moodle realisiert. Inzwischen wird das

didaktische Konzept bereits an einigen weiteren Fachhochschulen, Dualen Hochschulen und Universitäten eingesetzt. Weitere Informationen zu diesem Projekt sowie daraus entstandene Publikationen finden sich auf der Internetseite <http://www.vemint.de/>.

2.3.3 Das Projekt 'Mathematik studieren!' an der Universität Augsburg

Im Rahmen des in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen vbw-Projekts „Wege zu mehr MINT-Absolventen“ erfolgte an der Universität Augsburg die Umsetzung des Projekts „Mathematik studieren!“. Dabei wurden „with respect to incremental-evolutionary changes on the meta-level of beliefs and attitudes of the students“ (Brandl, 2013b, S. 123) den niedrigen Studierendenzahlen in MINT-Fächern durch zwei unterschiedliche, aber synergetische Ansätze begegnet (Brandl, 2013b):

(1) Begeisterung von Schülerinnen und Schülern, ein MINT-Fach zu studieren (Schule)

- *Information über Mathematikstudium und späteres Berufsfeld.*

Wie am Ende von Abschnitt 2.2.1 erläutert, begegnen Studierende dem Mathematikstudium oftmals mit völlig falschen Erwartungen – sowohl in Bezug auf den Inhalt als auch auf die Lernorganisation. Im Rahmen des Projekts gab es hierfür gezielte Informationsveranstaltungen.

- *Frühstudium für mathematisch-hochbegabte Schülerinnen und Schüler.*

Diese Schülerinnen und Schüler konnten bereits während der Schulzeit an universitären Lehrveranstaltungen teilnehmen und sich die Leistungen für das spätere Studium anrechnen lassen.

(2) Senkung der Durchfallquote (Universität)

- *Einwöchiger Mathematik-Vorbereitungskurs als Überleitung von der Schulmathematik zur Hochschulmathematik.*

Die Charakteristika der Hochschulmathematik standen hier besonders im Fokus: es wurden weniger algorithmische Lösungsmuster behandelt, sondern verstärkt

Augenmerk auf das Entwickeln von und Arbeiten mit mathematischen Theorien gelegt. Dabei wurden Fragen wie „Was ist Mathematik?“ und mathematische Symbole, Texte, Logik, Beweise, Mengenlehre sowie Funktionen und Relationen behandelt.

- *Informationen über das Berufsfeld 'Mathematiker/in'.*

Oftmals haben Studierende Probleme, den Nutzen der Vorlesungsinhalte zu erkennen. Dies führt schnell zu sinkender Motivation. In Zusammenarbeit mit dem Zentrum für Weiterbildung und Wissenstransfer an der Universität Augsburg wurden spezielle Programme angeboten, um diese Probleme abzufedern.

- *Entwicklung von Lernumgebungen für mathematische Themen an der Schnittstelle zwischen Schule und Universität.*

Dabei soll zum einen Methodenkompetenz, nämlich selbstständiges, eigenverantwortliches und kooperatives Lernen und Arbeiten, gefördert sowie Brücken und Zusammenhänge zwischen der Schul- und Hochschulmathematik geschaffen werden. Siehe hierzu etwa Brandl (2008) oder Brandl (2009).

Ein Abschlussbericht zu dem Projekt „Mathematik studieren!“ mit einer detaillierten Beschreibung der verschiedenen umgesetzten Maßnahmen sowie eine Bewertung dieser findet sich in Gensch & Kliegl (2011).

2.3.4 Die Projekte 'Mathematik Neu Denken' und 'Mathematik Besser Verstehen'

Neben Mathematik-Vorkursen, die insbesondere das Ziel verfolgen, elementare Kenntnisse und Fertigkeiten der Schulmathematik zu wiederholen, gibt es mittlerweile auch Projekte in Bezug auf die Lehramtsausbildung, um der, erstmals von Felix Klein aufgegriffenen „Doppelten Diskontinuität“ entgegen zu wirken. Dieser Abschnitt befasst sich mit zwei, von der Deutschen Telekom Stiftung geförderten Forschungs- und Entwicklungsprojekten, die sich mit Empfehlungen zur Neuorientierung der universitären Lehrerinnen- und Lehrerbildung im Fach Mathematik auseinandersetzen. Es handelt sich dabei um die Projekte „Mathematik Neu Denken“ sowie „Mathematik Besser Verstehen“.

Mathematik Neu Denken

„Guter Mathematikunterricht bedarf der fruchtbaren Balance zwischen Instruktion (der Schüler durch den Lehrer) und individueller Konstruktion (durch den Schüler selbst). Angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer müssen diese Balance selbst erfahren; sie müssen in ihrem eigenen Lernprozess erleben, wie mathematische Wissensbildung geschieht“

(Beutelspacher et al., 2010, S. 14)

„Mathematik Neu Denken“ steht für ein Gemeinschaftsprojekt der Universitäten Gießen und Siegen unter der Leitung der Professoren Rainer Danckwerts und Gregor Nickel (beide Siegen) sowie Albrecht Beutelspacher (Gießen).

Unter dem Motto „Bessere Lehrer für besseren Mathematikunterricht“ stellte der Vorsitzende der Deutschen Telekom Stiftung Dr. Klaus Kinkel heraus, dass Lehrerinnen und Lehrer eine entscheidende Rolle dabei spielen, welches Bild von Mathematik sich bei Schülerinnen und Schülern formiert resp. manifestiert: „Mathematik darf nicht auf eine Ansammlung von Lösungsverfahren für bestimmte Aufgabentypen reduziert werden, sie darf nicht als fertiges Gebäude von Lehrsätzen ohne Baupläne erscheinen“ (Beutelspacher et al., 2010, S. 4). Folglich ist es seiner Meinung nach umso bedauerlicher, dass in der Lehrerinnen- und Lehrerausbildung eine der großen Schwachstellen im deutschen Bildungssystem liegt: „Sie wird an den Hochschulen nicht ernst genug genommen, muss immer wieder hinter der Forschungsexzellenz zurückstehen“ (ebd., S. 4). Als zentrale Antwort auf diese Problematik sieht er eine frühzeitige und enge Verzahnung von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildung. Ähnlich argumentieren auch Stroth et al. (2001): „Eine enge Verzahnung von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildung erscheint uns essenziell. Gegenwärtig ist der Abstand zwischen der konkreten fachinhaltlichen Ausbildung und der fachdidaktischen Umsetzung oft zu groß. Es sollte angestrebt werden, dass Fachwissenschaft und Fachdidaktik möglichst stark miteinander verzahnt werden und in Teilen sogar parallel laufen“ (S. 5). Dies ist zugleich eines der Kernelemente des Projekts „Mathematik Neu Denken“: „Ein zentraler Leitgedanke des Projekts war die aktive Konstruktion eines angemessenen 'Mathematischen Weltbildes'“ (Beutelspacher et al., 2010, S. 12). Der Begriff „Mathematisches Weltbild“ wird hierbei in Anlehnung an Törner & Grigutsch (1994) verwendet (S. 212):

[U]nter dem 'mathematischen Weltbild' eines Individuums wollen wir dessen subjektiv implizites Wissen über Mathematik verstehen, das ein weites Spektrum von Vorstellungen umfa[ss]t:

(1) die Vorstellungen über das Wesen der Mathematik als solche wie auch (2) über das (Schul- bzw. Hochschul-) Fach Mathematik im besonderen. Weiterhin subsumieren wir unter diesen Begriff auch (3) die Vorstellungen über die Natur mathematischer Aufgaben bzw. Probleme, (4) Vorstellungen über den Ursprung mathematischen Wissens und (5) Vorstellungen über sich selbst (und andere) als Betreiber von Mathematik (Fähigkeiten zu Mathematik).

In der Einführung sprechen Beutelspacher et al. (2010) davon, dass die Lehrerinnen- und Lehrerausbildung Dreh- und Angelpunkt für eine Verbesserung des Mathematikunterrichts ist und dabei in erster Linie die universitäre Phase der Ausbildung gefordert ist, „weil es dort traditionell kaum gelingt, die Kluft zwischen der Wissenschaft Mathematik und dem Berufsbild des Mathematiklehrers zu schließen“ (ebd., S. 6). Als Folge dieser Kluft resultiert eine fehlende Identifikation der angehenden Lehrerinnen und Lehrer mit ihrem Fach. Ein weiteres Kernelement in der Neuorientierung der universitären Ausbildung war ein angestrebter Paradigmenwechsel im Umgang mit der Wissenschaft Mathematik. Diese wird den Studierenden mittels des klassischen axiomatisch-deduktiven Aufbaus in den Lehrveranstaltungen oftmals als fertiges Produkt präsentiert, die Prozesshaftigkeit der Mathematik geht dabei nahezu gänzlich verloren. „Die Methoden der Vermittlung sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung. Die so akzentuierte, traditionelle Fachausbildung ist eher produkt- und weniger prozessorientiert, und sie setzt eher auf die Instruktion durch die Lehrenden als auf die aktive Konstruktion des Wissens durch die Lernenden. In der Balance von Produkt und Prozess sowie von Instruktion und Konstruktion liegt der Schlüssel für eine Verbesserung der fachbezogenen Lehrerausbildung“ (Danckwerts et al., 2004, S. 48). Im Hinblick auf die Prozessorientierung wurden sowohl genetische Aspekte zur Geschichte als auch die Philosophie der Mathematik im Rahmen des Grundstudiums behandelt. Beutelspacher et al. (2010) formulierten als Resultat ihres Projekts zur Neuorientierung der Mathematiklehrerinnen und -lehrerausbildung folgende zehn Thesen (S. 9):

- (1) Angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer für die Gymnasien müssen während des Studiums eine aktive Beziehung zur Mathematik als Wissenschaft und als Kulturgut entwickeln, um das Fach im Unterricht und darüber hinaus souverän vertreten zu können.
- (2) Das Lehramtsstudium Mathematik muss den künftigen Pädagogen Erfahrungen ermöglichen, die neben der fachmathematischen Seite auch zur Reflexion über Mathematik und über das Lehren und Lernen von Mathematik Anlass geben.

- (3) Ein neu konzipierter Studiengang muss die fachwissenschaftliche Ausbildung mit der fachdidaktischen eng verzahnen.
- (4) Die Fachmathematik muss eine starke elementarmathematische Komponente enthalten, die nach Möglichkeit an schulmathematische Erfahrungen anknüpft und auch Forschungserfahrungen „im Kleinen ermöglicht“.
- (5) Die fachmathematische Ausbildung muss Erfahrungen mit einer „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ als Schnittstelle zwischen Fachwissenschaft und Fachdidaktik ermöglichen.
- (6) Die fachmathematische Komponente muss verbindliche Veranstaltungen zur historisch-genetischen oder philosophischen Reflexion über Mathematik enthalten.
- (7) Die fachdidaktische Ausbildung thematisiert primär die Aufgabe, mathematische Inhalte zugänglich zu machen; gleichzeitig setzt sie einen starken Akzent auf die Lerner-Perspektive und umfasst auch bildungstheoretische Aspekte.
- (8) Die fachdidaktische Ausbildung muss vermehrt Verständnis für das mathematische Denken von Kindern und Jugendlichen wecken und verstärkt das differenzierte und individualisierte Diagnostizieren und Fördern vermitteln.
- (9) Methodisch kommt es darauf an, Formen des Lehrens und Lernens zu bevorzugen, die die Studierenden in der eigenaktiven Konstruktion ihres Wissens nachhaltig unterstützen.
- (10) Mathematik lernen bedeutet, neben der eigenen Auseinandersetzung mit dem Thema, die Möglichkeit des Austausches mit anderen zu haben. Ein unterstützendes Mentorensystem wäre hier hilfreich, wofür eine spezifische Hochschuldidaktik zu entwickeln ist.

Durch diese zehn Thesen soll sichergestellt werden, „dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer in ihrem Studium durch eine fundierte fachbezogene Professionalisierung sinn- und identitätsstiftende Erfahrungen machen können“ (ebd., S. 15). Ihre programmatische Arbeit stützt sich dabei auf Grundüberzeugungen, die sie an folgenden beiden Zitaten festmachen:

[..] Pädagogisches Wissen, Fachwissen und Fachdidaktisches Wissen. Diese drei Kategorien bilden aus heutiger Sicht die allgemein akzeptierten Kernkategorien des Professionswissens von Lehrkräften und es besteht kein Zweifel, dass allen dreien eine zentrale Bedeutung bei den professionellen Aufgaben der Lehrerinnen und Lehrer zukommt.

(Krauss et al., 2008, S. 226)

Die Hinführung zu kulturell akkumuliertem, als wertvoll und nützlich erachtetem Wissen als Hintergrund und Basis für den individuellen Aufbau von Weltverstehen und Handlungskompetenzen ist nur möglich, wenn Lehrkräfte in ihren Fächern über ein breites Wissen verfügen, welches deutlich über den Horizont des unmittelbaren Unterrichtsstoffes hinausgeht. In der Lehrerbildung muss dieses fächerbezogene Wissen von den Studierenden erworben werden, wobei gleichzeitig der bildungstheoretische Aspekt der Begründung der Inhaltsauswahl sowie der didaktisch-methodische Aspekt der Organisation und Unterstützung von Lernen mit berücksichtigt werden muss.

(Terhart, 2000, S. 99)

Als Konsequenz enthält der von Beutelspacher et al. (2010) vorgeschlagene Studiengang ihrer Meinung nach unverzichtbare Elemente zu elementarmathematischen Erfahrungen im Rahmen der fachmathematischen Grundbildung, Schnittstellenerfahrungen (als „Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus“), Erfahrungen zur Reflexion über Mathematik (historisch/philosophisch/...), mathematikdidaktische Erfahrungen mit dem Schwerpunkt, mathematische Inhalte zugänglich zu machen sowie Erfahrungen der eigenaktiven Wissenskonstruktion (ebd., S. 53).

Von einem ähnlichen Projekt berichtet ein Artikel im ersten KHDM-Report (s. hierzu auch Abschnitt 2.3.5). Dabei wurde am Institut für Mathematische Bildung in Freiburg (IMBF) ein Studienmodell zur konsequenten Vernetzung von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Schulpraxis umgesetzt (Barzel et al., 2013). Auch hier soll die axiomatisch-deduktive Erschließung durch eine aktiv-genetische Erarbeitung der Inhalte ersetzt werden:

Um angehende Lehrkräfte angemessen auf die spätere Schulpraxis vorzubereiten und den Brückenschlag zwischen Ausbildung und späterer Schulpraxis auf inhaltlicher und prozessualer Ebene zu vollziehen, wird in der Lehrerausbildung am IMBF eine fachwissenschaftliche Grundlegung angestrebt, die nicht allein den 'Produktcharakter' der Mathematik als fertiger Disziplin widerspiegelt, sondern verstärkt Prozesse der Begriffsbildung und Theorieentwicklung in der Mathematik (ontogenetisch und historisch) sowie die Auseinandersetzung mit modellbildenden Aktivitäten in mathematischen Anwendungsbereichen berücksichtigt. Mathematische Konzepte werden dabei nicht nur als fertige Produkte fachsystematisch eingeführt, sondern aus Problemsituationen aktiv entwickelt – entsprechend der Forderung von Freudenthal (1991): 'Mathematik im Entstehen erleben'.

(Barzel et al., 2013, S. 13)

Weiter wird besonders Wert auf eine „fachdidaktische Sinnstiftung“ gelegt, worunter sie ei-

ne Anreicherung der Themenbereiche mit relevanten fachdidaktischen Aspekten verstehen: „Dies geschieht z.B. durch Reflexion von Prozessen der Wissenskonstruktion aus fachlicher Sicht (epistemologisch) wie aus lernpsychologischer Sicht, was Brücken zur Qualität von Lehr- und Lernprozessen in der Schule schlägt“ (ebd., S. 13). Ein weiteres Charakteristikum ist die Integration von digitalen Werkzeugen (Tabellenkalkulation, Geometriesoftware, Computeralgebrasysteme, etc.) in allen Veranstaltungen (Barzel et al., 2013).

Mathematik Besser Verstehen

„Es sollte dadurch ein Modell für Fachbereiche entwickelt werden, die Innovationen in der Studieneingangsphase umsetzen möchten, für strukturelle Änderungen im Lehrbetrieb allerdings keine weitreichenden zusätzlichen finanziellen und personellen Kapazitäten haben“

(Ableitinger & Herrmann, 2014, S. 329)

Das Projekt „Mathematik Besser Verstehen“ wurde unter der Leitung von Lisa Hefendehl-Hebeker an der Universität Essen umgesetzt. Es sieht den Ausgangspunkt für die Neuorientierung und -konzeption der universitären Lehrerbildung ebenfalls in der von Felix Klein proklamierten Doppelten Diskontinuität sowie dem Abstraktionsschock zu Studienbeginn. Im Gegensatz zu dem oben beschriebenen Projekt „Mathematik Neu Denken“ lag hier das Augenmerk darauf, „möglichst wenig Einfluss auf den bestehenden Lehrbetrieb [zu] nehmen, jedoch Ideen und Hilfsmittel [zu] entwickeln, wie auch Universitäten, die nicht die Möglichkeit separater Veranstaltungen für Lehramtsstudierende haben, die Studieneingangsphase stärker phänomenologisch orientiert und verständnisgeleitet gestalten können“ (Hefendehl-Hebeker et al., 2010, S. 93). Weiter soll das Projekt keinen zusätzlichen Aufwand für Studierende bedeuten, sondern diesen unter die Arme greifen. Auf der Internetseite⁵ des Projekts spricht Hefendehl-Hebeker von Maßnahmen auf drei bestimmten Ebenen:

- Die Bearbeitung von **speziellen Übungsaufgaben**, die einerseits das inhaltliche Verständnis vertiefen und andererseits Brücken zur Schulmathematik schlagen.
- Das Angebot von **begleitenden Verständnishilfen** (Unterstützungsmaterialien zum Durcharbeiten des Vorlesungsstoffs, Visualisierungen, etc.) auf der E-Learning-Plattform Moodle direkt zu den Inhalten der Vorlesungen Analysis und Lineare Algebra.

⁵https://www.uni-due.de/didmath/ag_hefendehl-hebeker/mbv.shtml

- Der **Übungsbetrieb** wird stärker an die **Bedürfnisse der Studierenden** angepasst. Es wird die Möglichkeit geschaffen, unter der Betreuung von Tutoren an Übungsaufgaben zu arbeiten und diese zu präsentieren.

Insbesondere im Bereich der Analysis dienten haptisch zu bedienende Applets als Visualisierungen von vorkommender Größen (z.B. ε - δ -Definition der Stetigkeit, s. Herrmann (2012), S. 979). Weiter wurden spezielle Übungsaufgaben konzipiert, die „eine Brücke zum Schulstoff schlagen“ sowie „zusätzliche Veranschaulichung liefern“ und „den Fokus auf den späteren Lehrberuf richten“ (ebd., S. 980). Anhand ausführlicher Musterlösungen und Vorführaufgaben soll implizites Wissen expliziert werden. Gleichzeitig dienen die Musterlösungen zum Nacharbeiten eigener Lösungen sowie als Orientierung bei der Bearbeitung neuer Aufgabentypen (vgl. Ableitinger & Herrmann, 2013). Weitere Maßnahmen sind u.a. Selbstdiagnostetests in Form von Multiple-Choice-Aufgaben sowie Anleitungen zum Durcharbeiten und Nachvollziehen des Vorlesungsstoffs (Herrmann, 2012).

2.3.5 Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (KHDM)

Neben Projekten, die sich hauptsächlich mit der Neugestaltung resp. Umorientierung von Mathematik-Lehramtsstudiengängen auseinandersetzen, verfolgt das „Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (KHDM)“ einen globalen Ansatz. Hierbei handelt es sich um eine gemeinsame, 2010 gegründete wissenschaftliche Einrichtung der Universitäten Kassel, Lüneburg und Paderborn, die ihren Fokus auf die Mathematik-Hochschuldidaktik legt. Auf der Internetseite des KHDM⁶ ist hierzu zu lesen:

Die Forschung des KHDM orientiert sich an praxisrelevanten Fragestellungen aus dem Bereich des Lehrens und Lernens von Mathematik an der Hochschule. Neben Beiträgen zur Theorieentwicklung soll die KHDM-Forschung letztlich das Lehren und Lernen von Mathematik an der Hochschule verstehen und weiterentwickeln. Zentrale Arbeitsfelder sind dabei:

- die Untersuchung des Lehrens und Lernens von mathematischen Denk- und Arbeitsweisen sowie Begriffen und Theorien
- die Untersuchung von Einstellungen und Lernverhalten von Studierenden

⁶<http://www.khdm.de/>

- die Entwicklung und Untersuchung von Innovationen aus den Bereichen der Lehr- und Lernmethoden sowie der digitalen Medien
- die Revision und Innovation bestehender Curricula an der Hochschule in inhaltlicher Hinsicht unter den Gesichtspunkten der Kompetenz- und Adressatenorientierung

[..] Die Vernetzung der Hochschuldidaktik Mathematik ist erklärtes Ziel des KHDM [..].

Bisher veröffentlichte der Arbeitskreis in einer eigenen Reihe drei große Publikationen. Während sich der erste Report sehr allgemein mit dem Übergang Schule – Hochschule im Fach Mathematik beschäftigt (Hoppenbrock et al., 2013), befasst sich die zweite Veröffentlichung mit der Kategorisierung mathematischer Bündelungsprozesse von Grundschullehramtsstudierenden (Schneider & Kolter, 2014). Die dritte Publikation thematisiert hingegen anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium (Wolf & Biehler, 2014). Riedl (2015) bietet folgende Zusammenfassung der Zielsetzung des KHDM (S. 30):

Das Forschungsvorhaben erstreckt sich dabei auf die kompetenz- und adressatenspezifische Orientierung und empirische Kontrolle der Curricula, Interventionen zur Förderung von Lernstrategien und Arbeitstechniken, visuell-experimentelle Zugänge zur Mathematik mit Brückenfunktion zwischen Fachwissen und Fachdidaktik, E-Learning-Module, Instrumente zur Kompetenzdiagnostik und Lehrevaluation sowie Konzepte zur fachspezifischen Tutorenschulung und individuellen Beratung und Betreuung.

KAPITEL 3 Wandel des Charakters der Mathematik

„The move from elementary to advanced mathematical thinking involves a significant transition: that from describing to defining, from convincing to proving in a logical manner based on those definitions. This transition requires a cognitive reconstruction which is seen during the university students' initial struggle with formal abstractions as they tackle the first year of university.“
(Tall, 1991c, S. 20)

Überblick:

| | |
|---|----|
| 3.1 Theorien zum Erlernen von Mathematik | 42 |
| 3.1.1 Der Drei-Welten-Ansatz von David Tall | 43 |
| 3.1.2 Die APOS-Theorie nach Ed Dubinsky | 56 |
| 3.2 Theorien zur Aneignung und zum Verständnis mathematischer Begriffe | 60 |
| 3.2.1 Begriffsentwicklung im Mathematikunterricht | 62 |
| 3.2.2 Möglichkeiten und Grenzen von Visualisierungen | 67 |
| 3.2.3 Concept Image und Concept Definition | 71 |

Dieses Kapitel beschäftigt sich ausführlich mit den Charakteristika der Schul- bzw. Hochschulmathematik. Der Wandel des Charakters der Mathematik verdeutlicht die Problematik des Übergangs zwischen den Bildungsinstitutionen.

Schulmathematik und Hochschulmathematik werden nicht immer als *ein* Fach angesehen (Lorbeer & Reiss, 2010). Der Veränderung des Fachs Mathematik von einer eher anwendungsorientierten Disziplin zu einer formalen, axiomatisch-deduktiv aufgebauten Wissenschaft wird eine große Rolle für die Übergangsschwierigkeiten zwischen Schule und Hochschule zugeschrieben. So sind zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik erhebliche Unterschiede

hinsichtlich generellem Aufbau, Struktur, Intention sowie Zielgruppe festzustellen: „[Z]u Beginn des Studiums erleben sie im Fach Mathematik einen Abstraktionsschock, der durch die Umstellung von algorithmischer, beispielorientierter Schulmathematik zu deduktiver und abstrakter Hochschulmathematik bedingt ist“ (Riedl, 2015, S. 14). Aufgrund der unterschiedlichen Ausrichtungen an Schule einerseits sowie Hochschule andererseits entsteht eine „Gap“ (u.a. Luk, 2005; Winsløw, 2014), die bereits von Felix Klein am Anfang des 20. Jahrhunderts mit Hilfe des Begriffes der „Doppelten Diskontinuität“ beschrieben wurde. Die Schulmathematik kann aufgrund ihrer spezifischen Funktion nicht nur eine Vereinfachung der akademischen Mathematik sein, sondern ihr wird ein ganz eigener Charakter zugesprochen (vgl. Fischer et al., 2009; Hoyles et al., 2001; Dörfler & McLone, 1986). Vor allem die soziale Funktion der Schulmathematik macht es erforderlich, ihr einen eigenständigen Platz in der gesellschaftlichen Wissensstruktur zuzuordnen (vgl. Fischer et al., 2009; Keitel & Otte, 1979; Riedl, 2015). Die Schulmathematik soll eine allgemeinbildende Funktion verfolgen, d.h. im Mittelpunkt steht nicht nur der deduktive Aufbau der Mathematik, sondern auch die Vermittlung von heuristischen Problemlösestrategien (Winter, 1996). Weiter besitzt sie einen deutlich stärkeren Alltagsbezug, während die Hochschulmathematik häufig eher innermathematisch motiviert ist (Fischer et al., 2009; Rach et al., 2014). So kann es auch nicht der primäre Zweck des Schulunterrichts sein, auf das Studienfach Mathematik vorzubereiten (Cramer & Walcher, 2010). Tall (2008) beschreibt den Übergang wie folgt (S. 5):

School mathematics is seen as a combination of visual representations, including geometry and graphs, together with symbolic calculations and manipulations. Pure mathematics in university shifts towards a formal framework of axiomatic systems and mathematical proof.

Ähnlich argumentiert auch Witzke (2012), für den in der Schule eine eher empirisch-gegenständliche Auffassung von Mathematik zu finden ist, d.h. „mathematisches Wissen [wird] an Objekten der Empirie entwickelt“ (Witzke, 2012, S. 950 f). Dieser Zugang steht seiner Meinung nach im starken Gegensatz zur „formalistischen Auffassung“ der Mathematik an der Hochschule, welche „sich gerade dadurch auszeichne[t], keinen Bezug zur Empirie zu brauchen“ (ebd., S. 951).

Neben den Unterschieden gibt es allerdings auch vergleichbare Inhalte, z.B. der Funktionsbegriff oder Elemente der Kurvendiskussion, allerdings ändert sich mit dem Übergang auch das

geforderte Begriffsverständnis. In der Schule liegen meist größere Interpretationsspielräume im Bezug auf die Begriffe vor, oft werden diese auch lediglich auf intuitiver Basis eingeführt und verwendet. Die akademische Mathematik fordert allerdings eine präzise Definition sowie Verwendung von Begriffen (Fischer et al., 2009). Der mit dem Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik einhergehende Wechsel der Begriffsbildung und -verwendung führt häufig zu Fehlvorstellungen zentraler Konzepte (vgl. etwa Davis & Vinner, 1986; Roh, 2008; Tall & Bakar, 1992; Tall & Vinner, 1981).

Neben den eben erläuterten Unterschieden in der Begriffsentwicklung, die in Abschnitt 3.2.1 noch ausführlich dargestellt werden, gibt es auch in Bezug auf die Argumentationsweise gravierende Unterschiede:

Beweise nutzen die Regeln der Logik, bauen auf Axiomen, Definitionen und (bewiesenen) Sätzen auf und zeichnen sich durch eine gewisse Strenge und Vollständigkeit der Argumentation aus. Beweise und Argumentationen hängen entsprechend eng zusammen, denn jeder Beweis basiert auf nachvollziehbaren, sinnvollen und stringenten Ketten von Argumenten.

(Ufer & Reiss, 2009, S. 156)

Das Argumentieren und Beweisen werden als wichtige Thematik der Schulmathematik angesehen, welche den Brückenschlag von Schule zur Hochschule vorbereiten (Lorbeer & Reiss, 2010). Empirische Studien haben hierbei gezeigt, wie das Beweisen erfolgreich im Rahmen der Sekundarstufe I in den Unterricht integriert werden kann (Reiss et al., 2002). Da auftretende Schwierigkeiten beim Verstehen und eigenständigen Führen von Beweisen im Folgenden nicht explizit behandelt werden, wird an dieser Stelle auf entsprechende Literatur (z.B. Mejia-Ramos et al., 2012; Hemmi, 2008; Weber, 2001; Flade & Walsch, 2000; Walsch, 1972) verwiesen.

Eine Sonderrolle im Übergang Schule – Hochschule im Fach Mathematik nehmen Lehramtsstudierende ein. So zeigt die Studie von Briedis et al. (2008), dass sich Anfängerinnen und Anfänger in einem Lehramtsstudiengang mit dem Fach Mathematik hinsichtlich der motivationalen Konfigurationen ihrer Studienfachwahl nicht nur deutlich von den Studierenden der Mathematik ohne Lehramt, sondern generell auch von den übrigen Studentinnen und Studenten, die keinen Lehramtsstudiengang gewählt haben, unterscheiden: „Während unter den intrinsischen Motiven das Fachinteresse und die eigenen Neigungen für ihre Studienwahl ebenfalls eine wichtige Rolle spielen, hat das wissenschaftliche Interesse indessen eine deutlich

geringere Bedeutung als für diejenigen mit einem Mathematikstudium ohne Lehramt“ (ebd., S. 33). Oftmals erscheint es auch so, dass „viele den Berufswunsch Lehrer ohne fachspezifisches Interesse zu verfolgen scheinen und keine adäquaten Vorstellungen über die benötigten Kompetenzen eines Fachlehrers haben“ (Hamann et al., 2014, S. 377).

Weiter können Vorerfahrungen aus der Schule oftmals Schwierigkeiten beim Begriffsverständnis an der Hochschule hervorrufen, wenn sich der Blickwinkel auf die behandelten Themen ändert:

The very diversity of mathematics carries with it the consequence that different meanings may conflict: thought processes and understandings derived from one view of mathematics may disturb or even contradict those derived from a different view of the subject.

(Schwarzenberger, 1982, S. 4)

Nachfolgend werden theoretische Erkenntnisse der aktuellen Forschung zum Erlernen, zur Aneignung und insbesondere zum Verständnis mathematischer Inhalte resp. Begriffe präsentiert. Weiter werden die unterschiedlichen Herangehensweisen bezüglich des Gegenstandes Mathematik zwischen Schule und Hochschule herausgearbeitet sowie deren Bedeutung für die Begriffsbildung und -entwicklung dargestellt.

3.1 Theorien zum Erlernen von Mathematik

„Advanced mathematics, by its very nature, includes concepts which are subtly at variance with naïve experience. Such ideas require an immense personal reconstruction to build the cognitive apparatus to handle them effectively. It involves a struggle with inevitable conflicts which require resolution and reconstruction.“

(Tall, 1991b, S. 252)

An obigem Zitat von Tall wird deutlich, dass der sich wandelnde Charakter der Mathematik eine zentrale Rolle im Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik einnimmt. Dabei verändert sich auch der Gebrauch mathematischer Begriffe sowie die Herangehensweise an ebendiese Konzepte und Inhalte. Wichtige Ansätze lieferte in diesem Bereich die Forschergruppe *Advanced Mathematical Thinking* um David Tall, die sich vor allem mit den kognitiven Herausforderungen beschäftigte, mit denen Studierende bei Studienbeginn konfrontiert werden: „Es ist geradezu ein Charakteristikum der Wissenschaftsdisziplin Mathematik, dass die

meisten Studierenden zu Beginn des Studiums vor grundlegenden Verständnisproblemen stehen“ (Riedl, 2015, S. 18).

In Winslow (2010) findet sich eine Zusammenfassung verschiedener Ansätze zur Transition zwischen Schule und Universität im Fach Mathematik. In diesem Abschnitt werden zwei grundlegende Theorien der aktuellen Forschung zum Erlernen mathematischer Inhalte dargestellt, die sich unter anderem mit dem Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik beschäftigen. Zuerst wird auf den Drei-Welten-Ansatz von David Tall (Tall, 2004c; Tall, 2008) eingegangen. Dabei handelt es sich um eine Entwicklungstheorie, die mathematische Denkprozesse in drei *Welten* einteilt, die „Conceptual-Embodied“- , die „Proceptual-Symbolic“- und die „Axiomatic-Formal“-Welt. Vorangestellt ist zunächst die Beschreibung dieser drei Welten. Anschließend werden die Schwierigkeiten im Übergang zwischen diesen herausgearbeitet, welche mitunter die theoretische Grundlage und Motivation für die in Teil 3 vorgestellte EmMa-Studie bilden. Der Theorie von Tall wird im Anschluss vergleichend die APOS-Theorie von Ed Dubinsky gegenüber gestellt. Beide liefern in Bezug auf die EmMa-Studie wichtige theoretische Ansätze.

3.1.1 Der Drei-Welten-Ansatz von David Tall

Einen wichtigen Beitrag aus der Kognitionspsychologie zum Erlernen von Mathematik lieferte David Tall, ein mittlerweile emeritierter Professor der Universität Warwick für *Mathematical Thinking*. Tall beschäftigte sich mit den unterschiedlichen Ausprägungen hinsichtlich mathematischer Denkprozesse. Die von ihm entwickelte Theorie unterscheidet drei verschiedene, aber in Wechselbeziehung stehende Welten mathematischer Denkprozesse; jede dieser Welten hat ihre eigene Herangehensweise an und Verarbeitung von Inhalten, sowie vor allem hinsichtlich der Gültigkeit von mathematischen Aussagen: „*a theory of three distinct but interrelated worlds of mathematical thinking each with its own sequence of development of sophistication, and its own sequence of developing warrants for truth*“ (Tall, 2004c, S. 281). Diese drei Welten, auf die im Folgenden näher eingegangen wird, bieten nach Tall wichtige Erklärungsansätze für das mathematische Lernen und mathematische Denkweisen in allen Entwicklungsstadien, insbesondere auch im Übergang von der Schule zur Hochschule:

The proposed theory of conceptual embodiment, proceptual symbolism and axiomatic formalism offers a rich framework in which to interpret mathematical learning and thinking at all levels from the earliest pre-school mathematics through to mathematical research, and, in particular, in the transition from school to undergraduate mathematics.

(Tall, 2008, S. 23)

3.1.1.1 Die Conceptual-Embodied-World

„(...), based on perception of and reflection on properties of objects, initially seen and sensed in the real world but then imagined in mind.“

(Tall, 2008, S. 7)

Die erste Stufe seiner Theorie bezeichnet Tall als „Conceptual-Embodied-World“. Diese entwickelt sich aus den Vorstellungen und Auffassungen zu Objekten aus der realen Welt, sowie aus mentalen Repräsentationen von imaginären Objekten: „*Concept acquisition begins from the perception of an object and acting with the object*“ (Hähkiöniemi, 2006, S. 34). Als mögliches Beispiel nennt Tall hier den Begriff „Gerade“. Wir entwickeln die Vorstellung einer unendlich langen Linie, die vollkommen gerade ist, auch wenn diese so in der realen Welt gar nicht existiert. Unsere Sprache erlaubt es uns, die Eigenschaften dieser Objekte zu beschreiben - „*that is a circle 'because it is round', that is a square 'because it has four equal sides and its angles are right-angles'*“ (Tall, 2002, S. 97). Diese Beschreibungen werden mit der Zeit fast unbemerkt immer präziser und erlangen mehr und mehr die Bedeutung einer Definition. Diese Definitionen führen weiter zu ersten deduktiven Prozessen. Erfüllt ein Objekt bestimmte Eigenschaften, erfüllt es auch bestimmte andere Eigenschaften: „*if a triangle has two equal sides, then it has two equal angles*“ (Tall, 1991b, S. 253). Auf zunächst anschaulicher und intuitiver Basis entstehen folglich Definitionen und ein axiomatisches Grundgerüst für erste logische Schlussfolgerungen. An dieser Stelle gleichen Talls Ausführungen zur Entwicklung mathematischer Denkprozesse in der „Conceptual-Embodied-World“ stark dem van Hiele Stufenmodell zur Entwicklung geometrischen Denkens (s. etwa Crowley, 1987). Hierauf wird in Abschnitt 3.2.1 genauer Bezug genommen.

Nach Tall ist die „Conceptual-Embodied-World“ die erste der drei mathematischen Welten, mit der Kinder in Berührung kommen. Dies impliziert allerdings nicht, dass zu einem späteren Zeitpunkt in der Entwicklungsphase nicht auch erneut Denkprozesse aus dieser Welt

auftreten können. Als wichtiges Beispiel dieser Welt nennt er die euklidische Geometrie und die Beweisprozesse in dieser: „(...) *Euclidean proof is developed as a verbal formulation of embodied properties of geometric figures.* (Tall, 2002, S. 97). Argumentationen und Denkprozesse, die der „Conceptual-Embodied-World“ zuzuordnen sind, können zudem auch in anderen nicht-euklidischen Geometrien, wie etwa in der projektiven oder sphärischen Geometrie vorkommen. Erst durch das Betrachten aus axiomatischer Sicht und das deduktive Ableiten von Eigenschaften aus gegebenen Axiomen findet ein Übergang zur dritten Welt, der „Axiomatic-Formal-World“ (s. Abschnitt 3.1.1.3) statt (Tall, 2008).

Hähnisch (2011) fasst die erste Welt in Anlehnung an Tall (2004b) wie folgt zusammen: „Bei den Konzepten der ersten Welt geht es um mathematische Begriffe, die eine eindeutige Darstellung besitzen und mit Hilfe derer ein grundlegendes Verständnis der geltenden Eigenschaften erworben werden kann. In dieser Welt nimmt die Anschaulichkeit eine entscheidende Rolle ein und aufgrund dessen geht die anschauliche Vorstellung häufig in das Konzept ein. Es liegt keine klare Trennung zwischen der individuellen Definition eines Begriffs und der Veranschaulichung vor.“ (S. 19).

3.1.1.2 Die Proceptual-Symbolic-World

„(...) *that grows out of the embodied world through action (such as counting) and is symbolised as thinkable concepts (such as number) that function both as processes to do and concepts to think about (procepts).*“

(Tall, 2008, S. 7)

Die zweite Stufe, von Tall „Proceptual-Symbolic-World“ genannt, folgt in der kognitiven Entwicklung zeitlich nach der ersten Stufe und hat diese als Grundlage. Während die „Conceptual-Embodied-World“ noch auf unseren Wahrnehmungen von Objekten basiert, gründet sich die „Proceptual-Symbolic-World“ auf Prozessen und Handlungen, wie etwa Zählen, Addieren, etc., und der Symbolik, die wir dabei verwenden:

The second world is the world of symbols that we use for calculation and manipulation in arithmetic, algebra, calculus and so on. These begin with actions (such as pointing and counting) that are encapsulated as concepts by using symbols that allow us to switch effortlessly from processes to do mathematics, to concepts to think about.

(Tall, 2004a, S. 30)

Als mögliche Beispiele hierfür führt Tall die Ausdrücke $3 + 2$ und $\sqrt{b^2 - 4ac}$ an, die sowohl als ausführbarer Prozess (z.B. $3 + 2$ als Ablauf einer Addition) oder als dahinter liegendes Konzept (z.B. $3 + 2$ als Summe) verstanden werden können (Tall, 2008). Generell können die Bereiche Arithmetik, Algebra und Analysis als wichtige Beispiele für diese Welt angesehen werden. Die ersten Stadien hinsichtlich Zählen und einfacher Arithmetik finden noch auf sehr intuitiver Basis statt und sind somit eher der ersten Welt zuzuordnen. Doch einhergehend damit, dass sich der Fokus immer mehr auf die Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der „Symbole“ (etwa Kommutativität einer Summe oder die Auffassung eines Produkts als mehrfache Addition) verschiebt, spricht Tall vom Übergang von der natürlichen, intuitiven Anschauung (*physical meaning*) hin zu formalen arithmetischen Handlungen (*symbolic activities in arithmetic*) (Tall, 2004a). Spätestens mit den Zahlenbereichserweiterungen von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} bzw. von \mathbb{Z} nach \mathbb{Q} , der Einführung von transzendenten Zahlen wie π und e oder dem Betrachten von Vektoren im zwei- oder dreidimensionalen Raum, ist der Schritt von der ersten Welt zur zweiten Welt aufgrund der zunehmenden Bedeutung der Symbolik endgültig vollzogen.

Zusammen mit Eddie Gray stellte Tall vor allem die Notwendigkeit des flexiblen Gebrauchs von Symbolen sowohl als Prozesse auf der einen, als auch als Konzepte auf der anderen Seite heraus (Gray & Tall, 1994). In der Einleitung ihres Artikels gaben sie ein Zitat von Thurstone an, an dem der Unterschied zwischen Prozess und Konzept eines Symbols deutlich erkennbar wird:

I remember as a child, in fifth grade, coming to the amazing (to me) realization that the answer to 134 divided by 29 is $134/29$ (and so forth). What a tremendous labor-saving device! To me, '134 divided by 29' meant a certain tedious chore, while $134/29$ was an object with no implicit work. I went excitedly to my father to explain my major discovery. He told me that of course this is so, a/b and a divided by b are just synonyms. To him it was just a small variation in notation.

(Thurston, 1990, S. 846)

Aufgrund der Bedeutung der Fähigkeit des flexiblen Hin- und Herwechsels zwischen dem Prozess einerseits und dem Konzept andererseits, verwendeten Gray & Tall (1994) hierfür einen eigenen Terminus. Sie sprachen zunächst von einem „*elementary procept*“, das die drei Begriffe Prozess, Objekt und Symbol wie folgt in Verbindung bringt: „*a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object.*“ (ebd., S. 6). Für ein mathematisches Objekt kann es zudem viele unterschiedliche Symbole geben:

$3 + 3$, $4 + 2$, $2 + 4$, $2 \cdot 3$ und $12 \div 2$ repräsentieren alle die Zahl 6. Um dieser Vielfalt gerecht zu werden, fassten sie die Sammlung von *elementary procepts* zu einem bestimmten Objekt unter dem Begriff *procept* zusammen (Gray & Tall, 1994).

In der Schulmathematik werden die Schüler mit den zwei eben beschriebenen Welten konfrontiert, jedoch gewinnt die „Proceptual-Symbolic-World“ mit zunehmender Klassenstufe aufgrund der behandelten Themen immer mehr an Bedeutung. Als Beispiel dient etwa das Aufstellen sowie das Umformen von Termen. Aus lernpädagogischer Sicht ist allerdings zu konstatieren, dass die „Proceptual-Symbolic-World“ zwar zunächst der „Conceptual-Embodied-World“ nachfolgt, zu einem späteren Zeitpunkt allerdings immer wieder ein Rückgriff auf die erste Welt möglich ist.

3.1.1.3 Die Axiomatic-Formal-World

„(...) (based on formal definitions and proof), which reverses the sequence of construction of meaning from definitions based on known objects to formal concepts based on set-theoretic definitions.“

(Tall, 2008, S. 7)

Die dritte und letzte Welt von Talls Theorie stellt die „Axiomatic-Formal-World“ dar, abgeleitet vom Formalismus, der durch David Hilbert begründet wurde (Barrow, 1996). Anders als in den zwei Welten zuvor basieren Eigenschaften in der „Axiomatic-Formal-World“ nicht mehr auf Anschauungen oder Erfahrungen mit bestimmten Objekten (Definitionen als Beschreibung), sondern auf formalen Definitionen, die als Axiome genutzt werden, um bestimmte mathematische Strukturen zu definieren (Tall, 2004a). Aus diesen formalen Definitionen lassen sich mit Hilfe von formal geführten Beweisen weitere Eigenschaften ableiten.

Diese Vorgehensweise stellt die bisherigen Denkprozesse der beiden anderen Welten erst einmal auf den Kopf: das Arbeiten und Argumentieren auf anschaulicher Basis und mit bekannten Objekten weicht dem deduktiven Schließen aus zuvor aufgestellten Axiomen. Durch das Ableiten weiterer Eigenschaften und Erkenntnisse aus diesen Axiomen entsteht hierbei eine zusammenhängende, in sich konsistente und logisch deduktive Theorie. Beweisen und Argumentieren auf anschaulicher Ebene durch Betrachten von Spezialfällen oder durch Beispiele ist nicht mehr möglich (Tall, 2004c). Ein Beispiel, an dem dieser Sachverhalt sehr gut deutlich wird, ist die Behandlung des Begriffes „Stetigkeit“. Laut aktuellem Lehrplan werden in den Jahrgangsstufen

11 / 12 nur Funktionen betrachtet, „bei denen sich in der Regel die Frage nach der Stetigkeit nicht stellt“ (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, 2004). Der Begriff wird im Schulbuch wie folgt eingeführt:

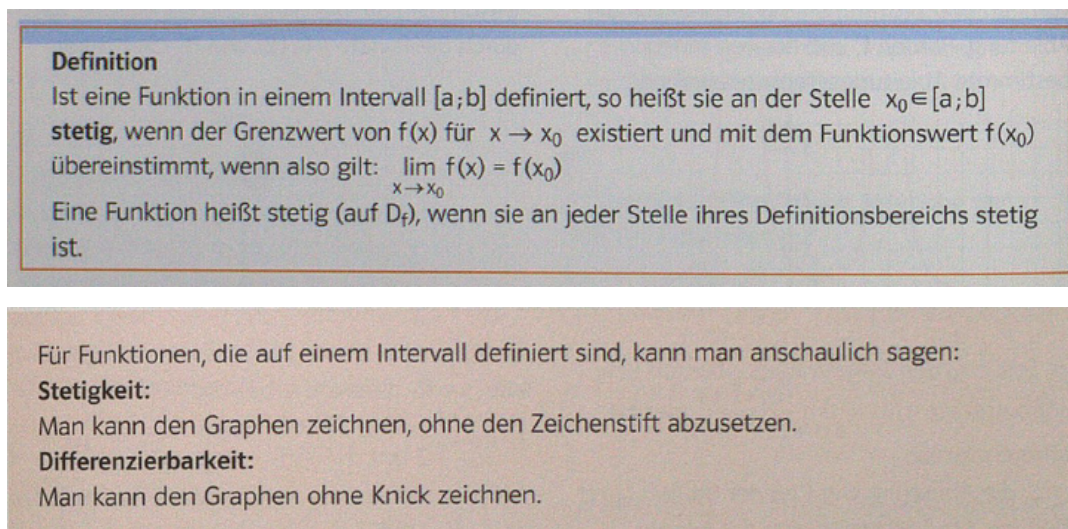
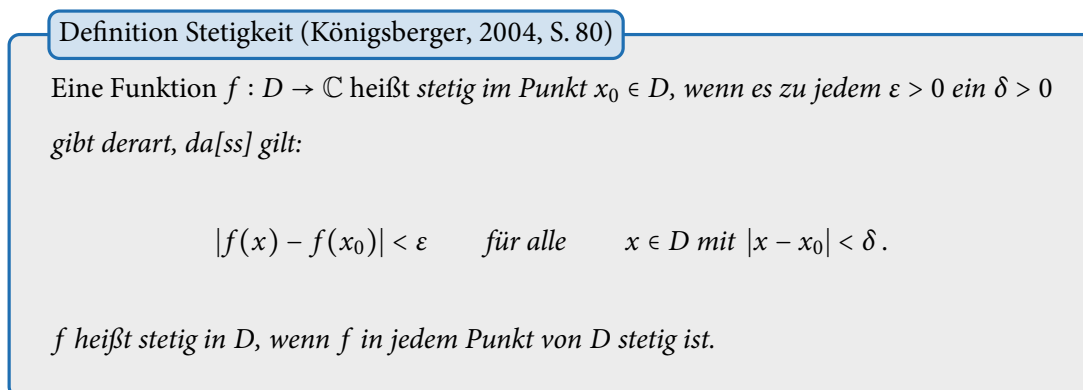


Abbildung 3.1: Definition von Stetigkeit im Schulbuch der 11. Klasse (Götz et al., 2013, S. 58 f).

An der Universität erfährt dieser Begriffe folgende formale Definition:



Die Verknüpfung des Begriffs „Stetigkeit“ mit dem „Durchzeichnen, ohne Absetzen des Stiftes“ wird in der Schulmathematik als Visualisierung genutzt. Diese ist aus Sicht der axiomatisch-formalen Hochschulmathematik nicht haltbar. So ist die Hyperbelfunktion auf *ihrem Definitionsbereich* stetig, obwohl diese nicht ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden kann. Im Schulbuch wird dieser Aspekt durch den Zusatz „die auf einem Intervall definiert sind“

umgangen; wird dieser im Laufe der Zeit vergessen, resultiert die Vorstellung auf anschaulicher Ebene in Schwierigkeiten (Hanke & Schäfer, 2017).

Während zwischen den ersten beiden Welten eine starke Interdependenz besteht und die zweite Welt in vielen Punkten als eine Weiterentwicklung der ersten Welt gesehen werden kann, hat die „Axiomatic-Formal-World“ wenig Bezug zu den beiden vorangehenden Welten. Die axiomatische Betrachtung mathematischer Sachverhalte sowie die deduktive Schlussfolgerung erfolgt fast ausschließlich in der Hochschulmathematik. So argumentiert auch Hähnisch (2011): „Anders als die zweite Welt, die sich aus der ersten ergibt, entwickelt sich die axiomatische Welt nicht automatisch aus den beiden vorhergehenden Welten. Die axiomatische Sichtweise wird durch die Hochschulmathematik bewusst neu eingeführt.“ (S. 21). Ohne die Axiomatik und den Formalismus fehlt dem ineinander verwobenen System der Hochschulmathematik die Grundlage (Barrow, 1996).

3.1.1.4 Schwierigkeiten im Übergang zwischen den drei Welten

In den Abschnitten 3.1.1.1 bis 3.1.1.3 wurden die drei Welten von Tall dargestellt. Während sich das mathematische Arbeiten und Argumentieren in der Schule in den ersten beiden Welten bewegt, fußt die Hochschulmathematik nahezu ausschließlich auf der dritten Welt. Aufgrund der Thematik dieser Arbeit werden im Folgenden ausschließlich die Schwierigkeiten im Übergang zwischen den ersten beiden Welten zur dritten Welt behandelt. Ein Blick in die Literatur liefert zentrale Bedingungsfaktoren für Probleme, die während dieses Übergangs auftreten können. So bezeichnet etwa Engelbrecht (2010) den Übergang zur „Axiomatic-Formal-World“ als sehr herausfordernd (S. 143):

Most students' perception of being successful in maths in school does not involve much inquiry but mostly just the application of different methods. To make the transition to advanced mathematics, students need to learn how to work formally with definitions and theorems. Applying deductive reasoning is essential and few students possess this skill naturally.

Tall (1997) argumentiert ähnlich (S. 9):

At school the accent is on computations and manipulations of symbols to 'get an answer', using graphs to provide imagery to suggest properties. At university there is a bifurcation between

technical mathematics that follows this style (with increasingly sophisticated techniques) and formal mathematics, which seeks to place the theory on a systematic, axiomatic basis.

Nach Engelbrecht (2010) und Tall (1997) stellt die unterschiedliche Arbeitsweise in der Schul- bzw. Hochschulmathematik die größte Herausforderung an die Lernenden dar. Novotna & Hoch (2008) proklamieren die Problematik, dass der Schwerpunkt in der Schule auf dem Ausführen algebraischer Routinen liegt und ergo Spannungen absehbar sind, wenn „*symbolic thinkers*“ auf den axiomatisch-deduktiven Ansatz treffen.

Folglich ist es besonders wichtig, die angehenden Studierenden beim Übergang zwischen Schule und Universität zu unterstützen und vor allem für die Veränderungen des Charakters der Mathematik zu sensibilisieren. Der Studieneingangsphase kommt hier eine besondere Bedeutung zu. Die angehenden Studierenden kennen den Umgang mit Mathematik aus der Schule, d.h. ihre Argumentation und die Bearbeitung von Aufgaben beruht nahezu ausschließlich auf der exemplarischen und intuitiven Herangehensweise der ersten beiden Welten in Talls Ansatz. Die Hochschuldozentinnen und -dozenten erwarten von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern in ihren Veranstaltungen allerdings eine rein formale Argumentation, wie sie Tall in seiner dritten Welt beschreibt. Aus diesem Grund ist es unumgänglich, den Studierenden zu vermitteln, was von ihnen erwartet und gefordert wird: „*During the difficult transition from pre-formal mathematics to a more formal understanding of mathematical processes there is a genuine need to help students gain insight into what is going on.*“ (Tall, 1991c, S. 17).

Studienanfängerinnen und -anfänger sind es aus eigener Erfahrung gewohnt, gewisse Formeln (man denke hier etwa an die sog. „Mitternachtsformel“, oder den „Satz des Pythagoras“) routinemäßig anzuwenden, ohne zu hinterfragen, warum diese Formeln gültig sind, bzw. im Fall der „Mitternachtsformel“ diese gerade die Nullstellen einer quadratischen Gleichung liefert. Ein tiefgründiges Verständnis fehlt oftmals, was beispielsweise auch dazu führt, dass für das Lösen der Gleichung $35x^2 - 21x = 0$ ebenfalls die „Mitternachtsformel“ herangezogen wird (vgl. Abschnitt 7.2, Aufgabe 1). An der Universität gerät mit der hier fest verankerten axiomatischen Sichtweise auf die Mathematik die reine Anwendung von Formeln und Gesetzmäßigkeiten in den Hintergrund. Viel wichtiger ist es nun, zu hinterfragen bzw. zu beweisen, warum diese Formeln oder Gesetzmäßigkeiten gültig sind. Dies wird auch von den Studierenden erwartet. Für Watson et al. (2009) ist es daher wichtig, den Studierenden Mathematik nicht als fertiges Produkt, sondern als Prozess zu vermitteln (S. 242):

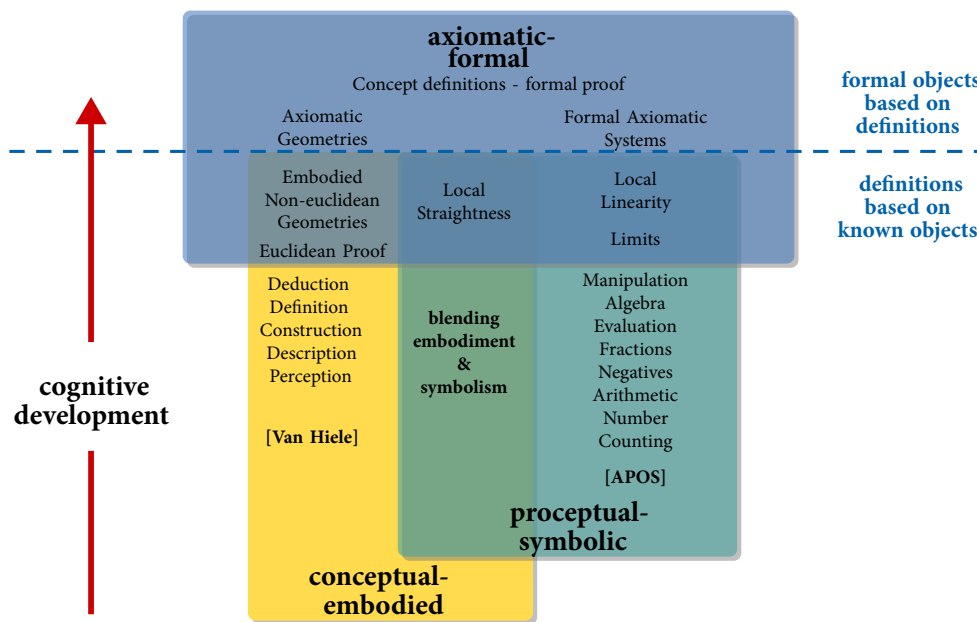


Abbildung 3.2: Die unterschiedliche Bedeutung von Definitionen in den drei Welten von David Tall. Nach (Tall, 2008, S. 4).

If tertiary courses are trying to build thinking in the formal world with students who are primarily symbolic thinkers, then difficulties will arise. Researchers such as [Ball & Bass (2002)] and [Ma (2002)] have argued that a deeper understanding of why mathematical ideas work rather than just how they are carried out is crucial to retention and long-term understanding.

Einen weiteren Unterschied stellt die Bedeutung und der Gebrauch von Definitionen dar. Nach Tall basieren diese in den ersten beiden Welten auf bekannten Objekten und ihren Eigenschaften. Davon ausgehend entwickelt sich fast unbemerkt eine Art informelle Definition dieser Objekte (vgl. Abschnitt 3.1.1.1). In der „Formal-Axiomatic-World“ verläuft dieser Prozess konträr. Hier gründen die Definitionen nicht auf der Anschauung oder bekannten Objekten, sondern Objekte und ihre Eigenschaften basieren auf formalen Definitionen, von denen manche als Axiome postuliert werden (vgl. Abschnitt 3.1.1.3). Abbildung 3.2 veranschaulicht die unterschiedliche Bedeutung von Definitionen im Übergang von den ersten beiden Welten zur dritten Welt. Tall (2008) zufolge ist ein formal geführter Beweis die höchste Stufe mathematischen Denkens. Hierbei spielen die Definitionen mathematischer Begriffe eine zentrale Rolle. Hing-Sun (2005) schreibt hierzu (S. 164):

It is probably the first time a student learns to use words exactly as defined or undefined, to mean 'for all' or 'for some' exactly as stated, to write clearly the conditions for a conclusion and to make statements that stand 'all' tests.

Fischer et al. (2009) sprechen in diesem Zusammenhang von einem *lokalen Ordnen* in der Schulmathematik im Vergleich zu dem axiomatisch geprägten *globalen Ordnen* in der universitären Mathematik. Freudenthal (1977) fasst dies für die Geometrie wie folgt zusammen (S. 142):

Man analysiert die geometrischen Begriffe und Beziehungen bis zu einer recht willkürlichen Grenze, sagen wir, bis zu dem Punkte, wo man von den Begriffen mit dem bloßen Auge sieht, was sie bedeuten, und von den Sätzen, dass sie wahr sind. So rasoniert man immer in der Geometrie unseres Lebensraumes; niemals aus den Axiomen, die viel zu weit weg liegen, sondern nach einem verschwimmenden und sich verschiebenden Horizont von Sätzen hin, die jeweils als wahr angenommen werden. Das Feld wird auf kleine oder größere Strecken, aber nicht als Ganzes geordnet.

In der Hochschulmathematik können mathematische Aussagen nur auf Grundlage von Axiomen, Definitionen und bereits (ebenfalls deduktiv) validierten Aussagen bewiesen werden. Dadurch wird das „*coherent mathematical system*“, wie Tall (2002) es nennt, aufrechterhalten. Hierfür ist natürlich eine Kenntnis der exakten Definition der Begriffe sowie ein flexibler Gebrauch dieser notwendig. Soll man beispielsweise Aussagen zur linearen Unabhängigkeit von Vektoren in einem n -dimensionalen Vektorraum beweisen, muss man zunächst verstanden haben, wie lineare Unabhängigkeit von Vektoren definiert ist, d.h. was es bedeutet, dass eine bestimmte Eigenschaft *für alle* Linearkombinationen gelten muss. Da Definitionen in der Schulmathematik eine untergeordnete Rolle spielen bzw. vielmehr aus der Anschauung gewonnen werden, ist es umso wichtiger, den angehenden Studierenden die Bedeutung dieser verständlich zu machen. Hähnisch (2011) führt in Anlehnung an Pinto & Tall (2001) an, dass „die Schwierigkeiten bei den formalen Beweisen, die bei einem Großteil der Studienanfänger vorhanden sind, [sich dadurch erklären lassen], dass viele Studierende nicht den ‚*formal approach*‘ wählen und dementsprechend die Bedeutung nicht via Deduktion aus formalen Definitionen ableiten“ (S. 23). Die sogenannten „*natural thinkers*“ legen in Bezug auf mathematische Begriffe weniger Wert auf die formale Definition, sondern viel mehr auf die bildliche Anschauung. Als Beispiel führen Pinto & Tall (2001) den Begriff der Stetigkeit an. Anstelle der Definition beschreiben die „*natural thinker*“ Stetigkeit oft wie folgt: „*Err ... continuous means what ... I’ve got my definition of continuous function as ... I can draw the graph and you don’t lift the pencil if it’s continuous*“ (ebd. S. 61). Die unterschiedlichen Herangehensweisen an den Verständnisaufbau zu mathematischen Begriffen an Schule und Universität werden in Abschnitt 3.2 betrachtet, da

diese im Hinblick auf die qualitativen Untersuchungen in Teil 3 eine zentrale Rolle einnehmen. Abschließend lässt sich zusammenfassen, dass Studierende gerade in der Studieneingangsphase durch den ersten Kontakt mit dem formal-deduktiven Ansatz der Mathematik einem beträchtlichen „kognitiven Konflikt“ ausgesetzt sind (Tall, 1997). Beispielsweise nimmt das Exaktifizieren von in der Schule eher intuitiv genutzten Begriffen einen wichtigen Platz in der universitären Mathematik ein, man denke etwa an die Begriffe „Grenzwert“, „Stetigkeit“ oder „Vektorraum“¹. Generell nimmt der Grad der Abstraktheit sprunghaft zu, es ist zuweilen gar von einem Abstraktionsschock (Reiss et al., 2010; Steinbauer et al., 2014) die Rede.

3.1.1.5 Zusammenhang mit Begabung und mathematischem Leistungsvermögen

Der Drei-Welten-Ansatz von Tall kann auch zur Erklärung des unterschiedlichen mathematischen Leistungsvermögens an Schule und Hochschule herangezogen werden. Zimmermann (1992) verneint diesbezüglich die landläufige Auffassung, „dass mathematische Begabung eine fest umrissene menschliche Eigenschaft sei, die man mehr oder weniger hat oder nicht“ (Brandl, 2011c). Stattdessen würden „unterschiedliche Vorstellungen über Mathematik nicht nur unterschiedliche mathematische Begabungen als Grundlage, sondern auch entsprechende Konzeptionen über mathematische Begabung zur Folge haben“ (Zimmermann, 1992, S. 19). Diese Sichtweise wurde in Brandl (2011a), Brandl (2011b) sowie Brandl (2011c) in einem systemtheoretischen Begriffsapparat zur Kausalität zwischen Mathematischer Begabung, Kompetenzen, Leistung und Bewertung dargestellt² (s. Abbildung 3.3).

Mathematische Begabung wird gemäß Abbildung 3.3 als „*viable construct that depends by structural coupling from the system-theoretical environments mathematics on the one hand and a collection of other systems which affect the construct MG³ but do not necessarily endow the system with meaning or sense on the other hand*“ angesehen (Brandl & Barthel, 2012, S. 1430).

Als Konsequenz liegt eine Bindung zwischen der „Welt der Mathematik“ sowie dem Konstrukt „Mathematische Begabung“ bzw. Interesse an der Mathematik nahe. Mathematische Begabung äußert sich nach Brandl (2011c) in verschiedenen Facetten und wird durch die Auffassung von

¹Ein Beispiel für die unterschiedliche Behandlung des Begriffs „Stetigkeit“ wurde in Abschnitt 3.1.1.3 angegeben.

²Definitionen zu den einzelnen Begriffen sowie eine Auflistung und Erläuterung der allg. Persönlichkeitsmerkmale sowie der Umweltfaktoren finden sich etwa in Ulm (2009) und Ulm (2010).

³MG steht in diesem Kontext für *Mathematical Giftedness*.

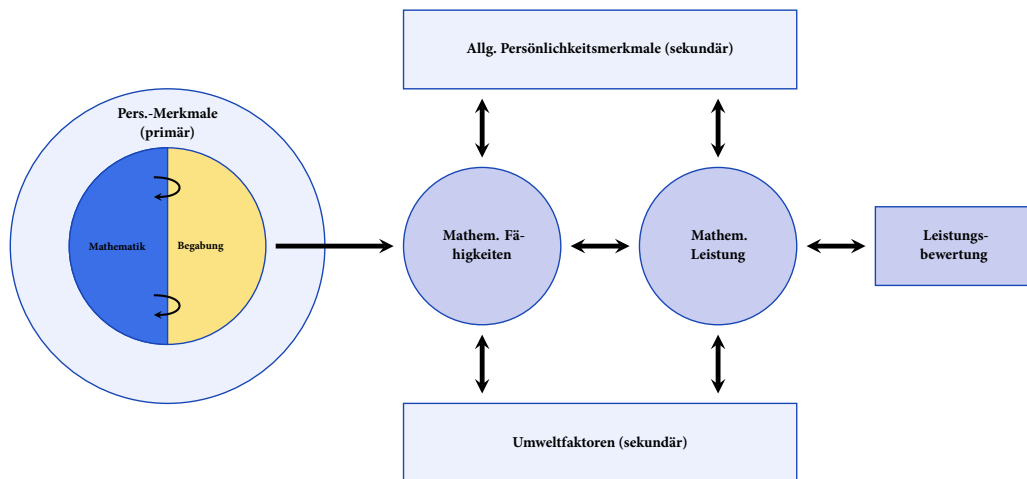


Abbildung 3.3: Kausalität zwischen mathematischer Begabung, Kompetenzen, Leistung und Bewertung, in Anlehnung an Brandl (2011c).

Mathematik und verschiedenen primären Umweltfaktoren, wie etwa durch die Familie oder das Schulsystem beeinflusst. Man sollte also nicht danach fragen, ob eine Person mathematisch begabt ist, sondern eher, ob diese Person in ihrem jeweiligen Kontext begabt oder interessiert ist. Folglich ist mathematische Begabung immer kontextabhängig. Laut dem Modell wirkt sich die Begabung auf die mathematischen Kompetenzen sowie das Leistungsvermögen einer Person aus. Um das Absinken im Leistungsniveau der Studienanfängerinnen und Studienanfänger, welche in der Schule noch sehr gute Leistungen erbracht haben (Hong et al., 2009), zu erklären, kann der Drei-Welten-Ansatz von Tall und das obige Modell kombiniert werden (vgl. Abbildung 3.4).

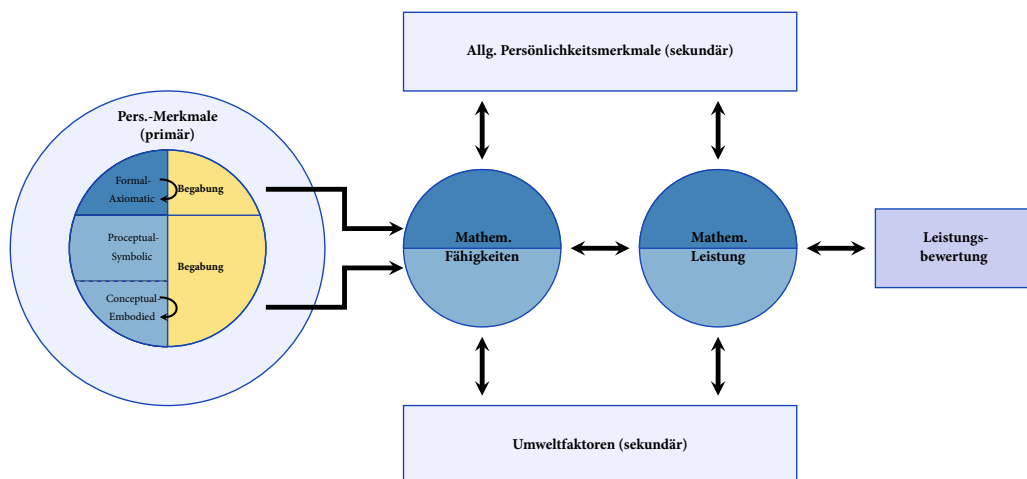


Abbildung 3.4: Kausalität zwischen mathematischer Begabung, Kompetenzen, Leistung und Bewertung im Übergang von der Schulmathematik zur Hochschulmathematik.

Die Bindung zwischen der „Welt der Mathematik“ sowie der „Mathematischen Begabung“ und die sich im Übergang zwischen der Schule und Hochschule nach Tall wandelnde „Welt von Mathematik“ liefern eine mögliche Erklärung für die starken Schwankungen zwischen dem Leistungsvermögen an den beiden Bildungsinstitutionen. Wenn sich die „Welt“ gemäß Tall ändert, bedeutet dies nicht automatisch, dass die mathematischen Fähigkeiten sowie die Leistung gleich bleiben. Somit spielt die Frage „Was verstehe ich unter Mathematik?“ eine entscheidende Rolle. Verbleibt die Vorstellung von Mathematik in den ersten beiden Welten, hat dies unweigerlich Auswirkungen auf das Leistungsvermögen an der Hochschule. Diese Kohärenz zwischen „Bild von Mathematik“ und mathematischen Fähigkeiten sowie Leistung gilt es näher zu untersuchen. Interviewpassagen mit Studierenden, die ihr Studium nach dem ersten Semester abgebrochen haben, lassen an dieser Stelle zumindest vermuten, dass viele hinsichtlich ihrer Vorstellung von Mathematik in den ersten beiden Welten verblieben sind. Exemplarisch ist nachfolgend ein Auszug des Transkripts mit S07⁴ angegeben, nachdem S07 die Entscheidung getroffen hatte, das Mathematik-Studium abubrechen:

3 **S07:** Ich weiß nicht/ vielleicht ging's zu schnell oder/ keine Ahnung/ aber/ also/ es war einfach/ ich
4 hab's mir auch nicht vorstellen können/ also das Ganze/ das war so abstrakt und das hab ich
5 dann nicht/ ((Mhm)). Und wenn ich's nicht versteh, dann hab ich auch keine Lust dazu, mir
6 das irgendwie reinzupressen oder so und dann war die Motivation auch schon so gering.

7 [...]

8 **I:** Ahm/ okay. Wenn Sie jetzt nochmal über die Mathematik nachdenken, die Sie bis jetzt behandelt
9 haben/ was glauben Sie ist Mathematik?

10 **S07:** Keine Ahnung. Kann ich nicht sagen ((lacht)).

11 **I:** Ahm/ wenn Sie jetzt die gleiche Frage über Schulmathematik bekommen würden/ wüssten Sie
12 dann, was Sie sagen würden, was Mathe ist? So, wie Sie es in der Schule kennen gelernt haben?

13 **S07:** Hmm/ ja/ ich find, jetzt im Studium das ist mehr so Definitionen und/ also/ so was/ also wo
14 man nicht/ also/ oder ich bin vielleicht auch zu blöd dazu gewesen ((S07: lacht)), wo man sich
15 da so reindenken kann und das/ den Hintergrund verstehen kann und Schulmathematik, das
16 war für mich schon so, wo ich mich auseinandersetzen wollte damit und halt dann auch eine

⁴S07 hatte einen Abiturdurchschnitt von 1,4 sowie 12 Punkte im Mathematik-Abitur.

17 Lösung finden wollte und das war halt einfach zu krass für mich/ also/ dass ich mich da jetzt
 18 ewig hinsetze für so ein Übungsblatt und dann/ keine Ahnung/ dann findet man vielleicht was
 19 und dann wirds durchgestrichen und es steht dort Null Punkte, weils halt einfach voll falsch
 20 war ((Mhm)). Das war halt auch frustrierend dann.

21 **I:** Um was gehts Ihrer Meinung nach in Mathematik?

22 **S07:** (...) Kann ich jetzt beim Studium nicht sagen.

23 **I:** Und in der Schule?

24 **S07:** Also da find ich schon so logisch denken und einen Lösungsweg finden ((Mhm)), aber das hab
 25 ich da nicht für mich gefunden/ also im Studium ((Mhm)). Also/ es war halt einfach nicht das,
 26 was ich mir irgendwie auch vorgestellt habe ((Mhm)).

Studierende, die hinsichtlich ihrer Vorstellung von Mathematik auch nach dem Wechsel an die Hochschule in den ersten beiden Welten verbleiben, haben es nach obigen Modell schwer, den Anforderungen der Hochschulmathematik gerecht zu werden, da sie diese als solche gar nicht erkennen. Sie sind „*not ready for the sophisticated level of mathematics at university*“ (Britton et al., 2007, S. 143).

3.1.2 Die APOS-Theorie nach Ed Dubinsky

„*The theory we present begins with the hypothesis that mathematical knowledge consists in an individual's tendency to deal, in a social context, with perceived mathematical problem situations by constructing mental actions, processes, and objects and organizing them in schemas to make sense of the situations and solve the problems.*“

(Dubinsky & McDonald, 2001, S. 276)

In Abschnitt 3.1.1 wurde der Drei-Welten-Ansatz von David Tall als eine Theorie vorgestellt, die einen Ansatz für das Erlernen mathematischer Inhalte darstellt. Dieser Abschnitt thematisiert einen weiteren Ansatz, die APOS-Theorie von Ed Dubinsky, welche sich direkt auf das „*Advanced Mathematical Thinking*“ bezieht (Dubinsky & McDonald, 2001). Diese verkörpert eine konstruktivistische Lerntheorie in Bezug auf mathematische Begriffsbildung und ist in der Theorie von Piaget verwurzelt (vgl. etwa Weller et al., 2003; Dubinsky, 1991). Dieser Theorie liegt folgende Annahme zur mathematischen Wissensbildung zugrunde:

Mathematical knowledge is an individual's tendency to respond, in a social context, to a perceived problem situation by constructing, re-constructing, and organizing, in her or his mind, mathematical processes and objects with which to deal with the situation.

(Cottrill et al., 1996, S. 102)

Die APOS-Theorie postuliert im Kontext des Übergangs zwischen Schule und Hochschule, dass eine Studentin bzw. ein Student ein angemessenes mentales Modell benötige, um ein bestimmtes mathematisches Konzept zu verstehen. „*The mental structures refer to the likely actions, processes, objects and schema required to learn the concept*“ (Maharaj, 2010, S. 41). Aus den Begriffen *Action*, *Process*, *Object* und *Schema* leitet sich auch der Name der Theorie als Akronym ab. Obwohl die APOS-Theorie primär für das „*Advanced Mathematical Thinking*“ entwickelt wurde, halten Dubinsky & McDonald (2001) fest, dass sie durchaus auch dafür nützlich ist, die Entwicklung des Verständnisses in Bezug auf grundlegende mathematische Konzepte zu erklären (S. 280). Dubinsky & McDonald (2001) betonen weiter, dass ihre Theorie herangezogen werden könne, um Einblicke in und Erklärungen für die erfolgreiche aber auch nicht erfolgreiche Begriffsbildung in Bezug auf mathematische Konzepte zu erhalten. Die APOS Theorie unterscheidet in Bezug auf das Begriffsverständnis die vier bereits genannten Dimensionen *Action*, *Process*, *Object* und *Schema*. Weller et al. (2003) bezeichnen diese vier Begriffe als „*mental constructions that students are likely to make in formulating their understandings of mathematical concepts*“ (S. 97). Diese zentralen Begriffe werden zunächst näher beschrieben:

- **Action**

„*An action is a transformation of objects perceived by the individual as essentially external and as requiring, either explicitly or from memory, step-by-step instructions on how to perform the operation.*“

(Dubinsky & McDonald, 2001, S. 276).

Asiala et al. (2004) bezeichnen den Begriff *Action* als „*at least somewhat external*“ (S. 7). Der äußere Anstoß ist somit charakteristisch für diesen Bereich der APOS-Theorie. Das mentale Modell in diesem Stadium ist sehr limitiert (Weller et al., 2003), ein Verständnis des Begriffs kaum vorhanden: „*An individual whose understanding of a transformation is limited to an action conception can carry out the transformation only by reacting to external cues that give precise details on what steps to take*“ (Asiala et al., 2004, S. 7). Weder die Bedeutung noch die Hintergründe, durch welche die *Action* bedingt wird, werden vom

Lernenden in dieser Phase erkannt (Hähnisch, 2011). Asiala et al. (2004) erklären diese Phase am Funktionsbegriff. Funktionen werden hierbei erst als solche erkannt, wenn ein Funktionsterm vorliegt. Die *Action* beschränkt sich auf die Berechnung von Funktionswerten resp. das Umformen des Funktionsterms. Ein tiefergehendes Verständnis liegt in dieser Phase nicht vor. So haben einige Studierende Probleme, zu erkennen, dass sowohl die Ableitung einer Funktion als auch die Lösung einer Differenzialgleichung wieder eine Funktion ist. Dieses Stadium lässt sich mit dem Begriff „Prozedurales Wissen“ (Hiebert & Lefevre, 1986) gleichsetzen (Weller et al., 2009).

- **Process**

„When an action is repeated and the individual reflects upon it, it may be interiorized into a process. That is, an internal construction is made that performs the same action, but now, not necessarily directed by external stimuli.“ (Asiala et al., 2004, S. 7)

Während die *Action* eines äußeren Anstoßes bedarf, ist der *Process* internalisiert. Eine Person mit einem prozessualen Begriffsverständnis kann einzelne Schritte beschreiben, umkehren sowie darüber reflektieren, ohne diese Schritte konkret auszuführen (Asiala et al., 2004; Cottrill et al., 1996). In Bezug auf den Funktionsbegriff bedeutet dies, dass Funktionen als Art Maschine gesehen werden, die einen oder mehrere Werte von voneinander unabhängigen Variablen erhalten, auf diesen Werten verschiedene Operationen durchführen und das Ergebnis als Output liefern. So können auch transzendente Funktionen, wie $\sin(x)$ verstanden werden, denen kein expliziter Funktionsterm zur Berechnung des Funktionswerts zugrunde liegt (Asiala et al., 2004). Nach Weller et al. (2003) ist man auf das *Process*-Stadium in Bezug auf einen Begriff beschränkt, *„if her or his depth of understanding is limited to thinking about the concept exclusively within a procedural context“* (S. 100).

- **Object**

„When an individual reflects on operations applied to be a particular process, becomes aware of the process as a totality, realizes that transformations (whether they be actions or processes) can act on it, and is able to actually construct such transformations, then he or she is thinking of this process as an object. In this case, we say that the process has been encapsulated to an object.“ (Asiala et al., 2004, S. 8)

Das *Object* entwickelt sich aus dem *Process*, welcher zu einem *Object* „encapsulated“ wird. Diese „Encapsulation“ wird von Asiala et al. (2004) in Bezug auf Funktionen wie folgt beschrieben: „It is easy to see how encapsulation of processes to objects and de-encapsulating the objects back to processes arises when one is thinking about manipulations of functions such as adding, multiplying, or just forming sets of functions“ (S. 8). In Bezug auf Linksnebenklassen eines Elements x und einer Untergruppe H einer Gruppe G in abstrakter Algebra wird die Vorstellung, dass x auf jedem Element von H operiert, in dem Objekt xH gekapselt. Um mit einem bestimmten Objekt arbeiten zu können, ist es oft notwendig, dieses Objekt wieder zu „entkapseln“ (Asiala et al., 2004).

- **Schema**⁵

„A collection of processes and objects can be organized in a structured manner to form a schema. Schemas themselves can be treated as objects and included in the organization of 'higher level' schemas. When this happens, we say that the schema has been thematized to an object“

(Asiala et al., 2004, S. 8)

Die letzte Stufe der APOS-Theorie bildet das *schema*. Dubinsky & McDonald (2001) beschreiben es als „individual's collection of actions, processes, objects, and other schemas which are linked by general principles to form a framework in the individual's mind“ (S. 277). Mit diesem *Schema* können nun mathematische Problemstellungen bearbeitet und gelöst werden (Hähnisch, 2011). Im Beispielkontext mit Funktionen können diese zu Mengen zusammengefasst werden und auf dieser Menge Operationen eingeführt werden. Daraus entwickelt sich das *Schema* „Funktionenraum“, das anschließend auf andere Konzepte wie etwa Dualräume angewendet werden kann (Asiala et al., 2004).

Hinter den vier Begriffen lässt sich eine aufsteigende Hierarchie vermuten. Dubinsky & McDonald (2001) betonen, dass die Entwicklung eines mentalen Modells zu einem bestimmten Konzept nicht immer linear in dieser Reihenfolge verläuft. Vielmehr kann es passieren, dass man im Begriffsbildungsprozess auch wieder auf vorherige Phasen zurückgreift und diese unter anderen Gesichtspunkten, die bereits durch eine nachfolgende Phase gewonnen wurden, wahrnimmt.

⁵Das *Schema* in der APOS-Theorie ist sehr ähnlich zu den von Tall und Vinner eingeführten Begriffen *Concept Image* und *Concept Definition*, die in Abschnitt 3.2.3.1 näher betrachtet werden. Dies stellen auch Dubinsky & McDonald (2001) heraus.

Obwohl die APOS-Theorie für die Begriffsentwicklung des „Advanced Mathematical Thinking“ entwickelt wurde, sieht Tall (1999) genau darin die Schwächen der Theorie: *„Students meet an entirely new construction: the axiomatic object in which the properties (expressed as axioms) are the starting point and the concepts must be constructed by logical deduction“* (ebd., S. 115). Seiner Meinung nach muss ein Prozess nicht erst *„encapsulated“* sein, bevor man überhaupt von einem Verständnis des Begriffes sprechen kann. Er betont an dieser Stelle die Wichtigkeit der *„Conceptual-Embodied“*-Welt und das damit einhergehende intuitive Verständnis: *„It uses the available power of the brain to construct the whole theory at a schema level rather than follow through a rigid sequence of strictly mathematical action-process-object“* (ebd., S. 115). Tall zufolge gibt es einige Bereiche der Mathematik, auf die sich die APOS-Theorie sehr gut anwenden lässt (z.B. Arithmetik und Algebra). Er nennt allerdings auch Gebiete, für welche die APOS-Theorie seiner Meinung nach weniger geeignet scheint (z.B. Geometrie). Nach Hähnisch (2011) liegt ein großes Problem der APOS-Theorie darin, *„dass mit einer einzigen Theorie das Verständnis in allen Bereichen der Mathematik erklärt werden soll“* (S. 26).

Der folgende Abschnitt thematisiert Theorien zur Aneignung und zum Verständnis mathematischer Begriffe. Im Hinblick auf die Begriffsentwicklung in der Studieneingangsphase eignet sich aufgrund der eben beschriebenen Überlegungen der Drei-Welten-Ansatz von Tall besser als die APOS-Theorie für das theoretische Grundgerüst. Insbesondere steht die Entwicklung des mentalen Modells im Übergang von den ersten beiden Welten zur *„Formal-Axiomatic“*-Welt im Fokus. Hierzu werden in Abschnitt 3.2.3.1 die von Tall & Vinner (1981) eingeführten Begriffe *Concept Image* und *Concept Definition* betrachtet.

3.2 Theorien zur Aneignung und zum Verständnis mathematischer Begriffe

„So bestehend eine axiomatisch aufgebaute Theorie wegen ihrer Knappheit und Durchsichtigkeit für den Kenner ist, bereitet sie doch dem Lernenden erhebliche Verständnisschwierigkeiten, weil sie die entscheidenden Intentionen und Vorstellungen abschneidet“

(Weth, 1999, S. 44)

Mathematische Begriffe sind eindeutig definierbar, dadurch unterscheiden sie sich von vielen

Begriffen in anderen Disziplinen. Durch die eindeutige Definition lassen sich Konzepte auch klar voneinander abgrenzen. Diese Eigenschaft wird oft als Stärke der Wissenschaftsdisziplin Mathematik bezeichnet, bringt allerdings nicht nur Vorteile mit sich. Bereits Poincaré (1914) machte sich Gedanken über das *didaktische Paradoxon*, „da[ss] die Mathematik die klarste Begriffsbestimmung hat, aber dennoch für die Mehrheit unverständlich ist“ (Winter, 1983).

Gerade aufgrund des in den vorherigen Abschnitten aufgezeigten Wandels des Charakters der Mathematik kommt der Fähigkeit zur Begriffsbildung in der Studieneingangsphase eine enorm wichtige Bedeutung zu. Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Theorien zur Aneignung und zum Verständnis mathematischer Begriffe. Weiter wird die unterschiedliche Herangehensweise an die Begriffsbildung sowie -entwicklung an der Schule im Gegensatz zur Hochschule dargestellt.

Speziell der Wandel weg von der aus der Schule gewohnten induktiven Begriffsentwicklung hin zum axiomatisch-deduktiven Aufbau der Hochschulmathematik führt nach Danckwerts et al. (2004) zu Problemen: „Durch den klassischen, systematischen, axiomatisch-deduktiven Aufbau der Fachveranstaltungen wird den Studierenden die Wissenschaft Mathematik in der Regel als fertiges, in sich geschlossenes System vermittelt. Dabei spielen die ursprünglichen Problemstellungen, die Prozesse der Begriffsbildung und Theorieentwicklung der jeweiligen Gebiete nur eine untergeordnete Rolle.“ (S. 48). Neben der Umstellung von einer induktiven auf eine deduktive Herangehensweise machen sie zudem die Methodik der Wissensvermittlung an der Hochschule als Problemfeld aus: „Die Methoden der Vermittlung sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung. Die so akzentuierte, traditionelle Fachausbildung ist eher produkt- und weniger prozessorientiert und sie setzt eher auf die Instruktion durch die Lehrenden als auf die aktive Konstruktion des Wissens durch die Lernenden.“ (ebd., S.48). In der Hochschulmathematik liegt eine besonders starke Akzentuierung auf dem Formalismus. In diesem „geschieht die Bildung von Begriffen im Idealfall als mehr oder weniger willkürliches Manipulieren und Modifizieren von Definitionen und Axiomen – ohne spezielle Absicht, ohne Ziel – ein reines Spiel mit der Logik von Relationen. Die Bedeutung der Begriffe wird damit auf eine ordnungsstiftende, aber letztendlich inhaltsleere Rolle reduziert. Begriffe dienen nur der Verkürzung von Beweisen und einer verständlichen, nachvollziehbaren Kommunikation“ (Weth, 1999, S. 42). Der Wandel des Charakters der Mathematik bringt gleichzeitig auch einen Wandel in der Begriffsbildung mit sich. Nach Vollrath (1984) „rühmen sich axiomatisch aufgebaute Darstellungen mathematischer Theorien, da[ss] zu ihrem Ver-

ständnis keinerlei Vorkenntnisse vorausgesetzt werden. Dabei wird jedoch übersehen, dass es für den Lernenden sehr schwer ist, ohne inhaltliche Vorstellungen und ohne das Beherrschen bestimmter Grundtechniken solchen Darstellungen zu folgen“ (S. 200). Weiter erwähnt er, dass die Lernenden oftmals Vorerfahrungen zu Darstellungen und Begriffen mitbringen, welche für den Lernprozess förderlich, aber eben auch hinderlich sein können. Mathematiker neigen dazu, solche Erfahrungen eher abzuwerten (Vollrath, 1984). Als weiteres Indiz hierfür dienen die einleitenden Worte von Landau in seinem Buch „Grundlagen der Analysis“, die er direkt an die Lernenden adressiert:

- (2) Ich setze nur logisches Denken und die deutsche Sprache als bekannt voraus; nichts aus der Schulmathematik oder gar der höheren Mathematik.
- (3) Bitte vergi[ss] alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. Bitte denke bei allem an die entsprechenden Stellen des Schulpensums; denn Du hast es doch nicht vergessen.

(Landau, 1930, S. VII f)

Nicht selten heißt es noch heute in den Einstiegsvorlesungen „Vergessen Sie bitte alles, was Sie bisher gemacht haben“ (vgl. etwa Danckwerts, 2006).

3.2.1 Begriffsentwicklung im Mathematikunterricht

„Die Vermittlung einer Definition, und sei sie noch so gut illustriert und sprachlich einfach gebaut, garantiert nicht, da[ss] auf der Schülerseite auch ein Begriff beim Worte ist“

(Winter, 1983, S. 181)

Neben den bereits genannten Änderungen zwischen Schul- und Hochschulmathematik erfahren an den beiden Institutionen auch die mathematischen Konzepte eine unterschiedliche Auslegung. Während es gerade die Stärke der Wissenschaftsdisziplin Mathematik ist, dass Begriffe präzise gefasst und definiert werden, thematisiert die Schulmathematik diese häufig auf unterschiedlichen Bedeutungsebenen, „es wird also mehr Spielraum geboten und die Exaktheit steht nun nicht mehr so sehr im Zentrum des Interesses“ (Riedl, 2015, S. 17). Weiter muss in der Schule „mit Plausibilität um die Anerkennung der Begriffsbildungen gerungen werden, die dann zu Definitionen und zum Aufbau einer Fachsprache führen. Auch wenn Axiome das ‚unmittelbar Einleuchtende‘ formulieren sollen, so ist der Umgang mit Axiomatik nicht für

jeden sachstrukturellen Entwicklungsstand sinnvoll“ (Lorbeer & Reiss, 2010, S. 90 f).

„Begriffe bilden Bausteine der Mathematik. Sie sind Gegenstände, über die wir nachdenken, und Werkzeuge mit denen wir arbeiten. Begriffsbildung ist also schöpferisches Tun des Mathematikers. Das sollte dem Schüler auch im Mathematikunterricht bewusst werden. Er sollte erleben, wie sich Mathematik aus dem Bilden, Erforschen und Benutzen von Begriffen entwickelt. Dabei werden Begriffe im Unterricht gelernt. Begriffe verstehen heißt Eigenschaften zu kennen, Beziehungen zu sehen und mit Begriffen arbeiten zu können“ (Vollrath, 1987, S. 125). Bei der Einführung neuer Begriffe im Mathematikunterricht wird Wert darauf gelegt, „da[ss] sich der Begriff über einen längeren Zeitraum hin entwickeln kann, da[ss] Vorwissen aktiviert und neues Wissen sinnvoll integriert wird“ (Vollrath, 1984, S. 201). Weiter werden durch Wiederholungen die bereits vorhandenen Kenntnisse immer wieder „aufgefrischt“ und anschließend durch Aufdecken weiterer Eigenschaften hin zu einem tieferen Verständnis erweitert. Dieses von dem Entwicklungs-Kognitionspsychologen J. Bruner begründete didaktische Prinzip (*Spiralprinzip*) ist fest in den bayrischen Lehrplänen aller Schularten verankert. Diesem Vorgehen liegt im Bezug auf die Mathematik folgende Idee zu Grunde: „Betrachtet man das Verständnis von Zahl, Maß und Wahrscheinlichkeit als unumgänglich für die Beschäftigung mit exakter Wissenschaft, dann sollte die Unterweisung in diesen Gegenständen so geistig-aufgeschlossen und so früh wie möglich beginnen, und zwar in einer Weise, die den Denkformen des Kindes entspricht. In höheren Klassen mögen die Themen weiter entwickelt und wieder aufgenommen werden“ (Bruner, 1972, S. 63). Zwei zentrale Eigenschaften des Spiralprinzips sind das *Prinzip des vorwegnehmenden Lernens* sowie das *Prinzip der Fortsetzbarkeit*. Dabei meint Ersteres: „Die Behandlung eines Wissensgebietes soll nicht aufgeschoben werden, bis eine endgültig-abschließende Behandlung möglich erscheint, sondern ist bereits auf früheren Stufen in einfacher Form einzuleiten“ (Wittmann, 2009, S. 86). Unter dem *Prinzip der Fortsetzbarkeit* versteht man: „Die Auswahl und die Behandlung eines Themas an einer bestimmten Stelle des Curriculums soll nicht ad hoc, sondern so erfolgen, dass auf höherem Niveau ein Ausbau möglich wird. Zu vermeiden sind vordergründige didaktische Lösungen, die später ein Umdenken erforderlich machen“ (ebd., S.86).

Die Phasen der Begriffsentwicklung in der Schule werden nun exemplarisch für das Lernen geometrischer Begriffe dargestellt. Dabei wird folgendes Modell von Weigand et al. (2013) zugrunde gelegt:

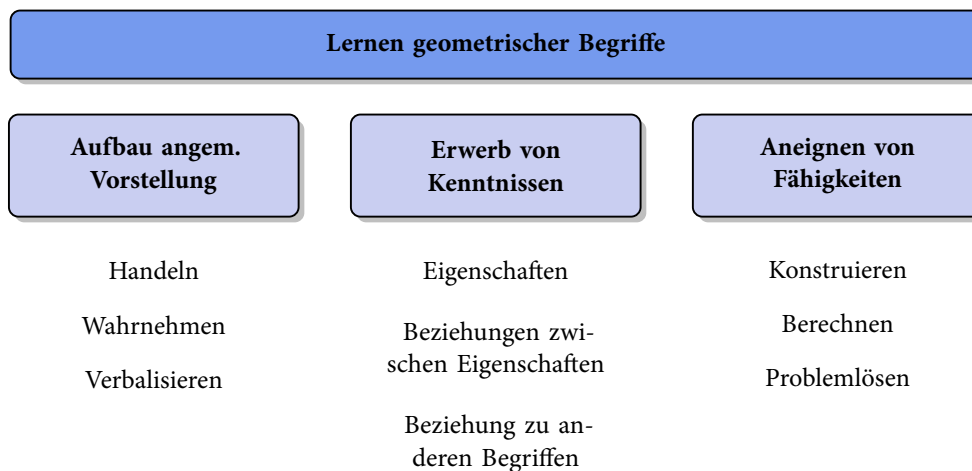


Abbildung 3.5: Aspekte des Lernens geometrischer Begriffe nach (Weigand et al., 2013, S. 103).

Das Lernen von geometrischen Begriffen erfolgt demnach in den drei Dimensionen *Aufbau angemessener Vorstellungen*, *Erwerb von Kenntnissen* sowie *Aneignung von Fähigkeiten*, welche nach Weigand et al. (2013) in „fortwährender Wechselbeziehung“ zueinander stehen. Diese drei Dimensionen werden in Anlehnung an Weigand et al. (2013) kurz erläutert:

- **Aufbau angemessener Vorstellungen**

„Bei geometrischen Vorstellungen handelt es sich um gedankliche Bilder von Objekten, ihren Eigenschaften und Beziehungen“ (ebd., S. 103). Diese Vorstellungen entwickeln sich dabei aus „*Handlungen* an konkreten Objekten, aus *Wahrnehmungen* an Gegenständen und Bildern sowie aus *Beschreibungen* oder *Visualisierungen* von geometrischen Objekten“ (ebd., S. 103).

- **Erwerb von Kenntnissen**

„Zum Verstehen eines Begriffs gehören *Kenntnisse über Eigenschaften, über die Beziehung zwischen diesen Eigenschaften* und über die *Beziehungen des Begriffs zu anderen Begriffen*“ (ebd., S. 109).

- **Aneignung von Fähigkeiten**

„Zum Verstehen eines geometrischen Begriffs gehören auch *Fähigkeiten* im Umgang mit dem Begriff. Bei den *geometrischen Fähigkeiten* denkt man in erster Linie an das

Konstruieren. Darüber hinaus gehören zu ihnen aber auch Fähigkeiten zum *Berechnen* (...) sowie Fähigkeiten zum *Problemlösen*“ (ebd., S. 110).

Erwähnenswert ist an dieser Stelle auch die Bedeutung der Definitionen im Begriffsbildungsprozess. Definitionen kommen im Geometrieunterricht zwar vor und dienen vor allem als Erleichterung der Ausdrucksweise sowie Präzisierung von Begriffen, stehen allerdings „nicht am Anfang des Begriffslernens [und] bauen vielmehr auf Vorstellungen, Kenntnissen und Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff auf“ (ebd., S. 113).

Es konnte in Anlehnung an Burger & Shaughnessy (1986) gezeigt werden (Weigand et al., 2013), dass bei der Begriffsentwicklung in der Geometrie die van-Hiele-Stufen erkennbar sind:

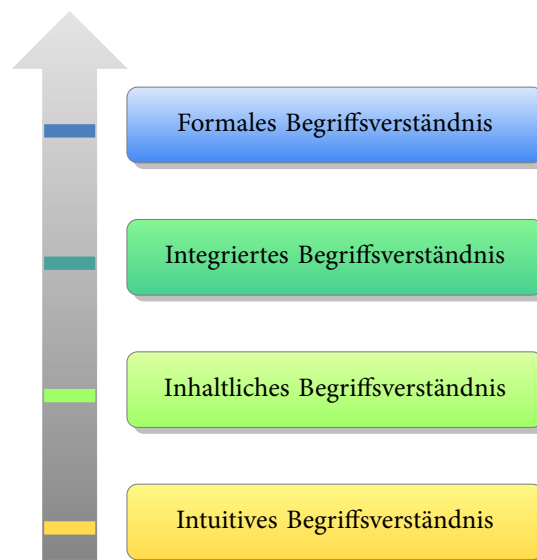


Abbildung 3.6: Van-Hiele Stufen im Begriffsbildungsprozess in der Geometrie.

Dieses Stufenmodell lässt sich nicht nur bei der Begriffsbildung in der Geometrie wiederfinden. Vollrath & Weigand (2007) empfehlen für das „Erlernen des Funktionsbegriffs“ ebenfalls das *Lernen in Stufen* und schlagen dazu vier Phasen vor, die sich gleichermaßen mit Abbildung 3.6 visualisieren lassen. Als Motivation hierfür nennen sie den langen Weg der Entwicklung des Funktionsbegriffs (siehe hierzu etwa Klein (1908) oder Volkert (1986)) und stellen hierzu die beiden folgenden Definitionen gegenüber:

Der Funktionsbegriff nach von Mangoldt & Knopp (1980)

Wenn jedem Wert einer Veränderlichen x , der zu dem Wertebereich dieser Veränderlichen gehört, durch eine eindeutige Vorschrift je ein bestimmter Zahlenwert y zugeordnet ist, so sagt man, y sei eine *Funktion der Veränderlichen x* oder kürzer, y sei eine Funktion in x .

Der Funktionsbegriff nach Liedl & Kuhnert (1992)

A und B seien Mengen. Eine *Funktion* oder *Abbildung* f von A in B ist ein Tripel (A, B, G) mit den Eigenschaften:

- (1) $G \subseteq A \times B$ und
- (2) Für alle $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in G$.

Sie sehen den Unterschied der beiden Fassungen darin, „dass in der ersten Definition die Intuition bewusst angesprochen wird, dass Vorstellungen geweckt werden und dass man in Kauf nimmt, dass einiges vage bleibt. In der zweiten Definition ist alles Vage und Intuitive ausgeschaltet. Alles gründet sich auf wohldefinierte Begriffe und Aussagen“ (Vollrath & Weigand, 2007, S. 159). Ihrer Meinung nach ist es Aufgabe des Mathematikunterrichts, „den Schülern zu helfen, Begriffe zu verstehen und den korrekten Umgang mit ihnen zu lernen“ (ebd., S. 159).

Weigand et al. (2013) stellen im Zusammenhang mit Stufenlernmodellen zum Aneignen mathematischer Begriffe folgende drei Punkte als zentral und wichtig heraus (S. 121):

- Die Aufmerksamkeit des Lehrers und der Lehrerin wird darauf gelenkt, bei der Einführung eines Begriffs im Unterricht Vorerfahrungen, intuitive Vorstellungen und ein Vorwissen bei den Lernenden zu berücksichtigen, auf die im Unterricht aufgebaut werden kann bzw. die im Hinblick auf die mathematische Begriffsbildung kritisch hinterfragt werden müssen.
- Lehrende werden auf mögliche andere Sichtweisen und Vorstellungen hingewiesen, die Lernende, im Gegensatz zum Lehrenden von einem Begriff besitzen können.
- Das Beschreiben von Vorwissen und Vorerfahrungen durch Stufen hat Modellcharakter und ist metaphorisch zu verstehen. Mit einer genauen Zuordnung des Wissens der Schüler zu einer bestimmten Stufe muss sehr vorsichtig umgegangen werden.

Winter (1983) vertritt die These, dass Begriffe entdeckt und Definitionen nacherfunden werden müssen. Diese Ansicht findet sich auch in Vollrath (1987) wieder, welcher für die Bildung eines mathematischen Begriffs folgende Teilbereiche vorschlägt: „die Betrachtung einer Eigenschaft zur Charakterisierung des Begriffs, die Wahl einer Begriffsbezeichnung, die Angabe einer Definition, die Angabe von Beispielen und Gegenbeispielen, das Suchen von Eigenschaften und die Erforschung der Beziehungen zu Nachbarbegriffen“ (Vollrath, 1987, S. 126). Auffällig ist, dass die Angabe einer Definition zwar als wichtiger Teilbereich angesehen wird, allerdings nicht an erster Stelle steht (Hähnisch, 2011). Hier zeigen sich Parallelen zu den drei Welten von Tall: in den ersten beiden Welten wird die Definition oft erst aus Beispielen und / oder der Anschauung gewonnen und steht ergo nicht am Anfang des Begriffsbildungsprozesses. In der formal-axiomatischen Welt ist die Definition das Entscheidende; in dieser sind alle relevanten Informationen gekapselt. Doch auch wenn hier die Definitionen an erster Stelle stehen, bedeutet dies nicht, dass mentale Bilder und Visualisierungen in diesem Stadium keine Rolle mehr spielen. Speziell beim Übertritt in die neue „Welt“ der Mathematik besitzen diese entscheidende Relevanz, damit man in dem Formalismus nicht regelrecht „versinkt“. Daher wird im Folgenden zunächst allgemein ein Blick auf Möglichkeiten und Grenzen von Visualisierungen geworfen. Anschließend wird Bezug zur Bedeutung dieser im Hinblick auf den Aufbau mentaler Modelle zu mathematischen Konzepten genommen.

3.2.2 Möglichkeiten und Grenzen von Visualisierungen

„To be a scholar of mathematics you must be born with (...) the ability to visualize.“

(Halmos, 1985, S. 400)

Dieser Abschnitt beschäftigt sich zunächst sehr allgemein mit Möglichkeiten und Grenzen von Visualisierungen in Bezug auf Begriffsbildung in der Mathematik. Die Bedeutung von Visualisierungen wurde bereits vielfach untersucht (vgl. etwa Eisenberg & Dreyfus, 1986; Bishop, 1989; Presmeg, 1992; Zazkis et al., 1996; Kadunz & Sträßer, 2004; Stylianou & Silver, 2004; Rösken & Rolka, 2006; Selden & Selden, 2013). In Anlehnung an die Definitionen von Zimmermann & Cunningham (1991) sowie Hershkowitz et al. (1989) definiert Arcavi (2003) den Begriff Visualisierung wie folgt (S. 217):

Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, diagrams, in our minds, on paper with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.

Gutiérrez (1996) versteht unter diesem Begriff „*the kind of reasoning activity based on the use of visual or spatial elements, either mental or physical, performed to solve problems or prove properties*“ (S. 9). Weiter nennt er folgende vier Kerndimensionen von Visualisierungen:

- **Mental Images**

„*Any kind of cognitive representation of a mathematical concept or property by means of visual or spatial elements.*“ (ebd., S. 9).

- **External representations**

„*Any kind of verbal or graphical representation of concepts or properties including pictures, drawings, diagrams, etc. that helps to create or transform mental images and to do visual reasoning*“ (ebd., S. 9 f).

- **Processes of visualization**

„*A mental or physical action where mental images are involved*“ (ebd., S. 9 f).

Hierunter fasst er zwei verschiedene Prozesse: einerseits die Interpretation von Informationen um bildliche Vorstellungen zu erstellen und andererseits die Interpretation der bildlichen Vorstellungen, um Informationen daraus zu ziehen.

- **Abilities needed in visualization**

„*Individuals should acquire and improve a set of 'abilities' of visualization to perform the necessary process with specific mental images for a given problem.*“ (ebd., S. 10)

Im Folgenden wird speziell auf die *Mental Images*, die als bildliche Vorstellungen bezeichnet werden, eingegangen. Auch Vinner (1983) verwendet diesen Begriff, den er wie folgt erklärt: „*Let C denote a concept and let P denote a certain person. Then P's mental picture of C is the set of all pictures that have ever been associated with C in P's mind*“ ((Vinner, 1983, S. 293)).

Hadamard (1945) betont die zentrale Bedeutung der bildlichen Vorstellungen, die seine und

die Denkprozesse anderer Mathematiker durchziehen: „According to Hadamard, many mathematicians, when immersed in thought, often avoid not only using words, but also algebraic or other symbols, preferring instead to focus on images“ (Stylianou & Silver, 2004, S. 354). Ähnlich argumentiert auch Pólya (1945), für den Bilder und Visualisierungen nicht nur in der Geometrie sondern auch in anderen Bereichen der Mathematik eine wichtige Rolle spielen. Er erstellte dazu eine Liste von heuristischen Vorschlägen für ein gelungenes Herangehen an mathematische Problemstellungen. Ein zentraler Punkt unter diesen Vorschlägen ist „Draw-a-figure“ (Pólya, 2010). Rösken & Rolka (2006) beschreiben bildliche Vorstellungen als „powerful tool“, um mathematischen Problemstellungen zu begegnen, Vorstellungen zu mathematischen Begriffen aufzubauen sowie die Komplexität einer Vielzahl von Informationen zu reduzieren. Zusammenfassend lässt sich konstatieren, dass Visualisierungen in Bezug auf mathematische Begriffsbildung eine große Bedeutung zukommt. Weiter können sie gerade im Übergang von der Schule zur Hochschule bzw. im Übergang zur „Formal-Axiomatic“-Welt eine wichtige Unterstützung bieten. Umso mehr überrascht es, dass es bislang recht wenige systematische Studien in diesem Bereich gibt (Stylianou & Silver, 2004).

Visualisierungen wurden bisher als wichtig und nützlich beschrieben, Rösken & Rolka (2006) gaben ihrem Artikel zu Visualisierungen sogar den Titel „A Picture is worth a 1000 Words“. In selbigem Artikel schränkten sie allerdings den Nutzen von Visualisierungen auch ein: „A picture is worth a 1000 words – only if one is aware of its scope“ (ebd., S. 462). Es muss ein Bewusstsein darüber vorhanden sein, dass die bildliche Vorstellung oft nur einen kleinen Ausschnitt eines Konzepts umfasst. Wird dies vergessen und fokussiert man sich in Bezug auf ein Konzept rein auf die bildliche Anschauung, kann dies eher hinderlich als nützlich sein. Rösken & Rolka (2006) formulierten in ihrem Artikel den Titel wie folgt um: „A picture is worth a 1000 words – only if one is able to use it flexibly“ (S. 462). Besonders gravierend ist hier die fehlende Flexibilität, zwischen algorithmischen Fertigkeiten und Visualisierungen hin und her zu wechseln (Arcavi, 2003). Oftmals bleibt es bei einer Beschränkung auf algorithmische Handlungsweisen, die Eisenberg (1994) auch als „reluctance to visualize“ beschreibt. Die Ambivalenz der Visualisierungen (Rösken & Rolka, 2006) wurde bereits von Tall (1994) beschrieben: „It is this quality of using images without being enslaved by them which gives the professional mathematician an advantage but can cause so much difficulty for the learner“ (S. 37). Besonders wichtig ist, sich des Potentials aber auch der Grenzen von Visualisierungen bewusst

zu sein. So stellen diese keine Isomorphie zwischen mathematischen Konzepten und ihren Beziehungen dar (Rösken & Rolka, 2006). Ihnen zufolge sollten Visualisierungen immer von reflektierendem Denken begleitet werden, um nicht durch diese hinsichtlich der eigenen Vorstellung limitiert zu sein. Ein von ihnen genanntes Beispiel ist die Restriktion der Vorstellung von Integralrechnung auf Flächen oberhalb der x -Achse. Diese impliziert Schwierigkeiten bei der Deutung des Integrals als „Flächenbilanz“, d.h. dass Flächen unterhalb der x -Achse ein negatives Vorzeichen besitzen.

Während in der Schulmathematik Visualisierungen und somit auch bildliche Vorstellungen eine große Rolle spielen – oftmals werden bestimmte Eigenschaften nur anhand von Beispielen oder aus der Anschauung heraus gewonnen⁶ – erleben Studienanfängerinnen und -anfänger mit dem Wechsel an die Hochschule einen starken Rückgang in diesem Bereich. Die Mathematik in der Vorlesung präsentiert sich den Studierenden als formale und sehr abstrakte Abfolge von Definitionen, Sätzen, etc., „[t]hey see mathematics as a system of algorithms to be performed to get 'the right' answer“ (Engelbrecht, 2010, S. 1). Hilbert & Cohn-Vossen (1983) schreiben hierzu im Vorwort ihres Buches:

In mathematics (...) we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward abstraction seeks to crystallize the logical relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward intuitive understanding fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live rapport with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations.

Eine der großen Herausforderungen an die Studienanfängerinnen und -anfänger ist, sich zu den formalen Begriffen und Aussagen eine unmittelbare Anschauung herzuleiten – „illuminate the manifold facts and problems of mathematics“ (Zimmermann & Cunningham, 1991, S. 1) – und zwischen dieser und der formalen Notation flexibel hin- und herwechseln zu können: „One must learn how ideas can be represented symbolically, numerically, and graphically, and to move back and forth among these modes“ (S. 3). Tall führte diesbezüglich die beiden Begriffe *Concept Image* und *Concept Definition* ein, welche im nächsten Abschnitt beschrieben werden. Weiter wird anschließend auf die Bedeutung der Interdependenz dieser beiden Begriffe in Bezug auf

⁶Man denke hier erneut an das Beispiel zum Begriff „Stetigkeit“ aus Abschnitt 3.1.1.3

mathematische Begriffsbildung sowie die Bearbeitung von mathematischen Problemstellungen eingegangen.

3.2.3 Concept Image und Concept Definition

„We assume that to acquire a concept means to form a concept image for it. To know by heart a concept definition does not guarantee understanding of the concept“

(Vinner, 1991, S. 69)

Besonders in der Studieneingangsphase wäre die Betonung einer vorstellungsorientierten Begriffsbildung (Leufer & Prediger, 2007), die an die Vorerfahrungen und Vorstellungen aus der Schulmathematik aufbaut (Ableitinger & Herrmann, 2014), wünschenswert. In den Vorlesungen werden neue Begriffe anhand formaler Definitionen eingeführt. Eine bloße Kenntnis der Definition allein reicht allerdings für ein umfassendes Verständnis eines mathematischen Begriffs nicht aus (Hähnisch, 2011). Um das Verständnis zu einem mathematischen Begriff fassen zu können, führten Tall & Vinner (1981) die beiden Konstrukte *Concept Image* und *Concept Definition* ein. Diese Begriffe werden zunächst in Abschnitt 3.2.3.1 beschrieben. Abschnitt 3.2.3.2 beschäftigt sich anschließend mit der Wechselwirkung der beiden Konstrukte.

3.2.3.1 Begriffsdefinition

„By using the constructs of concept image and concept definition, Tall and Vinner differentiate aspects of mathematical knowledge that, on the one hand, are given by formal definitions and, on the other hand, by subjective constructions.“

(Rösken & Rolka, 2007, S. 184)

In Abschnitt 3.1.1 wurde der Drei-Welten-Ansatz von David Tall vorgestellt. Dabei wurde herausgearbeitet, dass insbesondere der Übergang von den ersten beiden Welten zur „*Axiomatic-Formal*“-Welt, wie ihn die Studentinnen und Studenten in der Studieneingangsphase erleben, eine große Herausforderung darstellt. Klare Indiz hierfür sind die in Kapitel 2 erwähnten Studienabbruchquoten im Fach Mathematik. Mathematische Begriffe und Argumentation fußen in Talls dritter Welt nicht mehr auf Anschauung und Erfahrung, sondern auf formalen Definitionen und deduktiven Schlüssen. Gerade im Anfangsstadium kommt dem mentalen Modell und der Fähigkeit zur Begriffsbildung der Studierenden eine große Rolle zu. Rösken

& Rolka (2007) sprechen in diesem Zusammenhang von einem „*interplay between subjective conceptualizations and formal definitions of mathematical concepts*“ (S. 182). Mit zunehmendem Formalismus und ansteigender Abstraktion mehren sich Fehlvorstellungen. Diese können zu einem falschen Verständnis der Begriffe führen und damit weiter eine fehlerhafte Verwendung dieser implizieren.

Nach Tall & Vinner (1981) verlaufen menschliche Begriffsbildungsprozesse oft konträr zur mathematischen Logik ab. Als Konsequenz führten sie im Hinblick auf den Zugang zu einem mathematischen Konzept die beiden Konstrukte *Concept Image* und *Concept Definition* ein: „*To understand how these processes occur, both successfully and erroneously, we must formulate a distinction between the mathematical concepts formally defined and the cognitive processes by which they are conceived*“ (ebd., S. 151). Diese beiden Konstrukte wurden in verschiedenen Artikeln umfassend diskutiert (vgl. etwa Vinner & Hershkowitz, 1980; Vinner, 1983; Rösken & Rolka, 2006; Rösken & Rolka, 2007).

Der Begriff *Concept Image* bezieht sich dabei auf das mentale Modell, also konkret auf die bisherigen Erfahrungen, mentalen Bilder, Vorstellungen und Beispiele, die eine Person mit einem bestimmten Begriff assoziiert:

We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.

(Tall & Vinner, 1981, S. 152)

Schoenfeld (1985) fasst diese Kenntnisse unter dem Begriff „informelles Wissen“ zusammen. In dem Artikel von Tall & Vinner (1981) wird besonders die Unterscheidung zwischen dem *Concept Image* und der formalen Theorie herausgestellt. Es wird vermutet, dass der Begriff *Concept Image* mit dem Ziel eingeführt wurde, die Diskrepanz zwischen subjektiven Begriffsverständnis und der formalen Theorie beschreiben zu können (Viholainen, 2008, S. 26).

Die *Concept Definition* bezieht sich auf die axiomatisch aufgebaute, formale Definition eines Begriffs aus der Mathematik, „mit derer in der Mathematik auf einer rein formalen Ebene gearbeitet wird“ (Hähnisch, 2011, S. 31):

We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. Whether the concept definition is given to him or constructed by himself, he may vary it from time to time. In this way a personal concept definition can differ from a formal concept definition, the latter being a concept definition which is accepted by the mathematical community at large.

(Tall & Vinner, 1981, S. 2)

Tall & Vinner (1981) definieren die *Concept Definition* also in zwei Dimensionen – eine personenbezogene und eine mathematische Variante (Rach, 2014). Einerseits sprechen sie von der *personal concept definition*. Darunter verstehen sie die formale Beschreibung der Vorstellung zu einem Begriff durch eine bestimmte Person. Diese kann von der zweiten Variante, der „*formal concept definition*“, abweichen, welche eine unter Mathematikern anerkannte Definition bezeichnet. Die *formal concept definition* besteht in erster Linie aus einer Ansammlung von Zeichen und Symbolen. Dieses formale Konstrukt muss von jedem Einzelnen interpretiert werden und führt zu einer personenbezogenen Variante dieser Definition. Viholainen (2008) spricht in diesem Zusammenhang auch von einer „*personal interpretation of the formal concept definition*“ (S. 26).

In Anlehnung an Rach (2014), Viholainen (2008) und Rösken & Rolka (2007) soll auch in dieser Arbeit die personenbezogene Variante der *Concept Definition* dem *Concept Image* zugeschrieben werden (vgl. hierzu Abbildung 3.7). Das *Concept Image* kann somit als mentales Modell angesehen werden, welches zu einem bestimmten mathematischen Konzept vorliegt. Intuitiv neigt man dazu, das *Concept Image* allein mit Visualisierungen gleichzusetzen. Der Begriff umfasst allerdings mehr:

Some mathematical concepts have strong graphical aspects; others do not. For concepts not having strong graphical aspects, the image includes mainly symbolic representations or formulas, as well as the set of all properties with the concept.

(Vinner & Dreyfus, 1989, S. 356 f)

Unter den Begriff *Concept Image* fallen also mentale Bilder, Visualisierungen, Eindrücke sowie bestimmte Erfahrungen in Bezug auf dieses Konzept (vgl. Abbildung 3.7).

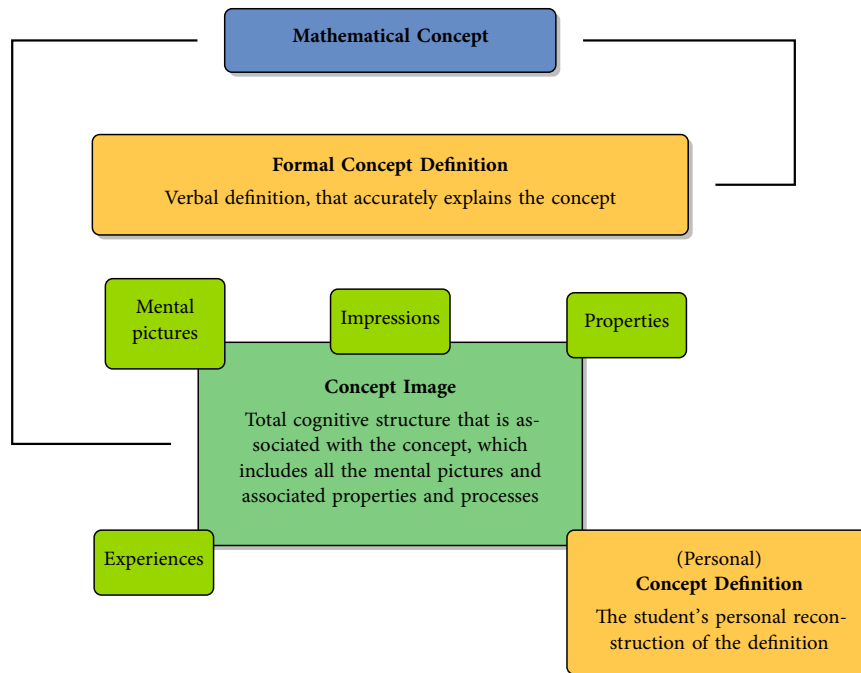


Abbildung 3.7: Veranschaulichung der Begriffe *Concept Image* und *Concept Definition* (nach Rösken & Rolka, 2007).

Diese führen zu einer personenbezogenen Variante der Definition des Begriffs. Ein Ziel dieser Arbeit besteht darin, die personenbezogenen Varianten sowie die mentalen Modelle der Studienanfängerinnen und -anfänger in den ersten beiden Semestern zu beschreiben. Allerdings muss dabei aber auch gleichzeitig berücksichtigt werden, dass das mentale Modell in Bezug auf mathematische Begriffe kontextabhängig ist: „*Conceptions, mental images, representations and connections depend on the context, and thus it is impossible to do an absolute mapping about them*“ (Viholainen, 2008, S. 28). Es ist also nahezu unmöglich, das mentale Modell in seinem gesamten Umfang zu erfassen. Tall & Vinner (1981) führten in diesem Zusammenhang den Begriff *evoked concept image* ein, welcher sich auf den Teil des mentalen Modells bezieht, der durch einen bestimmten Kontext (etwa eine Frage- oder Problemstellung) hervorgerufen wird. Diese Problematik wird in Abschnitt 8.1, der sich mit den Schwierigkeiten bei der Erhebung von Vorstellungen auseinandersetzt, noch einmal aufgegriffen.

Weiter ist es nicht selbstverständlich, dass das *Concept Image* seinen Inhalt betreffend konsistent und zusammenhängend ist. Es kann auch vorkommen, dass es Aspekte enthält, die sich gegenseitig widersprechen. Oftmals ist dies Studierenden allerdings nicht bewusst (Rösken &

Rolka, 2007). Als Beispiel führen Tall & Vinner (1981) die Identifikation komplexer Zahlen als geordnetes Paar reeller Zahlen ($\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$) an. So kann die Darstellung der Zahl $x = x + 0i$ als Tupel $(x, 0)$ potentiell zu Konflikten führen, da aus mengentheoretischer Sicht $x \neq (x, 0)$ (Zahl \neq Tupel) gilt.

Natürlich wäre es wünschenswert, wenn die personenbezogene Variante der Definition mit der formalen Definition übereinstimmen würde. Dies ist allerdings nicht immer der Fall. Hierbei können bestimmte Wechselwirkungen zwischen den beiden Konstrukten auftreten, die im nächsten Abschnitt thematisiert werden.

3.2.3.2 Wechselwirkung im Begriffsbildungsprozess

„In traditional classroom settings, examples are primarily used to introduce a new concept. The learning and later reproduction of a concept is intertwined with diverse conscious as well as unconscious processes and the formed concept image will play a crucial role.“

(Rösken & Rolka, 2007, S. 185)

In Abschnitt 3.2.1 wurde bereits aufgezeigt, dass an der Schule Begriffe oft aus der Anschauung heraus gewonnen werden. Entsprechend der Theorie der ersten beiden Welten von Tall werden aus bekannten Objekten Eigenschaften abgeleitet und diese als Definitionen gefasst. Der Begriffsbildungsprozess an der Universität verläuft im Gegensatz dazu viel komplizierter, ein Konzept wird meist nicht sofort verstanden: *„One must remember that a concept is not acquired in one step. Several stages precede the complete acquisition and mastery of a complex concept. In these intermediate stages, some peculiar behaviors are likely to occur. Several cognitive schemes, some even conflicting with each other, may act in the same person in different situations that are closely related in time“* (Vinner & Dreyfus, 1989, S. 365). An der Hochschule liegen allen mathematischen Konzepten formale Definitionen zugrunde. Nach Vinner & Dreyfus (1989) nutzen die Studierenden allerdings nicht notwendigerweise diese Definitionen, sondern stützen sich auf ihr *Concept Image*. Es kann dabei vorkommen, dass *„the set of mathematical objects considered by the student to be examples of the concept is not necessarily the same as the set of mathematical objects considered by the definition“* (ebd., S. 356). Folglich kommt der Wechselwirkung zwischen den formalen Definitionen und dem dafür zugrundeliegenden mentalen Modell eine besondere Rolle zu. Nach Vinner & Dreyfus (1989) ist es weiter von großer Bedeutung, herauszufinden, welche Modelle bei Studierenden zu verschiedenen mathematischen

Konzepten vorhanden sind.

Im Idealfall stützen sich *Concept Image* und *Concept Definition* gegenseitig oder die exakte formale Definition lässt sich aus dem mentalen Modell, das zu einem bestimmten Begriff vorliegt, ableiten. Andererseits kann das Kennenlernen eines neuen mathematischen Konzepts anhand der formalen Definition zum Aufbau eines *Concept Image* führen. Es kommt also zu Interdependenzen der beiden Konstrukte. Rösken & Rolka (2007) bezeichnen den Aufbau eines *Concept Image* aus einer formalen Definition heraus als ambivalenten Prozess. Sie verstehen darunter, dass wichtige Aspekte der Definition im gebildeten *Concept Image* nicht adäquat repräsentiert werden, was wiederum zu Schwierigkeiten führen kann. Eine besondere Brisanz erfährt diese Wechselwirkung in der Studieneingangsphase, wenn Begriffe, die bereits in der Schule thematisiert wurden⁷, noch einmal formal-axiomatisch definiert werden. Stimmt in diesem Zusammenhang das *Concept Image* mit der eingeführten *Concept Definition* eines Begriffs in der Hochschulmathematik nicht überein, gibt es nach Vinner (1991) drei Möglichkeiten: (I) Entweder wird das *Concept Image* so angepasst, dass es mit der *Concept Definition* übereinstimmt (Akkomodation), (II) das *Concept Image* bleibt bestehen und die formale Definition wird in dieses Konzept integriert (Assimilation) oder aber (III) beide Konstrukte existieren nebeneinander, ohne dass sie in Verbindung gebracht werden. Harel & Tall (1991) fassen diese drei Fälle unter den Begriffen (I) *Expansive generalization*, (II) *Reconstructive generalization* und (III) *Disjunctive generalization* zusammen. Die ersten beiden Möglichkeiten werden von Harel & Tall (1991) als kognitive Generalisierungen angesehen. Das dritte Szenario kann zwar zu einem bestimmten Grad nützlich sein, „behinder[t] aber häufig ein weitergehendes und vertiefendes Verständnis“ (Hähnisch, 2011, S. 34).

Um die beiden Konstrukte sowie die Interdependenz darstellen zu können, nahm Vinner (1983) an, dass für jedes Konzept zwei verschiedene Bereiche in der kognitiven Wissensstruktur existieren: ein Bereich für die Definition des Konzepts und ein Bereich für das mentale Modell. Dabei kann es vorkommen, dass entweder ein oder sogar beide Bereiche leer sind. Weiter kann eine wechselseitige Beeinflussung der beiden Bereiche untereinander bestehen. Vinner (1983) erklärt die Szenarien (I)-(III) anhand eines konkreten Beispiels zu Vorerfahrungen mit einem Koordinatensystem (S. 294):

⁷Für Studien, die sich mit Begriffsvorstellungen in der Schule beschäftigen, siehe etwa Rösken & Rolka (2007); Rösken & Rolka (2006); Rasslan & Tall (2002).

A child might have a concept image for the notion of coordinate system as a result of seeing many graphs in various situations. According to this concept image the two axes of a coordinate system are perpendicular to each other. Later on the child's math teacher might define a coordinate system as any two intersecting straight lines.

In diesem Fall können die oben beschriebenen Szenarien (I)-(III) auftreten: (I) Das *Concept Image* erweitert sich um Koordinatensysteme, bei denen die Achsen nicht im rechten Winkel zueinander liegen, (II) das *Concept Image* bleibt bestehen und die Definition des Lehrers wird früher oder später wieder vergessen oder (III) beide Bereiche bleiben nebeneinander bestehen. Werden Schülerinnen und Schüler nach der Definition eines Koordinatensystems gefragt, wiederholen sie die Definition des Lehrers, in der Vorstellung verbleibt allerdings das Bild eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Vinner, 1983).

Nach Vinner (1983) laufen ähnliche Prozesse auch bei der Begriffsbildung zu neuen Konzepten ab. Zunächst ist der Bereich des *Concept Image* bei der Einführung einer neuen Definition noch leer, füllt sich aber nach und nach einhergehend mit verschiedenen Beispielen und gemachten Erfahrungen. Fehlen manche Aspekte im mentalen Modell, kann dies erneut Auswirkungen auf die Kenntnis der formalen Definition haben. Vinner (1983) visualisiert den Prozess der Begriffsbildung wie folgt:

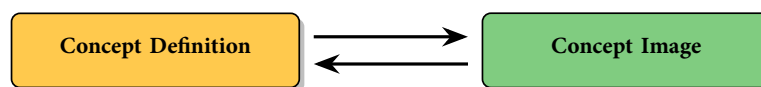


Abbildung 3.8: Wechselbeziehung von *Concept Image* und *Concept Definition* während eines Begriffsbildungsprozesses (nach Vinner, 1983).

Er stellt heraus, dass viele Sekundarstufenlehrkräfte sowie Hochschuldozentinnen und -dozenten den Begriffsbildungsprozess als unidirektional annehmen: „*Namely, the concept image is formed by the concept definition and under its control*“ (ebd., S. 295):

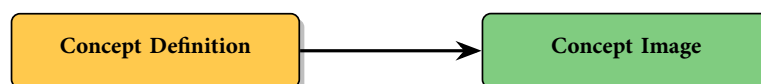


Abbildung 3.9: Angenommene unidirektionale Richtung während des Begriffsbildungsprozesses (nach Vinner, 1983).

Dieser Fall wäre sicherlich wünschenswert und wird von Vinner (1983) als „*wishful thinking*“ bezeichnet, da er eine konsistente Begriffsbildung impliziert. Allerdings tritt bei Studienanfängerinnen und -anfängern häufig der zweite Fall ein (z.B. beim Erwerb des Tangentenbegriffs; Vinner, 1991). Um eine Akkomodation von *Concept Image* und *Concept Definition* zu erreichen, muss nach Vinner (1991) ein kognitiver Konflikt hervorgerufen werden, der z.B. durch intensives Diskutieren von Spezialfällen erreicht werden kann. So kann auch ein Bewusstsein für die präzise Verwendung und Analyse von Formulierungen in der Hochschulmathematik geschaffen werden Reichersdorfer et al. (2014).

Rösken & Rolka (2007) stellen die enorme Bedeutung der Formation eines umfassenden, konsistenten *Concept Image* in Bezug auf den Begriffsbildungsprozess heraus (S. 184):

Finally, we would like to emphasize the importance of this model for learning and teaching mathematics. Explanations for concepts will easily be forgotten if students are not able to develop own ideas and associations. Learning a new concept requires forming a comprehensive concept image but one should keep in mind that maybe important aspects of a mathematical concept are not adequately represented.

3.2.3.3 Wechselwirkung bei mathematischen Problemstellungen

Der vorherige Abschnitt hat sich mit der Bedeutung und Interdependenz der beiden Konstrukte *Concept Image* und *Concept Definition* in Hinblick auf den Begriffsbildungsprozess beschäftigt. Neben der Begriffsbildung kommt diesen auch bei der Konfrontation mit mathematischen Problemstellungen sowie der Bearbeitung von Aufgaben eine wichtige Rolle zu.

Vinner (1983) stellt diesbezüglich drei Szenarien vor, die wünschenswert wären und oft auch von Dozenten angenommen werden, allerdings nicht die Realität widerspiegeln:

(a) **Szenario 1**

Eine mathematische Problemstellung wird über die formale Definition unter Zuhilfenahme des dazu vorliegenden mentalen Modells gelöst. Dem *Concept Image* kommt hier die Bedeutung zu, die Definitionen greifbar zu machen und richtig anzuwenden:

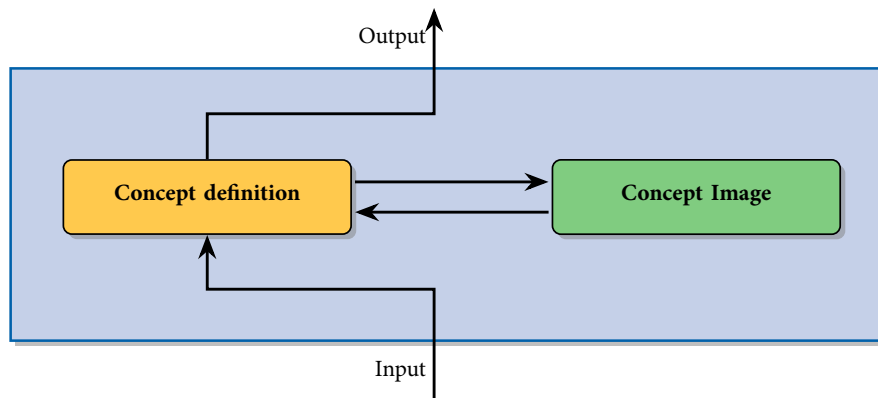


Abbildung 3.10: Szenario 1: Lösen von mathematischen Problemstellungen über die formale Definition unter Zuhilfenahme des dazu vorliegenden mentalen Modells (nach Vinner, 1983).

(b) **Szenario 2:**

Eine mathematische Problemstellung wird rein über die formale Definition gelöst. Ein Rückgriff auf das mentale Modell ist hierbei nicht erforderlich. Dieses Szenario zeigt sich vor allem bei Experten:

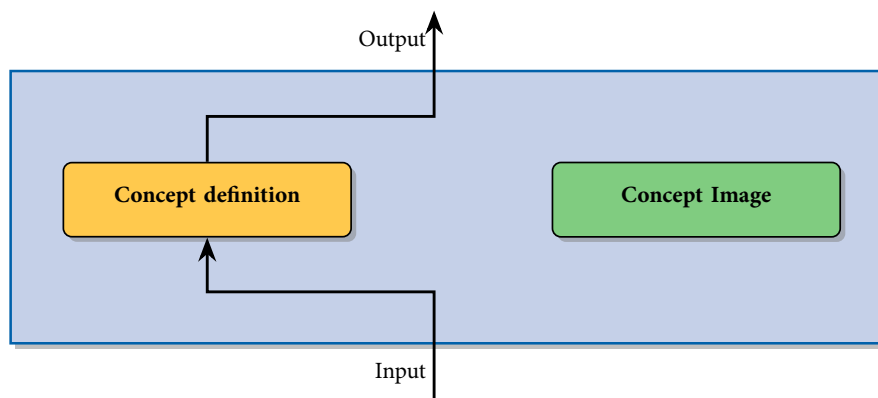


Abbildung 3.11: Szenario 2: Lösen von mathematischen Problemstellungen rein über die formale Definition (nach Vinner, 1983).

(c) **Szenario 3:**

Eine mathematische Problemstellung wird zunächst anhand des mentalen Modells bearbeitet. Aus dem *Concept Image* werden anschließend die formalen Definitionen abgeleitet, mit denen die Problemstellung letztendlich gelöst wird:

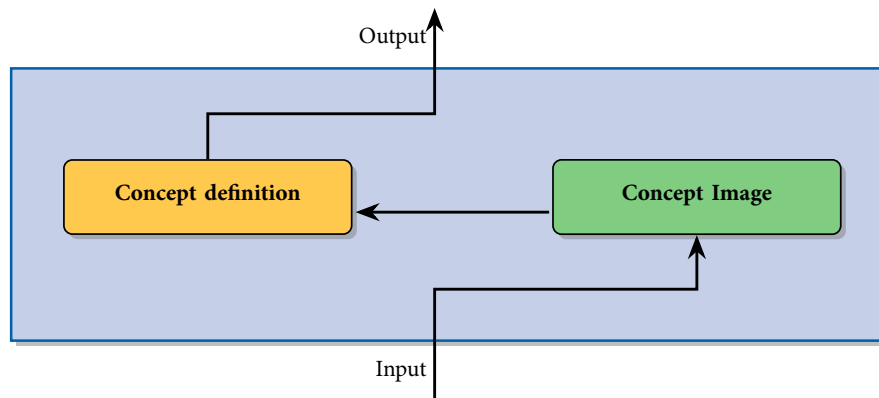


Abbildung 3.12: Szenario 3: Rückgriff auf das mentale Modell, aus welchem die formalen Definitionen abgeleitet werden, mit welchen die Problemstellung anschließend gelöst wird (nach Vinner, 1983).

Die drei Szenarien werden von Vinner (1983) allerdings als Wunschdenken bezeichnet (S. 296):

There is no way to force a cognitive structure to use definitions, either in order to form concept images or in order to handle a cognitive task. Some definitions are too complicated to deal with. They do not help in creating concept images in the students' mind. Hence, they are useless. On the other hand, there are some definitions that do make sense but the (...) definitions might become inactive or even be forgotten.

Folglich greifen Studierende bei der Bearbeitung von mathematischen Problemstellungen oft rein auf das *Concept Image* zurück, die formale Definition bleibt dabei unberührt:

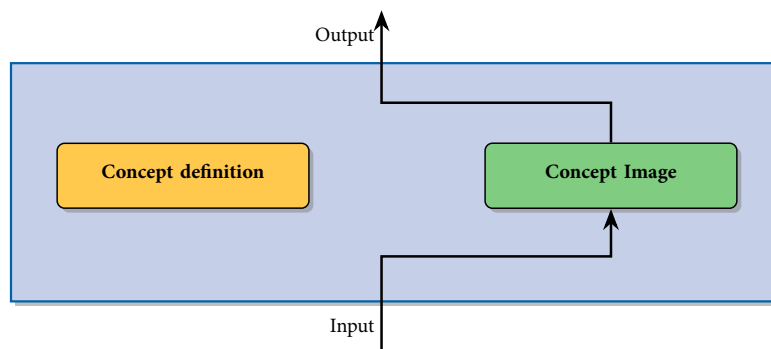


Abbildung 3.13: Szenario 2: Lösen von mathematischen Problemstellungen rein über das *Concept Image* (nach Vinner, 1983).

Ähnlich argumentieren auch Rösken & Rolka (2007): „*When working on problems, students do not consider any concept definition. They base their decisions on the concept image*“ (S. 185). Ihnen zufolge ist dies mitunter eine Konsequenz aus unserem Alltag: „*Most everyday concepts*

are acquired as ostensive definitions and, to that effect, formal definitions are of inferior relevance“ (S. 185). Gerade in der Mathematik spielen die formalen Definitionen allerdings eine entscheidende Rolle – meist ist es unvermeidbar, alle Aspekte einer Definition zu berücksichtigen. Kennt man diese nicht oder ist das *Concept Image* unvollständig, führt dies unweigerlich zu Problemen. Als Beispiel führt Vinner (1991) das Konzept „Tangente“ an, das in der Schule üblicherweise bei der Auseinandersetzung mit dem Thema Kreis eingeführt wird. Eine Gerade heißt Tangente (an den Kreis), wenn sie mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat. Hierbei kann es später zu Problemen kommen, wenn das Konzept „Tangente“ eine analytische Definition erfährt. Bei Schülerinnen und Schülern traten Schwierigkeiten auf, Tangenten zu zeichnen, die einen Graphen in mehreren Punkten berühren. Als weiteres Beispiel nennen Rösken & Rolka (2007) die Bestimmung der Extrema einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall. Viele Studentinnen und Studenten vernachlässigen die Randpunkte: *„In that case students’ thinking is dominated by the concept image of horizontal tangent and they do not take into account that the corresponding condition $f'(x) = 0$ is only relevant for the open interval“* (S. 185).

Ein weiteres Problem bei der Bearbeitung von mathematischen Problemstellungen ist der Wechsel zwischen mentaler Repräsentation und formaler Definition. So bezogen sich Cocking & Chipman (1988) auf Studien von Rosnick & Clement (1980), die zeigten, dass viele Studentinnen und Studenten nicht in der Lage sind, Beziehungen, welche in Alltagssprache formuliert waren, in mathematische Ausdrücke zu übersetzen oder umgekehrt (Engelbrecht, 2010). Das mentale Modell zu einem mathematischen Konzept kann zwar suggerieren, dass man dieses verstanden hat. Gelingt es allerdings nicht, das Modell in einen mathematischen Ausdruck resp. in eine Definition zu transferieren, ist es in Bezug auf mathematische Problemstellungen oftmals wertlos. Engelbrecht (2010) schreibt diesbezüglich von seiner eigenen Erfahrung mit dem Thema Häufungspunkt (S. 4):

I recall an incident where I was explaining the idea of an accumulation point of a set to a group of second year students. After my first informal explanation it was clear that the majority of the students had a very good idea of what I meant. Then I gave them the formal definition. Immediately the students lost their enthusiasm. It was clear that I had lost them and one student even asked: 'Are we expected to be able to do these translations?'

Für Studierende des Fachs Mathematik ist es dementsprechend von großer Bedeutung, unter-

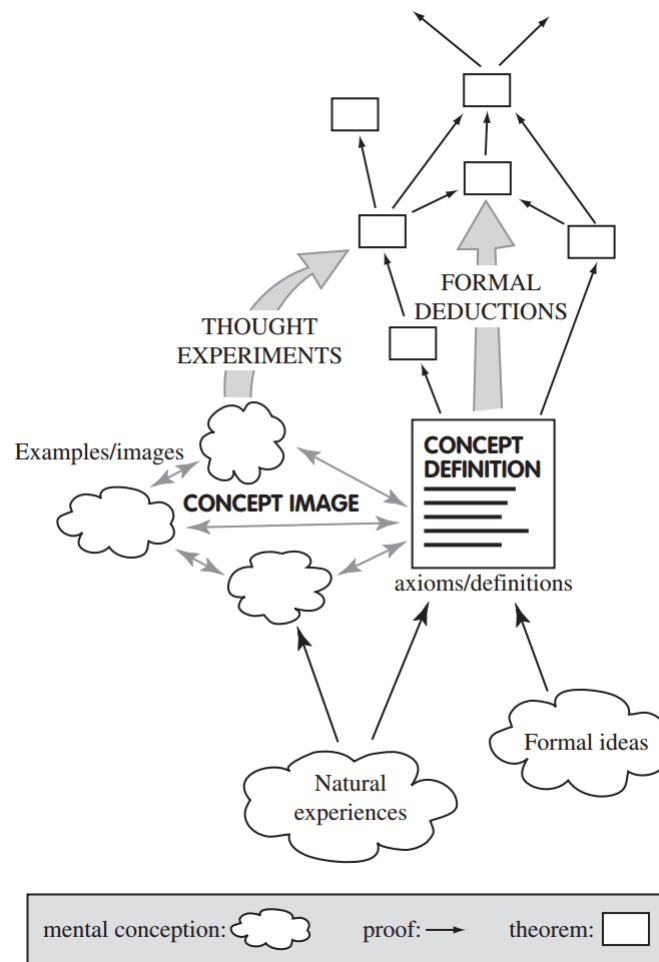


Abbildung 3.14: Bedeutung von *Concept Image* und *Concept Image* in Hinblick auf mathematische Problemstellungen (Tall, 2001).

scheiden zu können, ob es sich um eine Beschreibung eines Konzepts oder um eine formale Definition dessen handelt (Engelbrecht, 2010). Weiter müssen sie in Bezug auf mathematische Problemstellungen sowohl ihr *Concept Image* als auch die formale Definition nutzen können (Alcock & Simpson, 1999). Dies ist zugleich ein wichtiges Charakteristikum mathematischer Expertise:

Most mathematicians use both natural and formal thinking processes, whichever is appropriate in a given context. For instance, it is natural to use a variety of conceptual ideas to build ideas for formal theories, and then to use a formal approach to prove theorems.

(Tall, 2001, S. 206)

Die Bedeutung des Zusammenspiels des mentalen Modells und der formalen Definitionen in

Hinblick auf die deduktive Beweisführung in der Mathematik ist in Abbildung 3.14 dargestellt.

Mit steigender Expertise wird das *Concept Image* als „*encapsulated*“ oder „*reified*“ beschrieben (Tall, 1991b; Sfard, 1992; Wilkerson & Wilensky, 2011). Ein mathematisches Konzept ist dabei mit Vorstellungen, Bildern sowie Beispielen angereichert und infolgedessen flexibel anwendbar:

If expertise is characterized by encapsulated or densely connected knowledge that can be deconstructed and reconstructed in a number of ways (Tall, 2001), then it is not only the structure of knowledge, but also the act of identifying, manipulating and coordinating that knowledge that is an important component of expertise.

(Wilkerson & Wilensky, 2011, S. 2)

In einer Studie zu „How Do Mathematicians Learn Mathematics“ zeigten Wilkerson & Wilensky (2011) die enorme Bedeutung des *Concept Image* im Hinblick auf die Erschließung neuer, noch unbekannter Konzepte. In analoger Weise betont auch Thurston (1990) die enorme Bedeutung des mentalen Modells (S. 847):

Mathematics is amazingly compressible: you may struggle a long time, step by step, to work through some process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there is often a tremendous mental compression. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it, and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics.

KAPITEL 4 Forschungsfragen

„Entscheidend ist, dass der Forscher eine klare Vorstellung über seine Fragestellung entwickelt und dabei noch offen bleibt für neue und im besten Fall überraschende Erkenntnisse.“

(Flick, 2000, S. 63)

Überblick:

| | |
|---|----|
| 4.1 Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn | 86 |
| 4.2 Qualität der Begriffsentwicklung in der Studieneingangsphase | 86 |

In den Kapiteln 2 und 3 wurden sowohl Gründe für die Übergangsschwierigkeiten zwischen den Bildungsinstitutionen Schule und Hochschule als auch mögliche Maßnahmen beschrieben, diesen Problemen entgegenzuwirken. Die wichtigsten Inhalte der beiden Kapitel werden an dieser Stelle kurz zusammengefasst: in Kapitel 2 wurde aufgezeigt, dass es eine Vielzahl von Schwierigkeiten im Wechsel von der Schule zur Hochschule gibt. Diese „Bruchstelle“ wurde bereits von Klein (1908) unter dem Begriff „Doppelte Diskontinuität“ gefasst. De Guzmán et al. (1998) / Ableitinger & Herrmann (2014) machen Komplikationen in den drei Bereichen (1) Epistemologische und kognitive Schwierigkeiten, (2) Soziologische und kulturelle Schwierigkeiten und (3) Didaktische Schwierigkeiten fest. Insbesondere der sich wandelnde Charakter der Mathematik stellt eine große Herausforderung an die Studienanfängerinnen und Studienanfänger dar. Hierzu wurde in Kapitel 3 der Drei-Welten-Ansatz von David Tall als theoretische Grundlage herangezogen und die daraus resultierenden Probleme im Übergang von den ersten beiden Welten zur dritten Welt aufgezeigt. Weiter liefert dieser Ansatz eine mögliche Erklärung für unterschiedliches Interesse an sowie Leistungsvermögen in Mathematik an Schule und Universität (vgl. Abschnitt 3.1.1.5). Die Transition von der „Schulwelt Mathematik“ hin zur „Universitätsmathematik“ führt aufgrund der theoretischen Überlegungen unweigerlich zu

Komplikationen. Speziell die unterschiedlichen Anforderungen im Hinblick auf die Begriffsbildung sowie -entwicklung dienen als Motivation für die vorliegende Arbeit. Diese unterteilt sich im Folgenden in zwei Teile, die unabhängig voneinander gelesen werden können. Zuerst wird dazu der Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn betrachtet. Im Anschluss beschäftigt sich die Arbeit mit dem Aufbau sowie der Entwicklung von mentalen Modellen hinsichtlich mathematischer Begriffe in der Studieneingangsphase.

4.1 Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn

In Kapitel 2 wurden Vorkurse und Entwicklungsprojekte als Kompensationsmaßnahmen für die Schwierigkeiten im Übergang von der Schule zur Hochschule dargestellt. Besonders der Kenntnisstand von Studienanfängerinnen und -anfängern zu Studienbeginn hat im Hinblick auf diese Projekte sowie Planung der Fakultät hohe praktische Relevanz. Teil 2 der vorliegenden Arbeit beinhaltet eine Studie zum Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn. Motivation hierfür und eine theoretische Einordnung finden sich in Abschnitt 5.1, welcher mathematisches Vorwissen als möglichen Bedingungsfaktor für Studienerfolg behandelt. In Bezug auf diese Studie ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- FF₁: Welche grundlegenden Fertigkeiten und Kenntnisse in Mathematik besitzen Studienanfängerinnen und -anfänger zu Beginn ihres Hochschulstudiums mit Mathematikanteil?
- FF₂: Welche Fertigkeiten bei der Bearbeitung von anwendungsorientierten sowie mehrstufigen Problemstellungen besitzen Studienanfängerinnen und -anfänger zu Beginn ihres Hochschulstudiums mit Mathematikanteil?
- FF₃: Welche Vertrautheit mit mathematischen Begriffen und Definitionen besitzen Studienanfängerinnen und -anfänger zu Beginn ihres Hochschulstudiums mit Mathematikanteil?

4.2 Qualität der Begriffsentwicklung in der Studieneingangsphase

Der Wandel des Charakters der Mathematik bringt zudem differierende Anforderungen im Begriffsbildungsprozess mit sich. Während an der Schule das Lernen neuer Begriffe oft in Stufen

(vgl. Abbildung 3.6) stattfindet und zunächst ein intuitives sowie inhaltliches Begriffsverständnis zu generieren versucht wird, ist an der Universität vor allem ein formales Verständnis gefordert. Die ersten drei Prozessstufen sind dabei weitestgehend ausgeblendet und es bleibt den Studierenden selbst überlassen, sich auf diesen Ebenen Vorstellungen anzueignen. Im Zusammenhang dazu schufen Tall & Vinner (1981) die beiden Konstrukte *Concept Definition* und *Concept Image*, welche zwischen der formalen mathematischen Definition und dem mentalen Modell, also der Ansammlung an mentalen Bildern, Visualisierungen, Eindrücken sowie Erfahrungen unterscheiden. Aufgrund des Wandels im Begriffsbildungsprozess ist es daher besonders in der Studieneingangsphase entscheidend, dass die Studierenden ein fundiertes und kohärentes Verständnis zu den formalen Begriffen aufbauen, „to make sense and grasp the meaning of mathematics beyond definitions“ (Rösken & Rolka, 2007, S. 1). Hierzu gibt es bislang vereinzelte Studien, die sich mit der Qualität des *Concept Image* bezüglich eines bestimmten Begriffs zu einem Zeitpunkt auseinandersetzen (z.B. Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983). Diese Studien beziehen sich meist auf die Konzepte „Abbildung“ sowie „Folgen und Grenzwert“. Einen Versuch der längsschnittlichen Entwicklung stellt die Studie von Hähnisch (2011) dar, welche allerdings vor allem hinsichtlich der theoretischen Einordnung sowie der methodischen Durchführung starke Mängel aufweist. Die vorliegende Studie setzt an diesem Forschungsdefizit an. Sie hat eine Einschätzung der Qualität mentaler Modelle von Studienanfängerinnen und -anfänger sowie eine Darstellung der zeitlichen Entwicklung dieser zum Ziel. Hieraus ergeben sich bereits folgende Forschungsfragen:

- FF₄: Welche Qualität besitzt das mentale Modell von Studierenden eines Studiums mit Mathematikschwerpunkt hinsichtlich der zentralen mathematischen Konzepte „Abbildung“, „Injektivität“, „Surjektivität“ und „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ nach sieben Wochen Mathematikstudium?
- FF₅: Welche Qualität besitzt das mentale Modell von Studierenden eines Studiums mit Mathematikschwerpunkt hinsichtlich der zentralen mathematischen Konzepte „Injektivität“, „Surjektivität“ und „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ am Ende des ersten Semesters?
- FF₆: Welche Qualität besitzt das mentale Modell von Studierenden eines Studiums mit Mathematikschwerpunkt hinsichtlich der zentralen mathematischen Konzepte „Injektivität“,

„Surjektivität“, „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ und „Folgen und Folgenkonvergenz“ zur Mitte des zweiten Semesters?

Neben der querschnittlichen Einstufung der mentalen Modelle ist durch eine längsschnittlich ausgelegte Befragung auch eine Darstellung der zeitlichen Entwicklung dieser angestrebt. Es sind bislang im Bereich der Hochschulmathematik keine Studien bekannt, die sich mit einer ähnlichen Thematik beschäftigen. Hieraus resultiert folgende Forschungsfrage:

FF₇: Wie entwickelt sich die Qualität des mentalen Modells von Studierenden eines Studiums mit Mathematikschwerpunkt hinsichtlich der zentralen mathematischen Konzepte „Injektivität“, „Surjektivität“ und „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ im Laufe der ersten beiden Semester?

Für die praktische Lehrtätigkeit spielen auch zentrale Fehlvorstellungen von Studierenden bzgl. der mathematischen Konzepte eine wichtige Rolle. Nur wenn Dozierenden diese Fehlvorstellungen bekannt sind, können sie in ihren Lehrveranstaltung diesen gezielt vorbeugen bzw. entgegenwirken. Folglich ist die Identifikation von Fehlvorstellungen ein weiteres Ziel der Studie:

FF₈: Welche Fehlvorstellungen besitzen Studierende eines Studiums mit Mathematikschwerpunkt bezüglich der zentralen mathematischen Konzepte „Abbildung“, „Injektivität“, „Surjektivität“, „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ und „Folgen und Folgenkonvergenz“?

TEIL ZWEI

KENNTNISSTAND IN MATHEMATIK

ZU STUDIENBEGINN

KAPITEL 5 Motivation für die Durchführung

„Most students’ perception of being successful in maths in school does not involve much inquiry but mostly just the application of different methods. To make the transition to advanced mathematics, students need to learn how to work formally with definitions and theorems. Applying deductive reasoning is essential and few students possess this skill naturally.“
(Engelbrecht, 2010, S.1)

Überblick:

| | |
|--|-----------|
| 5.1 Mathematisches Vorwissen als möglicher Bedingungsfaktor für Studienerfolg | 91 |
| 5.2 Die Bedeutung des FHM im Hinblick auf die EmMa-Studie | 93 |

Gegenstand des zweiten Teils dieser Arbeit ist ein Fragebogen zum Hintergrundwissen Mathematik (FHM). Nachdem in diesem Kapitel mathematisches Vorwissen als möglicher Bedingungsfaktor für den Studienerfolg herausgestellt wird, beschreibt Kapitel 6 die Konzeption resp. Durchführung des FHM. Anschließend werden in Kapitel 7 die Ergebnisse der Auswertung sowie eine Einordnung dieser in Bezug auf vergleichbare Studien vorgestellt. Es schließt mit einer Diskussion über die Ergebnisse und gibt einen Ausblick auf mögliche Maßnahmen, dem Mangel an grundlegenden Kenntnissen und Fertigkeiten entgegen zu wirken.

5.1 Mathematisches Vorwissen als möglicher Bedingungsfaktor für Studienerfolg

Neben dem Wandel im Charakter der Mathematik wird in der Literatur oft auch das Fehlen von mathematischem Grundwissen sowie der Mangel an mathematischen Grundfertigkeiten als wichtiger Faktor angesehen, der für die Schwierigkeiten im Übergang vom Sekundär- zum Tertiärbereich verantwortlich ist (z.B. Cretchley et al., 2007; Carmody et al., 2006; Anthony, 2000;

de Guzmán et al., 1998). Herbert Büning, ein Mathematikprofessor an der Freien Universität Berlin, schreibt in einem Artikel: „Es steht außer Frage, dass solide Kenntnisse in [...] Bereichen der Elementarmathematik Voraussetzung für einen erfolgreichen Studienbeginn [...] sind“ (Büning, 2004, S. 619). Im weiteren Verlauf des Artikels berichtet er von einem „katastrophalen“ Ergebnis einer Studie mit Studienanfängerinnen und -anfängern zu ihren Kenntnissen und Fertigkeiten in der Elementarmathematik. Nach Steinbauer et al. (2014) „klafft bei der Mehrheit der Studienanfängerinnen und -anfänger eine deutliche Lücke zwischen dem tatsächlich aus der Schule mitgebrachten Wissen und dem in den traditionellen Anfängervorlesungen vorausgesetzten und unkommentiert verwendeten „Schulstoff“ (S. 411). Biehler et al. (2014a) unterstreichen dies: „Es scheint mittlerweile Konsens in der Vor- und Brückenkurscommunity zu herrschen, dass insbesondere in zentralen Bereichen der Sek-I-Mathematik erhebliche Lücken bestehen und dass diese es erschweren, sich in fortgeschrittenen Bereichen der Elementarmathematik flexibel Konzepte anzueignen und insbesondere anzuwenden“ (S. 2). Auch Cramer & Walcher (2010) sprechen davon, dass die hohen Misserfolgsquoten oft bereits durch mangelnde Vorkenntnisse der Studienanfängerinnen und -anfänger verursacht werden. Als Problemfeld wird neben rechentechnischen Kompetenzen auch ein mangelndes Verständnis der zugrunde liegenden mathematischen Konzepte (allgemeines Funktionsverständnis, Fertigkeiten in Vektorrechnung, grundlegendes Verständnis des Ableitungs- und Integralbegriffs) ausgemacht (Embacher, 2014). Hierbei scheint es sich nicht allein um ein deutsches Problem zu handeln: „*Students who enter tertiary level courses lacking basic mathematical knowledge and skills are categorized as being mathematically 'under-prepared' or 'at-risk'*“ (Hourigan & O'Donoghue, 2007, S. 462).

Ein weiterer Beleg für die vorhandenen Defizite sind sog. Mathematik-Vorkurse resp. Mathematik-Brückenkurse, die mittlerweile an nahezu allen Universitäten und Fachhochschulen etabliert sind (Biehler et al., 2014a, S. 1). Diese haben das Ziel, relevante mathematische Inhalte aus der Schule zu wiederholen und aufzufrischen und den angehenden Studierenden somit den Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik zu erleichtern. Die Situation an der Universität Passau sowie an ausgewählten anderen Universitäten wurde bereits in Abschnitt 2.3 ausführlich thematisiert.

Eigene Erfahrungen als Betreuer der Mathematik-Brückenkurse 2011 und 2012, sowie als Dozent und Übungsleiter verschiedener Veranstaltungen zur Elementarmathematik bestätigen

diese Thesen.

Um Kenntnisse und Fertigkeiten angehender Studierender der Universität Passau zu ermitteln, wurde ein Mathematik-Hintergrundwissen-Test konzipiert. Es ist darüber hinaus keine Studie bekannt, die sich damit beschäftigt, wie Hochschuldozierende den Kenntnisstand der Studienanfängerinnen und -anfänger einschätzen. Zeigt sich hier eine starke Diskrepanz zwischen tatsächlich vorliegenden und aus Sicht der Dozentinnen und Dozenten angenommenen Kenntnissen und Fertigkeiten der Schulmathematik, könnte dies eine weitere mögliche Ursache für die Übergangsschwierigkeiten sein. Aus diesem Grund wurden auch die Hochschuldozentinnen und -dozenten der FIM, die bereits eine Einführungsvorlesung an der Universität Passau gehalten haben, zu ihrer Einschätzung der Bearbeitung des Mathematiktests durch die angehenden Studierenden befragt.

5.2 Die Bedeutung des FHM im Hinblick auf die EmMa-Studie

Eine zusätzliche Intention für die Entwicklung des FHM war, eine möglichst heterogene Stichprobe für die EmMa-Studie zu finden. Neben den Aufgaben zur Schulmathematik wurden folglich auch offene Fragen zu den Erfahrungen mit der Schulmathematik resp. Erwartungen an die Hochschulmathematik integriert. Antworten auf diese Fragen wurden bei der Auswahl von geeigneten Kandidatinnen und Kandidaten für die Interviewstudie herangezogen (s. hierzu Abschnitt 8.3).

Die Entstehung und Konzeption des Fragebogens wird in Abschnitt 6.1 von Kapitel 6 näher erläutert.

KAPITEL 6 Messung des mathematischen Kenntnisstandes

„School mathematics is not truly 'learned' and stored in long term memory but is quickly lost after the final examination is safely passed.“
Klymchuk et al. (2011)

Überblick:

| | | |
|------------|---|-----|
| 6.1 | Konzeption des FHM | 96 |
| 6.2 | Durchführung der Befragungen mit FHM-1 und FHM-2 | 98 |
| 6.3 | Durchführung von FHM-D | 99 |
| 6.4 | Stichproben | 100 |
| 6.4.1 | Stichprobe FHM-1 | 100 |
| 6.4.2 | Stichprobe FHM-2 | 102 |

In Abschnitt 6.1 wird zunächst die Konzeption des FHM in Bezugnahme auf ähnliche Fragebögen beschrieben. Die Befragung wurde jeweils zu Beginn des Wintersemester 2014 / 2015 und 2015 / 2016 durchgeführt – zur Unterscheidung werden die Bezeichnungen FHM-1 und FHM-2 verwendet. Eine Beschreibung der Durchführung der beiden Erhebungen findet sich in Abschnitt 6.2. Der FHM wurde zudem den Dozierenden der FIM vorgelegt, die einschätzen sollten, welcher Prozentsatz der Studienanfängerinnen und -anfänger die jeweiligen Aufgaben richtig bearbeiten kann – Bezeichnung mit FHM-D. Abschnitt 6.4 enthält Informationen zu den jeweiligen Stichproben der Befragungen.

6.1 Konzeption des FHM

Der FHM orientiert sich an einer ähnlichen Studie von Kajander & Lovric (2005), die sich mit dem Übergang von der sekundären zur tertiären Bildungsebene an der McMaster-Universität in Kanada befasste. Dazu entwickelten sie den *Mathematics Background Questionnaire (MBQ)*. Das Ziel ihrer Studie, „[to survey] incoming first-year students on a yearly basis, collecting information on their background mathematics knowledge and skills, as well as their high school experience and expectations of university mathematics courses“ (ebd., S. 150), deckt sich mit den Erwartungen an den FHM. Ihre Studie startete im Jahr 2001, wobei zunächst Informationen zum Hintergrundwissen und Fertigkeiten der angehenden Studentinnen und Studenten im Fach Mathematik gesammelt wurden. Weiter wurden die Erfahrungen aus der Sekundarstufe und die Erwartungen an die Hochschulmathematik festgehalten. Dazu startete ihr Fragebogen mit der Bitte „Describe your experiences with high school mathematics courses that you took“ und der Frage „What are your expectations about the Calculus course that you are taking now?“ (ebd., S. 158). Mit dem Hintergrund, dass die Auswertung des FHM die Auswahl möglicher Kandidatinnen und Kandidaten für die EmMa-Studie unterstützen sollte, wurden ebenfalls offene Fragen zu den Erfahrungen mit dem bisherigen Mathematikunterricht sowie den Erwartungen an die Hochschulmathematik integriert.

Der MBQ diente dazu, die Stärken und Schwächen der angehenden Studierenden in den Gebieten

- Grundlegende Fertigkeiten (Bruchrechnung, Gleichungen)
- Grundlegende Kenntnisse zu Funktionen
- Vertrautheit mit transzendenten Funktionen (Exponential-, Logarithmus-, Trigonometrische Funktionen)
- Verschriftlichung und Formulierung mathematischer Sachverhalte
- Fertigkeiten bei mehrstufigen Problemstellungen
- Zeichnen und Interpretieren von Graphen
- Anwendungsorientierte Problemstellungen (Berechnung und Interpretation)

offen zu legen (Kajander & Lovric, 2005). Diese Gebiete wurden auch für den FHM für sinnvoll erachtet. Um die Ergebnisse des FHM einordnen zu können, wurden einige Aufgaben aus der Studie von Kajander & Lovric (2005) übernommen. Eine weitere Intention war, dass der FHM möglichst viele Bereiche der Schulmathematik abdeckt. So beinhaltet er etwa Aufgaben zum Lösen von Ungleichungen und quadratischen Gleichungen, zum Ordnen von Brüchen, zum Zeichnen einer quadratischen Funktion, zum Aufstellen einer Geradengleichung durch zwei gegebene Punkte und zu einfachen Problemstellungen aus der Differential- und Integralrechnung. Da dem Lösen von anwendungsorientierten Aufgaben im mathematischen Modellierungsprozess eine große Bedeutung zugemessen wird (vgl. etwa Klymchuk et al., 2010; Niss et al., 2007; Galbraith & Haines, 1997), wurde für das Gebiet der anwendungsorientierten Problemstellungen die *Trucking Cost Problem*-Aufgabe herangezogen, die in einer Studie von Klymchuk et al. (2010) vorkommt. Diese Aufgabe wird in Kapitel 7 bei der Auswertung noch näher erläutert.

Neben den Aufgaben zu Bereichen aus der Schulmathematik wurde der FHM um wenige weiterführende Fragestellungen ergänzt, die teilweise über den Schulstoff hinausgehen. Eine dieser Aufgaben kam in einer Studie von Gruenwald et al. (2004) vor und kann mit dem Spezialfall des Zwischenwertsatzes gelöst werden, der seit der Einführung des G8 mit dem Streichen des Begriffs der Stetigkeit im bayerischen Lehrplan nicht mehr vorkommt. Eine andere Aufgabe behandelt eine 3×3 - und eine 4×4 -Determinante. Determinanten kommen ebenfalls explizit im Lehrplan nicht mehr vor, es könnte jedoch sein, dass einige Lehrkräfte dennoch zur Untersuchung auf lineare Unabhängigkeit von drei Vektoren auf Determinanten zurückgreifen. Das Laplacesche Entwicklungsverfahren, welches zum Lösen von 4×4 -Determinanten herangezogen werden kann, dürfte allerdings den wenigsten Schülerinnen und Schülern ein Begriff sein.

Die bisherige Aufgabensammlung wurde abschließend durch Fragen zu einem neuen Bereich ergänzt:

- Vertrautheit mit mathematischen Begriffen und Definitionen
(hier: Lineare Unabhängigkeit, Differenzenquotient, Differentialquotient, h -Methode)

Aufgaben zu diesen Bereich dienten im Hinblick auf die EmMa-Studie dazu, bereits im Vorfeld etwas über die Vertrautheit der Studienanfängerinnen und Studienanfänger mit mathemati-

schen Begriffen und Definitionen herauszufinden. Speziell im Fokus stand hier der Begriff der Linearen Unabhängigkeit, da dieser im Rahmen der Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ eine wichtige Rolle einnimmt und zudem Gegenstand der qualitativen Interviewstudie war. Die Aufgabenstellungen hierzu waren bewusst sehr offen gehalten, um den Teilnehmerinnen und Teilnehmern freizustellen, ob sie eher einen umgangssprachlichen oder formalen Zugang zu den Begrifflichkeiten heranziehen möchten (vgl. den Drei-Welten-Ansatz von Tall, Abschnitt 3.1.1).

Verständlichkeit der Aufgabenstellungen

Für die Gewährleistung, dass die im FHM verwendeten Begrifflichkeiten verständlich sind und um eine Einschätzung zur ungefähren Bearbeitungszeit zu erhalten, wurde der FHM im Vorfeld 5 Schülerinnen und Schülern der 11. Jahrgangsstufe eines bayerischen Gymnasiums zur Bearbeitung vorgelegt. Dabei stellte sich heraus, dass alle Aufgaben verstanden wurden und ohne Rückfragen bearbeitet werden konnten; die Bearbeitungszeit lag zwischen 70 und 80 Minuten.

6.2 Durchführung der Befragungen mit FHM-1 und FHM-2

Um eine unverfälschte Messung der Erwartungen an die Hochschulmathematik und des Kenntnisstandes der angehenden Studierenden zu erhalten, musste die Befragung mit dem FHM vor Vorlesungsbeginn stattfinden. Als idealer Zeitpunkt stellte sich der erste Tag (22. September 2014) des Mathematik-Brückenkurses vor dem Wintersemester 2014 / 2015 heraus, der eine Woche vor Semesterbeginn an der Fakultät für Informatik und Mathematik stattfand. Erfahrungsgemäß nimmt ein hoher Prozentsatz der angehenden Studentinnen und Studenten an diesem Kurs teil. Es waren 111 Personen anwesend, welche sich alle bereit erklärten, den FHM zu bearbeiten. Zunächst wurde den Teilnehmerinnen und Teilnehmern das Forschungsprojekt vorgestellt und es wurde weiter eindringlich darum gebeten, den Fragebogen gewissenhaft zu bearbeiten. Danach wurden die Studierenden in drei Gruppen aufgeteilt und von den Betreuerinnen und Betreuern des Brückenkurses in drei separate Vorlesungs- bzw. Seminarräume gebracht.

Der Fragebogen war ohne Taschenrechner und sonstige Hilfsmittel zu bearbeiten. Dazu wurde im Vorfeld bei den Aufgaben speziell darauf geachtet, dass diese ohne großen Rechenaufwand

bearbeitet werden konnten. Die Betreuerinnen und Betreuer des Brückenkurses wurden im Vorfeld darauf hingewiesen, dass sie darauf achten sollen, dass der Fragebogen ohne Hilfsmittel und alleine bearbeitet wird.

Es war auch nicht intendiert, die Teilnehmerinnen und Teilnehmer unter Zeitdruck arbeiten zu lassen, dennoch gab es eine zeitliche Obergrenze, da die Zeit des Brückenkurses in Anspruch genommen wurde. So hatten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer für die Bearbeitung des Fragebogens gute eineinhalb Stunden Zeit, in denen eine Bearbeitung gut möglich sein sollte (vgl. Testlauf in Abschnitt 6.1).

Die Durchführung von FHM-2 verlief analog am ersten Tag (28. September 2015) des Mathematik-Brückenkurses vor dem Wintersemester 2015 / 2016. An diesem Tag waren 144 Teilnehmer anwesend, von denen sich 143 bereit erklärten, den Fragebogen zu bearbeiten. Eine Person wollte aufgrund schlechter Deutschkenntnisse nicht teilnehmen.

6.3 Durchführung von FHM-D

Die Befragung der Hochschuldozentinnen und -dozenten zu ihrer Einschätzung des Kenntnisstandes erfolgte ebenfalls mithilfe eines Fragebogens (FHM-D).

Dieser wurde mit einem Anschreiben an die Dozentinnen und Dozenten versendet, die bereits eine Mathematikvorlesung in der Studieneingangsphase gehalten hatten. In diesem Anschreiben wurde die Intention des Forschungsprojekts dargelegt sowie der bisherige Ablauf skizziert. Insbesondere wurde die Durchführung von FHM-1 und FHM-2 erläutert. Die Dozentinnen und Dozenten wurden abschließend darum gebeten, den FHM-D ausgefüllt zurückzugeben. Alle sieben Dozierenden erklärten sich dazu bereit.

Am Anfang des FHM-D wurde ebenfalls kurz das Forschungsprojekt und insbesondere die Durchführung des FHM beschrieben. Im Anschluss sind die 21 FHM-Aufgaben aufgeführt. Dabei wurden die Dozierenden jeweils um ihre Einschätzung gebeten, welcher Prozentsatz der angehenden Studierenden an der FIM diese Aufgaben richtig bearbeiten könne. Zudem wurde zu jeder Aufgabe um eine persönliche Einschätzung gebeten. In Abbildung 6.1 ist exemplarisch Aufgabe 19 des FHM-D dargestellt.

Aufgabe 19

Berechnen Sie

(a) $\int_2^3 3x^2 \, dx$

(b) $\int_1^3 e^{x-1} \, dx$

(c) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \, dx$

Geben Sie bitte an, wie viel Prozent der angehenden Studierenden an der FIM Ihrer Meinung nach diese Aufgabe richtig beantworten konnten:

| | |
|--|---------|
| | Prozent |
|--|---------|

Bitte geben Sie kurz Ihre persönliche Einschätzung zu dieser Aufgabe an:

Abbildung 6.1: Aufgabe 19 aus der Dozentenversion des FHM.

6.4 Stichproben

Dieser Abschnitt enthält Informationen zu den Stichproben von FHM-1 und FHM-2.

6.4.1 Stichprobe FHM-1

Der Fragebogen FHM-1 wurde am ersten Tag des Mathematik-Brückenkurses vor dem Wintersemester 2014 / 2015 ausgeteilt. Die Verteilung der Teilnehmer ($N = 111$) auf die verschiedenen Studiengänge der Fakultät für Informatik und Mathematik (FIM) ist in Abbildung 6.2 dargestellt.

Tabelle 6.1 bietet eine Übersicht der soziodemographischen Daten und der Abiturnoten der Teilnehmer ($N = 111$) sowie der einzelnen Studiengänge Lehramt Gymnasium ($N = 11$), Bachelor Mathematik ($N = 9$), Lehramt Realschule ($N = 9$), Bachelor Informatik mit Schwerpunkt Mathematik ($N = 14$), Bachelor Informatik mit sonstigem Schwerpunkt ($N = 24$) und Internet Computing / Mobile Eingebettete Systeme ($N = 44$).

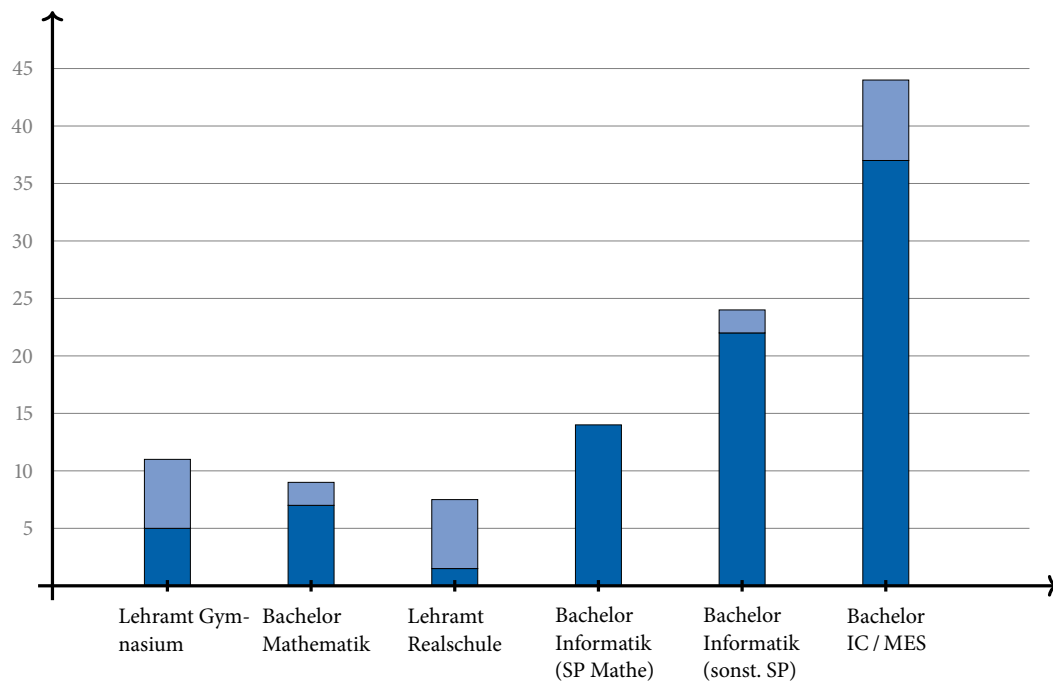


Abbildung 6.2: Verteilung der Teilnehmer am FHM-1 auf die Studiengänge an der FIM (Dunkelblau = männlich, hellblau = weiblich).

Tabelle 6.1: Soziodemographische Daten und Abiturnoten der FHM-1-Teilnehmer ($N = 111$), sowie der Substichproben LA Gym ($N = 11$), BA Mathe ($N = 9$), LA Real ($N = 9$), BA Info (SP M) ($N = 14$), BA Info (s. SP) ($N = 24$) und BA IC/MES ($N = 44$).

| | Gesamt ($N = 111$) | LA Gym ($N = 11$) | BA Mathe ($N = 9$) | LA Real ($N = 9$) | BA Info (SP M) ($N = 14$) | BA Info (s. SP) ($N = 24$) | BA IC/MES ($N = 44$) |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Alter | M = 19.42 SD = 2.55 Md = 19 Min = 17 Max = 36 | M = 18.73 SD = 0.96 Md = 18 Min = 18 Max = 21 | M = 21,22 SD = 3.71 Md = 19 Min = 17 Max = 27 | M = 20.00 SD = 1.33 Md = 20 Min = 18 Max = 22 | M = 18.64 SD = 1.34 Md = 18 Min = 18 Max = 23 | M = 18.67 SD = 1.14 Md = 18 Min = 18 Max = 23 | M = 19.77 SD = 3.19 Md = 19 Min = 17 Max = 36 |
| Geschlecht | Männl.: 88 (79.28%) Weibl.: 23 (20.72%) | Männl.: 5 (45.45%) Weibl.: 6 (54.54%) | Männl.: 7 (77.78%) Weibl.: 2 (22.22%) | Männl.: 3 (33.33%) Weibl.: 6 (66.67%) | Männl.: 14 (100%) Weibl.: 0 (0%) | Männl.: 22 (91.67%) Weibl.: 2 (8.33%) | Männl.: 37 (84.10%) Weibl.: 7 (15.90%) |
| Abiturnote | M = 2.32 SD = 0.65 Md = 2.3 Min = 1.0 Max = 4.0 | M = 1.83 SD = 0.53 Md = 1.6 Min = 1.3 Max = 3.0 | M = 2.59 SD = 0.64 Md = 2.9 Min = 1.2 Max = 3.2 | M = 2.39 SD = 0.49 Md = 2.2 Min = 1.7 Max = 3.4 | M = 2.37 SD = 0.46 Md = 2.4 Min = 1.7 Max = 3.0 | M = 2.05 SD = 0.63 Md = 2.1 Min = 1.0 Max = 3.5 | M = 2.53 SD = 0.65 Md = 2.6 Min = 1.1 Max = 4.0 |

Dabei haben zwei Teilnehmer mit Studiengang Bachelor Mathematik, zwei Teilnehmer mit Studiengang Lehramt Realschule, ein Teilnehmer mit Studiengang Bachelor Informatik mit

sonstigem Schwerpunkt und vier Teilnehmer mit Studiengang Bachelor IC / MES keine Abiturnote angegeben.

6.4.2 Stichprobe FHM-2

Der Fragebogen FHM-2 wurde am ersten Tag des Mathematik-Brückenkurses vor dem Wintersemester 2015 / 2016 ausgeteilt. Die Verteilung der Teilnehmer ($N = 143$) auf die verschiedenen Studiengänge der Fakultät für Informatik und Mathematik (FIM) ist in Abbildung 6.3 dargestellt.

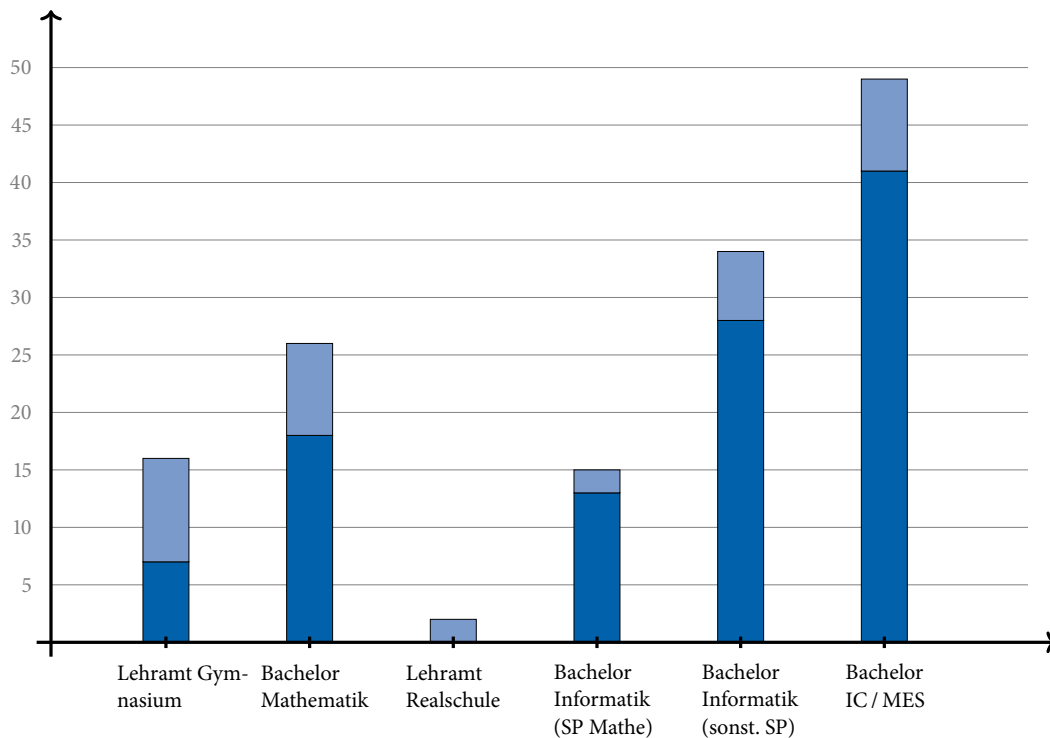


Abbildung 6.3: Verteilung der Teilnehmer am FHM-2 auf die Studiengänge an der FIM (Dunkelblau = männlich, hellblau = weiblich).

Tabelle 6.2 bietet eine Übersicht der soziodemographischen Daten sowie der Abiturnoten der Teilnehmer ($N = 143$), sowie der einzelnen Studiengänge Lehramt Gymnasium ($N = 16$), Bachelor Mathematik ($N = 26$), Lehramt Realschule ($N = 2$), Bachelor Informatik mit Schwerpunkt Mathematik ($N = 15$), Bachelor Informatik mit sonstigem Schwerpunkt ($N = 34$) und Bachelor Internet Computing / Mobile Eingebettete Systeme ($N = 49$).

Tabelle 6.2: Soziodemographische Daten und Abiturnoten der FHM-2-Teilnehmer ($N = 143$), sowie der Substichproben LA Gym ($N = 16$), BA Mathe ($N = 26$), LA Real ($N = 2$), BA Info (SP M) ($N = 15$), BA Info (s. SP) ($N = 34$) und BA IC/MES ($N = 49$).

| | Gesamt ($N = 143$) | LA Gym ($N = 16$) | BA Mathe ($N = 26$) | LA Real ($N = 2$) | BA Info (SP M) ($N = 15$) | BA Info (s. SP) ($N = 34$) | BA IC/MES ($N = 49$) |
|------------|---|---|---|--|--|---|--|
| Alter | M = 19.57 SD = 2.95 Md = 19 Min = 17 Max = 42 | M = 18.50 SD = 0.50 Md = 18.5 Min = 18 Max = 19 | M = 19.68 SD = 3.03 Md = 19 Min = 17 Max = 33 | M = 19.00 SD = 0 Md = 19 Min = 19 Max = 19 | M = 18.53 SD = 0.50 Md = 19 Min = 18 Max = 19 | M = 20.06 SD = 4.36 Md = 19 Min = 17 Max = 42 | M = 19.88 SD = 2.53 Md = 19 Min = 17 Max = 28 |
| Geschlecht | Männl.: 107 (74.83%) Weibl.: 36 (25.17%) | Männl.: 7 (43.75%) Weibl.: 9 (56.25%) | Männl.: 18 (69.23%) Weibl.: 8 (30.77%) | Männl.: 0 (0%) Weibl.: 2 (100%) | Männl.: 13 (86.67%) Weibl.: 2 (13.33%) | Männl.: 28 (82.35%) Weibl.: 6 (17.65%) | Männl.: 41 (83.67%) Weibl.: 8 (16.33%) |
| Abiturnote | M = 2.28 SD = 0.67 Md = 2.2 Min = 1.0 Max = 4.0 | M = 2.01 SD = 0.63 Md = 2.0 Min = 1.0 Max = 3.1 | M = 2.07 SD = 0.53 Md = 2.0 Min = 1.0 Max = 2.8 | M = 1.85 SD = 0.15 Md = 1.85 Min = 1.7 Max = 2.0 | M = 1.70 SD = 0.59 Md = 1.65 Min = 1.0 Max = 2.8 | M = 2.23 SD = 0.60 Md = 2.2 Min = 1.0 Max = 3.6 | M = 2.67 SD = 0.59 Md = 2.75 Min = 1.0 Max = 4.0 |

Dabei hat je ein Teilnehmer der Studiengänge Bachelor Mathematik und Bachelor Informatik mit sonstigem Schwerpunkt kein Alter angegeben, sowie ein Teilnehmer mit Studiengang Informatik mit Schwerpunkt Mathematik, zwei Teilnehmer mit Studiengang Lehramt Gymnasium, drei Teilnehmer mit Studiengang Bachelor Informatik mit sonstigem Schwerpunkt, drei Teilnehmer mit Studiengang Bachelor IC / MES und fünf Teilnehmer mit Studiengang Bachelor Mathematik keine Abiturnote genannt.

KAPITEL 7 Auswertung, Einordnung und Diskussion der Ergebnisse

„In Anbetracht des hohen Stellenwertes, den das Rechnen und das Beherrschen formaler Techniken offenkundig in der Schule besitzt, mag es überraschen, dass bei einem beträchtlichen Anteil der Studienanfänger erhebliche Defizite auch in diesem Bereich beobachtet werden.“
(Gruenwald et al., 2004)

Überblick:

| | | |
|------------|---|-----|
| 7.1 | Bewertungskategorien | 106 |
| 7.1.1 | Erläuterung und Exemplifikation | 106 |
| 7.1.2 | Auswertungsobjektivität | 109 |
| 7.2 | Ergebnisse von FHM-1 | 110 |
| 7.3 | Einordnung der Ergebnisse von FHM-1 durch FHM-2 | 133 |
| 7.4 | Vergleich der FHM-Ergebnisse mit den Erwartungen der Dozierenden | 139 |
| 7.5 | Vergleich der Ergebnisse von FHM-1 und FHM-2 mit ähnlichen Studien | 142 |
| 7.6 | Zusammenfassung und Diskussion | 145 |

In diesem Kapitel finden sich die Auswertungen sowie Präsentation der Ergebnisse von FHM-1 und FHM-2. Diese werden zunächst mit den Erwartungen der Dozentinnen und Dozenten verglichen und anschließend in Bezugnahme auf ähnliche Studien eingeordnet und analysiert.

7.1 Bewertungskategorien

Um die Fragebögen auswerten zu können, mussten die Bearbeitungen der einzelnen Aufgaben klassifiziert werden. In diesem Abschnitt werden die Bewertungskategorien, die zur Auswertung der Fragebögen herangezogen wurden, erläutert und exemplifiziert. Zudem wird die Objektivität und Reliabilität des Auswertungsverfahrens thematisiert.

7.1.1 Erläuterung und Exemplifikation

Die Bewertung vergleichbarer Tests zu Kenntnissen und Fertigkeiten in Mathematik erfolgt zumeist nur in die beiden Kategorien *Richtig* und *Falsch*. Dabei bestehen die Tests aus n Aufgaben und je richtig bearbeiteter Aufgabe erhält der Teilnehmer einen Punkt. Dieses Verfahren eignet sich zwar gut für die Auswertung großer Datenmengen, allerdings bleibt fraglich, wie Bearbeitungen kodiert werden, die Rechenfehler beinhalten oder zumindest teilweise richtig bearbeitet wurden. Da die Teilnehmerzahl an FHM-1 mit 111 und an FHM-2 mit 143 aufgrund der Größe der Universität Passau vergleichsweise klein ist, wurde die Bearbeitung der Aufgaben weiter aufgeschlüsselt. Dazu wurden zunächst zufällig einige Fragebögen ausgewählt und die Bearbeitung der einzelnen Aufgaben gesichtet. Es wurde versucht, induktiv Kategorien heranzuziehen, nach denen sich alle Bearbeitungen gut klassifizieren lassen. Durch dieses Vorgehen ergaben sich folgende fünf Kategorien:

(1) **Richtig**

Die Bearbeitung der Aufgabe ist fehlerfrei. Dabei werden kleinere Notationsfehler akzeptiert.

(2) **Rechenfehler**

Die Bearbeitung der Aufgabe beinhaltet Rechenfehler, ist ohne diese aber richtig. Auch dabei werden kleinere Notationsfehler akzeptiert.

(3) **Teilweise richtig**

Die Bearbeitung der Aufgabe beinhaltet Fehler oder ist unvollständig, der überwiegende Teil der Aufgabe wurde aber richtig bearbeitet.

(4) **Falsch**

Die Bearbeitung der Aufgabe ist falsch bzw. der überwiegende Teil der Aufgabe ist falsch.

(5) **Nicht bearbeitet**

Die Aufgabe wurde nicht bearbeitet

Diese fünf Bewertungskategorien werden zunächst zum besseren Verständnis anhand der Bearbeitung von Aufgabe 3 illustriert. Dabei wird für jede Kategorie ein Beispiel und eine kurze Begründung angegeben, warum diese der jeweiligen Kategorie zugeordnet wurde.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$4^x = 16^{2x-2}.$$

Folgende Bearbeitung wurde der Kategorie *Richtig* zugeordnet:

$$\begin{aligned} 4^x &= 16^{2x-2} \\ \Rightarrow \log_4(4^x) &= \log_4 16^{2x-2} \\ \times \log_4 4 &= (2x-2) \log_4(16) \\ x &= 4x-4 \quad | -x+4 \\ 4 &= 3x \quad | :3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

Folgende Bearbeitung wurde der Kategorie *Rechenfehler* zugeordnet:

$$\begin{aligned} \log_4 16^{2x-2} & \quad 16^{2x-2} = (4^2)^{2x-2} = 4^{4x-4} = 4^x \quad | \log \\ x &= 2x-2 \quad | -2x+2x \\ -x &= -2 \quad | \cdot (-1) \\ x &= 2 \quad \underline{\underline{\quad}} \end{aligned}$$

Die Aufgabe wurde richtig bearbeitet, nur wurden in Zeile 2 die falschen Exponenten gleichgesetzt, obwohl in Zeile 1 16^{2x-2} bereits richtig in 4^{4x-4} umgeformt wurde.

Folgende Bearbeitung wurde der Kategorie *Teilweise Richtig* zugeordnet:

$$4^x = 16^{2x-2}$$

$$4^x = \frac{16^{2x}}{16^2} \rightarrow 16^2 \cdot 4^x = 16^{2x}$$

$$16^2 = \frac{16^{2x}}{4^x} = \frac{4^{2 \cdot 2x}}{4^x} = 4^{4x-x}$$

$$\Rightarrow 16^2 = 4^{3x}$$

$$256 = 4^{3x} \quad \log 256 = 3 \cdot \log 4$$

Die Bearbeitung der Aufgabe ist bis $256 = 4^{3x}$ richtig. Der Wert $\log 256 - 3 \cdot \log 4$ für x ist aber falsch. Es hätte hier beispielsweise heißen müssen

$$256 = 4^{3x} \iff 4^4 = 4^{3x} \iff 3x = 4 \iff x = \frac{4}{3}.$$

Folgende Bearbeitung wurde der Kategorie *Falsch* zugeordnet:

$$4^x = 76^{2x-2} \quad | : 4$$

$$x \cdot \ln(4) = (2x-2) \cdot \ln(76)$$

$$7^x = 4^{2x-2}$$

$$x \cdot \ln(7) = (2x-2) \cdot \ln(4) \quad | : (2x-2)$$

$$\frac{\ln(7)}{\ln(4)} = \frac{2x-2}{x}$$

$$\frac{\ln(7)}{\ln(4)} = 2 - \frac{2}{x}$$

Die Bearbeitung dieser Aufgabe stellt eine Verletzung der Potenzgesetze dar. So ist $4^x : 4$ nicht 1^x , sondern 4^{x-1} . Analog gilt $16^{2x-2} : 4 \neq 4^{2x-2}$, was sich leicht für den Fall $x = 2$ nachprüfen

lässt.

Bei manchen Aufgaben lassen sich nicht alle fünf Bewertungskategorien anwenden. So macht es keinen Sinn bei Aufgabe 9, die nach dem Graphen einer Funktion fragt, Bearbeitungen der Kategorie Rechenfehler zuzuweisen. Weiter muss bei Aufgabe 20 eine Grenze festgelegt werden, ab wie vielen falschen Antworten die Bearbeitung der Kategorie *Teilweise richtig* bzw. der Kategorie *Falsch* zugeordnet wird. Diese Richtlinien zur Zuordnung zu den einzelnen Kategorien finden sich im Folgenden bei den jeweiligen Aufgaben.

7.1.2 Auswertungsobjektivität

Die Bewertung von Aufgaben steht bis zu einem gewissen Grad immer unter subjektivem Einfluss. Bei empirischen Untersuchungen ist folglich u.a. die Qualität des Bewertungsvorgangs entscheidend. In der Testtheorie werden hierzu die drei Hauptgütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität betrachtet. Bortz & Döring (2006) unterteilen die Objektivität weiter in drei Unterformen: die Durchführungsobjektivität, die Auswertungsobjektivität und die Interpretationsobjektivität. Im Hinblick auf den FHM ist hier vor allem die Auswertungsobjektivität zu berücksichtigen. Dies bedeutet, dass die Vergabe von Testpunkten für bestimmte Testantworten von der Person des Auswerter unbeeinflusst sein muss (Bortz & Döring, 2006). In vorliegenden Fall ist dies die Zuordnung zu den verschiedenen Kategorien. Um der Auswertungsobjektivität gerecht zu werden, wurde ein Teil der Fragebögen durch einen Beschäftigten der Lehr- und Forschungseinheit „Lehramtsausbildung Mathematik und Informatik“ anhand der fünf Bewertungskategorien ausgewertet und mit meiner Auswertung verglichen. Hier stellte sich eine sehr hohe Übereinstimmung der Klassifikation der Bearbeitungen heraus.

Zudem wurde nach der Auswertung der FHM-2 Fragebögen eine Stichprobe der FHM-1 Fragebögen erneut ausgewertet und mit der bestehenden Auswertung verglichen. Hier zeigte sich eine Übereinstimmung von 100%, d.h. es kann davon ausgegangen werden, dass die Auswertung von FHM-2 und FHM-1 trotz des Zeitunterschiedes von rund einem Jahr nach den gleichen Kriterien erfolgte.

7.2 Ergebnisse von FHM-1

In diesem Abschnitt wird die Auswertung des FHM-1 detailliert vorgestellt. Dabei wird zu jeder Aufgabe das Ergebnis der Bewertung aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer in Form eines Diagramms dargestellt, die Aufschlüsselung auf die einzelnen Studiengänge erfolgt in Tabellenform. Bei einigen Aufgaben wird zudem eine Fehleranalyse und -klassifikation vorgenommen.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $35x^2 - 21x = 0$ im Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$.

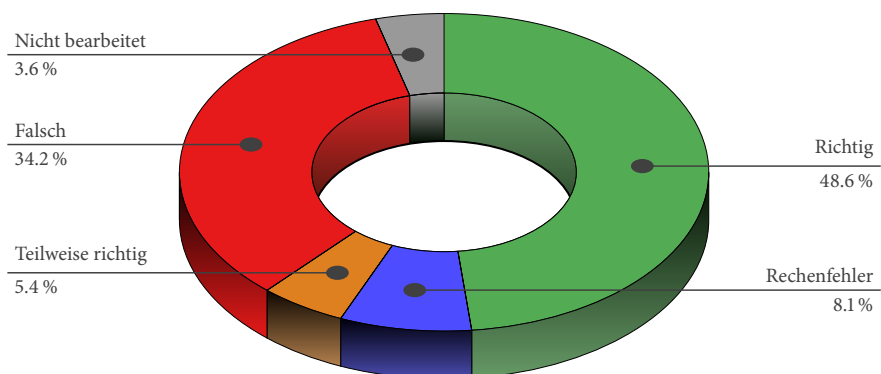


Tabelle 7.1: Bearbeitung von Aufgabe 1 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 72.7 | 0 | 9.1 | 18.2 | 0 |
| LA Real | 33.3 | 22.2 | 22.2 | 22.2 | 0 |
| BA Mathe | 44.4 | 22.2 | 0 | 22.2 | 11.1 |
| BA Info (M) | 64.3 | 14.3 | 7.1 | 14.3 | 0 |
| BA Info | 54.2 | 12.5 | 4.2 | 25.0 | 4.2 |
| BA IC/MES | 38.6 | 0 | 2.3 | 54.5 | 4.5 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Die Bearbeitung der Aufgabe wurde der Kategorie *Falsch* zugewiesen, falls durch die Variable x geteilt wurde, ohne $x = 0$ als Lösung zu berücksichtigen.

Die Bearbeitung der Aufgabe wurde der Kategorie *Teilweise richtig* zugewiesen, falls z.B. die

Koeffizienten richtig in die Lösungsformel eingesetzt wurden, dann aber nicht weitergerechnet wurde.

Besonders auffällig bei dieser Aufgabe war der hohe Prozentsatz der Studierenden, die auf die Lösungsformel zurückgriffen (23.4 %). Von diesen 23.4 % konnten weiter 46.2 % die Aufgaben insgesamt nicht richtig bearbeiten. Weitere 23.4 % der Studierenden fanden nur die Lösung $x = \frac{3}{5}$, da sie im Vorfeld durch x teilten. Lediglich 31.5 % der Studierenden fanden beide Lösungen, indem sie x ausklammerten.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{2}(x-1) > -3\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

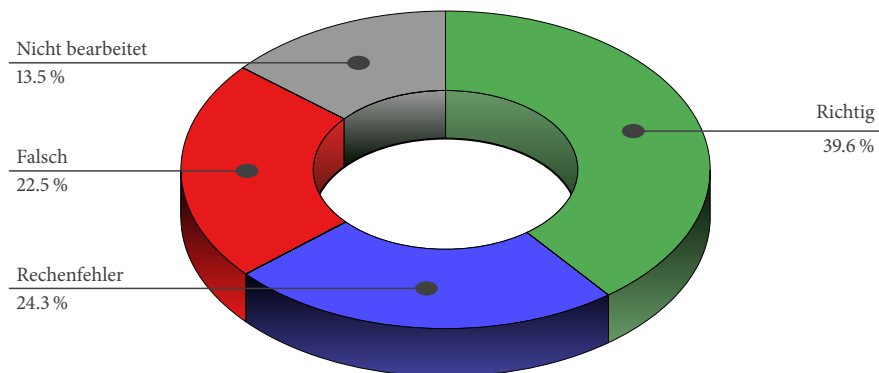


Tabelle 7.2: Bearbeitung von Aufgabe 2 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 54.5 | 36.4 | 0 | 9.1 | 0 |
| LA Real | 22.2 | 44.4 | 0 | 33.3 | 0 |
| BA Mathe | 22.2 | 33.3 | 0 | 22.2 | 22.2 |
| BA Info (M) | 57.1 | 28.6 | 0 | 7.1 | 7.1 |
| BA Info | 54.2 | 16.7 | 0 | 12.5 | 16.7 |
| BA IC/MES | 29.5 | 18.2 | 0 | 34.1 | 18.2 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Bei dieser Aufgabe wurde die Kategorie *Teilweise richtig* nicht weggelassen – bei der Analyse von FHM-1 nur keine Bearbeitung derart kodiert. Bei FHM-2 wurden drei Bearbeitungen dieser Aufgabe dieser Kategorie zugeordnet. Diese waren alle von folgender Form:

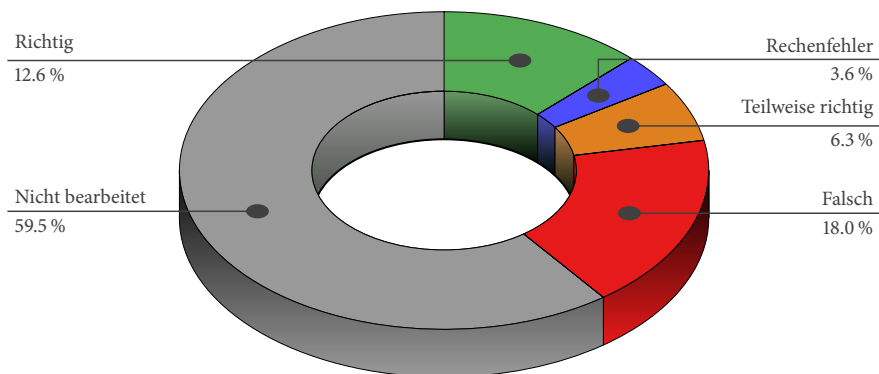
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x-1) &> -3\left(x + \frac{1}{3}\right) \\ &\vdots \\ 3.5x &> -0.5 && | : 3.5 \end{aligned}$$

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer konnten diese Rechnung vermutlich nicht ohne Taschenrechner (der nicht als Hilfsmittel zugelassen war) lösen.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$4^x = 16^{2x-2}.$$

**Anmerkung zu den Bewertungskategorien**

Eine Exemplifikation der Bewertungskategorien für diese Aufgabe wurden bereits in Abschnitt 7.1.1 angegeben.

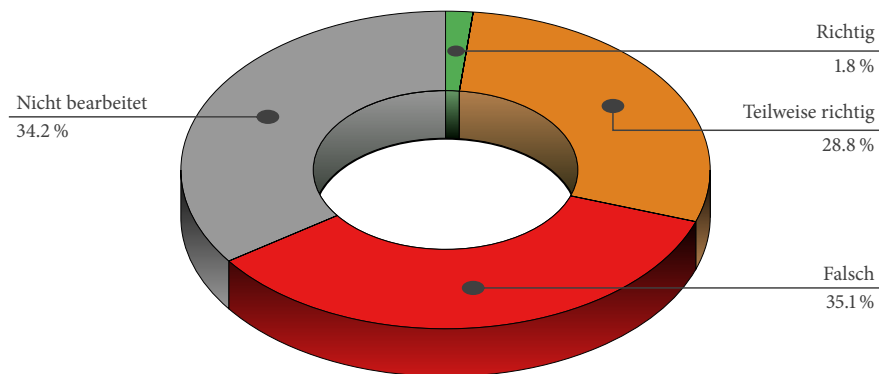
Tabelle 7.3: Bearbeitung von Aufgabe 3 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 9.1 | 9.1 | 9.1 | 27.3 | 45.5 |
| LA Real | 0 | 0 | 0 | 11.1 | 88.9 |
| BA Mathe | 11.1 | 0 | 0 | 11.1 | 77.8 |
| BA Info (M) | 28.6 | 0 | 21.4 | 14.3 | 35.7 |
| BA Info | 16.7 | 4.2 | 12.5 | 20.8 | 45.8 |
| BA IC / MES | 9.1 | 4.5 | 0 | 18.2 | 68.2 |

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 10} = 2.$$

**Tabelle 7.4:** Bearbeitung von Aufgabe 4 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 0 | 0 | 63.6 | 27.3 | 9.1 |
| LA Real | 0 | 0 | 0 | 66.7 | 33.3 |
| BA Mathe | 0 | 0 | 33.3 | 33.3 | 33.3 |
| BA Info (M) | 7.1 | 0 | 50.0 | 35.7 | 7.1 |
| BA Info | 4.2 | 0 | 16.7 | 33.3 | 45.8 |
| BA IC / MES | 0 | 0 | 25.0 | 31.8 | 43.2 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Ein häufiger Fehler war die Annahme folgender Äquivalenz:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 10} = 2 \iff x^2 + 5x + 6 = 2 \cdot (x^2 + 7x + 10).$$

Diese ist jedoch wegen $x^2+7x+10 = (x+5)(x+2)$ nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2\}$ gültig. Bearbeitungen, die die (Schein-)Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = -7$ berechneten, allerdings nicht überprüften, ob diese tatsächlich Lösungen der Gleichung sind, wurden der Kategorie *Teilweise richtig* zugeordnet. Hierbei sind auch kleinere Rechenfehler eingeschlossen.

Bei den in die Bewertungskategorie *Falsch* eingeordneten Bearbeitungen wurden vor allem zwei Fehler deutlich: 8.1 % der Studierenden machten folgende Umformung:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 10} = 2 \quad \implies \quad \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 7x + 10} = 0$$

und 5.4 % kürzten Summanden aus dem Bruch (s. Abbildung 7.1). Lediglich 2 der 111 Teilnehmer konnten die Aufgabe vollständig richtig lösen.

$$\begin{array}{l} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 10} = 2 \\ \frac{5x + 6}{7x + 10} = 2 \\ \frac{5x}{7x} + \frac{6}{10} = 2 \\ \frac{5}{7} + \frac{3}{5} = 2 \end{array}$$

Abbildung 7.1: Beispiel einer Bearbeitung aus Bewertungskategorie *Falsch*.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

(a) $\log x + \log(x + 7) = \log 4 + \log 2$

(b) $\log(9x - 10) - \log(2x - 3) = 0$

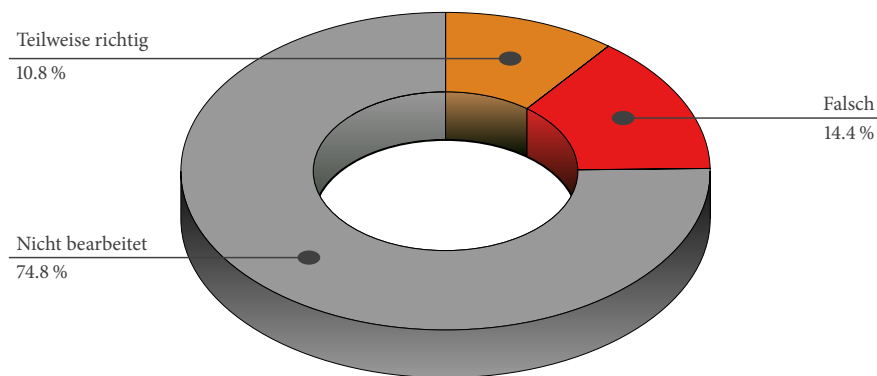


Tabelle 7.5: Bearbeitung von Aufgabe 5 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 0 | 0 | 18.2 | 18.2 | 63.6 |
| LA Real | 0 | 0 | 0 | 22.2 | 77.8 |
| BA Mathe | 0 | 0 | 11.1 | 22.2 | 66.7 |
| BA Info (M) | 0 | 0 | 28.6 | 7.1 | 64.3 |
| BA Info | 0 | 0 | 12.5 | 8.3 | 79.2 |
| BA IC/MES | 0 | 0 | 4.5 | 15.9 | 79.5 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Die Bearbeitung der Aufgabe wurde der Kategorie *Teilweise richtig* zugeordnet, falls zumindest bei einer der beiden Teilaufgaben (a) oder (b) die (Schein-)Lösungen für x ermittelt wurden. Bei Aufgabe (a) sind dies $x_1 = -8$ und $x_2 = 1$, wobei $x = -8$ aufgrund des Definitionsbereichs des Logarithmus nicht zulässig ist. Bei Teilaufgabe (b) erhält man $x = 1$, was aufgrund des Definitionsbereichs des Logarithmus nicht zulässig ist. Die Überprüfung, ob die ermittelten Werte für x tatsächlich Lösungen der Gleichungen sind, wurde von keinem Teilnehmer vorgenommen. Weitere häufige Fehler waren das Weglassen des Logarithmus auf beiden Seiten, Addition der Argumente der Logarithmen sowie die Umkehrung der Logarithmus-Gesetze.

Aufgabe 6

Entscheiden Sie, ob folgende Aussage richtig oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Falls $a > b$, gilt $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

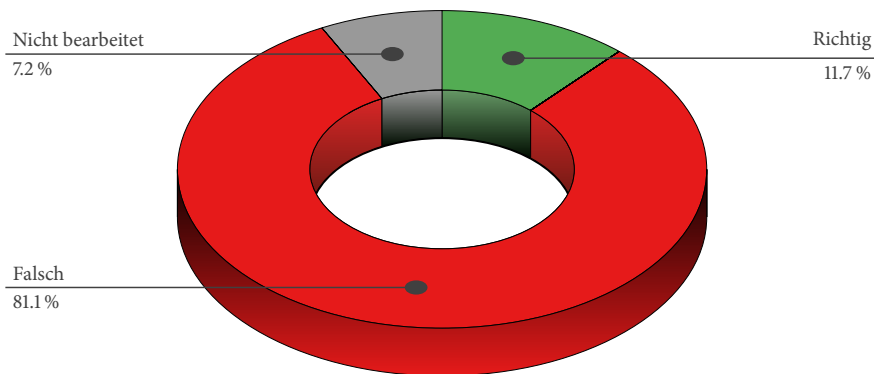


Tabelle 7.6: Bearbeitung von Aufgabe 6 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 |
| LA Real | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 |
| BA Mathe | 0 | 0 | 0 | 77.8 | 22.2 |
| BA Info (M) | 35.7 | 0 | 0 | 57.1 | 7.1 |
| BA Info | 12.5 | 0 | 0 | 75.0 | 12.5 |
| BA IC / MES | 11.4 | 0 | 0 | 84.1 | 4.5 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Bei dieser Aufgabe wurden nur die drei Bewertungskategorien *Richtig*, *Falsch* sowie *Nicht bearbeitet* vergeben.

Lediglich 11.7 % berücksichtigten bei der Aufgabe den Fall, dass a und b verschiedene Vorzeichen haben können und fanden dadurch ein Gegenbeispiel für die Behauptung.

Aufgabe 7

Ordnen Sie folgende Brüche aufsteigend der Größe nach:

$$\frac{21}{9}; \frac{24}{16}; \frac{35}{14}; \frac{2}{3}$$

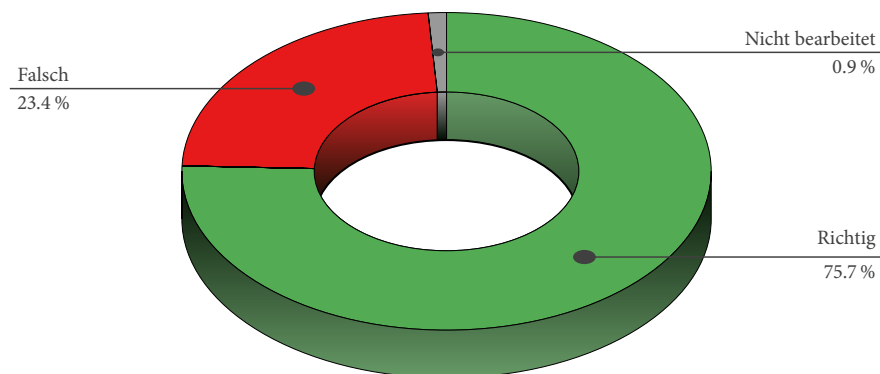


Tabelle 7.7: Bearbeitung von Aufgabe 7 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------|--------------|
| LA Gym | 90.9 | 9.1 | 0 |
| LA Real | 66.7 | 33.3 | 0 |
| BA Mathe | 66.7 | 22.2 | 11.1 |
| BA Info (M) | 85.7 | 14.3 | 0 |
| BA Info | 87.5 | 12.5 | 0 |
| BA IC / MES | 65.9 | 34.1 | 0 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Bei dieser Aufgabe wurden nur die drei Bewertungskategorien *Richtig*, *Falsch* sowie *Nicht bearbeitet* bei der Auswertung herangezogen.

Aufgabe 8

Begründen Sie, dass die Gleichung $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$ eine Lösung in \mathbb{R} zwischen $x = 1$ und $x = 2$ besitzt.

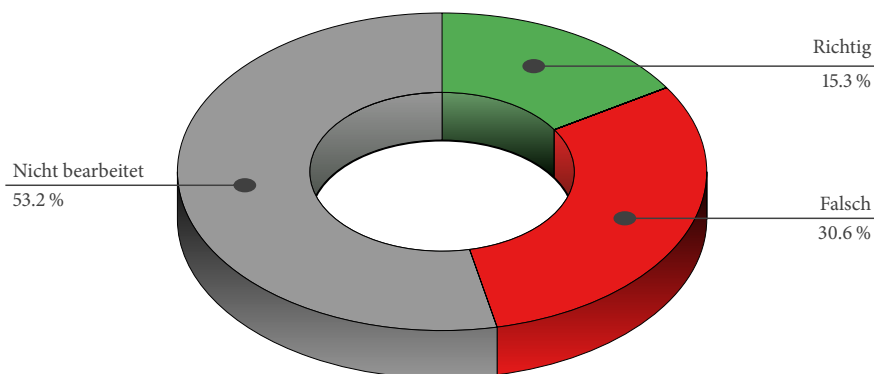


Tabelle 7.8: Bearbeitung von Aufgabe 8 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|-------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 9.1 | 0 | 0 | 45.5 | 45.5 |
| LA Real | 0 | 0 | 0 | 33.3 | 66.7 |
| BA Mathe | 22.2 | 0 | 0 | 22.2 | 55.6 |
| BA Info (M) | 21.4 | 0 | 0 | 28.6 | 50.0 |
| BA Info | 16.7 | 0 | 0 | 33.4 | 50.0 |
| BA IC/MES | 15.9 | 0 | 0 | 29.5 | 54.5 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Sei hierzu $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - \sqrt{x} - 1$. Diese Aufgabe kann mit einem Spezialfall des Zwischenwertsatzes begründet werden. Dieser setzt die Stetigkeit der Funktion f voraus, welche nur noch fakultativ im bayrischen Gymnasial-Lehrplan vorkommt (vgl. Abbildung 3.1). Folglich wurden auch Bearbeitungen der Kategorie *Richtig* zugeordnet, die feststellen, dass $f(1) < 0$ und $f(2) > 0$ gilt und – auch ohne explizit den Begriff der Stetigkeit zu verwenden – argumentierten, dass f folglich zwischen 1 und 2 eine Nullstelle besitzen muss.

Häufige Fehlerquelle: Einige Studierende versuchten diese Aufgabe durch Einsetzen der Koeffizienten in die Lösungsformel für quadratische Gleichungen zu lösen.

Aufgabe 9

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$y = (x - 1)^2 + 2.$$

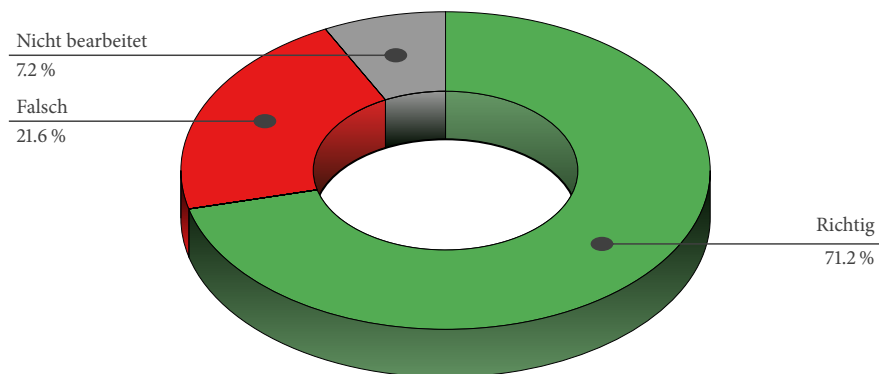


Tabelle 7.9: Bearbeitung von Aufgabe 9 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------|--------------|
| LA Gym | 81.8 | 18.2 | 0 |
| LA Real | 33.3 | 66.7 | 0 |
| BA Mathe | 88.9 | 11.1 | 0 |
| BA Info (M) | 78.6 | 14.3 | 7.1 |
| BA Info | 70.8 | 25.0 | 4.2 |
| BA IC / MES | 70.5 | 15.9 | 13.6 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Bei dieser Aufgabe wurden nur die drei Bewertungskategorien *Richtig*, *Falsch* sowie *Nicht bearbeitet* bei der Auswertung herangezogen.

Aufgabe 10

Ein Ball wird von einem Gebäude in die Luft geworfen und fällt anschließend auf den Boden. Die Höhe des Balls t Sekunden nach dem Werfen beträgt $y = -5t^2 + 30t + 35$ Meter.

- (a) Bestimmen Sie die maximale Höhe des Balles über dem Boden.
 (b) Nach wie vielen Sekunden berührt der Ball den Boden?

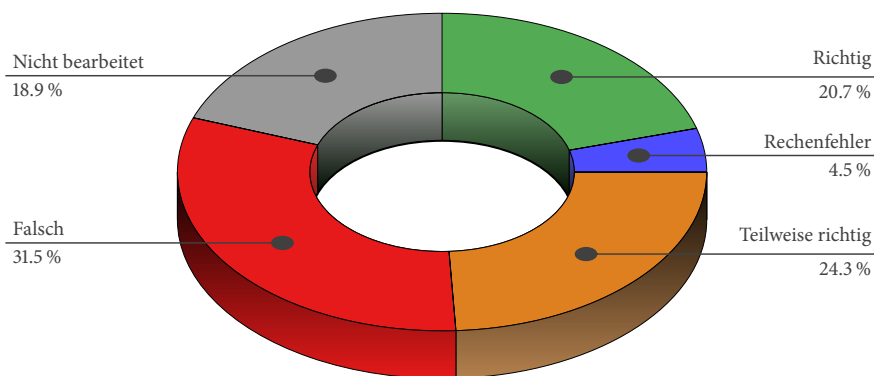


Tabelle 7.10: Bearbeitung von Aufgabe 10 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 45.5 | 9.1 | 9.1 | 36.4 | 0 |
| LA Real | 11.1 | 22.2 | 11.1 | 44.4 | 22.2 |
| BA Mathe | 11.1 | 0 | 11.1 | 44.4 | 33.3 |
| BA Info (M) | 21.4 | 0 | 28.6 | 42.9 | 7.1 |
| BA Info | 29.2 | 4.2 | 29.2 | 20.8 | 16.7 |
| BA IC / MES | 13.6 | 2.3 | 29.5 | 27.3 | 27.3 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Die Bearbeitung der Aufgabe wurde mit Kategorie *Teilweise richtig* kodiert, wenn zumindest eine der beiden Teilaufgaben richtig bearbeitet wurde. Die Kategorie *Rechenfehler* wurde vergeben, wenn beide Teilaufgaben bis auf kleinere Rechenfehler richtig bearbeitet wurden.

Aufgabe 11

Geben Sie die Gleichung der Gerade an, die durch die Punkte (11, 7) und (23, 13) geht.

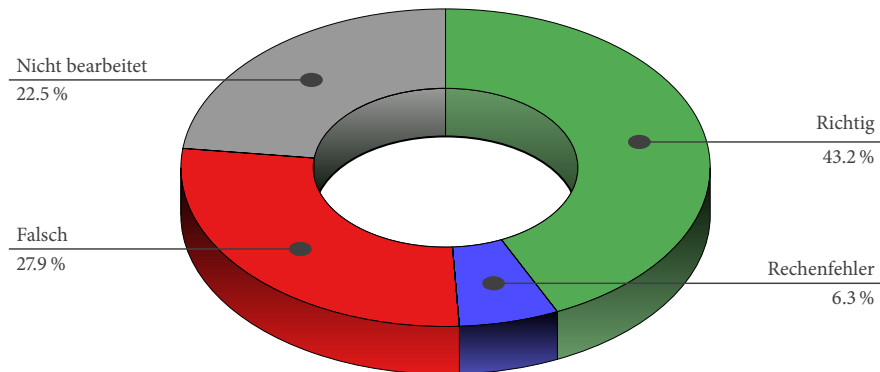


Tabelle 7.11: Bearbeitung von Aufgabe 11 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 45.5 | 18.2 | 0 | 27.3 | 9.1 |
| LA Real | 33.3 | 0 | 0 | 44.4 | 22.2 |
| BA Mathe | 44.4 | 0 | 0 | 44.4 | 11.1 |
| BA Info (M) | 35.7 | 14.3 | 0 | 28.6 | 21.4 |
| BA Info | 62.5 | 4.2 | 0 | 16.7 | 16.7 |
| BA IC / MES | 36.4 | 4.5 | 0 | 27.3 | 31.8 |

Aufgabe 12

Die Kosten, um einen schweren LKW mit konstanter Geschwindigkeit $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren zu lassen, werden auf $2 + \frac{v^2}{200}$ Euro pro Stunde geschätzt. Zeigen Sie, dass es bei einer Reise von 100 km am günstigsten ist, den LKW mit einer konstanten Geschwindigkeit von $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren zu lassen.

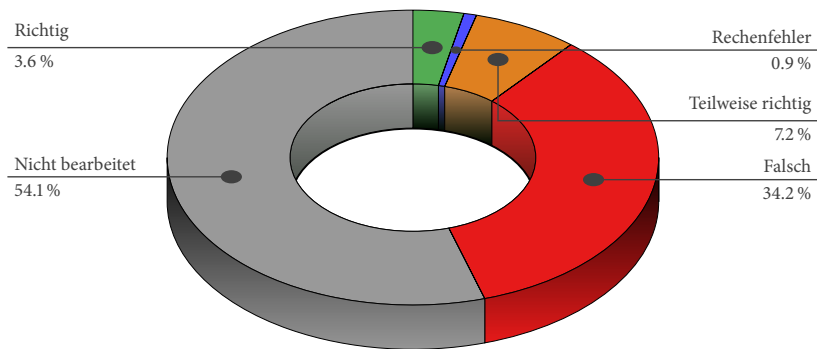


Tabelle 7.12: Bearbeitung von Aufgabe 12 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|-------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 9.1 | 9.1 | 9.1 | 36.4 | 36.4 |
| LA Real | 0 | 0 | 0 | 44.4 | 55.6 |
| BA Mathe | 0 | 0 | 0 | 22.2 | 77.8 |
| BA Info (M) | 7.1 | 0 | 21.4 | 21.4 | 50.0 |
| BA Info | 4.2 | 0 | 4.2 | 29.2 | 62.5 |
| BA IC / MES | 2.3 | 0 | 6.8 | 40.9 | 50.0 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

Bearbeitungen wurden der Kategorie „Teilweise Richtig“ zugeordnet, falls zumindest die Kostenfunktion

$$\text{KOSTEN INSGESAMT} = \text{KOSTEN PRO STUNDE} \times \text{ZEIT IN STUNDEN}$$

richtig aufgestellt wurde.

Aufgabe 13

Überprüfen Sie, ob folgendes Gleichungssystem in \mathbb{R} lösbar ist und geben Sie ggf. eine Lösung an!

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2\end{aligned}$$

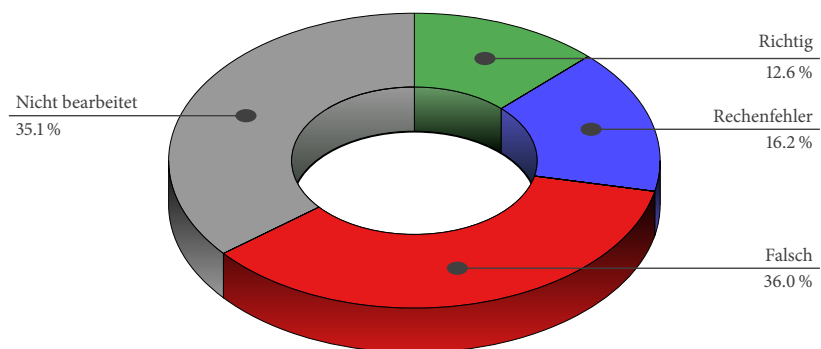


Tabelle 7.13: Bearbeitung von Aufgabe 13 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 18.2 | 18.2 | 0 | 27.3 | 36.4 |
| LA Real | 22.2 | 22.2 | 0 | 11.1 | 44.4 |
| BA Mathe | 11.1 | 11.1 | 0 | 44.4 | 33.3 |
| BA Info (M) | 21.4 | 21.4 | 0 | 35.7 | 21.4 |
| BA Info | 4.2 | 16.7 | 0 | 50.0 | 29.2 |
| BA IC / MES | 11.4 | 13.7 | 0 | 34.1 | 40.9 |

Aufgabe 14

Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

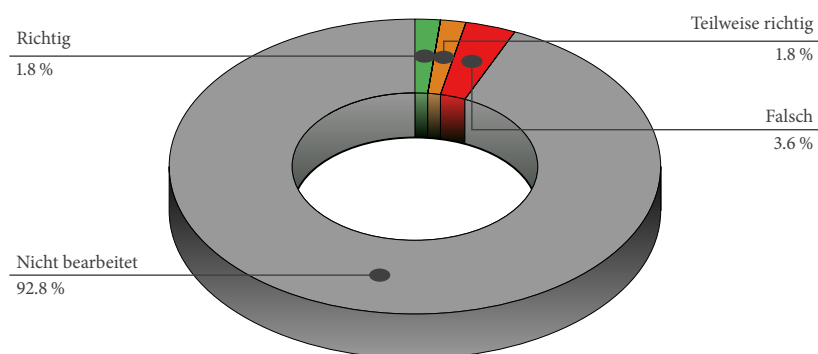


Tabelle 7.14: Bearbeitung von Aufgabe 14 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 0 | 0 | 9.1 | 0 | 90.9 |
| LA Real | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| BA Mathe | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| BA Info (M) | 0 | 0 | 0 | 14.3 | 85.7 |
| BA Info | 4.2 | 0 | 0 | 8.3 | 87.5 |
| BA IC / MES | 2.3 | 0 | 2.3 | 0 | 95.5 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien:

Die Bearbeitung wurde der Kategorie *Teilweise richtig* zugeordnet, wenn zumindest eine der beiden Aufgaben richtig bearbeitet wurde.

Aufgabe 15

Charakterisieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

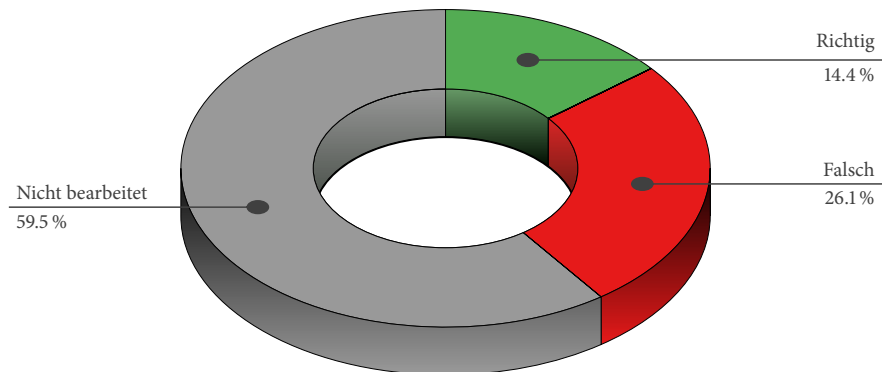


Tabelle 7.15: Bearbeitung von Aufgabe 15 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 9.1 | 0 | 0 | 54.5 | 36.4 |
| LA Real | 0 | 0 | 0 | 33.3 | 66.7 |
| BA Mathe | 0 | 0 | 0 | 22.2 | 77.8 |
| BA Info (M) | 35.7 | 0 | 0 | 14.3 | 50.0 |
| BA Info | 20.8 | 0 | 0 | 12.5 | 66.7 |
| BA IC/MES | 11.4 | 0 | 0 | 29.5 | 59.1 |

Aufgabe 16

Erläutern Sie den Unterschied zwischen Differenzenquotient und Differentialquotient.
Veranschaulichen Sie den Differenzenquotient an unten abgebildeter Funktion!

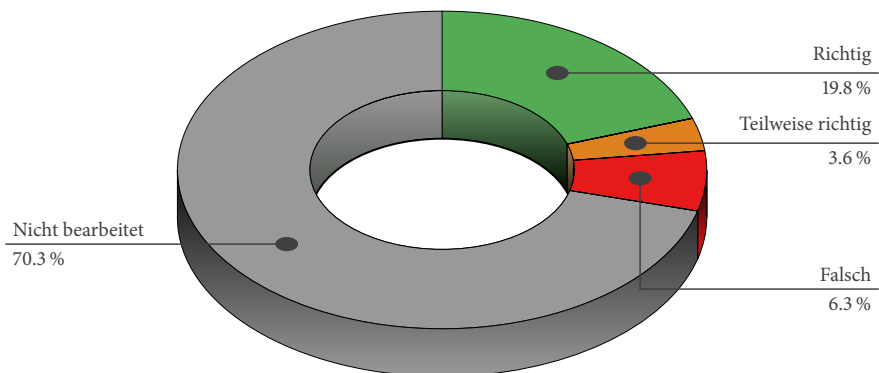
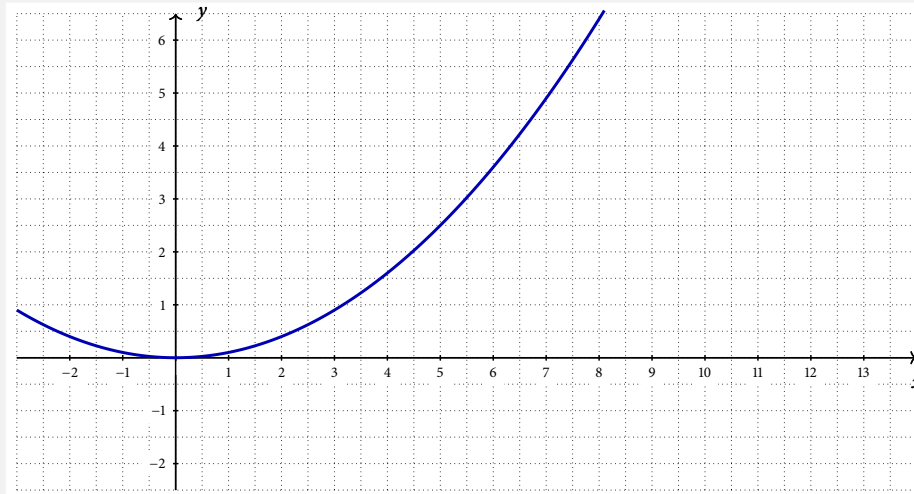


Tabelle 7.16: Bearbeitung von Aufgabe 16 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 27.3 | 0 | 9.1 | 27.3 | 36.4 |
| LA Real | 11.1 | 0 | 0 | 0 | 88.9 |
| BA Mathe | 22.2 | 0 | 0 | 0 | 77.8 |
| BA Info (M) | 14.3 | 0 | 7.1 | 7.1 | 71.4 |
| BA Info | 33.3 | 0 | 0 | 4.2 | 62.5 |
| BA IC / MES | 13.6 | 0 | 4.5 | 4.5 | 77.3 |

Aufgabe 17

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.

- Erläutern Sie die geometrische Bedeutung der ersten Ableitung!
- Berechnen Sie die Ableitungsfunktion von f mit Hilfe des Differentialquotienten mit der h -Methode.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f an der Stelle $x = 3$.

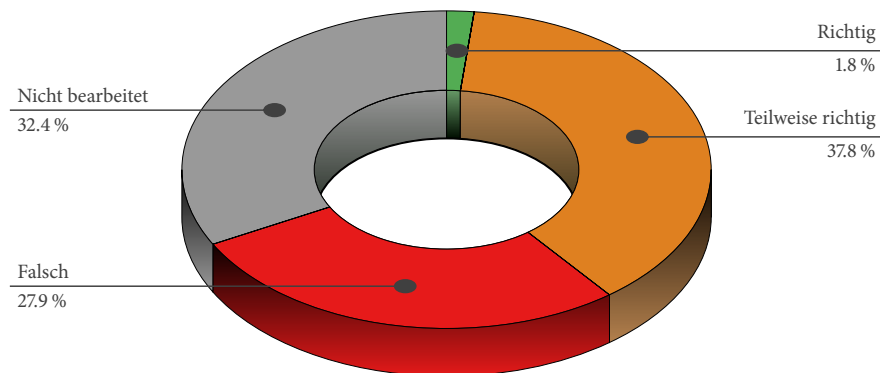


Tabelle 7.17: Bearbeitung von Aufgabe 17 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 9.1 | 0 | 27.3 | 45.5 | 18.2 |
| LA Real | 0 | 0 | 11.1 | 44.4 | 44.4 |
| BA Mathe | 0 | 0 | 11.1 | 33.3 | 55.6 |
| BA Info (M) | 0 | 0 | 64.3 | 7.1 | 28.6 |
| BA Info | 4.2 | 0 | 54.2 | 16.7 | 25.0 |
| BA IC / MES | 0 | 0 | 34.1 | 31.8 | 34.1 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien:

Die Bearbeitung wurde der Kategorie *Teilweise Richtig* zugeordnet, wenn zwei der drei Teilaufgaben richtig beantwortet werden konnte.

Aufgabe 18

Berechnen Sie die erste Ableitung:

(a) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$

(b) $f(x) = x \sin(x)$

(c) $f(x) = e^{-3x+4}$

(d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

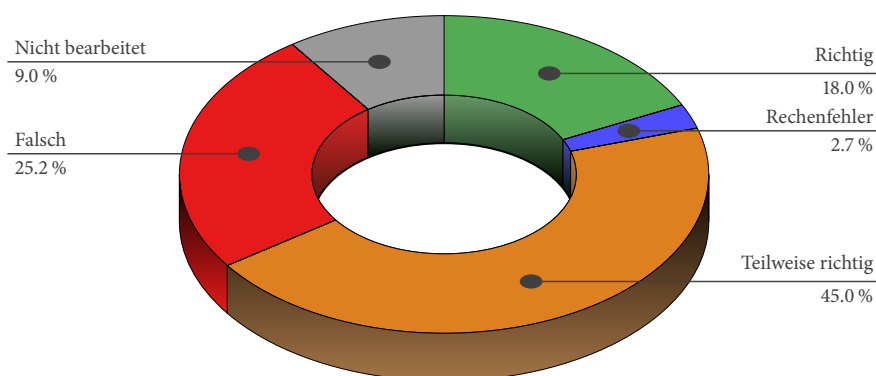


Tabelle 7.18: Bearbeitung von Aufgabe 18 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 54.5 | 27.3 | 18.2 | 0 | 0 |
| LA Real | 0 | 0 | 55.6 | 33.3 | 11.1 |
| BA Mathe | 11.1 | 0 | 55.6 | 11.1 | 22.2 |
| BA Info (M) | 7.1 | 0 | 64.3 | 21.4 | 7.1 |
| BA Info | 29.2 | 0 | 45.8 | 20.8 | 4.2 |
| BA IC / MES | 11.4 | 0 | 40.9 | 36.4 | 11.4 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien:

Die Bearbeitung wurde als *Teilweise Richtig* eingestuft, wenn zwei oder drei der vier Teilaufgaben fehlerfrei gelöst wurden.

Ergebnisse je Teilaufgabe:

Nachfolgend ist für jede Teilaufgabe die Verteilung auf die Bewertungskategorien angegeben.

Dabei wurden die Kategorien *Richtig* sowie *Rechenfehler* zusammengefasst:

(1) Teilaufgabe (a):

| Richtig (+ RF) | Falsch | Nicht bearbeitet |
|----------------|--------|------------------|
| 91.9 % | 3.6 % | 4.5 % |

(2) Teilaufgabe (b):

| Richtig (+ RF) | Falsch | Nicht bearbeitet |
|----------------|--------|------------------|
| 30.6 % | 48.6 % | 20.7 % |

(3) Teilaufgabe (c):

| Richtig (+ RF) | Falsch | Nicht bearbeitet |
|----------------|--------|------------------|
| 53.2 % | 23.4 % | 23.4 % |

(4) Teilaufgabe (d):

| Richtig (+ RF) | Falsch | Nicht bearbeitet |
|----------------|--------|------------------|
| 34.2 % | 40.5 % | 25.2 % |

Aufgabe 19

Berechnen Sie

(a) $\int_2^3 3x^2 dx$

(b) $\int_1^3 e^{x-1} dx$

(c) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

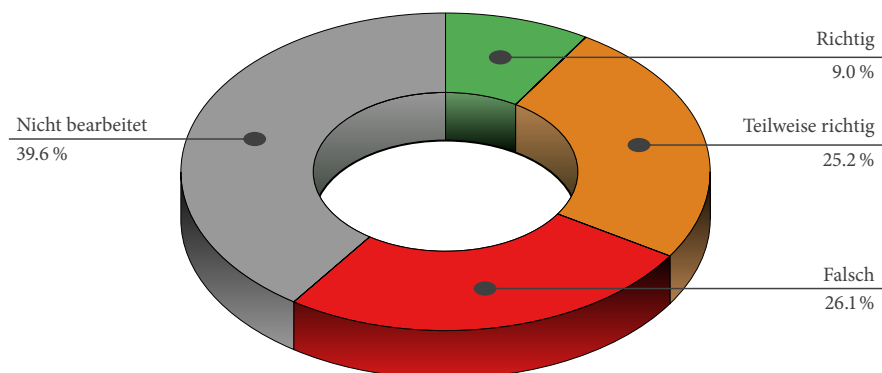


Tabelle 7.19: Bearbeitung von Aufgabe 19 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 45.5 | 0 | 45.5 | 0 | 9.1 |
| LA Real | 0 | 0 | 11.1 | 33.3 | 55.6 |
| BA Mathe | 22.2 | 0 | 33.3 | 11.1 | 33.3 |
| BA Info (M) | 0 | 0 | 42.9 | 35.7 | 21.4 |
| BA Info | 8.3 | 0 | 29.2 | 29.2 | 33.3 |
| BA IC / MES | 2.3 | 0 | 13.6 | 29.5 | 54.5 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien:

Die Bearbeitung wurde als *Teilweise Richtig* eingestuft, wenn zwei der drei Aufgaben fehlerfrei gelöst wurden.

Ergebnisse je Teilaufgabe:

Nachfolgend ist für jede Teilaufgabe die Verteilung auf die Bewertungskategorien angegeben:

(1) Teilaufgabe (a):

| Richtig | Falsch | Nicht bearbeitet |
|---------|--------|------------------|
| 36.0 % | 27.0 % | 36.9 % |

(2) Teilaufgabe (b):

| Richtig | Falsch | Nicht bearbeitet |
|---------|--------|------------------|
| 30.6 % | 19.8 % | 49.5 % |

(3) Teilaufgabe (c):

| Richtig | Falsch | Nicht bearbeitet |
|---------|--------|------------------|
| 10.8 % | 14.4 % | 74.8 % |

Aufgabe 20

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

- | | | | |
|-----|--|-------------------------------|---------------------------------|
| (a) | Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x^2 + y^2 = (x - y)(x + y)$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (b) | Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(e^x)^2 = e^{x^2}$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (c) | Sei $x \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt $\ln(x \cdot x) = 2 \ln x$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (d) | Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt $\ln(a + b) = \ln a \cdot \ln b$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (e) | Sei $x > 0$. Dann gilt $e^{\ln x} = x$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (f) | Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\ln(e^x) = x$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (g) | Es gilt $\sin(\pi) = 0$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (h) | Es gilt $\cos(2\pi) = 1$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (i) | Es gilt $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (j) | Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt $\frac{2}{x} = 2x^{-1}$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |
| (k) | Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$. | <input type="checkbox"/> Wahr | <input type="checkbox"/> Falsch |

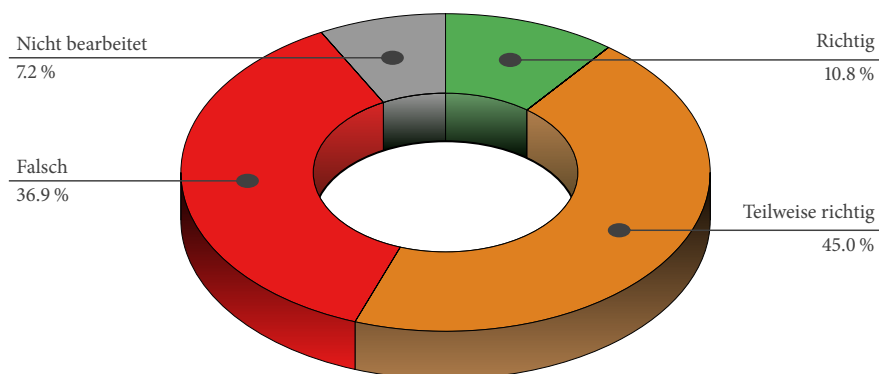


Tabelle 7.20: Bearbeitung von Aufgabe 20 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 9.1 | 0 | 63.6 | 27.3 | 0 |
| LA Real | 0 | 0 | 33.3 | 66.7 | 0 |
| BA Mathe | 11.1 | 0 | 44.4 | 33.3 | 11.1 |
| BA Info (M) | 14.3 | 0 | 35.7 | 28.6 | 21.4 |
| BA Info | 25.0 | 0 | 41.7 | 33.3 | 0 |
| BA IC / MES | 4.5 | 0 | 47.7 | 38.6 | 9.1 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien:

Die Bearbeitung der Aufgabe wurde der Kategorie *Richtig* zugeordnet, falls höchstens eine Behauptung falsch angekreuzt wurde. Wurden mehr als eine aber höchstens 5 Behauptungen falsch angekreuzt, wurde die Bearbeitung der Kategorie *Teilweise Richtig* zugewiesen.

Aufgabe 21

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}.$$

Skizzieren Sie die Funktion f in nachfolgendes Koordinatensystem!

Hinweis: Berechnen Sie die Grenzwerte von f an den Definitionslücken und im Unendlichen!

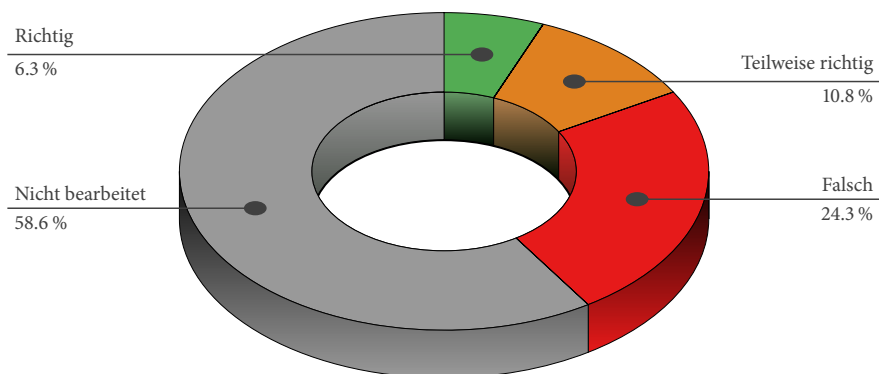


Tabelle 7.21: Bearbeitung von Aufgabe 21 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent)

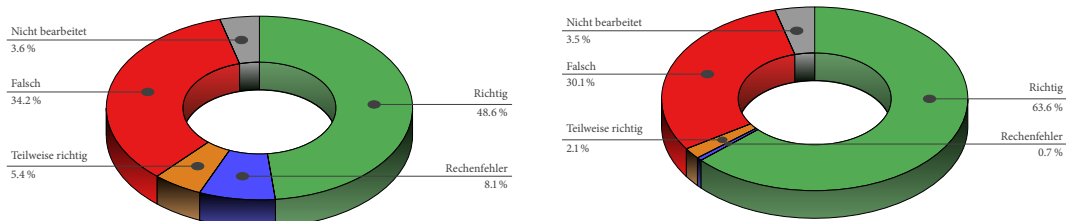
| | Richtig | Rechenfehler | Teilw. Richtig | Falsch | Nicht bearb. |
|--------------------|---------|--------------|----------------|--------|--------------|
| LA Gym | 9.1 | 0 | 18.2 | 45.5 | 27.3 |
| LA Real | 0 | 0 | 11.1 | 44.4 | 44.4 |
| BA Mathe | 0 | 0 | 22.2 | 22.2 | 55.6 |
| BA Info (M) | 14.3 | 0 | 21.4 | 0 | 64.3 |
| BA Info | 12.5 | 0 | 4.2 | 20.8 | 62.5 |
| BA IC / MES | 2.3 | 0 | 6.8 | 25.0 | 65.9 |

Anmerkung zu den Bewertungskategorien

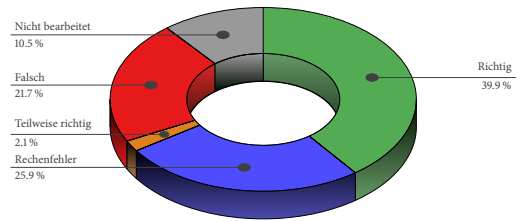
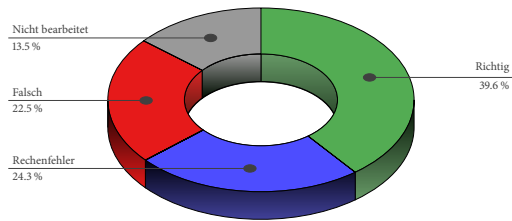
Die Bearbeitung der Aufgabe wurde der Kategorie *Teilweise Richtig* zugeordnet, wenn die Nullstellen sowie Polstellen richtig berechnet wurden, die Skizze allerdings fehlerhaft war.

7.3 Einordnung der Ergebnisse von FHM-1 durch FHM-2

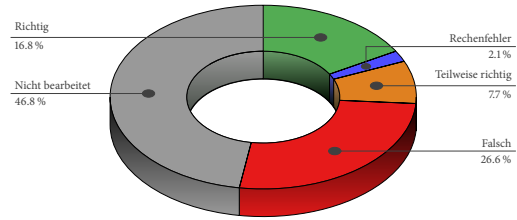
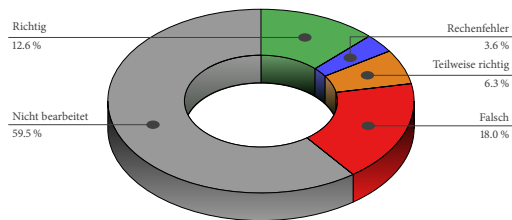
Wie bereits in Abschnitt 6.2 beschrieben, wurde der FHM ein Jahr später erneut durchgeführt. Die Auswertung von FHM-2 dient vor allem dazu, die Ergebnisse von FHM-1 besser einordnen zu können, da die Teilnehmerzahl mit $N = 111$ vergleichsweise niedrig ist.

Aufgabe 1

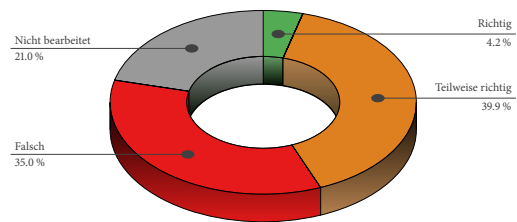
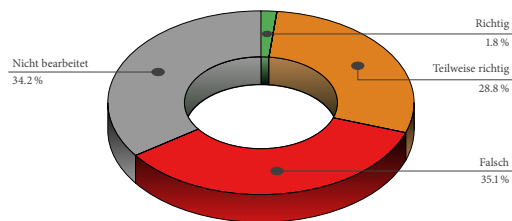
Aufgabe 2



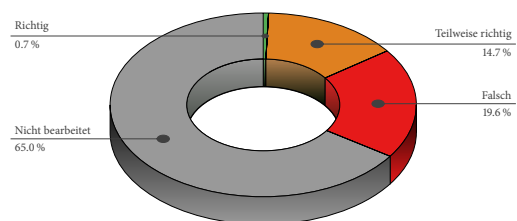
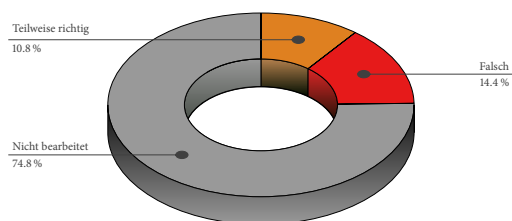
Aufgabe 3



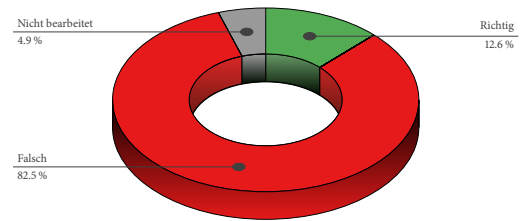
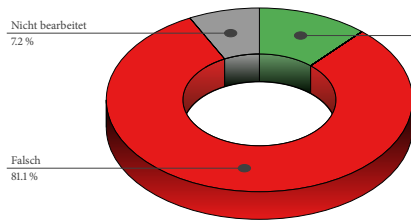
Aufgabe 4



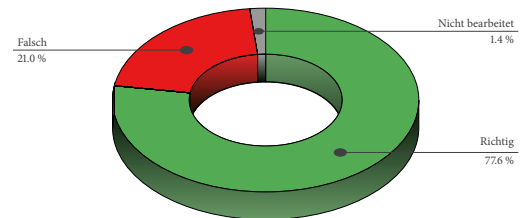
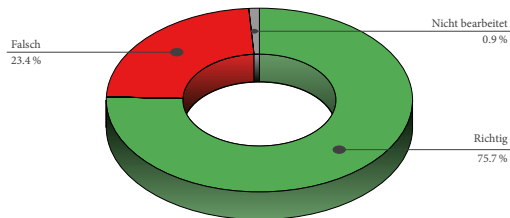
Aufgabe 5



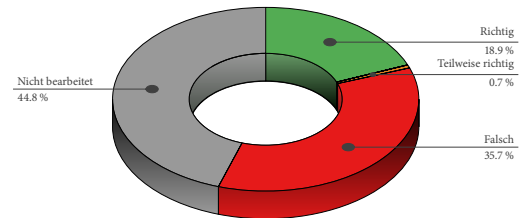
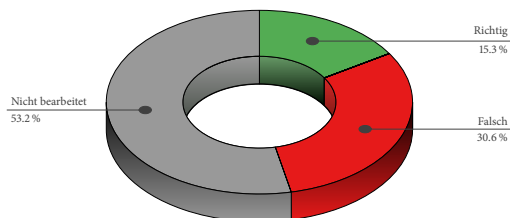
Aufgabe 6



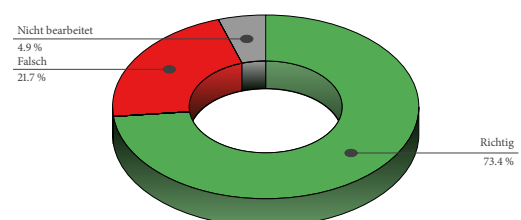
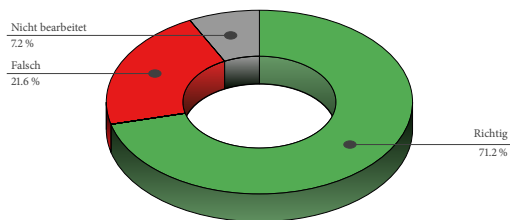
Aufgabe 7



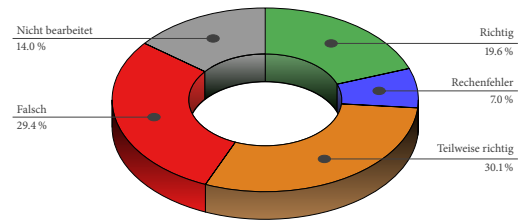
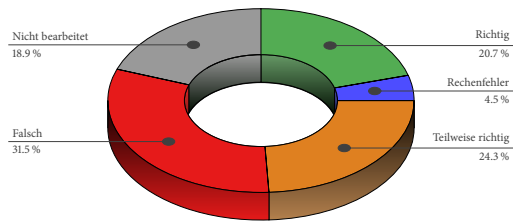
Aufgabe 8



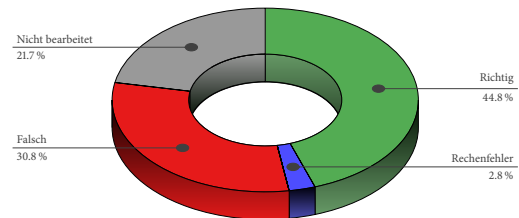
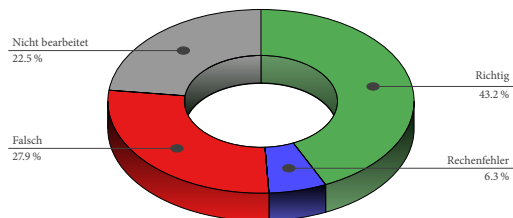
Aufgabe 9



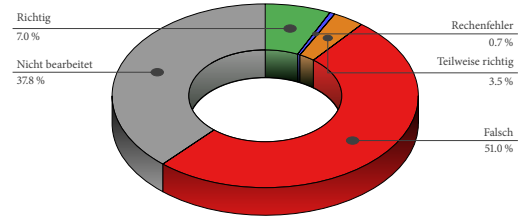
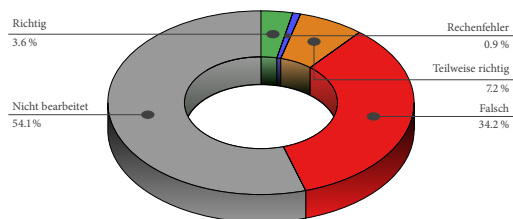
Aufgabe 10



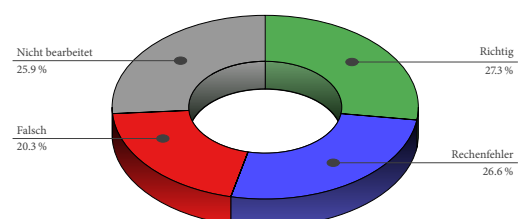
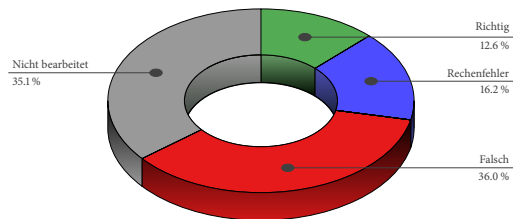
Aufgabe 11



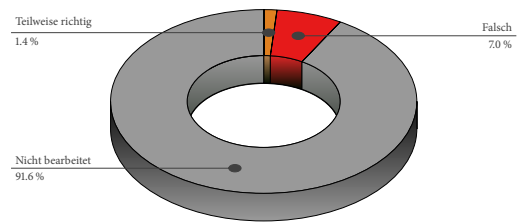
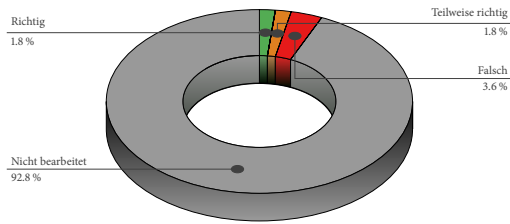
Aufgabe 12



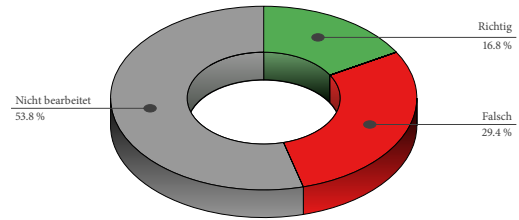
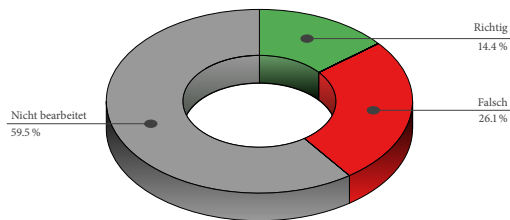
Aufgabe 13



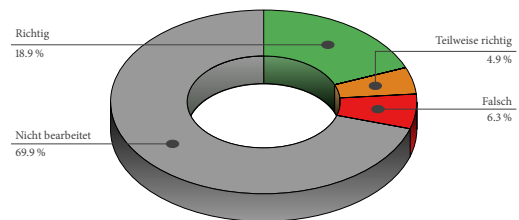
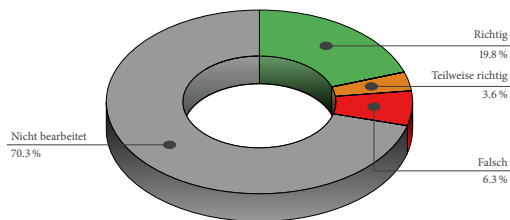
Aufgabe 14



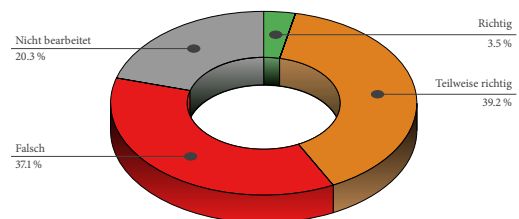
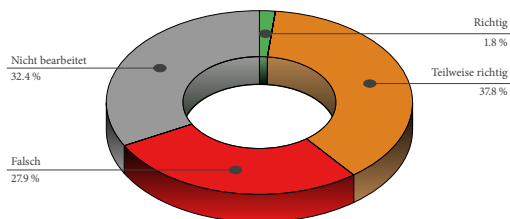
Aufgabe 15



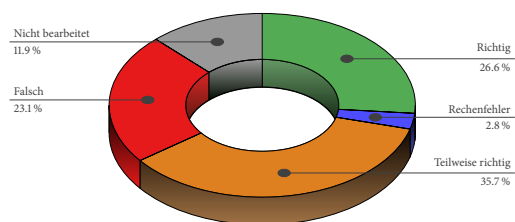
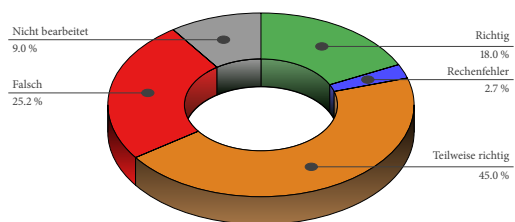
Aufgabe 16



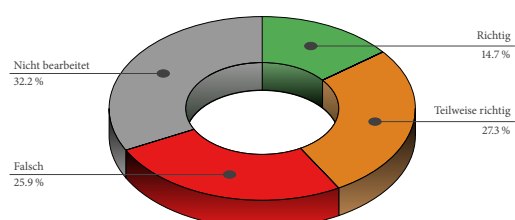
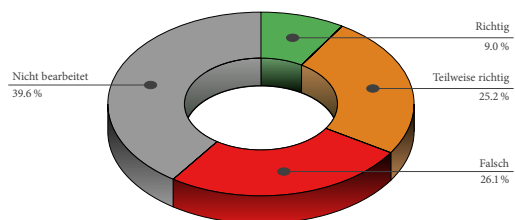
Aufgabe 17



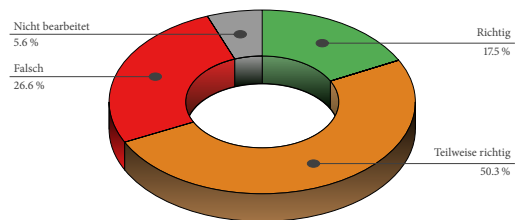
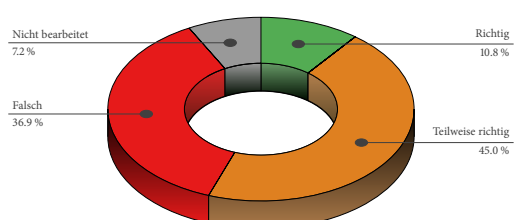
Aufgabe 18



Aufgabe 19



Aufgabe 20



Aufgabe 21

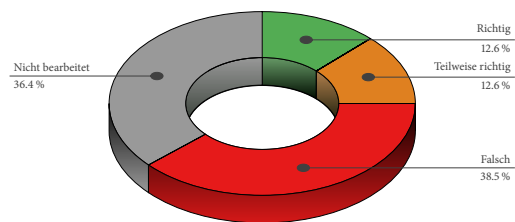
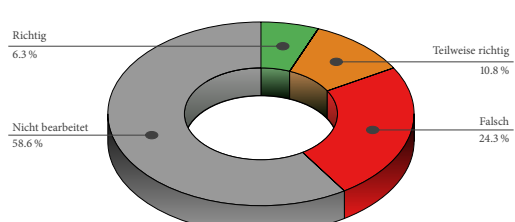


Abbildung 7.2: Vergleich der Ergebnisse je Aufgabe von FHM-1 (links) und FHM-2 (rechts).

Vergleicht man die Auswertung von FHM-1 (links) und FHM-2 (rechts), ergeben sich bei jeder Aufgabe nahezu exakt die gleichen Diagramme, d.h. FHM-2 bestätigt die durch FHM-1 erhaltenen Ergebnisse. Folglich werden die Ergebnisse von FHM-1 und FHM-2 als repräsentativ für die Kenntnisse und Fertigkeiten der Studienanfängerinnen und -anfänger der Fakultät für Informatik und Mathematik der Universität Passau in den in Abschnitt 6.1 beschriebenen Kategorien angesehen.

7.4 Vergleich der FHM-Ergebnisse mit den Erwartungen der Dozierenden

Die Antworten der einzelnen Dozierenden zu den 21 Aufgaben des FHM sind in Tabelle 7.22 dargestellt. Bei Betrachtung der einzelnen Werte fällt auf, dass D06 insgesamt bei fast allen Aufgaben eine deutlich geringere Prozentzahl angegeben hat und somit den Durchschnitt insgesamt nach unten zog. Die Aufgaben 1, 9 und 11 erhielten mit einigem Abstand die besten Einschätzungen, gefolgt von den Aufgaben 7, 10 und 13 mit immerhin noch über 60 %. Vor allem bei den Aufgaben 9 und 10 kamen vermehrt Kommentare, dass dies mittlerweile absolute Standardaufgaben in Bezug auf das Abitur sind. Auffällig ist auch die niedrige Einschätzung von Aufgabe 15 und 19. Bei Aufgabe 15, die eine Charakterisierung des Begriffs „Lineare Unabhängigkeit“ forderte, wurde diese niedrige Einschätzung damit begründet, dass der Begriff in der Oberstufe zwar ein Thema sei, allerdings die wenigsten Studienanfängerinnen und -anfänger eigenständig eine sinnvolle Charakterisierung des Begriffs formulieren könnten. Etwas verwunderlich ist die geringe Prozentzahl bei Aufgabe 19. Alle drei Aufgaben sind ohne partielle Integration bzw. Integration durch Substitution und folglich mit dem gelernten Abiturstoff lösbar. Abbildung 7.3 zeigt hierzu jeweils einen Auszug aus zwei Abituraufgaben, die starke Ähnlichkeit mit Teilaufgabe (b) bzw. (c) besitzen. Die Aufgabe aus dem Jahr 2013 kann mittels „Raten“ einer Stammfunktion auch ohne partielle Integration gelöst werden – ebenso wie Aufgabe 19 (b) des FHM. Die zweite Aufgabe behandelt den Spezialfall

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\ln |f(x)| \right]_a^b .$$

Abiturprüfung 2013, Bayern, Analysis, AG I, Teil 2

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto 2x \cdot e^{-0.5x^2}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f .

...

Aufgabe 1

(a) ...

(d) Der Graph von f , die x -Achse und die Gerade $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}^+$ schließen für $0 \leq x \leq u$ ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(u)$ ein.

Zeigen Sie, dass $A(u) = 2 - 2e^{-0.5u^2}$ gilt. Geben Sie $\lim_{u \rightarrow +\infty} A(u)$ an und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Abiturprüfung 2012, Bayern, Analysis, AG I, Teil 2

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{2e^x}{e^x + 9}$ mit Definitionsbereich \mathbb{R} . Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f .

...

Aufgabe 1

(a) ...

(e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 4$ einschließt.

Abbildung 7.3: Aufgaben ehemaliger Mathematik-Abiturprüfungen mit Relevanz zu Aufgabe 19.

Trotz der hohen Relevanz der Integralrechnung in der Sekundarstufe II überrascht einerseits die schlechte Einschätzung der Dozierenden, andererseits jedoch noch viel mehr die schlechte Bearbeitung mit nur 11.9 % richtigen Lösungen. Die Dozierenden begründen ihre schlechte Einschätzung damit, dass ihrer Erfahrung nach Integrationstechniken kaum beherrscht würden.

Vergleicht man die Einschätzung der Dozierenden mit den tatsächlichen Ergebnissen (Tabelle 7.23) stellt man fest, dass die Dozentinnen und Dozenten den Kenntnisstand der Studienanfängerinnen und -anfänger besser einschätzen als er tatsächlich ist. Lediglich bei den Aufgaben 7 und 15¹ erzielten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer am FHM ein besseres Ergebnis als vermutet.

¹ Bleiben Rechenfehler unberücksichtigt, auch noch Aufgabe 2.

Tabelle 7.22: Ergebnisse des FHM-D (in %)².

| Aufgabe | D01 | D02 | D03 | D04 | D05 | D06 | D07 | Ø |
|---------|------|-----|-----|-----|------|-----|-----|------|
| 1 | 60 | 100 | 75 | 80 | 80 | 50 | 85 | 75.7 |
| 2 | 80 | 90 | 40 | 25 | 70 | 10 | 25 | 48.6 |
| 3 | 40 | 60 | 30 | 20 | 70 | 10 | 25 | 36.4 |
| 4 | 60 | 30 | 60 | 70 | 70 | 10 | 60 | 51.4 |
| 5 | 15 | 50 | 70 | 20 | 40 | 5 | 60 | 37.1 |
| 6 | 5 | 60 | 10 | 20 | 50 | 20 | 50 | 30.7 |
| 7 | 60 | 90 | 90 | 50 | 90 | 25 | 50 | 65.0 |
| 8 | 10 | 80 | 0 | 80 | 50 | 5 | 25 | 35.7 |
| 9 | 70 | 90 | 80 | 70 | 90 | 50 | 80 | 75.7 |
| 10 | 80 | 60 | 70 | 70 | 85 | 15 | 80 | 65.7 |
| 11 | 95 | 90 | 80 | 80 | 80 | 40 | 90 | 79.3 |
| 12 | 5 | 60 | 20 | 40 | 40 | 10 | 50 | 32.1 |
| 13 | 50 | 90 | 50 | 60 | 90 | 20 | 60 | 60.0 |
| 14 | k.A. | 70 | 0 | 5 | 50 | 30 | 15 | 28.3 |
| 15 | 0 | 20 | 10 | 20 | 10 | 10 | 10 | 11.4 |
| 16 | 10 | 70 | 30 | 60 | k.A. | 5 | 75 | 41.7 |
| 17 | 10 | 40 | 30 | 40 | 40 | 15 | 30 | 29.3 |
| 18 | 10 | 90 | 80 | 60 | 50 | 10 | 80 | 54.3 |
| 19 | 5 | 30 | 0 | 5 | 70 | 0 | 50 | 17.1 |
| 20 | 10 | 70 | 20 | 5 | 70 | 0 | 50 | 32.1 |
| 21 | 40 | 80 | 60 | 30 | 20 | 50 | 50 | 47.1 |

Tabelle 7.23: Vergleich der Einschätzungen durch die Dozierenden mit den tatsächlichen Ergebnissen³(in %).

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Vermutet (Ø) | 75.7 | 48.6 | 36.4 | 51.4 | 37.4 | 30.7 | 65.0 | 35.7 | 75.7 | 65.7 | 79.3 |
| Richtig | 56.1 | 39.8 | 14.7 | 3.0 | 0.4 | 12.2 | 76.7 | 17.1 | 72.3 | 20.2 | 44.0 |
| Richtig mit RF | 60.5 | 64.9 | 17.6 | 3.0 | 0.4 | 12.2 | 76.7 | 17.1 | 72.3 | 25.9 | 48.6 |

| Aufgabe | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Vermutet (Ø) | 32.1 | 60.0 | 28.3 | 11.4 | 41.7 | 29.3 | 54.3 | 17.1 | 32.1 | 47.1 |
| Richtig | 5.3 | 20.0 | 0.9 | 14.5 | 19.4 | 2.7 | 22.3 | 11.9 | 14.2 | 9.5 |
| Richtig mit RF | 6.1 | 39.3 | 0.9 | 14.5 | 19.4 | 2.7 | 25.1 | 11.9 | 14.2 | 9.5 |

²D01 bzw. D05 gaben bei Aufgabe 14 bzw. 16 keine Prozentzahl an. D01 begründete das damit, dass laut D01 konkrete Determinanten in der Schule nicht berechnet werden. D05 gab an, dass die Bezeichnung „Differentialquotient“ nur noch an der Schule vorkommt, eine Einschätzung der Aufgabe blieb aus.

³Dabei wurden die Ergebnisse von FHM-1 und FHM-2 gemittelt.

Besonders stark ist die Diskrepanz bei den Aufgaben 4, 5, 12, 14 und 17. Bei Aufgabe 4 gab etwa D04 folgende Einschätzung ab: „Das Hautproblem ist die Umformung zu einer quadratischen Gleichung. Wenn das gelingt, schlägt die Mitternachtsformel wieder zu“. Trotz dieser Problematik gab D04 an, dass 70 % diese Aufgabe richtig lösen könnten. Tatsächlich überprüften lediglich 3 % der Studierenden, ob es sich bei den Umformungen tatsächlich um Äquivalenzumformungen handelt (vgl. Abschnitt 7.2). Ein ähnliches Bild zeigte sich bei Aufgabe 5. Auch hier zweifelten die Dozierenden daran, dass die logarithmischen Rechengesetze den meisten Studierenden bekannt seien, dennoch trauten sie im Schnitt knapp 40 % der Studierenden zu, die Aufgabe richtig zu lösen. Tatsächlich konnten dies nur 0.4 %. Auch die Aufgabe 12 mit dem Trucking-Cost-Problem erhielt eine eher pessimistische Einschätzung: „Da muss man denken“ (D03), „Eigentlich ist auch dies eine der typischen 'Modellierungsaufgaben' aus dem Abitur. Da man hier aber die Begriffe Geschwindigkeit / Zeit / Distanz gut verstanden haben muss, fällt das Ergebnis wohl eher nicht so gut aus wie das Abitur“ (D04). Dennoch lag das hypothetisch angenommene Ergebnis um etwa das 6-fache über dem tatsächlichen Resultat. Obwohl Determinanten nicht mehr explizit im gymnasialen Lehrplan vorkommen, schätzen die Dozierenden die korrekte Bearbeitung der Aufgabe im Durchschnitt auf etwa 30 %. Bei Aufgabe 17 wurde angemerkt, dass dies zwar Standardabiturstoff sei, der eigentlich beherrscht werden sollte, aber Erläuterungen und die 'h-Methode' große Hürden darstellen würden. Dennoch fiel das Ergebnis auch hier noch deutlich schlechter aus, als gedacht.

7.5 Vergleich der Ergebnisse von FHM-1 und FHM-2 mit ähnlichen Studien

Wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, beinhaltet der FHM Aufgaben aus Studien, die national sowie international durchgeführt wurden. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse des FHM-1 bzw. FHM-2 mit den Ergebnissen anderer Studien verglichen.

Zunächst wird ein Blick auf die bereits erwähnte Studie von Kajander & Lovric (2005) geworfen, die im Zeitraum von 2001-2003 ebenfalls eine Befragung zum Hintergrundwissen in Mathematik an der McMaster-Universität in Kanada durchführten. Eines ihrer Ziele war, einen Vergleich resp. eine Einordnung der sog. 'double cohort' zu erhalten. Durch massive Änderungen am

Sekundarstufenlehrplan (Umstellung von fünf auf vier Jahren) erwarteten die Universitäten im Jahr 2003 angehende Studierende aus zwei Jahrgängen. Diese Umstellung ist vergleichbar mit der Umstellung vom neunjährigen Gymnasium auf das G8. Aus diesem Test wurden die Aufgaben 3, 4, 5 (a), 6, 9, 10 und die ersten zwei Behauptungen in Aufgabe 20 übernommen. Die dritte Behauptung in Aufgabe 20 ähnelt stark der Aufgabe 1 (c) des MBQ. Folglich werden auch die Ergebnisse dieser beiden Aufgaben gegenübergestellt. Die Originalfragen des MBQ befinden sich im Anhang von Kajander & Lovric (2005). In Bezug auf die Aufgaben, bei denen sich die Ergebnisse der 5-Year-Cohort und der 4-Year-Cohort nicht wesentlich unterscheiden, werden im Folgenden die Ergebnisse der 4-Year-Cohort angegeben.

Im MBQ konnten Aufgabe 3 68.4 % lösen, im FHM-1 waren dies lediglich 12.6 %. Auch ohne Berücksichtigung von Rechenfehlern werden nur 16.2% „richtige“ Lösungen erreicht. Hier zeigen sich beträchtliche Unterschiede zu den Ergebnissen des MBQ.

Bei Aufgabe 4 zeigt sich ein ähnliches Bild: Im MBQ konnten diese Aufgabe 79.8 % richtig lösen, im FHM-1 waren dies lediglich 1.8 %. Lässt man auch hier die fehlende Kontrolle der Lösungen außer Acht und lässt weiter sogar kleine Rechenfehler zu, erhält man nur 30.6 % „richtige“ Lösungen.

Auch beim Lösen der logarithmischen Gleichung aus Aufgabe 5 (a) liefert der FHM-1 ein deutlich schlechteres Ergebnis als der MBQ. Die Aufgabe konnte im FHM-1 kein Teilnehmer komplett richtig lösen. Weiter ermittelten lediglich 7.2 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer die beiden (Schein-)Lösungen $x_1 = -8$ und $x_2 = 1$, ohne zu überprüfen, ob diese tatsächlich Lösungen der logarithmischen Gleichung sind. Kajander & Lovric (2005) erhielten durch den MBQ 11.4 % richtige Lösungen, wobei von der 5-Year-Cohort sogar 22.3 % die Aufgabe korrekt lösen konnten.

Eine konträre Situation ergibt sich bei Aufgabe 6. Hier ist das Ergebnis des FHM-1 mit 11.7 % richtigen Lösungen sogar etwas positiver als beim MBQ mit 5.3 %.

Auch beim Skizzieren der quadratischen Funktion in Aufgabe 9 liefert der FHM-1 mit 71.2 % ein etwas besseres Ergebnis als die 4-Year-Cohort des MBQ mit 57.9 %. Die 5-Year-Cohort liefert hingegen mit 73.0 % ein nahezu identisches Ergebnis wie der FHM-1.

Aufgabe 10 (a) lösten 36.0 % der Teilnehmer am FHM-1 korrekt. Lässt man kleinere Rechenfehler zu, sind es 44.1 %. Bei Teilaufgabe (b) sind es 28.8 % bzw. mit kleineren Rechenfehlern 39.6 %. Das Ergebnis im MBQ ist für Teilaufgabe (a) mit 41.2 % recht ähnlich, für Teilaufgabe

(b) mit 65.8 % deutlich höher.

Die erste Behauptung von Aufgabe 20 beantworteten im MBQ 86.0 % richtig. Beim FHM-1 gaben 61.3 % die korrekte Antwort. Auch bei der zweiten Behauptung fallen die Ergebnisse von FHM-1 mit 49.5 % richtigen Antworten gegenüber dem MBQ 80.7 % deutlich ab. Bei Behauptung 3, die mit Aufgabe 1 (c) des MBQ vergleichbar ist, stehen 63.1 % beim FHM-1 54.4 % beim MBQ gegenüber.

Von einem ähnlichen Ergebnis berichtet auch ein Artikel von Büning (2004). Ausgehend von „Horror Meldungen über schlechte Mathematikkenntnisse von deutschen Schülern und Schülerinnen der verschiedenen Schultypen durch die Presse“ führte er einen Mathematiktest während des Brückenkurses an der Freien Universität Berlin durch. Auch dieser Test umfasste Aufgaben der Bereiche Klammerrechnung, Bruchrechnung, Binomische Formeln, Potenz- und Wurzelrechnung, einfache lineare und quadratische Gleichungen und Ungleichungen. Es werden zwei Aufgaben herausgegriffen, die sich gut mit Aufgaben des FHM-1 in Beziehung setzen lassen. Die erste Aufgabe fragt nach den Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichungen $26 + 3(x - 5) > 7(x + 1)$ und $x^2 - 9 < 0$. Die erste Aufgabe wurde von 8.3 %, die zweite von 5.7 % der Teilnehmer richtig bearbeitet. 12.4 % konnten die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ fehlerfrei berechnen. Die Durchfallquote des gesamten Tests lag bei 72.5 %. Das Ergebnis von Aufgabe 2 des FHM-1 fällt im Bezug auf die Studie von Büning mit 39.6 % richtigen Lösungen deutlich besser aus. Lässt man auch hier kleinere Rechenfehler unberücksichtigt, konnten die Aufgabe sogar 63.9 % richtig bearbeiten.

Wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, wurde für das Gebiet der Anwendungsorientierten Problemstellungen die *Trucking Cost Problem*-Aufgabe aus einer Studie von Klymchuk et al. (2010) herangezogen (Aufgabe 12). In ihrer Studie konnten nur 4 von 92 Studenten einer Universität in Neuseeland und 6 von 105 Studenten einer Universität in Deutschland die Kostenfunktion

$$\text{KOSTEN INSGESAMT} = \text{KOSTEN PRO STUNDE} \times \text{ZEIT IN STUNDEN}$$

korrekt aufstellen. In FHM-1 ermittelten 13 Teilnehmerinnen und Teilnehmer diese Kostenfunktion, vier davon bearbeiteten die Aufgabe anschließend vollständig richtig.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird noch auf eine vergleichbare Studie von 2006 in Australien Bezug genommen. Auch hier mussten angehende Studierende an der Southern-Queensland-

Universität Fragen zu grundlegenden Rechenfertigkeiten, Arithmetik, Bruchrechnung, algebraischen Gleichungen und Funktionen beantworten. Es zeigte sich ebenfalls ein enttäuschendes und besorgniserregendes Ergebnis. So konnten 42 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Lösungen der quadratischen Gleichung $3x^2 + 4x - 8 = 0$ nicht berechnen. Die Ungleichung $|3x + 3| < 6$ wurde nur von 21.8 % richtig gelöst, der Graph zu einer gegebenen quadratischen Funktion wurde von 70.0 % richtig angegeben. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass besonders Aufgaben aus den Gebieten Algebra, Funktionen und Trigonometrie ernüchternde Ergebnisse lieferten (Cretchley et al., 2007).

7.6 Zusammenfassung und Diskussion

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die Ergebnisse des FHM mit drei ähnlichen Studien verglichen. Am besten gelingt ein Vergleich mit dem MBQ von Kajander & Lovric (2005), da hieraus einige Aufgaben übernommen wurden. Hier zeigen sich bei fast allen Aufgaben ähnliche Ergebnisse. Nur in der Kategorie *Vertrautheit mit transzendenten Funktionen (Exponential-, Logarithmus-, Trigonometrische Funktionen)* fallen die Ergebnisse des FHM im Vergleich zum MBQ deutlich ab.

Insgesamt – auch im Vergleich mit anderen Studien – lässt sich festhalten, dass die Auswertung des FHM sehr ähnliche Ergebnisse liefert wie vergleichbare nationale sowie internationale Studien.

Besonders auffällig ist die Tatsache, dass nahezu keiner der insgesamt 254 Teilnehmer an FHM-1 und FHM-2 für die in Aufgabe 4 und 5 erhaltenen Werte für x auch überprüfte, ob dies tatsächlich Lösungen der angegebenen Gleichungen sind. Der Fokus lag hier fast ausschließlich auf dem Umformen und Anwenden der Lösungsformel, ohne sich darüber Gedanken zu machen, ob die Umformungen zulässig bzw. die erhaltenen Werte in der Definitionsmenge liegen. Diese Erkenntnis unterstreicht auch eine Studie von Klymchuk et al. (2011), in der sich ebenfalls beim Lösen von logarithmischen Gleichungen herausstellte, dass ein Überprüfen der erhaltenen Werte als nicht wichtig erachtet wurde. Als möglicher Grund für diese Problematik lässt sich der in Kapitel 3 herausgearbeitete Charakter Schulmathematik festhalten, wie Engelbrecht (2010) treffend beschreibt (S. 143):

Most students' perception of being successful in maths in school does not involve much inquiry but mostly just the application of different methods.

Obwohl in der Schule hauptsächlich das Rechnen und Anwenden von bestimmten Routinen im Vordergrund steht, ist es besorgniserregend, dass die angehenden Studenten dennoch massive Defizite in elementaren Kenntnissen und Fertigkeiten mit an die Universität bringen. Ähnlich argumentiert auch Riedl (2015), der sich in seiner Dissertation mit den fachmathematischen Kenntnissen von Lehramtsstudierenden auseinandersetzt (S. 266):

Die Leistungen der Studierenden im mathematischen Vortest aus der Schule sind auf schwachen Niveau, wenn man bedenkt, dass alle Testpersonen die allgemeine bzw. fachgebundene Hochschulreife besitzen. [...] Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass ein solides Basiswissen in der Schulmathematik für das spätere Unterrichten in der Klasse (unabhängig vom Schultyp) eine unverzichtbare Voraussetzung ist; aufgrund der erzielten Leistungen der drei Testgruppen [...] muss in Frage gestellt werden, ob diese Basiskenntnisse vorliegen.

Es wurde national sowie international versucht, dieser Problematik mit der Schaffung von Vor- bzw. Brückenkursen oder sogar mit einer Neukonzeption der Studieneingangsphase und Entwicklung flankierender Unterstützungsmaßnahmen (Ableitinger et al., 2013) entgegenzuwirken. Betrachtet man die theoretischen Überlegungen in Kapitel 3, sollten die Brückenkurse allerdings verstärkt dazu genutzt werden, den Studienanfängerinnen und -anfängern den Übergang von den ersten beiden Welten (Schulmathematik) hin zur dritten Welt (Hochschulmathematik) zu erleichtern. Dies impliziert die Behandlung spezifischer Arbeitsweisen der Mathematik sowie Thematisierung neuer Fertigkeiten (Grundprinzipien der Logik, Umgang mit Symbolen und Formeln, Beweisprinzipien, etc.). Wird im Brückenkurs rein das Basiswissen aus der Schulmathematik wiederholt – was aufgrund der präsentierten Ergebnisse sicherlich zwingend erforderlich wäre –, besteht die Gefahr, dass den Studienanfängerinnen und -anfängern dadurch der Übergang in die Welt der Hochschulmathematik erschwert wird. Das reine Wiederholen von Basiskenntnissen aus der Schule suggeriert, dass es an der Universität in ähnlicher Weise weitergeht, wie Mathematik von den Studierenden an der Schule wahrgenommen wurde. Im Rahmen des ersten Interviewtermins der im dritten Teil der Arbeit vorgestellten EmMa-Studie wurde hier vermehrt genannt: 'Lösen von Aufgaben, bei denen vorher schon klar war, was man machen muss', 'Durchrechnen von Aufgaben, die man in der Schule schon gemacht hat', 'Wenig lernen für gute Noten'.

Zusammenfassend lässt sich konstatieren, dass sich auch bei den Studienanfängerinnen und -anfängern an der FIM der Universität Passau erhebliche Schwächen und Mängel in Basiskenntnissen aus der Schule zeigen. In Abschnitt 5.1 wurde bereits dargestellt, dass genau dieses mathematische Vorwissen ein möglicher Bedingungsfaktor für den Studienerfolg sein kann. In Bezug auf die Lehramtsstudierenden erscheinen diese Defizite im Hinblick auf ihren späteren Unterricht äußerst problematisch. Eine Vermittlung bzw. Wiederholung zentraler Basiskenntnisse erscheint folglich unabdingbar. Inwieweit der Mathematik-Brückenkurs dafür herangezogen werden sollte, erscheint aufgrund der theoretischen Überlegungen zu den Übergangsschwierigkeiten zweifelhaft. Diese Problematik wird in der abschließenden Diskussion am Ende der Arbeit noch einmal aufgegriffen.

TEIL DREI

BEGRIFFSBILDUNG IN DER
STUDIENEINGANGSPHASE

KAPITEL 8 Methodisches Vorgehen und Durchführung der Studie

*„Der relativ offene Zugang qualitativer Forschung verhilft zu einer möglichst authentischen Erfassung der Lebenswelt der Betroffenen sowie deren Sichtweisen und liefert Informationen, die bei einer quantitativen Vorgehensweise auf Grund ihrer Standardisierung of verloren gehen.“
(Mayer, 2013, S. 25)*

Überblick:

| | |
|--|-----|
| 8.1 Zur Erhebung von Vorstellungen | 152 |
| 8.1.1 Wahl der qualitativen Methode: Leitfadengestützte Interviewbefragung | 154 |
| 8.1.2 Entwicklung des Kategorienschemas | 156 |
| 8.2 Anmerkungen zum Transkribieren | 159 |
| 8.3 Durchführung der Studie | 160 |
| 8.3.1 Datenerhebung | 160 |
| 8.3.2 Stichprobe | 161 |

Dieses Kapitel beschreibt das methodische Vorgehen und die Durchführung der EmMa-Studie. Dabei werden in Abschnitt 8.1 zunächst allgemein Überlegungen zur Erhebung von Vorstellungen angeführt. Weiter wird die Wahl des Erhebungsinstruments (Unterabschnitt 8.1.1) begründet sowie die Entwicklung des zur Auswertung verwendeten Kodierleitfadens (Unterabschnitt 8.1.2) beschrieben. In Abschnitt 8.2 finden sich Anmerkungen zum Transkribieren der Interviews. Abschließend beschreibt Abschnitt 8.3 die Durchführung der Datenerhebung sowie die Stichprobe der Untersuchung.

8.1 Zur Erhebung von Vorstellungen

In Anlehnung an Hank (2013), die sich mit Konzeptwandelprozessen im Anfangsunterricht Chemie beschäftigt hat, erfolgt an dieser Stelle eine allgemeine Auseinandersetzung mit methodischen Fragen bei der Erhebung von Vorstellungen. Hank (2013) führt an, dass die Eignung von Erhebungsinstrumenten ein zentraler Punkt in der Diskussion um Schülervorstellungen in der fachdidaktischen Forschung sei, „da die Methode der Erhebung die ermittelten Vorstellungen der Lernenden beeinflussen kann“ (S. 101). Das Teilprojekt EmMa zielt darauf ab, Vorstellungen von Studienanfängerinnen und -anfängern zu zentralen mathematischen Konzepten festzuhalten. Folglich ist es auch hier zwingend erforderlich, sich Gedanken über geeignete Erhebungsinstrumente zu machen. Vorgehensweisen, die im Hinblick auf die Erhebung von studentischen Vorstellungen in Frage kommen, sind etwa Gesprächsverfahren (Einzel- oder Gruppeninterviews), Paper-and-Pencil-Verfahren (Fragebögen mit offenem oder geschlossenem Frageformat, Concept Maps) oder Beobachtungsverfahren (teilnehmende Beobachtung). Nach Liu (2001) und Marín Martínez & Jiménez Gomez (2001) wird eine Validität der Ergebnisse dadurch verbessert, wenn zwei oder mehrere Methoden kombiniert werden.

Nach Hank (2013) können bei der Erhebung von Vorstellungen folgende Schwierigkeiten auftreten:

Kontextabhängigkeit: Vorstellungen von Menschen konstruieren sich immer dem aktuellen Kontext angemessen. Folglich können die gewonnenen Vorstellungen nicht alleine der Person zugeschrieben werden, sondern müssen gleichzeitig auch als Produkte der Umgebung gesehen werden. So nehmen etwa Kontext, Gesprächspartner oder Aufgabenstellung Einfluss auf die geäußerten Vorstellungen (Roth, 2008). Ähnlich argumentieren auch Vinner (1983) sowie Tall (1991c) im Hinblick auf die Erhebung des *Concept Image*, die in diesem Fall von einem „*temporary concept image*“ bzw. „*evoked concept image*“ sprechen. In einer speziellen Situation werden oft nur Teile des mentalen Modells aktiviert. Folglich lässt sich das gesamte *Concept Image* nicht umfassend durch die Beobachtung einer einzelnen Situation mit zugehörigen Kontext beschreiben.

Erhebung widersprüchlicher Vorstellungen: Die Anwendung mehrerer Methoden kann bei einer Versuchsperson zur Ermittlung widersprüchlicher Vorstellungen führen (Duit et al.,

1996). Speziell im Hinblick auf den Versuch, über mehrere Befragungszeitpunkte die Entwicklung von Vorstellungen zu beschreiben, bedeutet dies, dass „eher ein kontextbezogenes Wahlverhalten als wirkliche Veränderungen des konzeptuellen Status“¹ zu beobachten ist.

Lern- oder Prüfungssituation: Eine Befragungs- oder Interviewsituation kann zu einer Lern- oder Prüfungssituation werden, „bei der möglichst objektiv richtige Antworten gewählt werden, unabhängig davon, ob diese der Vorstellungswelt der Versuchsperson entsprechen oder nicht“ (Hank, 2013, S. 103). Dies führt zu einer Einschränkung der Validität.

Auswertung und Kategorisierung: Auch in diesem Schritt des Forschungsprozesses können Schwierigkeiten auftreten. Zum einen können Erwartungen und Vorstellungen der auswertenden Person Einfluss darauf nehmen, was in den studentischen Äußerungen gesehen wird: „*In any situation, the conceptions a student displays at a given time are a mixture of the student's true conceptions and the researcher's creation and interpretation*“ (Duit et al., 1996, S. 55). Weiter bedeutet die Fähigkeit, Fachbegriffe und Definitionen richtig nennen zu können, nicht automatisch, über angemessene Vorstellungen zu verfügen. „Umgekehrt muss 'falschen' Antworten nicht zwingend ein Fehlkonzept zugrunde liegen: Die unkorrekte Antwort kann auch dadurch entstanden sein, dass beim Lernenden noch keine kohärente Vorstellung vorliegt und die Art der Fragestellung ein bestimmtes nebensächliches Detail angesprochen hat, das in dieser Situation zur Äußerung einer Fehlvorstellung führt“ (ebd., S. 104), in Anlehnung an Allen (2010). Weiter können Antworten auch teilweise richtig oder lediglich unvollständig sein.

Aufgrund obiger Überlegungen kann resümierend davon ausgegangen werden, „dass die über eine Befragung erhobenen Daten über Vorstellungen einerseits natürlich von den Vorstellungen der Versuchspersonen selbst, andererseits aber auch vom gewählten Aufgabenformat, der Befragungssituation sowie der Interpretation des Forschers abhängen“ (Hank, 2013, S. 105)². Speziell die unter „Auswertung und Kategorisierung“ genannten Schwierigkeiten spielen in Bezug auf die EmMa-Studie eine entscheidende Rolle. Um das mentale Modell verschiedener Studierender bzw. verschiedene mentale Modelle eines einzelnen Studierenden vergleichen zu können, wird ein einheitliches Kategorienschema benötigt. Aufgrund der vielfältigen Dimensionen des mentalen Modells (vgl. Abbildung 3.7) erscheint ein Schema, das allen Facetten gerecht wird,

¹Zitiert nach Duit & Treagust, 2003, S. 679; ins Deutsche übersetzt von Hank, 2013, S. 103.

²In Anlehnung an Liu (2001) und Caravita (2001)

nur schwer realisierbar. Eine detaillierte Auseinandersetzung mit dieser Problematik findet sich in Abschnitt 8.1.2. Zunächst wird in Abschnitt 8.1.1 die Wahl des Erhebungsinstrumentes erläutert.

Die durch oben genannte Faktoren bedingte Unschärfe muss zudem bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden.

8.1.1 Wahl der qualitativen Methode: Leitfadengestützte Interviewbefragung

Gemäß der Gegenstandsangemessenheit der Methode und Theorie hat sich die Wahl der Methode an Forschungsgegenstand sowie Fragestellung zu orientieren. Die empirische Untersuchung verfolgt grob gesehen zwei Ziele. Einerseits soll mehr über die mentalen Modelle zu mathematischen Begriffen bei Studienanfängerinnen und -anfängern in Erfahrung gebracht werden. Hierbei stehen insbesondere die Ausprägung und Qualität des im Abschnitt 3.2.3.1 erläuterten *Concept Image* zu ausgewählten mathematischen Begriffen sowie Fehlvorstellungen im Forschungsfokus. Andererseits zielt die Studie darauf ab, durch die Befragung der gleichen Stichprobe zu verschiedenen Zeitpunkten die Entwicklung der Begriffsbildung in der Studieneingangsphase zu beschreiben. Hierzu soll eine hierarchische Kategorisierung der studentischen Antworten in Bezug auf deren wissenschaftliche Qualität vorgenommen und die längsschnittliche Entwicklung dieser Vorstellungen an einer größeren Stichprobe von Studienanfängerinnen und -anfängern beobachtet werden.

Hieraus ergeben sich folgende Forderungen an das Erhebungsinstrument: um eine Vergleichbarkeit zwischen den Messzeitpunkten sicherzustellen, soll das Instrument bei allen Befragungszeitpunkten 2 bis 4 eingesetzt werden können. Weiter muss es die Entwicklung des mentalen Modells über einen längeren Zeitraum (ersten zwei Semester) abbilden können. Die größte Forderung an das Instrument ist, die Vorstellungen sowie Qualität dieser individuellen Denkstrukturen hinsichtlich der zentralen mathematischen Konzepte so detailliert und umfassend wie möglich zu erfassen. Gemäß dem angestrebten Ziel, die Qualität individueller mentaler Modelle zu erfassen, ergibt sich die Notwendigkeit eines problemzentrierten, offenen und interaktiven Vorgehens (Rutke, 2007).

Aufgrund dieser Forderungen wurde entschieden, das mentale Modell der Studierenden mittels leitfadengestützter Interviewbefragung zu ermitteln. Flick (2000) unterscheidet verschiedene

Typen des Leitfadeninterviews, u.a. das problemzentrierte Interview (vgl. etwa Witzel, 1982; Witzel, 1985). Mayring (2016) verwendet den Begriff „problemzentriertes Interview“ synonym zu „Leitfadeninterview“ und fasst darunter alle Formen offener und halbstrukturierter Befragungen zusammen. Um den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Studie neben den verbalen Äußerungen zudem die Möglichkeit zu bieten, Definitionen aufzuschreiben oder Sachverhalte zu visualisieren, wurde während der Interviewbefragung ein Bearbeitungsbogen bereitgestellt. Dieser wurde aufgrund der Erfahrungen von Interviewtermin 2 überarbeitet und in Bezug auf Interviewtermin 3 und 4 besser strukturiert³. So gab es etwa einen gekennzeichneten Bereich für jeden einzelnen Begriff. Weiter wurde der Bearbeitungsbogen um zwei kurze Anwendungsaufgaben zu Injektivität und Surjektivität ergänzt.

In Abbildung 1.1 im Einführungskapitel wurde der Ablauf der Studie dargestellt. So fand der zweite Interviewtermin – der erste relevante Termin in Bezug auf die EmMa-Studie – rund sieben Wochen nach Studienbeginn statt, der dritte bzw. vierte Termin nach dem ersten Semester bzw. Mitte des zweiten Semesters. Aufgrund der zeitlichen Festsetzung konnten während Interviewtermin 2 und 3 keine Konzepte aus der Analysis thematisiert werden. Hinsichtlich der Entwicklung des mentalen Modells muss sich demnach auf die Konzepte „Injektivität“, „Surjektivität“ sowie „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ beschränkt werden, da nur diese Begriffe Bestandteil aller drei Interviews waren. Zusätzlich wurden an Termin 2 bzw. Termin 4 die Konzepte „Abbildungen“ bzw. „Folgen und Folgenkonvergenz“ thematisiert. Abbildung 8.1 liefert einen Überblick über die jeweils thematisierten mathematischen Konzepte zu den verschiedenen Interviewzeitpunkten.

Die Einstiegsfragen waren jeweils bewusst sehr offen gehalten, etwa „Beschreiben Sie bitte, was Sie sich unter dem Begriff 'Injektivität' vorstellen“. Dadurch wurde den Studierenden überlassen, einen eher formalen, umgangssprachlichen oder visuellen Einstieg in die Thematik zu wählen. Im Laufe des Interviews wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer darum gebeten, die formale Definition des Begriffs auf dem Bearbeitungsbogen festzuhalten. Weiter sollte durch den offenen Einstieg sichergestellt werden, dass sich die Studierenden nicht wie in einer Prüfungssituation vorkommen (vgl. den vorherigen Abschnitt).

Aus der Instrumentauswahl resultierte eine Einschränkung hinsichtlich der Stichprobengröße.

³Einige der Bögen waren sehr unübersichtlich beschrieben und mit Zeichnungen versehen. Dadurch entstanden Probleme, bei der Auswertung die Interviewpassagen den jeweiligen Abschnitten auf dem Bearbeitungsbogen zuzuordnen. Der Bearbeitungsbogen für den vierten Interviewtermin findet sich im Anhang auf Seite 315.

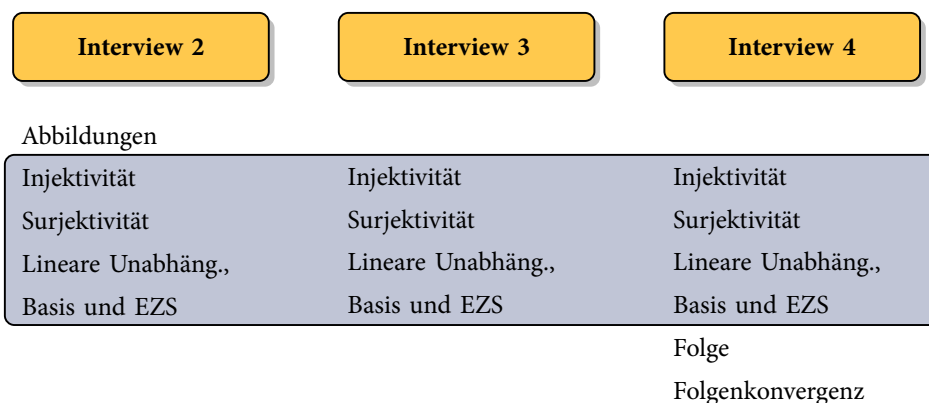


Abbildung 8.1: Übersicht über die in den jeweiligen Interviews thematisierten mathematischen Konzepte.

Das Transkribieren der Interviews und Auswerten dieser Verschriftlichungen bringen einen beträchtlichen Zeitaufwand mit sich, der im vorliegenden Fall von einer Person bewältigt werden musste. Es wurde dennoch versucht, die Stichprobe so groß wie möglich zu halten, um speziell bei der Entwicklung des mentalen Modells auch in kleinem Maße quantitativ argumentieren zu können. Daraus resultierend wurde der Kompromiss eingegangen, die Interviewsequenzen zu den einzelnen mathematischen Begriffen weniger umfangreich als beispielsweise bei Hähnisch (2011) zu gestalten. Dadurch wurde aber mit $N = 31$ eine deutlich größere Probandenanzahl erreicht. Die Stichprobengröße sowie Zusammensetzung findet sich in Abschnitt 8.3.2.

8.1.2 Entwicklung des Kategorienschemas

„How categories are defined (...) is an art. Little is written about it.“

(Krippendorff, 1980, S. 76)

Dieser Abschnitt thematisiert die Entwicklung des Kategorienschemas. Dabei erfolgt eine Unterscheidung hinsichtlich der Bewertung und Klassifikation der mentalen Modelle sowie der Identifizierung von Fehlvorstellungen.

8.1.2.1 Bewertung der mentalen Modelle

In Abschnitt 8.1 wurden verschiedene Faktoren thematisiert, die bei der Erhebung von Vorstellungen eine Rolle spielen. Problematisch ist, dass in einer speziellen Situation auch nur

Teile des mentalen Modells aktiviert werden (Kontextabhängigkeit). Folglich lässt sich das gesamte *Concept Image* nicht umfassend durch die Beobachtung einer einzelnen Situation mit zugehörigen Kontext beschreiben. Im Rahmen der vorliegenden Studie kann somit nur das sog. „*evoked concept image*“ der Studierenden festgehalten werden. Am Ende von Abschnitt 8.1 wurde bereits angedeutet, dass aufgrund der Vielfältigkeit des *Concept Image* ein universelles Kategorienschema, das möglichst allen Facetten des mentalen Modells gerecht wird, nur schwer realisierbar erscheint. Unter Berücksichtigung dieser Problematik wurde versucht, für die Auswertung ein Schema heranzuziehen, welches möglichst viele und besonders wichtige Aspekte des mentalen Modells berücksichtigt. Dieses Schema wird nun genauer beschrieben.

Für die Auswertung des mentalen Modells zu einzelnen mathematischen Begriffen wurde ein Verfahren gewählt, das an die Qualitative Inhaltsanalyse von Mayring (2015) angelehnt ist. Als Analyseeinheit ist jeweils die komplette Schilderung eines Studierenden zu den Fragen bzgl. eines bestimmten Begriffs zu sehen. Da manche Begriffe einen starken Bezug zueinander haben, wurde in diesem Fall überprüft, ob ggf. auch Schilderungen zu einem anderen Konzept in die Analyseeinheit des zu untersuchenden Begriffs aufgenommen werden müssen. Für jede Analyseeinheit wird anschließend ein Summenscore vergeben, welcher die Qualität des mentalen Modells widerspiegelt.

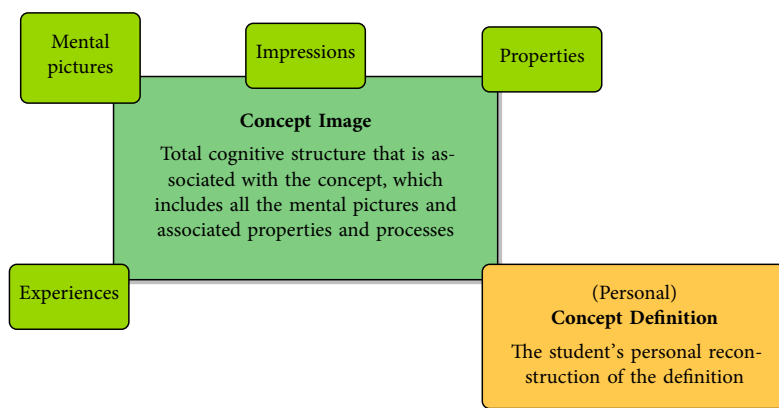


Abbildung 8.2: Dimensionen des *Concept Image* (nach Rösken & Rolka, 2007).

Abbildung 8.2 visualisiert zentrale Bestandteile des *Concept Image* (vgl. Abschnitt 3.2.3.1). Es wird versucht, den verschiedenen Dimensionen des mentalen Modells gerecht zu werden und folglich möglichst viele Facetten zu kodieren. So werden etwa wichtige Eigenschaften

(*Properties*) eines einzelnen Konzepts berücksichtigt, die anschließend mit 0 „Eigenschaft wird aus der Analyseeinheit nicht ersichtlich“ sowie 1 „Eigenschaft wird aus der Analyseeinheit ersichtlich“ kodiert werden. Je nach Konzept werden auch wichtige Facetten aus den Bereichen *Impressions*, *Experiences* sowie *Mental Pictures* mit 0 | 1 kodiert. Diese entstanden primär aus Gesprächen mit Kolleginnen und Kollegen, welche Aspekte in Bezug auf den jeweiligen Begriff für ein konsistentes Begriffsverständnis entscheidend sind.

Bei der Kodierung der ersten Analyseeinheiten wurde festgestellt, dass durch die bisherige Wahl der Codes ein wichtiger Aspekt der Schilderungen der Studierenden unberücksichtigt blieb: Die interne Kohärenz des mentalen Modells. So nannten manche Studierende zwar wichtige Eigenschaften, es war aber oftmals kein oder nur ein sehr schwacher Zusammenhang zwischen diesen erkennbar. Folglich wurde in das Kategorienschema auch der Aspekt „Interne Kohärenz“ mit aufgenommen, der wie folgt kodiert wird:

| | |
|---|---|
| 2 | Die Einzelaspekte des mentalen Modells stehen in starkem Bezug zueinander. Es ist ein konsistentes Begriffsverständnis erkennbar. |
| 1 | Es ist ein Bezug zwischen Einzelaspekten erkennbar, allerdings sind manche Aspekte voneinander losgelöst. |
| 0 | Es ist kein Bezug zwischen den Einzelaspekten erkennbar. |

Für jedes Konzept wurde zudem nach der formalen Definition gefragt, welche nach Rösken & Rolka (2007) ebenfalls Bestandteil des mentalen Modells ist. Diese wurde wie folgt kodiert:

| | |
|---|--|
| 2 | Die Definition ist korrekt und entspricht dem wissenschaftlichen Standard. |
| 1 | Die Definition ist korrekt, in Teilen allerdings unmathematisch. |
| 0 | Die Definition ist falsch oder konnte nicht genannt werden. |

Die Summe der einzelnen Codes liefert insgesamt eine Bewertung des beschriebenen Konzepts. Dieser Wert ermöglicht einerseits einen Vergleich untereinander, andererseits auch einen Vergleich einer einzelnen Person im zeitlichen Verlauf.

Das Kategorienschema hängt natürlich sehr stark vom jeweiligen zu untersuchenden Konzept ab, da sich die Kategorien aus den verschiedenen Bereichen in Abbildung 8.2 je nach Konzept unterscheiden. Folglich werden die Kategorienschemata in den Kapiteln 9 bzw. 11 vor der Darstellung der Ergebnisse zu den einzelnen Konzepten detailliert erläutert.

Im Hinblick auf die Interraterreliabilität wurde die Kodierung der Interviewtranskripte (Termin 2) von einer zweiten, geschulten Raterin vorgenommen. Als Maß für die Übereinstimmung wurde in Bezug auf die 0 | 1-kodierten Kategorien das Cohens Kappa κ und in Bezug auf die 0 | 1 | 2-kodierten Kategorien das gewichtete Cohens Kappa κ_w verwendet. Als Gewichtungsfaktor wurde dabei

$$v_{ij} = (i - j)^2$$

gewählt. Eine detaillierte Erläuterung der Berechnung der beiden Werte findet sich im Anhang auf Seite 320. Die errechneten Kappa-Werte κ bzw. κ_w werden im Anschluss an die Beschreibung der Kategorienschemata der mathematischen Konzepte in Kapitel 9 bzw. Kapitel 11 angegeben.

8.1.2.2 Fehlvorstellungen und formale Fertigkeiten

Neben der Bewertung des mentalen Modells sollen auch Fehlvorstellungen sowie formale Fertigkeiten klassifiziert und erläutert werden. Dadurch lassen sich wichtige Schlüsse für die Lehre ziehen; so können etwa Maßnahmen getroffen werden, um genau diesen Fehlvorstellungen vorzubeugen. Eine Kategorisierung von Fehlvorstellungen erfolgt jeweils induktiv anhand des Datenmaterials und wird ebenfalls in den einzelnen Ergebniskapiteln erläutert.

8.2 Anmerkungen zum Transkribieren

Die Interviews wurden mit der Rekorder-App eines Smartphones aufgenommen und mit Hilfe des Audiotranskriptions-Tools f4⁴ vollständig verschriftlicht. Bei der Fragestellung der vorliegenden Untersuchung steht die inhaltliche Perspektive im Vordergrund. Ziel war es, die Vorstellungen der Studierenden zu einzelnen Begriffen zu erfassen. Folglich wurde bei der

⁴<https://www.audiotranskription.de/f4.htm>

Transkription der Audiodateien das Schriftdeutsch gewählt. Hierbei wird der Dialekt bereinigt, der Stil jedoch nicht geglättet und Satzbaufehler nicht behoben. Sprechpausen werden wie folgt gekennzeichnet: (.), (..) bzw. (...) bedeuten eine Sprechpause von einer, zwei bzw. drei Sekunden. Längere Pausen werden in Sekunden angegeben, z.B. (4). Auf Gestik und Mimik wird nur dann hingewiesen, wenn diese eine besondere Bedeutung in Bezug auf Inhalt oder Verständnis des jeweiligen Zitats hat.

Für die am Gespräch beteiligten Personen werden die Abkürzungen „I“ (Interviewer) und „S_{xy}“ (Student / Studentin *xy*) verwendet. *xy* steht dabei für die Nummer der Studentin bzw. des Studenten (von 01 bis 31). Einschübe, Lachen sowie Anmerkungen und durch Schreiben hervorgerufene Sprechpausen sind in der Form ((...)) angegeben. Das Vorgehen orientiert sich dabei an Dresing & Pehl (2013) sowie Bortz & Döring (2006).

8.3 Durchführung der Studie

In diesem Abschnitt wird der Ablauf der Datenerhebung beschrieben sowie detaillierte Informationen zur Stichprobe und Mortalität präsentiert.

8.3.1 Datenerhebung

Um die Entwicklung des mentalen Modells hinsichtlich zentraler mathematischer Begriffe längsschnittlich nachvollziehen zu können, wurde die Stichprobe, die im nächsten Abschnitt beschrieben wird, zu drei Zeitpunkten befragt (Interviewzeitpunkte 2 bis 4 in Abbildung 1.1 im Einführungskapitel).

Die einzelnen Interviewtermine wurden jeweils via des Webdienstes „Doodle“ mit den Studierenden vereinbart und fanden in einem Büro der Fakultät für Mathematik und Informatik statt. Es wurde jeweils darauf geachtet, dass die Termine der einzelnen Probandinnen und Probanden möglichst nah zusammen lagen, um eine bestmögliche Vergleichbarkeit zu gewährleisten. Die Interviewpassagen, die in Bezug auf die EmMa-Studie Relevanz besitzen, dauerten zwischen 00:06:03 und 00:46:09⁵. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer wurden bereits vor dem

⁵Diese starke Abweichung ergibt sich einerseits daraus, dass bei Termin 4 mehr Begriffe thematisiert wurden als bei Termin 2 bzw. 3. Andererseits gaben manche Teilnehmerinnen und Teilnehmer an, dass sie sich unter

ersten Interviewtermin über das Forschungsprojekt sowie hinsichtlich des Datenschutzes zur Wahrung ihrer Anonymität informiert. Detaillierte Informationen zum Ablauf der einzelnen Interviews finden sich jeweils zu Beginn der nachfolgenden Kapitel.

8.3.2 Stichprobe

Aufgrund der Intention der Studie wurde im Vorfeld der Entschluss gefasst, ausschließlich Studentinnen und Studenten der Studiengänge „Lehramt Gymnasium“, „Bachelor Mathematik“, „Bachelor Informatik mit Schwerpunkt Mathematik“ sowie „Lehramt Realschule“ für die Studie auszuwählen. Studierende dieser Studiengänge haben sich bewusst dazu entschieden, vertiefte bzw. nicht-vertiefte (LA Realschule) Mathematikvorlesungen zu besuchen. Bei den Studiengängen „Bachelor Informatik (sonstiger Schwerpunkt)“, „Bachelor Internet-Computing“ sowie „Bachelor Mobile Eingebettete Systeme“ tritt Mathematik (in speziell dafür konzipierten Veranstaltungen) nur als Begleitfach auf.

Wie bereits in Abschnitt 5.2 beschrieben, war geplant, die Stichprobe für die qualitative Interviewstudie EmMa anhand der Antworten auf die offenen Fragen sowie das Abschneiden beim Fragebogen FHM-1 auszuwählen. Aufgrund der geringen Anzahl der FHM-1-Stichprobe dieser Studiengänge (s. Tabelle 6.1 auf Seite 101) wurde entschieden, alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studiengänge „Lehramt Gymnasium“, „Bachelor Mathematik“ sowie „Lehramt Realschule“ zu fragen, ob sie sich für die Studie zur Verfügung stellen. Weiter wurden aufgrund der Ausgeglichenheit unter den Studiengängen neun der 14 Studenten des Studiengangs „Bachelor Informatik“ ausgewählt.

Tabelle 8.1: Geschlecht, Alter und Abiturnote der Teilnehmer an der EmMa-Studie.

| Studiengang | N | Männl. | Weibl. | Alter | (\bar{x}) | Abiturnote | (\bar{x}) |
|--------------------------|---|--------|--------|-------|---------------|------------|---------------|
| Lehramt Gymnasium | 9 | 3 | 6 | 18-21 | (18.8) | 1.3-3.0 | (1.8) |
| Bachelor Mathematik | 7 | 5 | 2 | 17-27 | (21.9) | 1.2-3.2 | (2.5) |
| Lehramt Realschule | 7 | 3 | 4 | 18-22 | (19.7) | 1.7-3.4 | (2.4) |
| Bachelor Info (SP Mathe) | 8 | 8 | 0 | 18-19 | (18.1) | 1.7-2.9 | (2.2) |

Am dritten Tag des Brückenkurses fand eine kurze Informationsveranstaltung zum Hintergrund und geplanten Ablauf der EmMa-Studie für die ausgewählten Teilnehmer statt. Letztlich

bestimmten Begriffen überhaupt nichts vorstellen können, wodurch sich eine verkürzte Befragungszeit ergab. Die durchschnittliche Interviewdauer lag je nach Termin zwischen 00:20:00 und 00:30:00.

erklärten sich neun der elf Studentinnen und Studenten des Studiengangs „Lehramt Gymnasium“, sieben der neun Studentinnen und Studenten des Studiengangs „Bachelor Mathematik“, sieben der neun Studentinnen und Studenten des Studiengangs „Lehramt Realschule“ sowie acht der neun ausgewählten Studentinnen und Studenten des Studiengangs „Bachelor Informatik mit Schwerpunkt Mathematik“ bereit, an der Studie teilzunehmen. Die Anzahl von 31 Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist im Hinblick auf das Erhebungsinstrument sehr groß, der zeitliche Aufwand wurde aber als noch vertretbar eingestuft. Zur Anonymisierung wurden die Studierenden mit S01 bis S31 nummeriert. Tabelle 8.1 zeigt eine Übersicht über Geschlecht, Alter sowie Abiturnote der für die EmMa-Studie ausgewählten Teilnehmer.

Mortalität

Im Hinblick auf die EmMa-Studie sind erneut nur die Interviewzeitpunkte 2 bis 4 von Relevanz. Am zweiten Interviewtermin nahmen noch 27 der 31 Probandinnen und Probanden teil. Zwei Studierende (Lehramt Gymnasium und Bachelor Mathematik) hatten sich zu diesem Zeitpunkt bereits dazu entschlossen, das Studium abzubrechen, die anderen zwei Studierenden (beide Bachelor Informatik mit Schwerpunkt Mathematik) stellten sich für die Interviews nicht mehr zur Verfügung. Am dritten Termin verblieben noch 21 Teilnehmerinnen und Teilnehmer, da weitere sechs das Mathematikstudium abgebrochen hatten. Bis zum letzten Interviewtermin Mitte des zweiten Semesters brachen weitere fünf Studierende ihr Studium ab; so nahmen hier noch 16 Studierende teil. Die Abbildungen 8.3 bzw. 8.4 visualisieren die Stichprobenmortalität sowie detailliert den „Werdegang“ der einzelnen Teilnehmerinnen und Teilnehmer. Dabei bedeutet in Abbildung 8.4 die Farbe grün „Zum Interview erschienen“, die Farbe orange „Zum Interview erschienen trotz Studienabbruch“ und rot „Nicht zum Interview erschienen“.

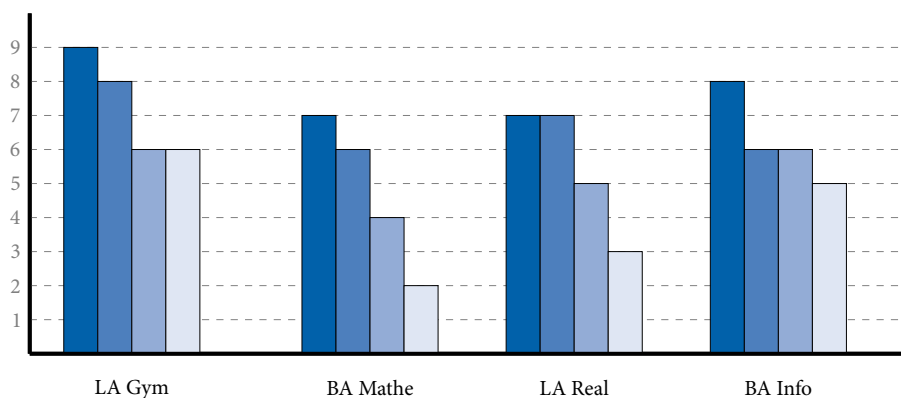


Abbildung 8.3: Visualisierung der Stichprobenmortalität je Studiengang für Interviewzeitpunkte 1 (=dunkelblau) bis 4 (=hellblau).



Abbildung 8.4: Übersicht über Mortalität der Stichprobe.

KAPITEL 9 Ergebnisse: Mentales Modell nach sieben Wochen Mathematikstudium

*„More than two decades have passed since the need was seen for more attention to be paid to the conceptions held by students concerning science content.“
(Marín Martínez & Jiménez Gomez, 2001, S. 663)*

Überblick:

| | | |
|------------|--|-----|
| 9.1 | Aufbau des Interviews | 166 |
| 9.2 | Abbildungen | 167 |
| 9.2.1 | Definition und Vorüberlegungen | 167 |
| 9.2.2 | Kategorienschema | 172 |
| 9.2.3 | Bewertung der mentalen Modelle | 173 |
| 9.2.4 | Fehlvorstellungen | 176 |
| 9.3 | Injektivität und Surjektivität | 182 |
| 9.3.1 | Definition und Vorüberlegungen | 182 |
| 9.3.2 | Kategorienschema | 183 |
| 9.3.3 | Bewertung der mentalen Modelle | 185 |
| 9.3.4 | Fehlvorstellungen | 190 |
| 9.4 | Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem | 200 |
| 9.4.1 | Definition und Vorüberlegungen | 200 |
| 9.4.2 | Kategorienschema | 201 |
| 9.4.3 | Bewertung der mentalen Modelle | 202 |
| 9.4.4 | Fehlvorstellungen | 205 |

Der zweite Interviewtermin¹ fand ca. sieben Wochen nach Studienbeginn im Zeitraum von Ende November bis Mitte Dezember statt. Von den 31 Studierenden des ersten Termins nahmen 27 auch an der zweiten Befragung teil.

9.1 Aufbau des Interviews

Für das Interview wurde ein narrativer Einstieg gewählt. Die Studierenden wurden gebeten, zu schildern, wie sie ihre ersten Wochen im Mathematikstudium erlebt und welche Erfahrungen sie gemacht hätten. Danach wurden Fragen zu ihrer subjektiven Wahrnehmung des Charakters der Mathematik, zu ihrem Selbstkonzept, ihrem Lernverhalten sowie verwendeter Lernstrategien gestellt.

Anschließend rückte das mentale Modell der Studierenden in den Vordergrund. Zu dieser Zeit wurden die Begriffe „Abbildung“, „Injektivität“, „Surjektivität“ sowie „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ sowohl in der vertieften, der nicht-vertieften Vorlesung als auch in den Übungen behandelt. Insofern kann davon ausgegangen werden, dass der genaue Tag des Interviews der Teilnehmerinnen und Teilnehmer keine Relevanz auf die Kenntnisse in diesen Themengebieten hat. Den Studierenden wurde zudem ein Blatt für Skizzierungen zur Verfügung gestellt.

Zunächst wurde der Begriff „Abbildung“ thematisiert. Der Einstieg wurde, wie bereits in Abschnitt 8.1.1 herausgestellt, sehr offen gehalten. Dabei sollten die Studierenden möglichst anschaulich beschreiben, was Sie unter einer Abbildung verstehen. Je nach den Äußerungen der Studierenden wurde der Fokus im Anschluss bewusst auf die Eigenschaften einer Abbildung gelegt und die Frage gestellt, ob Abbildungen bereits in der Schulmathematik vorgekommen sind. Weiter wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer nach den Eigenschaften einer Funktion befragt. Anschließend wurden sie um eine formale Definition einer Abbildung gebeten. Die Interviewsequenzen zu den Konzepten „Injektivität“, „Surjektivität“ und „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ verliefen ähnlich. Auch hier wurde zunächst sehr offen nach einer Beschreibung des jeweiligen Konzepts gefragt. Neben den Eigenschaften wurde in Bezug auf die Begriffe „Injektivität“ und „Surjektivität“ weiter um ein Beispiel resp. Gegenbeispiel gebeten. Abschließend sollte auch hier eine formale Definition der beiden

¹Der erste für die EmMa-Studie relevante Termin.

Begriffe angegeben werden. In Bezug auf das Konzept „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ stand insbesondere auch der Zusammenhang der drei Begriffe im Fokus der Befragung. Zunächst wurde erneut sehr offen danach gefragt, was man sich unter dem Begriff „Lineare Unabhängigkeit“ von drei Vektoren u, v, w im \mathbb{R}^3 vorstellen könne. Im weiteren Verlauf wurde anschließend um eine Beschreibung sowie Abgrenzung der Begriffe „Basis“ und „Erzeugendensystem“, sowie um ein Beispiel für beide Konzepte gebeten. Am Ende sollte eine formale Definition des Begriffs „Lineare Unabhängigkeit“ dargelegt werden.

Bei allen Konzepten wurde bewusst darauf geachtet, dass dem Interview nicht der Charakter einer Prüfung zu eigen wurde, sondern es mehr ein gemeinsames Gespräch über die jeweiligen Begriffe darstellte (vgl. Überlegungen in Abschnitt 8.1).

9.2 Abbildungen

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse der Auswertung zum Abbildungskonzept vorgestellt. Abschnitt 9.2.1 thematisiert zunächst Vorüberlegungen zu diesem Begriff. Weiter wird in Abschnitt 9.2.2 das Kategorienschema (vgl. auch Abschnitt 8.1.2) beschrieben. In Abschnitt 9.2.3 sind die Ergebnisse der Kodierung der mentalen Modelle dargestellt. Abschnitt 9.2.4 enthält eine Klassifikation und Erläuterung von Fehlvorstellungen hinsichtlich des Abbildungskonzepts.

9.2.1 Definition und Vorüberlegungen

Abbildungen sind ein zentraler Bestandteil der Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“. Gleichzeitig nimmt der Abbildungsbegriff in der Studieneingangsphase eine Sonderrolle ein, da er im Gegensatz zu vielen anderen Begriffen bereits in der Schule unter dem Funktionsbegriff vorkommt. Abbildung 9.1 zeigt eine Gegenüberstellung der Definition einer Funktion im Schulbuch (Freytag et al., 2006, S. 30) und der Definition einer Abbildung im Vorlesungsskript.

Die beiden Definitionen unterscheiden sich kaum, beide sprechen von einer eindeutigen Zuordnung aller Elemente einer Menge M zu Elementen einer Menge N . Hier sind bereits zwei wichtige Eigenschaften einer Funktion bzw. Abbildung gekapselt: die Linkstotalität, d.h. alle

Zuordnungen und Funktionen

Eine **Zuordnung** weist jedem Wert aus einer Menge einen Wert oder mehrere Werte aus einer anderen Menge zu.

Wird stets genau ein Wert aus der anderen Menge zugewiesen, so spricht man von einer **eindeutigen Zuordnung** bzw. von einer **Funktion**.

Die **Zuordnungsvorschrift** einer Funktion f gibt an, wie zu jedem Wert x der **Definitionsmenge** D_f der zugehörige Wert y der anderen Menge gefunden wird.

Kurz: $f: x \mapsto y$

Eine **Abbildung** $\varphi: M \rightarrow N$ ist eine Zuordnung, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet (φ : Abbildungsname, M : Definitionsbereich, N : Zielbereich, \rightarrow : Abbildungspfeil).

Ist $a \in M$, so schreiben wir $\varphi(a)$ für **Bildelement** von a unter φ (oder kurz das **Bild** von a unter φ).

Schreibweise:

$$\begin{aligned}\varphi: M &\rightarrow N \\ a &\mapsto \varphi(a)\end{aligned}$$

M heißt **Definitionsbereich** von φ . N heißt **Zielbereich** von φ . $\text{Bild}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in M\}$ heißt das **Bild** von φ und wird mit $\text{Im}(\varphi)$ bezeichnet.

Abbildung 9.1: Gegenüberstellung der Definition einer Funktion im Schulbuch (Fokus Mathematik 8 - Gymnasium Bayern, S. 30) und der Definition einer Abbildung im Vorlesungsskript zur „Linearen Algebra I“.

Elemente der Menge M werden abgebildet, sowie die Rechtseindeutigkeit, d.h. ein Element der Menge M wird auf genau ein Element der Menge N abgebildet. Das Verständnis dieser beiden Begriffe spielt insbesondere für die Begriffe „Injektivität“ und „Surjektivität“ eine wichtige Rolle, die im Anschluss in der Vorlesung behandelt werden. Diese beiden Eigenschaften stellen letztlich nichts anderes als die Umkehrung der Eigenschaften einer Abbildung dar. Surjektivität meint Rechtstotalität, d.h. alle Elemente der Menge N werden durch die Abbildung erreicht oder „getroffen“, Injektivität meint Linkseindeutigkeit, d.h. dass ein Element aus der Menge N von höchstens einem Element der Menge M „getroffen“ wird. Kombiniert man Injektivität und Surjektivität, wird jedes Element der Menge N von genau einem Element der Menge M „getroffen“ und man spricht von Bijektivität. Mit einem fundierten, konsistenten Verständnis des Abbildungsbegriffs legt man folglich bereits die Grundlage für den Aufbau eines mentalen Modells zu den Begriffen „Injektivität“ und „Surjektivität“.

Aufgrund der Behandlung von Funktionen in der Schulmathematik bringen die Studienanfängerinnen und -anfänger bereits ein Vorverständnis zum Abbildungsbegriff mit. Tall & Bakar (1991) nahmen in diesem Zusammenhang an, dass Schülerinnen und Schüler eine Liste von „Prototypen“ zum Abbildungskonzept entwickeln, „*in much the same way as they develop prototypes for concepts in everyday life*“ (S. 104). Die Prototypentheorie ist eine Unterdisziplin der klassischen Theorie des allgemeinen Begriffserwerbs. „Bei der klassischen Theorie des Begriffserwerbs stehen die relevanten Merkmale im Mittelpunkt, da diese vom Lerner erfasst und gespeichert werden müssen, hingegen werden bei den Prototypen charakteristische

| | University students (N=109) | | Subset showing more knowledge (N=38) | |
|---|--------------------------------|------|--|-------|
| | % yes | % no | % yes* | % no* |
| (1) $y = x^2$ | 96 | 4 | 95 | 3 |
| (2) $y = 4$ | 30 | 69 | 47 | 53 |
| (3) $x^2 + y^2 = 1$ | 62 | 37 | 40 | 60 |
| (4) $y = 3/x$ | 91 | 9 | 84 | 16 |
| (5) $xy = 5$ | 82 | 17 | 82 | 18 |
| (6) $y = \pm \sqrt{4x-1}$ | 67 | 33 | 34 | 66 |
| (7) $y = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{if } x > 1 \end{cases}$ | 92 | 7 | 95 | 5 |
| (8) $y = 0$ if x is a rational number | 50 | 48 | 42 | 58 |
| (9) $y = 0$ (if x is a rational number), $y = 1$ (if x is an irrational number). | 75 | 22 | 79 | 21 |

Abbildung 9.2: Ergebnisse einer Untersuchung zu mentalen Prototypen zum Abbildungsbegriff in Bezug auf Abbildungsvorschriften (Tall & Bakar, 1991, S. 109)

Eigenschaften betont“ (Hähnisch, 2011, S. 122). Rosch & Mervis (1975) stellten fest, dass die „besten Beispiele“ abgespeichert werden. Auf Grundlage dieser erfolgt basierend auf dem jeweiligen Grad der Ähnlichkeit schließlich eine Entscheidung für oder gegen eine Einordnung zum jeweiligen Begriff. Klassische Beispiele für Funktions-Prototypen sind nach der Meinung von Tall & Bakar (1992) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ oder die Sinus-Funktion (vgl. auch Vinner, 1991). Gleichzeitig nehmen diese Prototypen eine wichtige Rolle ein, denn *„[w]hen asked if a graph is a function, in the absence of an operative definition, the mind attempts to respond by resonating with these mental prototypes“* (Tall & Bakar, 1991, S. 104). Ihre Vermutung untersuchten sie in einer Studie mit 28 Schülerinnen und Schülern (Alter zwischen 16 und 17) sowie 109 Studienanfängerinnen und Studienanfänger, indem sie ihnen zehn verschiedene Graphen vorlegten. Die Teilnehmer sollten dabei angeben, ob es sich bei den vorgegebenen Graphen bzw. Abbildungsvorschriften um Funktionen handelt oder nicht. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in Abbildung 9.2 bzw. Abbildung 9.3 zu finden.

Besonders auffällig ist hierbei das Absinken des prozentualen Anteils derjenigen Schülerinnen und Schülern, die (a) und (c) als Funktion einschätzen – von 100 % auf lediglich 61 %. Der „Klas-

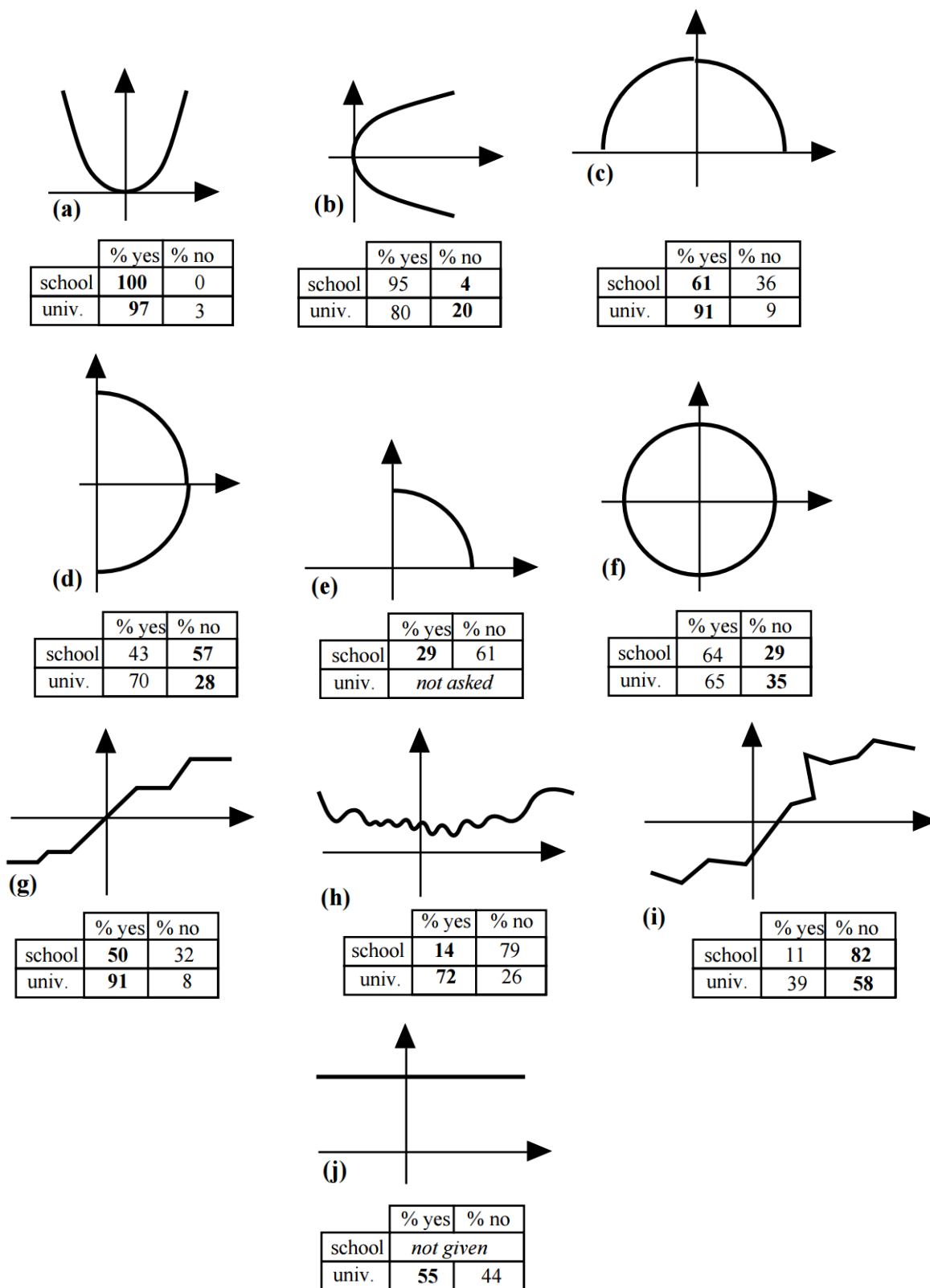


Abbildung 9.3: Ergebnisse einer Untersuchung zu mentalen Prototypen zum Abbildungsbegriff in Bezug auf Graphen (Tall & Bakar, 1991).

siker“ unter den Funktionen, $y = x^2$, wird von allen Schülerinnen und Schülern als Funktion angesehen, der Halbkreis in (c), $y = \sqrt{1 - x^2}$ mit $x \in [-1, 1]$, nur noch von 61 %. Noch weniger, nämlich lediglich 29 %, sehen den Graphen aus (e) als Funktion an: *„The school pupil’s belief in a graph being a function through pictures (a),(c),(e) drops from 100 % to 61 % to 29% as the graph passes from parabola to semicircle to quadrant, becoming less familiar and restricted to a smaller and smaller domain“* (Tall & Bakar, 1991, S. 107). Erstaunlich ist weiter, dass der Kreis-Graph aus (f) wieder von 64 % als Funktion eingestuft wird, obwohl der Viertelkreis aus (e) von der Mehrheit nicht als Funktion gesehen wurde. Tall & Bakar (1991) sahen auch hier wieder die Vertrautheit mit dem Graphen als möglichen Grund an, dass so viele Teilnehmerinnen und Teilnehmer den Kreis fälschlicherweise als Funktion einstufen. Auffällig ist zudem das bessere Abschneiden der Schülerinnen und Schüler bei Graph (i). Allerdings entkräfteten Tall & Bakar (1991) dieses Ergebnis durch die Begründungen der Schülerinnen und Schüler: *„graphs are usually smooth, either a straight line or curve, not a combination of the two, nor staggered, when dealing with a function’, too complicated to be defined as a function“* (S. 108). Abschließend ist noch erwähnenswert, dass nur knapp über die Hälfte der Studienanfängerinnen und Studienanfänger eine Konstante als Funktion ansehen. So lassen sich neben den vorhandenen Prototypen auch massive Fehlvorstellungen ausmachen:

For example, threequarters of a sample of students starting a university mathematics course considered that a constant function was not a function neither its graphical or algebraic forms, and threequarters thought that a circle is a function. This reveals a wide gulf between the concepts as perceived to be taught and as actually learned by the students.

(Tall & Bakar, 1992, S. 39)

In der Schulmathematik werden Funktionen oftmals über die anschauliche Definition der eindeutigen Zuordnung eingeführt. Vinner (1991) konnte zeigen, dass vielen Schülerinnen und Schülern die Vorstellung zugrunde liegt, dass jede Funktion durch einen Funktionsterm beschrieben wird. Dieses *„limited understanding of the concept of function“* (Thomas et al., 2015, S. 271) kann speziell in der Studieneingangsphase zu einer Reihe von Schwierigkeiten führen, da hier ein flexibles Verständnis des Funktionsbegriffs notwendig ist (Vandebrouck, 2011; Thomas et al., 2015). Konkret führt Vandebrouck (2011) zwei Gründe an (S. 2101):

On one hand, we think that these difficulties are linked to the non ability for students to consider functions as complex objects with point-wise as well as global properties. On the other hand, we can think that these difficulties are increased by the current practice of teaching in secondary schools (...), which reinforces tasks belonging to the algebraic frame only (computations of limits, derivative, tracing graphs as objects, not as tool for reflections on tasks ...) and which erases the relief which can be adopted on these objects.

Als Bedingungsfaktoren für diese Probleme erkennt Vandebrouck (2011) einerseits Schwierigkeiten mit dem Wechsel zur „*Formal-Axiomatic*“-Welt, andererseits fehlende, aber an der Universität notwendige Fähigkeiten.

9.2.2 Kategorienschema

Nach den Vorüberlegungen in Abschnitt 9.2.1 soll nun das Kategorienschema vorgestellt werden, dass zur Kodierung der studentischen Antworten herangezogen wurde. Grundlegende Überlegungen wurden hierzu bereits in Abschnitt 8.1.2 thematisiert. Wie am Anfang des vorhergehenden Abschnitts genannt, sind die Linkstotalität sowie Rechtseindeutigkeit wichtige Eigenschaften des Abbildungsbegriffes. In Gesprächen mit Kolleginnen und Kollegen wurden weiter die Aspekte „Zuordnung von Elementen einer Menge zu Elementen einer anderen Menge“ sowie „Funktionsbezug“ als wichtige Bestandteile des Konzepts „Abbildung“ festgemacht. Die Bewertung des mentalen Modells erfolgt nach dem Kategorienschema in Tabelle 9.1. Aus den kodierten Einheiten wird abschließend ein Summenscore gebildet, der die Qualität des zugrundeliegenden mentalen Modells widerspiegelt. Der maximal erreichbare Wert beträgt acht Punkte.

Tabelle 9.1: Kategorienschema zum Konzept „Abbildung“

| | | | | |
|------|--|---|---|---|
| (A1) | Zuordnung von Elementen einer Menge zu Elementen einer anderen Menge | 0 | 1 | |
| (A2) | Linkstotalität | 0 | 1 | |
| (A3) | Rechtseindeutigkeit | 0 | 1 | |
| (A4) | Funktionsbezug | 0 | 1 | |
| (A5) | Definition | 0 | 1 | 2 |
| (A6) | Interne Kohärenz | 0 | 1 | 2 |

Interraterreliabilität

Wie in Abschnitt 8.1.2 beschrieben, wurden alle Analyseeinheiten zum Konzept „Abbildung“ von einer geschulten Raterin zweikodiert. Dabei ergaben sich für die oben genannten Kategorien folgende Werte für das jeweilige Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa:

Tabelle 9.2: Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa Werte bzgl. des Kategorienschemas zum Abbildungskonzept

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| κ | κ | κ | κ | κ_w | κ_w |
| 0.924 | 0.908 | 0.919 | 1.000 | 1.000 | 0.925 |

9.2.3 Bewertung der mentalen Modelle

Die Ergebnisse der Kodierung der bzgl. des Abbildungskonzept relevanten Interviewpassagen unter Verwendung des in Abschnitt 9.2.2 beschriebenen Kategorienschemas sind in Tabelle 9.3 dargestellt. Das Symbol „✓“ in der Spalte FV bedeutet, dass bei den Studierenden eine Fehlvorstellung vorliegt. Diese Fehlvorstellungen werden nachfolgend in Abschnitt 9.2.4 klassifiziert und erläutert.

Tabelle 9.3: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. des Abbildungskonzepts (Interviewtermin 2).

| Student | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | FV | Σ |
|---------|--|----|----|----|----|----|----|----------|
| S01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 6 |
| S02 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 1</i> | | | | | | | |
| S03 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | | 5 |
| S04 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 |
| S05 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 3 |
| S06 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | 1 |
| S07 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S08 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 2 |
| S09 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 2 |
| S10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 4 |
| S11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 3 |

| | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S13 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 1</i> | | | | | | | |
| S14 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | ✓ | 4 |
| S15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S16 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S19 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S20 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | | 6 |
| S22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S24 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 4 |
| S25 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | | 7 |
| S27 | <i>Teilnahme nach Interviewtermin 1 abgebrochen</i> | | | | | | | |
| S28 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | ✓ | 8 |
| S29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S30 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 2 |
| S31 | <i>Teilnahme nach Interviewtermin 1 abgebrochen</i> | | | | | | | |

Betrachtet man die Werte in Tabelle 9.3, stellt man fest, dass lediglich eine Teilnehmerin bzw. ein Teilnehmer die formale Definition vollständig nennen konnte. Drei weitere konnten die Definition zumindest in Teilen korrekt angeben; die restlichen 22 Studierenden gaben keine bzw. eine falsche Definition an. In Tabelle 9.4 sind die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass bei Kategorie A5 und A6 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 54$, statt $n = 27$ wie bei den restlichen Kategorien liegt.

Bei 17 der 27 Studierenden lag somit eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Abbildungskonzepts zugrunde. Lediglich bei 51.9 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer war ein Funktionsbezug

Tabelle 9.4: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. des Abbildungskonzeptes (Interviewtermin 2).

| Kategorie | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 16 | 7 | 9 | 14 | 5 | 11 | 17 |
| Relativ | 0.593 | 0.259 | 0.333 | 0.519 | 0.093 | 0.204 | 0.630 |

erkennbar, die beiden Eigenschaften „Linkstotalität“ bzw. „Rechtseindeutigkeit“ wurden nur von einem Viertel bzw. einem Drittel der Studierenden genannt.

In Abbildung 9.4 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle der Studierenden bzgl. des Abbildungskonzeptes nach sieben Wochen Mathematikstudium visualisiert. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme an der Studie abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

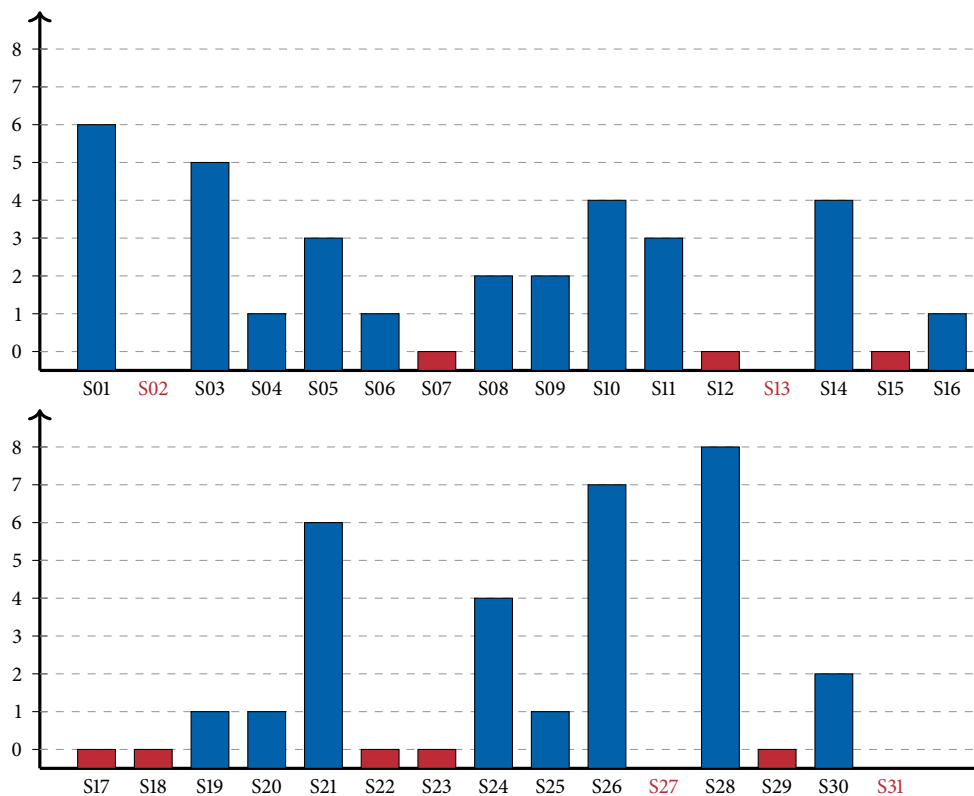


Abbildung 9.4: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Abbildungskonzeptes (Interviewtermin 2).

Somit erreichten 17 der 27 Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von kleiner gleich zwei Punkten, was einem relativen Anteil von 62,96 % entspricht. Nur fünf Studieren-

de erreichten einen Summenwert von fünf oder mehr Punkten; dies entspricht 18.51 % der Gesamtzahl. Die volle Punktzahl wurde nur von einem / einer Studierenden erzielt (3.7 %).

9.2.4 Fehlvorstellungen

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Abbildungskonzepts ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte fünf induktiv gewonnenen Kategorien. Diese sind in Abbildung 9.5 dargestellt.



Abbildung 9.5: Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Abbildungskonzeptes (Interviewtermin 2).

Tabelle 9.5 zeigt eine Erläuterung der einzelnen Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden. Diese werden im Folgenden anhand von Interviewauszügen aufgezeigt.

Tabelle 9.5: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Abbildungskonzepts sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 2).

| | | |
|-------------------------------------|---|--|
| Losgelöster Funktionsbegriff | Die äquivalenten Begriffe „Funktion“ und „Abbildung“ werden als zwei unterschiedliche oder sogar zusammenhangslose Konstrukte wahrgenommen. | S05, S11, S15, S17, S18, S20, S23, S25, S28, S29 |
| Fehlendes Grundverständnis | Es zeigt sich ein fehlendes Grundverständnis von mathematischen Formeln oder Grundprinzipien. | S08, S12, S18, S19, S23, S28, S29 |
| Injektivität | Die Eigenschaft „Injektivität“ wird bewusst oder unbewusst als Bestandteil der Funktionsdefinition angesehen. | S15, S16, S29, S30 |
| Fehlende Rechtseindeutigkeit | Die Rechtseindeutigkeit wird gezielt nicht als Eigenschaft einer Abbildung dargestellt. | S09, S19 |
| Bijektivität | Die Abbildungseigenschaften werden mit der Eigenschaft „Bijektivität“ gleichgesetzt. | S14 |

Losgelöster Funktionsbegriff

Dieser Kategorie lag einerseits eine völlige Zusammenhangslosigkeit der beiden Begriffe zugrunde, wie etwa die Antwort von S25 zeigt:

- 1 S25: Nein. Das ist, das ist wirklich ein neuer Begriff. Da hab ich auch ne Zeit gebraucht, dass ich mir
2 vorstellen konnte, was das ist ((Mhm)) so eine Abbildung. Ahm/ aber in der Schule kommt das
3 nicht vor.

S25 konnte während des Interviews bis auf die Zuordnungen von Elementen einer Menge zu Elementen einer anderen Menge keine Eigenschaften von Abbildungen nennen. Auf die Frage, ob Funktionen gewisse Eigenschaften erfüllen müssen, gab er folgende Antwort:

- 1 S25: Ahm/ Funktionen haben jedem x -Wert einen eindeutigen y -Wert zugeordnet ((Mhm)). So
2 haben wir das definiert. Das heißt, dass/ ahm/ egal was ich einsetz, dass eine eindeutige Bestimmung
3 rauskommt ((Mhm)) und es nicht zwei Möglichkeiten für das Ergebnis gibt.

S25 kann sich sogar als eine oder einer der Wenigen an die korrekte Definition einer Funktion erinnern, schafft es aber nicht, diese aufgrund der fehlenden Verbindung ebenfalls auf den Begriff Abbildung zu beziehen. Die Ausführungen von S20 verlaufen nahezu identisch. Eine ähnliche Situation zeigt sich auch bei S17 bzw. S15:

1 **I:** Haben Sie Abbildungen in der Schule schon behandelt?

2 **S17:** (..) Ahm/ (...) ja irgendwie haben wir dann schon mal irgendwas gespiegelt oder irgendwas/
3 keine Ahnung/ von einem Punkt einen Vektor angetragen, damit da ein neuer Punkt rauskommt
4 oder so, aber (..) ja. Solche Sachen halt.

5 **I:** Sie haben ja in der Schule Funktionen behandelt. Ist eine Funktion und eine Abbildung das
6 gleiche?

7 **S17:** Oh Gott/ ich weiß es nicht. So hätte ich das jetzt irgendwie mal nicht gesehen.

1 **I:** Das wäre jetzt eh meine nächste Frage gewesen, ob Sie Abbildungen in der Schule schon behan-
2 delt haben.

3 **S15:** Nein, aber das war halt, was eine Relation ist, was eine Funktion ist/ ahm/ sowas war irgendwie
4 mal vor ganz langer Zeit.

Bei anderen Studierenden war zwar ein Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen er-
kennbar, allerdings wurden auch bei diesen die zwei Konzepte als nicht äquivalent angesehen.
Exemplarisch hierfür stehen Ausschnitte der Antworten von S05 und S11:

1 **I:** Okay, haben Sie Abbildungen in der Schule schon behandelt?

2 **S05:** Ich stell mir jetzt (.) eine Funktion als Form von einer Abbildung vor. Also Funktionen.

3 **I:** Würden Sie sagen, dass eine Funktion und eine Abbildung das gleiche ist?

4 **S05:** Da bin ich mir eben nicht sicher, also das hab ich jetzt nicht so ganz verstanden, aber im Grund
5 schon ((Mhm)). Man kann jetzt eine Drehung um den Ursprung nicht als Funktion darstellen,
6 aber es ist eine Abbildung. Aber eine Funktion ist auf alle Fälle in der Abbildung mit enthalten
7 ((Mhm)).

1 **I:** Bedeuten die Begriffe Funktion und Abbildung das gleiche?

2 **S11:** Ja Abbildung ist eben der größere Begriff. Also Funktionen sind glaub ich eine Art von Abbil-
3 dungen.

Insgesamt lag bei neun der 27 Studierenden, also einem Drittel der Interviewteilnehmerinnen und -teilnehmer, der Funktionsbegriff bewusst losgelöst vom Abbildungsbegriff vor. Bei vier der neun Studierenden wurden die beiden Begriffe sogar als vollkommen zusammenhangslos angesehen.

Fehlendes Grundverständnis

Ein fehlendes Grundverständnis von Abbildungen bzw. Funktionen zeigt sich etwa bei S18:

- 1 **I:** Ich kann Ihnen das ja mal aufschreiben. Eine Abbildung f von V nach W heißt Abbildung,
 2 wenn? Also wann nennt man dieses f eine Abbildung? Muss dieses f irgendwelche bestimmten
 3 Kriterien erfüllen?
- 4 **S18:** Ahm/ (..) ja also (..) ich muss ja mit/ ahm/ f den/ ahm/ W definieren können, also den V und
 5 W .

Diese Aussagen sind grundlegend falsch. Durch die Abbildung f wird nicht der Definitionsbereich V definiert, genauso wenig der Zielbereich W . Es muss zwar $\text{Bild}(f) \subseteq W$ gelten, aber ansonsten kann der Zielbereich W beliebig gewählt werden. Weiter entscheidet die Wahl des Definitionsbereichs vielmehr über die Abbildung f .

Bei S23 und S28 zeigen sich Fehlvorstellungen, die vermutlich auf die Behandlung von Funktionen in der Schule zurückzuführen sind:

- 1 **I:** Sind Funktionen und Abbildungen das gleiche?
- 2 **S23:** Ahm/ (..) ich glaub nicht, oder (..). Nein. [...]
- 3 **I:** Gibt es irgendwelche Einschränkungen, wenn man sagt, das ist keine Funktion mehr? Oder was
 4 eine Funktion nie machen darf?
- 5 **S23:** (..) Puh (.) / ahm/ (..). Eine Funktion ists glaub ich nur, wenns zweidimensional ist, oder?
- 1 **I:** Haben Sie Abbildungen in der Schule schon behandelt?
- 2 **S28:** Ahm/ ja Funktionen sind ja in dem Sinne auch Abbildungen ((Mhm)).
- 3 **I:** Haben Funktionen/ wann spricht man von einer Funktion? Welche Kriterien muss eine Funktion
 4 erfüllen?

5 **S28:** Hmm/ also ich glaub das selbe, jedes Element bekommt eins zugeordnet/ ahm/ nein Funktionen
 6 haben ja auch Definitionslücken/ also ich glaube bei Abbildungen gibt es sogar mehr als bei
 7 Funktionen aber ich weiß jetzt auch nicht, auf jeden Fall ist eine Funktion auch eine Abbildung
 8 quasi.

S23 setzt Funktionen mit Zweidimensionalität gleich. Fraglich bleibt hier, was zweidimensional sein muss: der Definitionsbereich V , der Zielbereich W ? Vermutlich denkt S23 hier an den Funktionsgraphen und das zweidimensionale kartesische Koordinatensystem. Bei S28 zeigt sich eine Fehlvorstellung hinsichtlich der Linkstotalität einer Abbildung. Aufgrund der Vorstellung, dass Definitionslücken keine Bilder haben, hat S23 ein Problem, die Begriffe Funktion und Abbildung als äquivalent anzusehen. S23 fehlt das Verständnis, dass Definitionslücken kein Bestandteil der Definitionsmenge sind und folglich auch kein Widerspruch bzgl. der Linkstotalität besteht.

Injektivität

Zwei der 27 Studierenden sahen Injektivität als Eigenschaft von Funktionen an, ohne diesen Begriff dabei explizit zu nennen. Es liegt die Vermutung nahe, dass die genannten Eigenschaften nicht bewusst mit dem Begriff „Injektivität“ verknüpft sind, sondern davon losgelöst als Bestandteil der Funktionsdefinition wahrgenommen werden:

1 **I:** Wenn sie zurückdenken an die Schule. Was hat eine Funktion nicht machen dürfen oder was
 2 waren die Kriterien einer Funktion?

3 **S30:** Ja gut, man hat einem y -Wert zum Beispiel zwei x -zugeordnet und dann war das keine Funktion
 4 mehr.

1 **I:** Gibt es, oder muss eine Abbildung irgendwelche bestimmten Kriterien erfüllen, damit man von
 2 einer Abbildung spricht?

3 **S15:** Hmm da war jetzt grad der Gedanke mit einer Relation und mit einer/ ahm/ (S15 schreibt).
 4 Da war auch mal was in der Schule dran, oder? ((Mhm)) Dass man jedem y -Wert nur ein x
 5 zuweisen kann, oder?

Bei S29 wurde Injektivität im Gegensatz zu den anderen beiden Studierenden bewusst als Funktionseigenschaft genannt:

- 1 **I:** Oder muss eine Abbildung irgendwelche bestimmten Kriterien erfüllen?
- 2 **S30:** Ahm/ ja/ also/ ahm/ die muss eben (..)/ ahm/ als Funktion muss es ja dann injektiv sein, oder?

Fehlende Rechtseindeutigkeit

Insgesamt nannten lediglich sieben Studierende die Eigenschaft „Rechtseindeutigkeit“ im Hinblick auf Abbildungen (vgl. Tabelle 9.4). Bei den anderen lässt sich nicht feststellen, ob die Eigenschaft nur vergessen wurde oder bewusst nicht als solche wahrgenommen wurde. Bei S09 (und ähnlich auch bei S19) war genau dies der Fall:

- 1 **I:** Das erste ist der Begriff der Abbildung. Mich würde interessieren, was Sie sich anschaulich unter
2 einer Abbildung vorstellen. Was eine Abbildung ausmacht.
- 3 **S09:** Also für mich ist das so eine Projektion, wie so ein Beamer, der irgendwas irgendwohin wirft
4 ((Mhm)). Und/ ahm/ je nachdem wird teilweise dann halt mehr oder weniger abgebildet oder
5 von verschiedenen vielen Punkten irgendwas wohin geworfen, wie Lichtstrahlen, die von unter-
6 schiedlichen Punkten zu unterschiedlichen Zielpunkten gerichtet werden ((Mhm)). Manche
7 treffen halt auf den gleichen Punkt oder/ oder manche/ von einem Punkt gehen mehrere Strahlen
8 weg.

Die bildliche Vorstellung von S09 erinnert eher an eine Relation als an eine Abbildung. Dass von einem Punkt mehrere Strahlen weggehen können, ist ein Widerspruch zur Rechtseindeutigkeitseigenschaft.

Bijektivität

Bei S14 zeigte sich eine Verwechslung der Abbildungsdefinition mit Bijektivität:

- 1 **I:** Können Sie mir vielleicht die formale Definition einer Abbildung aufschreiben? Oder hinschrei-
2 ben, wie Sie eine Abbildung definieren würden? ((S14 schreibt))
- 3 **S14:** Hmm heißt. Mir fehlt jetzt irgendwie das heißt. Schreiben wirs anders. φ heißt eine Abbildung
4 ((S14 schreibt)). Jetzt kommen die Voraussetzungen ((S14 schreibt)). Also. Äh/ φ von A nach
5 B heißt eine Abbildung, wenn jedem Element $a \in A$ ein Element $b \in B$ (./) genau ein (./) dann
6 wärs ja schon bijektiv.

S14 ließ anschließend in seiner Abbildungsdefinition bewusst das Wort „genau“ weg, da S14 offensichtlich in dem Glauben war, ansonsten den Begriff „Bijektivität“ zu definieren.

9.3 Injektivität und Surjektivität

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse der Auswertung zu den Konzepten „Injektivität“ und „Surjektivität“ vorgestellt. Abschnitt 9.3.1 thematisiert zunächst Vorüberlegungen zu den Begriffen. Weiter werden in Abschnitt 9.3.2 die Kategorienschemata (vgl. Abschnitt 8.1.2) beschrieben. In Abschnitt 9.3.3 erfolgt eine Übersicht über die Bewertung der mentalen Modelle der Studierenden. Abschnitt 9.3.4 enthält eine Klassifikation sowie Erläuterung von Fehlvorstellungen hinsichtlich der beiden Konzepte.

9.3.1 Definition und Vorüberlegungen

Die Begriffe Injektivität und Surjektivität nehmen in der Studieneingangsphase eine wichtige Rolle ein, da sie sowohl in der Linearen Algebra bei (linearen) Abbildungen als auch in der Analysis bei Funktionen (mehrerer Veränderlicher) vorkommen. Demnach kommt dem Aufbau eines konsistenten und vollständigen mentalen Modells eine wichtige Rolle zu. In Abschnitt 9.2.1 wurde bereits die Korrelation der Eigenschaften einer Abbildung (Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit) und Injektivität (Linkseindeutigkeit) sowie Surjektivität (Rechtstotalität) dargestellt. Die Definitionen der beiden Begriffe in der Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ sind in Abbildung 9.6 dargestellt.

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Seien M, N zwei Mengen und $\varphi : M \rightarrow N$ eine Abbildung.

- (a) Die Abbildung φ ist **injektiv**, wenn für alle Elemente $a, b \in M$ aus $\varphi(a) = \varphi(b)$ folgt, dass $a = b$ gilt.
- (b) Die Abbildung φ ist **surjektiv**, wenn für jedes Element $b \in N$ ein Element $a \in M$ existiert mit $\varphi(a) = b$. Äquivalent dazu ist $\text{Bild}(\varphi) = N$.
- (c) Die Abbildung φ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Abbildung 9.6: Definition der Begriffe „Injektivität“, „Surjektivität“ und „Bijektivität“ im Vorlesungsskript „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“.

Es ist davon auszugehen, dass einige Studierende bei ihren Schilderungen auf „Wolken“-Diagramme (s. Abbildung 9.7) zurückgreifen, die in der Vorlesung zur Einführung und Erläuterung

der Begriffe genutzt wurden. Es wird bei den Interviews insbesondere Wert darauf gelegt, zu untersuchen, ob neben diesen Diagrammen auch weitere Beispiele zu den Begriffen vorliegen bzw. inwieweit die Verbindung der Begriffe zu Abbildungen hergestellt ist. Weiter soll untersucht werden, ob bzw. in welchem Ausmaß das vorhandene Modell Fehlvorstellungen bedingt. So wäre Abbildung 9.7 ein Beispiel für eine injektive Abbildung.

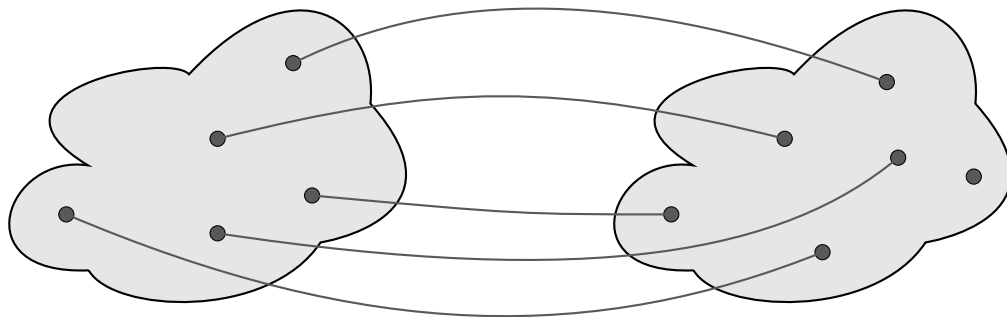


Abbildung 9.7: Visualisierung einer injektiven, aber nicht surjektiven Abbildung.

Fehlt ein fundamementiertes Verständnis des Begriffs Injektivität, ist davon auszugehen, dass sich Studierende an Beispielen und Prototypen orientieren. Falls etwa das Beispiel aus Abbildung 9.7 zu einem Prototypen für Injektivität wird, besteht die Gefahr, dass Injektivität gleichzeitig als Nicht-Surjektivität verstanden wird.

9.3.2 Kategorienschema

Nach den Vorüberlegungen wird nun das Kategorienschema vorgestellt, das zur Kodierung der studentischen Antworten herangezogen wurde. Grundlegende Überlegungen wurden hierzu bereits in Abschnitt 8.1.2 thematisiert. Die folgenden Aspekte wurden erneut mitunter aus Gesprächen von Kolleginnen und Kollegen gewonnen und stellen einen Versuch dar, den vielen Facetten des *Concept Image* gerecht zu werden. Die Bewertung des mentalen Modells zum Konzept „Injektivität“ erfolgt nach den in Tabelle 9.6 aufgelisteten Punkten.

Aus den kodierten Einheiten wird abschließend ein Summenscore gebildet, der die Qualität des zugrundeliegenden mentalen Modells widerspiegelt. Der maximal erreichbare Wert beträgt zehn Punkte.

Tabelle 9.6: Kategorienschema zum Konzept „Injektivität“.

| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| (I1) | Ein Element im Zielbereich wird höchstens einmal getroffen | 0 | 1 | |
| (I2) | Unterschiedl. Elemente im Definitionsbereich haben unterschiedl. Bildelemente | 0 | 1 | |
| (I3) | Injektivität durch Einschränkung des Definitionsbereichs | 0 | 1 | |
| (I4) | Beispiel | 0 | 1 | |
| (I5) | Gegenbeispiel | 0 | 1 | |
| (I6) | Zusammenhang mit Kern bei linearen Abbildungen | 0 | 1 | |
| (I7) | Definition | 0 | 1 | 2 |
| (I8) | Interne Kohärenz | 0 | 1 | 2 |

Die Bewertung des mentalen Modells zum Konzept „Surjektivität“ erfolgt nach den in Tabelle 9.7 aufgelisteten Punkten.

Tabelle 9.7: Kategorienschema zum Konzept „Surjektivität“.

| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| (S1) | Jedes Element im Zielbereich wird mindestens einmal getroffen | 0 | 1 | |
| (S2) | Surjektivität durch Einschränkung des Zielbereiches | 0 | 1 | |
| (S3) | Beispiel | 0 | 1 | |
| (S4) | Gegenbeispiel | 0 | 1 | |
| (S5) | Definition | 0 | 1 | 2 |
| (S6) | Interne Kohärenz | 0 | 1 | 2 |

Auch hier wird aus den kodierten Einheiten abschließend ein Summenscore gebildet, der die Qualität des zugrundeliegenden mentalen Modells widerspiegelt. Der maximal erreichbare Wert beträgt acht Punkte.

Interraterreliabilität

Wie in Abschnitt 8.1.2 beschrieben, wurden alle Analyseeinheiten zu den Konzepten „Injektivität“ und „Surjektivität“ von einer geschulten Raterin zweitkodiert. Dabei ergaben sich für die oben genannten Kategorien die in Tabelle 9.8 bzw. 9.9 dargestellten κ - bzw. κ_w -Werte.

Tabelle 9.8: Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa Werte bzgl. des Kategorienschemas zu Injektivität

| I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| κ | κ | κ | κ | κ | κ | κ_w | κ_w |
| 0.919 | 0.924 | 0.867 | 0.924 | 0.924 | 1.000 | 0.926 | 0.940 |

Tabelle 9.9: Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa Werte bzgl. des Kategorienschemas zu Surjektivität

| S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 |
|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| κ | κ | κ | κ | κ_w | κ_w |
| 0.848 | 0.908 | 0.841 | 0.841 | 0.957 | 0.924 |

9.3.3 Bewertung der mentalen Modelle

Die Ergebnisse der Kodierung der bzgl. Injektivität und Surjektivität relevanten Interviewpassagen unter Verwendung der in Abschnitt 9.3.2 beschriebenen Kategorienschemata sind in Tabelle 9.10 bzw. 9.12 dargestellt. Das Symbol „✓“ in der Spalte FV bedeutet, dass bei den Studierenden eine Fehlvorstellung vorliegt. Diese Fehlvorstellungen werden nachfolgend in Abschnitt 9.2.4 klassifiziert und erläutert.

9.3.3.1 Injektivität

Tabelle 9.10: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Injektivität (Interviewtermin 2).

| Student | I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 | FV | Σ |
|---------|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----------|
| S01 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 7 |
| S02 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 1</i> | | | | | | | | | |
| S03 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | | 8 |
| S04 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 5 |
| S05 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S06 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 2 |
| S07 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S09 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ | 6 |
| S10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S13 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 1</i> | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| S14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 10 |
| S15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S16 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | ✓ | 3 |
| S17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 6 |
| S22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S24 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | | 6 |
| S25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | | 9 |
| S26 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 6 |
| S27 | <i>Teilnahme nach Interviewtermin 1 abgebrochen</i> | | | | | | | | | |
| S28 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 9 |
| S29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S30 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | ✓ | 5 |
| S31 | <i>Teilnahme nach Interviewtermin 1 abgebrochen</i> | | | | | | | | | |

Aus Tabelle 9.10 wird ersichtlich, dass lediglich vier Studierende die formale Definition von Injektivität richtig nennen konnten. Der Zusammenhang zwischen Injektivität und dem Kern bei linearen Abbildungen wurde auch nur bei vier Teilnehmerinnen und Teilnehmern deutlich. Tabelle 9.11 enthält die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien. Zu beachten ist hierbei, dass bei Kategorie I7 und I8 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 54$, statt $n = 27$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag bei 15 der 27 Studierenden eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Konzepts „Injektivität“ zugrunde. Bei I7 ist auffällig, dass alle 15 von 54 möglichen Punkten nur von elf Studierenden erzielt wurden, d.h. 16 von 27 Studierenden konnten keine, auch nur in Teilen richtige Definition von Injektivität nennen.

Tabelle 9.11: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Injektivität (Interviewtermin 2).

| Kategorie | I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 10 | 11 | 5 | 12 | 12 | 4 | 15 | 14 | 15 |
| Relativ | 0.370 | 0.407 | 0.185 | 0.444 | 0.444 | 0.148 | 0.278 | 0.259 | 0.556 |

In Abbildung 9.8 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts Injektivität visualisiert. Die Studierenden, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme am Interview abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

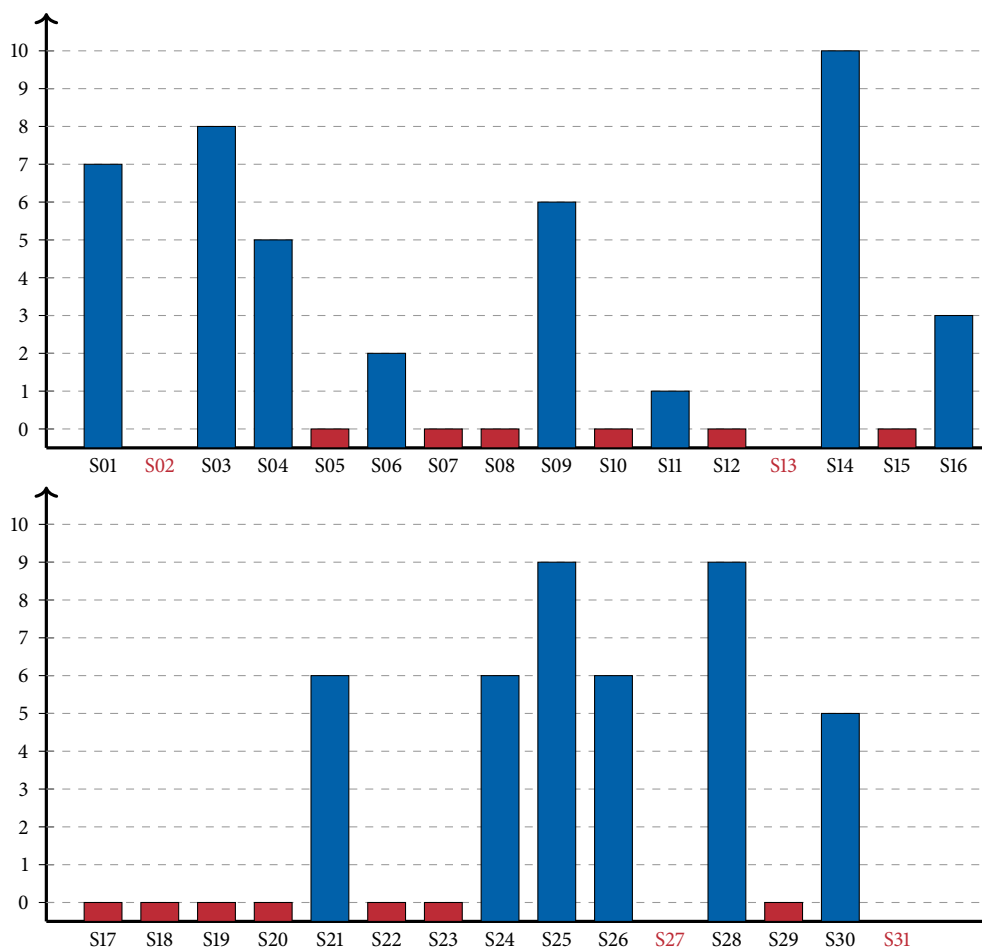


Abbildung 9.8: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Injektivität (Interviewtermin 2).

Somit erreichten 12 der 27 Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von 0; dies entspricht einem relativen Anteil von 44.4 %. 55.6 % erreichten einen Summenwert von kleiner gleich zwei Punkten. Lediglich vier der 27 Studierenden (14.8 %) erzielten acht oder mehr Punkte, was ein konsistentes und fundamementiertes Verständnis des Begriffes impliziert.

9.3.3.2 Surjektivität

Tabelle 9.12: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 2).

| Student | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 | FV | Σ |
|---------|--|----|----|----|----|----|----|----------|
| S01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S02 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 1</i> | | | | | | | |
| S03 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S04 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | | 6 |
| S05 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S06 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S07 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S09 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 |
| S10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | ✓ | 1 |
| S11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S13 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 1</i> | | | | | | | |
| S14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S20 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | ✓ | 2 |
| S21 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 3 |
| S22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S23 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S24 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | | 6 |
| S25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S26 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 7 |

| | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| S27 | <i>Teilnahme nach Interviewtermin 1 abgebrochen</i> | | | | | | | |
| S28 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S30 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | | 6 |
| S31 | <i>Teilnahme nach Interviewtermin 1 abgebrochen</i> | | | | | | | |

Die formale Definition S5 konnten auffällig lediglich neun Teilnehmerinnen und Teilnehmer richtig angeben. Die restlichen 18 Studierenden konnten keine, auch nur in Teilen richtige Definition nennen. In Tabelle 9.13 sind die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien dargestellt. Zu beachten ist hierbei wieder, dass bei Kategorie S5 und S6 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 54$, statt $n = 27$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag bei 13 der 27 Studierenden eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Abbildungskonzepts zugrunde.

Tabelle 9.13: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 2).

| Kategorie | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 10 | 7 | 10 | 10 | 18 | 18 | 13 |
| Relativ | 0.370 | 0.259 | 0.370 | 0.370 | 0.333 | 0.333 | 0.481 |

In Abbildung 9.9 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts Surjektivität visualisiert. Die Studierenden, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme am Interview abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

Somit erreichten zwölf der 27 Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von 0, was einem relativen Anteil von 44.4 % entspricht. Über die Hälfte, nämlich 55.6 % wiesen einen Summenwert von kleiner gleich zwei Punkten auf. Lediglich sechs der 27 Studierenden (22.2 %) erzielten sieben oder mehr Punkte, was ein konsistentes und fundamentiertes Verständnis des Begriffes impliziert.

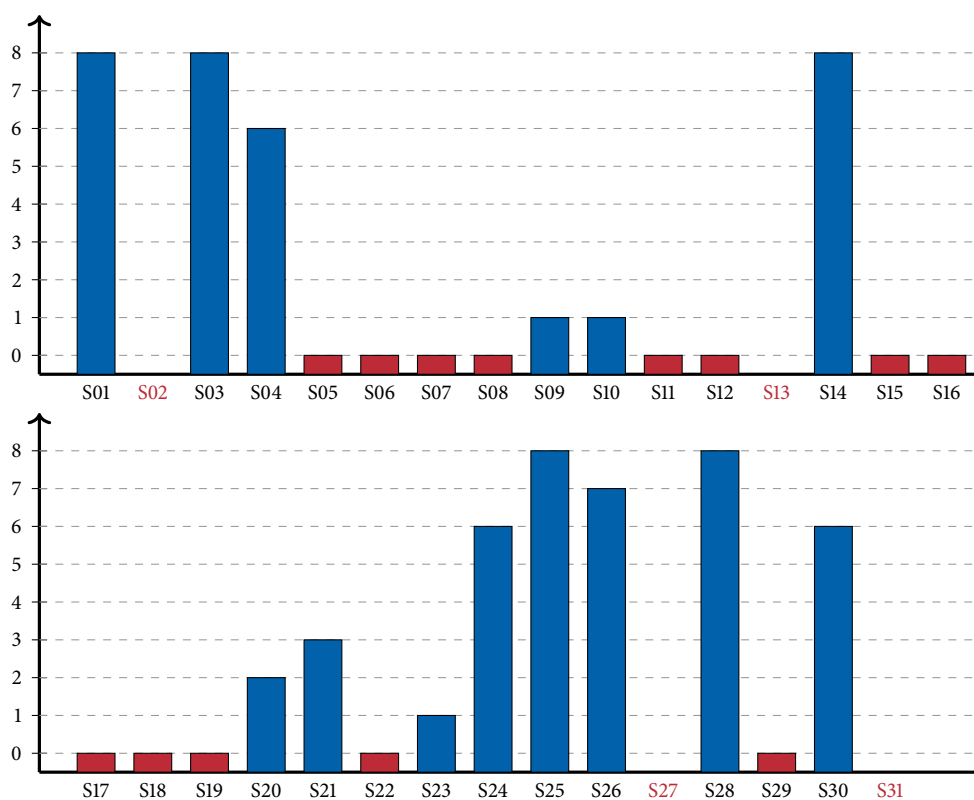


Abbildung 9.9: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 2).

9.3.4 Fehlvorstellungen

In diesem Abschnitt werden Fehlvorstellungen hinsichtlich der beiden Konzepte „Injektivität“ und „Surjektivität“ dargestellt und erläutert.

9.3.4.1 Injektivität

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Injektivität“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte von Interviewtermin 2 sechs induktiv gewonnene Kategorien. Diese sind in Abbildung 9.10 dargestellt.



Abbildung 9.10: Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ (Interviewtermin 2).

Die einzelnen Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden sind in Tabelle 9.14 dargestellt. Im Folgenden werden diese anhand von Interviewauszügen erläutert.

Abbildung

Ein fehlendes Verständnis des Abbildungskonzepts impliziert bei den Studierenden ein falsches Verständnis des Begriffs „Injektivität“. Manche Studierende setzten Injektivität mit beiden Abbildungseigenschaften gleich. Dies resultierte bei S08 in folgender Definition:

Eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ heißt injektiv,
wenn für jedes x ~~es~~ genau ein y existiert, aber
→ mehr y existieren als x .

Tabelle 9.14: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 2).

| | | |
|-----------------------------------|---|---|
| Abbildung | Das Konzept „Injektivität“ wird mit einer oder beiden Eigenschaften (Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit) einer Abbildung gleichgesetzt. | S08, S10, S11, S15, S16, S18, S23, S29, S30 |
| Fehlendes Grundverständnis | Es zeigt sich ein fehlendes Grundverständnis von mathematischen Formeln oder Grundprinzipien. | S09, S16, S17, S19, S29 |
| Surjektivität | Unter „Injektivität“ wird die Eigenschaft „Surjektivität“ verstanden. | S05, S11, S20, S29 |
| Nicht-Surjektivität | Unter „Injektivität“ wird die Eigenschaft „Nicht-Surjektivität“ verstanden. | S07, S08 |
| Nicht-Injektivität | Unter „Injektivität“ wird das genaue Gegenteil verstanden. | S15, S23 |
| Bijektivität | Unter „Injektivität“ wird die Eigenschaft „Bijektivität“ verstanden. | S14 |

Die Fehlvorstellung, dass mehr y -Werte existieren als x -Werte wird dadurch bedingt, dass S08 unter Injektivität zusätzlich Nicht-Surjektivität versteht. Bis auf den Zusatz gibt S08 hier eine exakte Definition einer Abbildung wieder. Eine analoge Fehlvorstellung zeigt sich bei S10:

- 1 **S10:** Ja/ ahm/ Injektivität bedeutet ja eigentlich gleichzeitig, dass es eine Funktion ist. Weil da ist es
 2 ja jetzt zum Beispiel so, dass (.) ein x -Wert zwei y -Werte hätte und dann ist es ja keine Funktion
 3 mehr ((Mhm)).
- 4 **I:** Noch irgendetwas, dass Sie mit Injektivität verbinden?
- 5 **S10:** Ahm/ ja dass es halt eine Funktion ist. Sonst fällt mir grad nichts ein.

Eine andere Fehlvorstellung, die auf ein fehlendes Abbildungsverständnis hindeuten, sieht Injektivität als Linkstotalität:

- 1 **S16:** Ahm/ injektiv ist, wenn ich jetzt/ ahm/ jetzt muss ich kurz nachdenken, weil ich sonst die zwei
 2 vertausche. Injektiv ist, wenn ich für jeden x -Wert ein y -Wert habe quasi (.) oder?

1 **S18:** Ahm/ (..) wenn ich eben meine Werte hab und dann/ also dass halt jeder Wert von hier/ ich
 2 nenn den mal V und W / dass jeder Wert von V / ahm/ einen W -Wert zugeordnet werden kann.
 3 Also genau einer wäre jetzt bijektiv, aber (..)/ ahm/ ja. Also dass halt jedem/ ahm/ Wert von V /
 4 dass dafür ein oder mehrere Werte von W existieren.

Ein besonders starker Widerspruch zur Abbildungsdefinition zeigte sich bei S15:

1 **S15:** Ahm/ (10) (S15 schreibt). Hmm, ich hätte jetzt quasi gesagt, dass halt/ ahm/ ein Element aus/
 2 ahm/ dem V / dass halt (...) ah das ist schon höchstens, nein mindestens. Genau, also es gibt/
 3 also injektiv ist, wenn es mindestens ein Element aus der Menge V gibt, das auf (.) W abgebildet
 4 wird (..). Also/ ahm/ mindestens eins.

Diese Vorstellung von Injektivität widerspricht der Linkstotalität einer Abbildung, dass jedes Element der Definitionsmenge V abgebildet wird.

Fehlendes Grundverständnis

S16 hat beispielsweise nicht verstanden, aus welchen Mengen die Variablen in der Definition von Injektivität stammen:

1 **I:** Können Sie mir bitte die Definition von Injektivität aufschreiben, wann eine Funktion injektiv
 2 ist?

3 **S16:** Ahm/ injektiv ist, wenn ich/ ahm/ (..) wenn ich für $f(a) = f(b)$ folgt, dass $a = b$. So war glaub
 4 ich die Definition.

5 **I:** Und was ist a und b ?

6 **S16:** Ahm/ (..) a und b ist/ hmm a und b (...) jeweils/ ah a ist jeweils das Bild/ also a ist Element von
 7 A , also dem Urbild und b ist Element vom Bild ((Mhm)).

S16 betrachtet eine Funktion $f : A \rightarrow B$ und kann sich noch daran erinnern, dass aus $f(a) = f(b)$ folgt, dass $a = b$ gelten muss. Im Anschluss, wahrscheinlich auch auf die schlechte Variablenbezeichnung zurückzuführen, wird b als Element von B , also vom Bild bezeichnet. Dies steht im Widerspruch dazu, dass S16 am Anfang ja $f(b)$ betrachtet.

Ein weiteres fehlendes Grundverständnis zeigt sich bei S17 und S19. Bei beiden resultiert aus einer fehlerhaften Deutung des Implikationspfeils eine falsche Vorstellung von Injektivität:

1 **I:** Und Injektivität? Können Sie mir vielleicht mal beschreiben, was das heißt?

2 **S19:** Ja also ein x aus/ also X wird auf Y abgebildet. Dann heißt das injektiv, wenn ein x / oder x /
3 oder x_2 aus X / ahm/ ja ich glaub, genau einen Wert zu/ ah wenn ich jetzt/ wenn ich jetzt hier
4 die Abbildung habe (S19 schreibt). Also x_1 und x_2 sind gleich, ein x aus X und die beiden, dann
5 wäre das gleich. Also x_1 und x_2 sind ja gleich und dann wird (.) / ahm/ auf das gleiche Ding
6 abgebildet.

Surjektivität

Alle vier Studierenden verwechseln Injektivität mit Surjektivität. Exemplarisch hierzu die Beschreibung von S11:

1 **S11:** Ahm/ Injektivität (..) ja also, dass/ ahm/ wenn das meine Definitionsmenge und das mein
2 Zielbereich ist, dass halt hier im Zielbereich/ äh/ also, dass es keine Elemente gibt, die frei
3 sind. Also, dass/ ahm/ (..) ja ich hab das so (.) / ahm/ (..) dass es (..) also hier können mehrere
4 Elemente sein, aber hier in der Zielmenge darf eben kein Element/ ahm/ da muss auf jedes
5 Element abgebildet werden ((Mhm)). Und ja, also $f : X \rightarrow Y$ heißt injektive Abbildung, wenn
6 jedes f / wenn jedes x und jedes $f(x) = f(y)$ gilt, oder? ((Mhm))

Im letzten Satz der Erklärung von S11 zeigt sich das Problem, die eigene Vorstellung mit der Definition in Einklang zu bringen. Dies resultiert in einer nicht nachvollziehbaren Mischung aus eigener Vorstellung und Teilen der Definition.

Nicht-Surjektivität

Hier zeigt sich bei zwei Studierenden das in den Vorüberlegungen von Abschnitt 9.3.1 beschriebene Szenario:

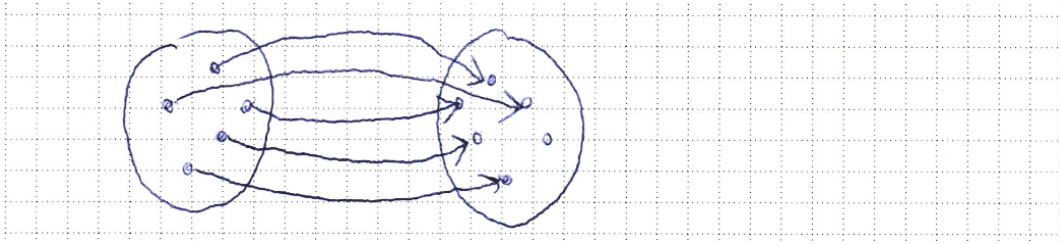
1 **S07:** Ich muss mich vorher noch konzentrieren ((Mhm)). Ahm/ (20) (S07 zeichnet). Das ist quasi,
2 wenn das die eine Menge ist und das die Elemente von der anderen Menge, dass (..) die quasi
3 so abgebildet werden, aber nicht alle aus der anderen Menge getroffen werden müssen.

4 **I:** Mhm, das heißt, dass es in dieser Menge W Elemente gibt, die nicht getroffen werden?

5 **S07:** Genau.

6 **I:** Gibt es sonst noch etwas, dass Sie mit Injektivität verbinden?

7 **S07:** Nein das war alles. Also die Menge, in der rechts was ist, was nicht getroffen wird.



- 1 **S08:** Ahm/ ich zeichne erst mal alle drei Fälle auf, das ist immer einfacher (S08: lacht) (S08 zeichnet).
 2 Okay. Also injektiv heißt, wenn man hier praktisch Elemente auf Elemente aus dieser Menge
 3 abbildet, aber in dieser Menge noch Elemente enthalten sind, die nicht benutzt werden und
 4 surjektiv heißt, dass (.) / ah wie zum Beispiel eine Parabel/ dass man/ ahm/ dass man zwei x auf
 5 ein y praktisch abbildet. Dass man (.) / nein zwei x auf ein y , so rum. Genau ((Mhm)). Und ah
 6 bijektiv ist, dass beides ist. Also das jedes Element einmal verwendet wird ((Mhm)).

Nicht-Injektivität

Zwei Teilnehmerinnen und / oder Teilnehmer verstehen unter Injektivität das genaue Gegenteil der eigentlichen Definition:

- 1 **S15:** (..) Ahm/ was ist mit x^2 , also mit einer Parabel ((Mhm)). Da hab ich ja quasi/ ahm/ (..) quasi/
 2 ahm/ ah -1 und ein $+1$, im Quadrat ergibt das immer 1. Genau und dann hab ich ja quasi (.) zu
 3 (.) zwei x -Werte einen y -Wert. Dann ist das injektiv.

Bijektivität

Bei zwei Studierenden beinhaltet das mentale Modell von Injektivität die Eigenschaft von Bijektivität:

- 1 **S10:** (S10 zeichnet) Also Injektivität ist ja, wenn (.) / ahm/ (4) / ahm/ wenn (.) die/ ahm/ (.) also injektiv
 2 ist ja, wenn sie linkseindeutig ist, das heißt, wenn man zuordnen kann, die/ äh die Elemente/
 3 wenn man den Elementen der Zielmenge eindeutig ein Element der Anfangsmenge oder der
 4 Ausgangsmenge zuordnen kann ((Mhm)). [...] Die ist injektiv ja. Weil jedes Element in der
 5 Zielmenge genau ein Element in der Ausgangsmenge besitzt.

9.3.4.2 Surjektivität

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Surjektivität“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte von Interviewtermin 2 fünf induktiv gewonnene Kategorien. Diese sind in Abbildung 9.11 dargestellt.

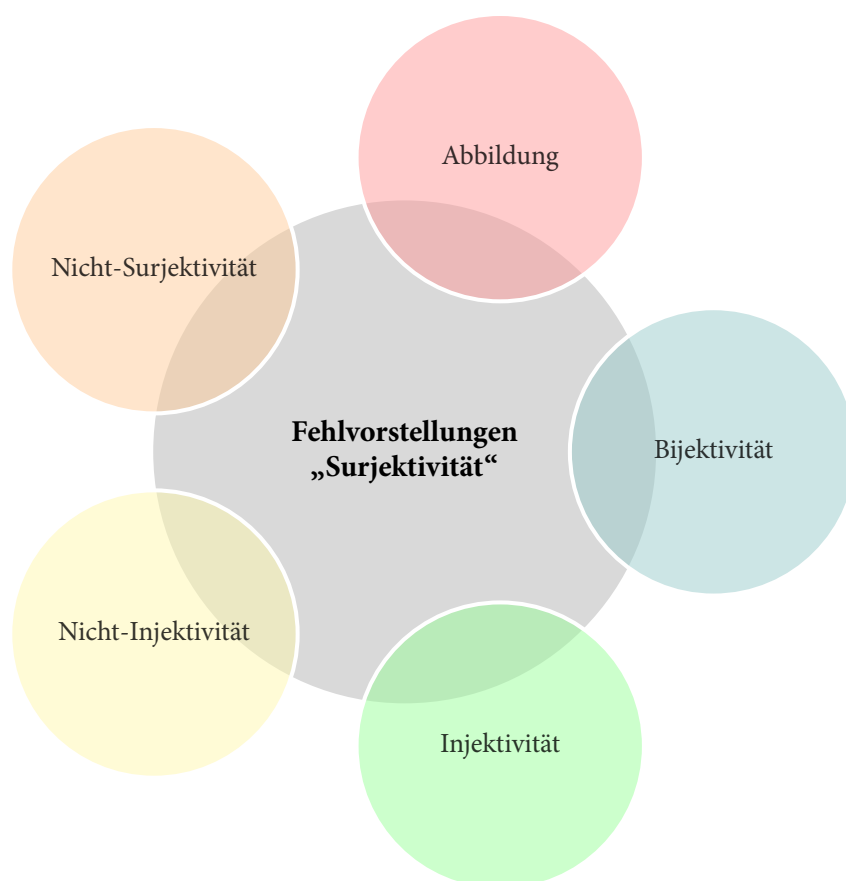


Abbildung 9.11: Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ (Interviewtermin 2).

Die einzelnen Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden sind in Tabelle 9.15 dargestellt. Im Folgenden werden diese anhand von Interviewauszügen erläutert.

Abbildung

Analog zu den Fehlvorstellungen bei Injektivität führte ein fehlendes Verständnis des Abbildungskonzepts auch in Bezug auf Surjektivität zu falschen Annahmen. Für die Studierenden S16, S17, S19 und S20 wurde Surjektivität mit den Eigenschaften einer Abbildung gleichgesetzt:

Tabelle 9.15: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 2).

| | | |
|----------------------------|--|---|
| Abbildung | Das Konzept „Surjektivität“ wird mit einer oder beiden Eigenschaften (Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit) einer Abbildung gleichgesetzt. | S07, S08, S15, S16, S17, S18, S19, S20, S22, S23, S29 |
| Bijektivität | Unter „Surjektivität“ wird die Eigenschaft „Bijektivität“ verstanden. | S10, S19, S20 |
| Injektivität | Unter „Surjektivität“ wird die Eigenschaft „Injektivität“ verstanden. | S16, S29 |
| Nicht-Injektivität | Unter „Surjektivität“ wird die Eigenschaft „Nicht-Injektivität“ verstanden. | S08, S11 |
| Nicht-Surjektivität | Unter „Surjektivität“ wird das genaue Gegenteil verstanden. | S11 |

- 1 **S17:** Oh Gott, das wird was. Ja das ist ja dann mehr oder weniger, dass halt dann irgendwie für jeden
 2 x -Wert genau einen y -Wert gibt. Da würd ich dann sagen, dass die Gerade/ oh Gott/ surjektiv
 3 ist, weil man da ja halt wieder zu jedem x -Wert genau einen y -Wert hat.

Bei S08, S18, S22 und S23 wurde Surjektivität mit Linkstotalität gleichgesetzt:

- 1 **S23:** Okay. Also surjektiv/ $f(A) = B$ / also jedes/ wenn ich A in die Funktion einsetze, dann muss B
 2 rauskommen. Für jedes a gibt es ein b . Ist das richtig, oder ist das das andere?

Bei S07 und S29 zeigten sich Vorstellungen, die im Widerspruch zu den Abbildungseigenschaften stehen:

- 1 **S07:** Ahm/ wenn alle Elemente aus der anderen Menge getroffen werden, aber nicht jedes Element
 2 ein Urbild hat.
 3 **I:** Was bedeutet das?
 4 **S07:** Ja in der anderen Menge werden alle Elemente getroffen, aber es gibt Urbilder, die frei bleiben.
 1 **S29:** Ahm/ (..)/ ahm/ (..) also (...) falls es zu jedem a mindestens nein (...) / zu jedem a Element von
 2 A gibt es mindestens ein b .

Die Aussagen von S07 stehen im Widerspruch zur Linkstotalität, die Aussagen von S29 widersprechen der Rechtseindeutigkeit von Abbildungen. Bei S16 zeigt sich in Bezug auf Surjektivität eine Mischung aus der Definition von Injektivität und fehlendem Abbildungs- sowie Grundverständnis:

- 1 **I:** Mhm okay und Surjektivität? Die Definition von surjektiv?
 2 **S16:** Hach (.) was war surjektiv? (...) Surjektiv, surjektiv. (6) Das war, wenn das nicht gilt, wenn ich/
 3 also $a = b$ hab, aber $f(a)$ nicht gleich $f(b)$ ist.

Diese Äußerung widerspricht der Rechtseindeutigkeit einer Abbildung und impliziert gleichzeitig auch ein fehlendes grundlegendes Verständnis der drei Begriffe „Abbildung“, „Injektivität“ sowie „Surjektivität“.

Bijektivität

Analog zu der Fehlvorstellung bei Injektivität wurde in diesem Fall Surjektivität mit der Bijektivitätseigenschaft gleich gesetzt, wie etwa der folgende Interviewausschnitt von S10 zeigt:

- 1 **S29:** Ahm/ (.) ja surjek/ ich zeichne das einfach wieder auf (S10 zeichnet). Das ist, wenn (.) jedes
 2 Element der Zielmenge genau ein Element der Anfangsmenge zugeordnet wird.

Injektivität

Beide Studierende, die dieser Kategorie zugeordnet wurden, verstehen unter Surjektivität die Eigenschaft „Injektivität“:

- 1 **S29:** Ahm/ ja Surjektivität ist, wenn (11)/ dass man nicht zwei Elemente von der linken Menge auf
 2 ein Element der rechten Menge abbilden darf.

Bei S16 zeigt sich diese Fehlvorstellung, nachdem der Interviewer die Definition von Surjektivität vorgegeben hat:

- 1 **I:** Ich schreib Ihnen mal die Definition von surjektiv auf (I schreibt). Das wäre jetzt die Definition
 2 von surjektiv.
 3 **S16:** Also wenn ich für alle y ein x habe und eine Funktion von $f(x)$ ist gleich y .
 4 **I:** Was heißt das für meinen Bildbereich?

- 5 **S16:** Das heißt, dass ich für jedes Bild aufs Urbild schließen kann. Dass ich sagen kann, was ich davor
6 eingesetzt hab in die Funktion. Also ich kann halt Rückschlüsse ziehen.

Ein fehlendes mentales Modell führt zu einem fehlerhaften Verständnis der Definition.

Nicht-Injektivität

Beide Studierenden sehen in Surjektivität eine Art Nicht-Injektivität:

- 1 **S11:** Ja bei surjektiv können aus der/ ahm/ kann man eben auf zwei (.) / ahm/ kann eben/ können
2 eben zwei Elemente aus der/ ahm/ Definitionsbereich auf ein Element im Zielbereich zeigen,
3 so wie es eben hier der Fall ist ((Mhm)) und es dürfen hier in der Zielmenge auch Sachen frei
4 bleiben, also Elemente ((Mhm)).

- 1 **I:** Was stellen Sie sich anschaulich unter Surjektivität vor?

- 2 **S08:** Ahm/ ja das was ich hingeschrieben hab/ also wenn für jedes x ein y existiert, aber für manche
3 y auch mehrere x existieren können.

Es lässt sich diskutieren, ob obigen Äußerungen tatsächlich eine Fehlvorstellung zugrunde liegt, da es bei reiner Surjektivität sehr wohl möglich ist, dass verschiedene x -Werte auf denselben y -Wert abgebildet werden, allerdings ist das nicht die primäre Eigenschaft von Surjektivität. Da dies aber die erste Assoziation ist, die beide Studierende mit Surjektivität verbinden, lässt sich an dieser Stelle die Eigenschaft Nicht-Injektivität als Fehlvorstellung vermuten. Bei beiden ist es zudem nicht die einzige Fehlvorstellung. S11 verbindet Surjektivität weiter mit Nicht-Surjektivität, S08 vermischt Surjektivität mit der Abbildungseigenschaft Linkstotalität.

Nicht-Surjektivität

Für S11 entspricht Surjektivität gerade dem Gegenteil, siehe hierzu den Interviewauszug der Kategorie „Nicht-Injektivität“.

9.4 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse der Auswertung zu dem Konzept „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ dargestellt. Abschnitt 9.4.1 bietet zunächst Vorüberlegungen zu den Begriffen. Weiter wird das Kategorienschema (vgl. Abschnitt 8.1.2) beschrieben. In Abschnitt 9.4.2 erfolgt eine Übersicht über die Bewertung der mentalen Modelle der Studierenden. Abschnitt 9.4.4 enthält eine Klassifikation sowie Erläuterung von Fehlvorstellungen hinsichtlich der beiden Konzepte.

9.4.1 Definition und Vorüberlegungen

Ähnlich zum Abbildungsbegriff nimmt auch das Konzept „Lineare Unabhängigkeit von Vektoren“ in der Studieneingangsphase eine Sonderrolle ein, da auch dieser Begriff Bestandteil der Schulmathematik ist. In der 12. Jahrgangsstufe wird am Gymnasium im Bereich „Analytische Geometrie“ die lineare Unabhängigkeit sowie Abhängigkeit von Vektoren im dreidimensionalen Raum betrachtet. Hierbei findet sich folgende Definition und folgender Satz im Schulbuch wieder:

Definition:

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ heißen **linear abhängig**, wenn mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar ist. Andernfalls heißen die Vektoren **linear unabhängig**.

Satz

Im \mathbb{R}^2 sind höchstens zwei Vektoren, im \mathbb{R}^3 sind höchstens drei Vektoren linear unabhängig.

Jeder weitere Vektor lässt sich eindeutig als Linearkombination dieser linear unabhängigen Vektoren darstellen.

Abbildung 9.12: Definition und Satz zu den Begriffe „Lineare Abhängigkeit“ sowie „Linear Unabhängigkeit“ im Schulbuch der 12. Klasse (Götz et al., 2014, S. 118 f).

Im Lehrplan heißt es hierzu: „Aufbauend auf dem ihnen bereits bekannten Rechnen mit Vektoren lernen die Schüler zur analytischen Beschreibung von Geraden und Ebenen im Raum

Gleichungen in Parameterform kennen und deuten die lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit von Vektoren anschaulich“ (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, 2004). Somit sollten bei den Studienanfängerinnen und -anfänger bereits wichtige Vorerfahrungen zu dem Begriff „Lineare Unabhängigkeit“ vorliegen. Weiter ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 bekannt. In der Vorlesung wurde der Begriff wie folgt formal-axiomatisch definiert:

Definition

Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen **K -linear unabhängig**, wenn jede Relation von Vektoren aus V trivial ist.

Anders ausgedrückt: Sind $a_1, \dots, a_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$, so folgt $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Abbildung 9.13: Definition von „Lineare Unabhängigkeit“ im Vorlesungsskript.

Eng verbunden mit dem Begriff der linearen Unabhängigkeit sind die Konzepte „Basis“ und „Erzeugendensystem“. So wird unter einem Erzeugendensystem einer Menge M die Menge aller Linearkombinationen der in M enthaltenen Vektoren verstanden. Ein minimales und somit linear unabhängiges Erzeugendensystem eines (Unter-)Vektorraums V wird als Basis von V bezeichnet. Jedes Element von V ist durch eine Linearkombination von Basisvektoren darstellbar. Diese drei Begriffe bilden eine wichtige Grundlage der Linearen Algebra und analytischen Geometrie I und II. Folglich ist es wichtig, dass die Studierenden ein kohärentes Begriffsverständnis zu diesen Begriffen aufbauen.

9.4.2 Kategorienschema

Nach den Vorüberlegungen in Abschnitt 9.4.1 wird nun das Kategorienschema vorgestellt, das zur Kodierung der studentischen Antworten herangezogen wurde. Grundlegende Überlegungen wurden hierzu bereits in Abschnitt 8.1.2 thematisiert. Die Elemente des Kategorienschemas gründen sich hauptsächlich auf den Überlegungen in vorangegangenem Abschnitt und wurden deduktiv vorgegeben. Es wird dabei versucht, möglichst viele Facetten des Concept-Image zu diesen Begriffen zu erfassen.

Tabelle 9.16: Kategorienschema zum Konzept „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“

| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| (L1) | Linearkombination der Null besitzt nur die triviale Lösung | 0 | 1 | |
| (L2) | Keiner der Basisvektoren ist als Linearkombination der anderen darstellbar | 0 | 1 | |
| (L3) | Jeder Vektor ist als Linearkomb. der Basisvektoren (oder durch EZS) darstellbar | 0 | 1 | |
| (L4) | Dimension des V-Raums entspricht Anzahl der Basisvektoren | 0 | 1 | |
| (L5) | Basis als minimales (oder linear unabhängiges) Erzeugendensystem | 0 | 1 | |
| (L6) | Beispiel für Basis des \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 | 0 | 1 | |
| (L7) | Beispiel für EZS des \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 , das keine Basis ist | 0 | 1 | |
| (L8) | Definition | 0 | 1 | 2 |
| (L9) | Interne Kohärenz | 0 | 1 | 2 |

Die Bewertung des mentalen Modells erfolgt nach dem Kategorienschema in Tabelle 9.16. Aus den kodierten Einheiten wird abschließend ein Summenscore gebildet, der die Qualität des zugrundeliegenden mentalen Modells widerspiegelt. Der maximal erreichbare Wert beträgt 11.

Interraterreliabilität

Wie in Abschnitt 8.1.2 beschrieben, wurden alle Analyseeinheiten des ersten Interviewtermins zum Konzept „Linear Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ von einer geschulten Raterin zweitkodiert. Dabei ergaben sich für die oben genannten Kategorien folgende Werte für das jeweilige Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa:

Tabelle 9.17: Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa Werte bzgl. des Kategorienschemas zum Konzept „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“

| L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | L7 | L8 | L9 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| κ | κ | κ | κ | κ | κ | κ | κ_w | κ_w |
| 0.824 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.968 |

9.4.3 Bewertung der mentalen Modelle

Die Ergebnisse der Kodierung der bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ relevanten Interviewpassagen unter Verwendung des in Abschnitt 8.1.2 beschriebenen Kategorienschemas sind in Tabelle 9.18 dargestellt. Ein Häkchen in der Spalte

FV bedeutet, dass bei den Studierenden eine Fehlvorstellung vorliegt. Diese Fehlvorstellungen werden nachfolgend in Abschnitt 9.4.4 klassifiziert und erläutert.

Tabelle 9.18: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 2).

| Student | L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | L7 | L8 | L9 | FV | Σ |
|---------|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------|
| S01 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 8 |
| S02 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 1</i> | | | | | | | | | | |
| S03 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S04 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 3 |
| S05 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | ✓ | 5 |
| S06 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S07 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S09 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 7 |
| S10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S11 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | ✓ | 3 |
| S12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S13 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 1</i> | | | | | | | | | | |
| S14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S16 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 2 |
| S17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S20 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 5 |
| S21 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 3 |
| S22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S24 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | | 5 |
| S25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| S26 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 7 |
| S27 | <i>Teilnahme nach Interviewtermin 1 abgebrochen</i> | | | | | | | | | | |
| S28 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S30 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 3 |
| S31 | <i>Teilnahme nach Interviewtermin 1 abgebrochen</i> | | | | | | | | | | |

Aus obiger Tabelle wird ersichtlich, dass lediglich fünf Studierende eine formale Definition von linearer Unabhängigkeit angeben konnten; 19 Teilnehmerinnen und Teilnehmer konnten keine, nicht einmal in Teilen richtige Definition nennen. In Tabelle 9.19 sind die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass bei Kategorie L8 und L9 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 54$, statt $n = 27$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag bei 16 der 27 Studierenden eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ zugrunde; dies entspricht einem Prozentsatz von 59.3 %.

Tabelle 9.19: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 2).

| Kategorie | L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | L7 | L8 | L9 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 7 | 12 | 14 | 7 | 10 | 15 | 7 | 13 | 11 | 16 |
| Relativ | 0.259 | 0.444 | 0.519 | 0.259 | 0.370 | 0.556 | 0.259 | 0.241 | 0.204 | 0.593 |

In Abbildung 9.14 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle der Studierenden nach sieben Wochen Mathematikstudium visualisiert. Studierende, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme am Interview abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

Somit erreichten 16 der 27 Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von kleiner gleich drei Punkten, was einem relativen Anteil von nahezu 60 % entspricht. Nur vier Studierende erreichten einen Summenwert von zehn oder mehr Punkten; prozentual sind dies 14.8 % der Gesamtzahl.

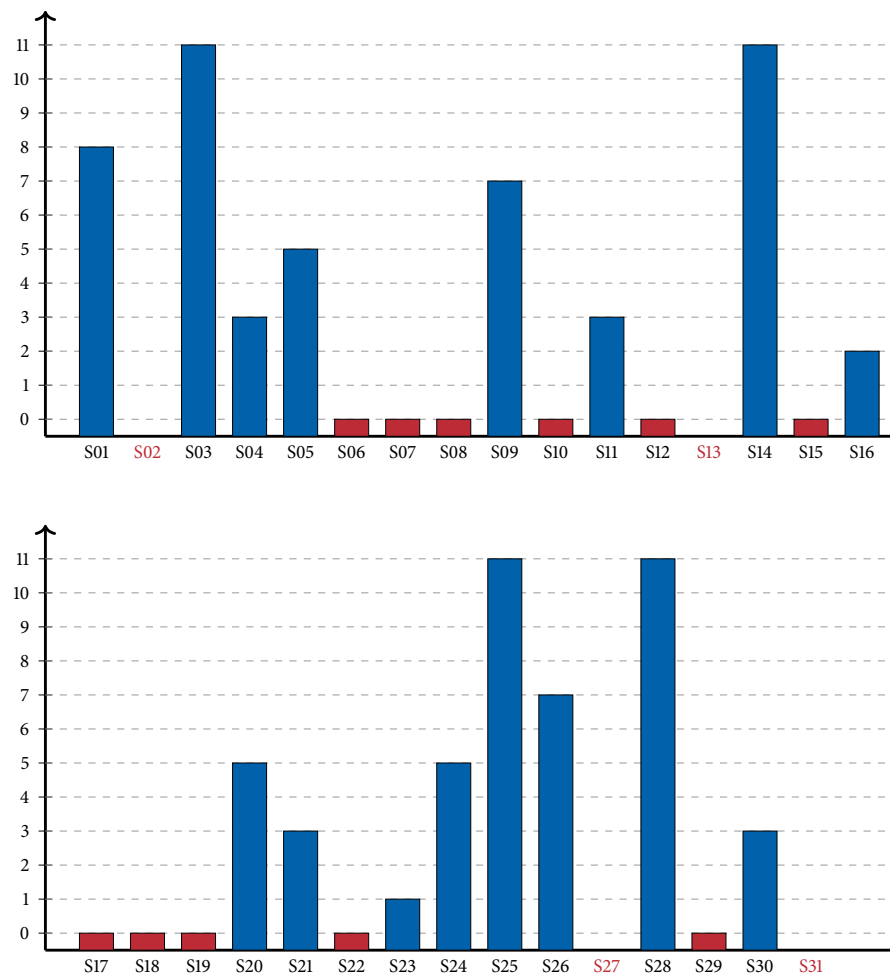


Abbildung 9.14: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 2).

9.4.4 Fehlvorstellungen

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte fünf induktiv gewonnene Kategorien. Diese sind in Abbildung 9.15 dargestellt.

Tabelle 9.20 zeigt eine Erläuterung der einzelnen Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden. Diese werden im Folgenden anhand von Interviewauszügen erläutert.

Kardinalität Basis

Diese Kategorie gliedert sich in zwei Segmente. Bei einem Teil der Studierenden zeigte sich diese Fehlvorstellung in Bezug auf die Frage, was man über drei linear unabhängige Vektoren



Abbildung 9.15: Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 2).

im \mathbb{R}^3 aussagen könne und ob diese bereits eine Basis bilden. Exemplarisch stehen hierfür die Antworten von S19 und S30:

1 **S19:** (..) Hmm nein, ich glaub das geht nicht immer. Ich mach dann nämlich (..)/ ich hab dann
 2 irgendwie den Aufspann von diesen drei Vektoren/ ahm/ (8) hmm (4). Okay, ich hab nen
 3 vierten Vektor dabei und dann setze ich den glaub ich mit denen gleich/ ach und dann mach
 4 ich glaub ich schon den Gauß.

1 **S30:** (...) Vom 3-dimensionalen Raum? Nicht unbedingt glaub ich.

Bei anderen Studierenden konnte die Fehlvorstellung identifiziert werden, indem sie nach einem Beispiel für eine Basis des \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 gefragt wurden:

1 **I:** Wenn ich jetzt $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ hernehme, dann sind die zwei Vektoren ja linear unabhängig
 2 ((Ja)). Wären die eine Basis vom \mathbb{R}^3 ?

Tabelle 9.20: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 2).

| | | |
|--|---|--|
| Kardinalität Basis | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der Anzahl linear unabhängiger Vektoren einer Basis eines vorgegebenen Vektorraums. | S04, S05, S06, S08, S11, S15, S16, S18, S19, S23, S29, S30 |
| Bedeutung linearer Unabhängigkeit | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der linearen Unabhängigkeit von Vektoren. | S06, S08, S10, S15, S18, S19, S21, S23, S29, S30 |
| Linearkombination der Null | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der in der Definition von linearer Unabhängigkeit enthaltenen Implikation der Linearkombination der Null. | S04, S07, S08, S20, S23 |
| Zusammenhang Basis und EZS | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Basis und EZS. | S04, S30 |
| Bedeutung Basis | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der Bedeutung der Basis als unverkürzbares EZS. | S06, S20 |

3 **S11:** Ich denke schon ja, weil die ja linear unabhängig sind.

1 **S18:** Puh, nein da müsste ich jetzt raten. (1, 1, 1) vielleicht?

1 **S19:** Hmm/ (...) da müsste ich jetzt raten (5) (1, 1) vielleicht? Aber ich bin mir da wirklich überhaupt
2 nicht sicher.

Bedeutung linearer Unabhängigkeit

Hier zeigte sich vor allem eine falsche bildliche Anschauung des Begriffes lineare Unabhängigkeit:

1 **S06:** Ja, dass die (...) nicht aufeinander liegen oder parallel sind.

1 **S08:** Ja, dass jetzt nicht um Beispiel einer in dieselbe Richtung geht und bloß länger ist oder so. Oder
2 die gleiche Länge hat und in eine andere Richtung geht. So stell ich mir das jetzt vor. Also, ich
3 hab da/ ich weiß nicht, ich kann mir das überhaupt nicht vorstellen ((Mhm)). Das ist einfach
4 was, was man berechnet.

- 1 **S29:** Ahm/ also dass die sich eben nicht schneiden werden vielleicht. Ja ich weiß jetzt nicht, ob das/
 2 lineare Unabhängigkeit hab ich jetzt/ das hab ich auch nicht immer auf dem/ ahm/ auf dem
 3 Schirm.

Die Vorstellung von S06 scheint zunächst nicht fehlerhaft zu sein, die Aussagen sind durchaus richtig. Im weiteren Verlauf sah S06 allerdings die drei Vektoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ als linear unabhängig an, da diese weder parallel noch identisch sind. Somit resultierte das limitierte Verständnis von S26 bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit“ in einer Fehlvorstellung. Diese Problematik zeigte sich bei vielen anderen Studierenden, die dieser Kategorie zugeordnet sind.

Linearkombination der Null

Bei fünf Studierenden zeigte sich eine Fehlvorstellung hinsichtlich der in der Definition von linearer Unabhängigkeit enthaltenen Implikation der Linearkombination der Null. Die Definition besagt, dass Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig sind, falls jede Linearkombination $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$ ($a_i \in K$ für $i = 1, \dots, n$) der Null nur die triviale Lösung $a_1 = \dots = a_n = 0$ besitzt. Exemplarisch für Fehlvorstellungen hierzu stehen die Interviewauszüge von S07 und S20:

- 1 **S07:** Ja also linear unabhängig/ das heißt, wenn es keine andere Lösung gibt, wie die triviale/ dass
 2 die Vektoren also Null werden.
- 1 **S20:** Ahm/ ich würde jetzt das damit erklären, dass sie sich sozusagen nicht durcheinander abbilden
 2 lassen würden/ durch eine Kombination. Linear abhängig wäre zum Beispiel/ ich kann einen
 3 Vektor oder einen Punkt durch eben eine Linearkombination zwier anderer erreichen ((Mhm)).
 4 Und linear unabhängig ist, wenn ich das eben nicht kann und es gibt nur eine/ ich glaub nicht-
 5 triviale Lösung, also die treffen sich nur in Null. Die einzige Kombination, die die drei bilden
 6 können ist im Ursprung.

Zusammenhang Basis und Erzeugendensystem

Bei zwei Studierenden zeigte sich ein falsches Verständnis des Zusammenhangs zwischen den Konzepten „Basis“ und „Erzeugendensystem“:

- 1 **S04:** Ja das heißt, wenn $u + v + w$ Null ist, dann müssen die drei Null sein (...)/ also lineare Unabhän-
 2 gigkeit ist halt mit nem Erzeugendensystem (.) genau.

- 1 **I:** Können Sie mir eine Basis vom \mathbb{R}^3 angeben?
- 2 **S30:** Ja $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ wäre ja die Standardbasis, also auch ne Basis.
- 3 **I:** Genau und ein Erzeugendensystem?
- 4 **S30:** Ja wieder das gleiche, das erzeugt ja auch den Raum.
- 5 **I:** Und ein Erzeugendensystem, das keine Basis ist?
- 6 **S30:** Geht das überhaupt? (..) Das weiß ich wie gesagt nicht, wie das gehen soll.

Bedeutung Basis

Bei S20 zeigte sich eine kuriose Fehlvorstellung des Konzepts „Basis“ als linear unabhängiges bzw. unverkürzbares Erzeugendensystem. Unter dem Wort „unverkürzbar“, was eigentlich impliziert, dass kein Vektor weggelassen werden kann, wurde Teilbarkeit verstanden:

- 1 **I:** Bilden die [drei linear unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^3] auch eine Basis?
- 2 **S20:** Kommt drauf an, ob es ein minimales Erzeugendensystem ist. Man könnte es natürlich so kürzen,
3 dass es eine Basis dann wäre.
- 4 **I:** Also kann es sein, dass ich bei diesen drei Vektoren im \mathbb{R}^3 noch einen Vektor weglassen kann,
5 dass es immer noch ein Erzeugendensystem ist?
- 6 **S20:** Nein nein, nicht einen Vektor weglassen, aber man kann den ja kürzen, weil ich glaub minimales
7 Erzeugendensystem heißt, dass es keinen echten Teiler gibt. So stand das in der Vorlesung glaub
8 ich. Das heißt zum Beispiel $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ das wäre/ ahm/ ein minimales Erzeu-
9 gendensystem, eine Basis und linear unabhängig. Aber zum Beispiel $(5, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 5)$
10 könnte man noch zu dem $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ kürzen.

KAPITEL 10 Ergebnisse: Mentales Modell am Ende des ersten Semesters

*„All truths are easy to understand once they are discovered;
the point is to discover them.“*
Galileo Galilei

Überblick:

| | |
|---|-----|
| 10.1 Aufbau des Interviews | 212 |
| 10.2 Injektivität und Surjektivität | 212 |
| 10.2.1 Bewertung der mentalen Modelle | 212 |
| 10.2.2 Fehlvorstellungen | 217 |
| 10.3 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem | 220 |
| 10.3.1 Bewertung der mentalen Modelle | 220 |
| 10.3.2 Fehlvorstellungen | 222 |

Der dritte Interviewtermin fand kurz vor der Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ im Zeitraum von Ende Januar 2015 bis Ende März 2015 statt. Der Grund für die lange zeitliche Spanne war, dass einige Studentinnen und Studenten erst die 2. Klausur Ende März geschrieben hatten. Von den 27 Studierenden des zweiten Interviewtermins nahmen 21 auch an diesem Zeitpunkt teil.

10.1 Aufbau des Interviews

Der Aufbau des Interviews erfolgte analog zu Interviewtermin 2 (s. Abschnitt 9.1). Es wurden die Konzepte „Injektivität“, „Surjektivität“ sowie „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ thematisiert.

10.2 Injektivität und Surjektivität

Definitionen, Vorüberlegungen sowie die Kategorienschemata sind identisch zu den Ausführungen in den Abschnitten 9.3.1 und 9.3.2.

10.2.1 Bewertung der mentalen Modelle

Die Ergebnisse der Kodierung der bzgl. Injektivität und Surjektivität relevanten Interviewpassagen unter Verwendung der in Abschnitt 9.3.2 beschriebenen Kategorienschemata sind in Tabelle 10.1 bzw. 10.3 dargestellt. Dabei sind die Studierenden, die bereits am zweiten Interviewtermin nicht mehr an der Studie teilgenommen haben, aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mehr aufgeführt. Das Symbol „✓“ in der Spalte FV bedeutet, dass bei den Studierenden eine Fehlvorstellung vorliegt. Diese Fehlvorstellungen werden nachfolgend in Abschnitt 10.2.2 klassifiziert und erläutert.

10.2.1.1 Injektivität

Tabelle 10.1: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Injektivität (Interviewtermin 3).

| Student | I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 | FV | Σ |
|---------|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----------|
| S01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | | 9 |
| S03 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | | 9 |
| S04 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | | 6 |
| S05 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | ✓ | 1 |
| S06 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|-----|--|---|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| S07 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | |
| S08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S09 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | ✓ | 6 |
| S10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S11 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | |
| S12 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | |
| S14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | | 9 |
| S15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S17 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | |
| S18 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | |
| S19 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 2 |
| S20 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 3 |
| S21 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 5 |
| S22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S23 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 3 |
| S24 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 5 |
| S25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | | 9 |
| S26 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | | 7 |
| S28 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 9 |
| S29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S30 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 5 |

Sechs Studierende konnten eine formale Definition von Injektivität korrekt angeben, neun gelang dies wenigstens in Teilen. In Tabelle 10.2 sind die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass bei Kategorie I7 und I8 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 42$ statt $n = 21$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag einem Drittel der Studierenden eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Konzepts „Injektivität“ zugrunde. Diese werden im nachfolgenden Abschnitt erläutert und klassifiziert.

Tabelle 10.2: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Injektivität (Interviewtermin 3).

| Kategorie | I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 10 | 8 | 5 | 13 | 13 | 1 | 21 | 17 | 7 |
| Relativ | 0.476 | 0.381 | 0.238 | 0.619 | 0.619 | 0.048 | 0.500 | 0.405 | 0.333 |

In Abbildung 10.1 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts Injektivität visualisiert. Studierende, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme am Interview abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

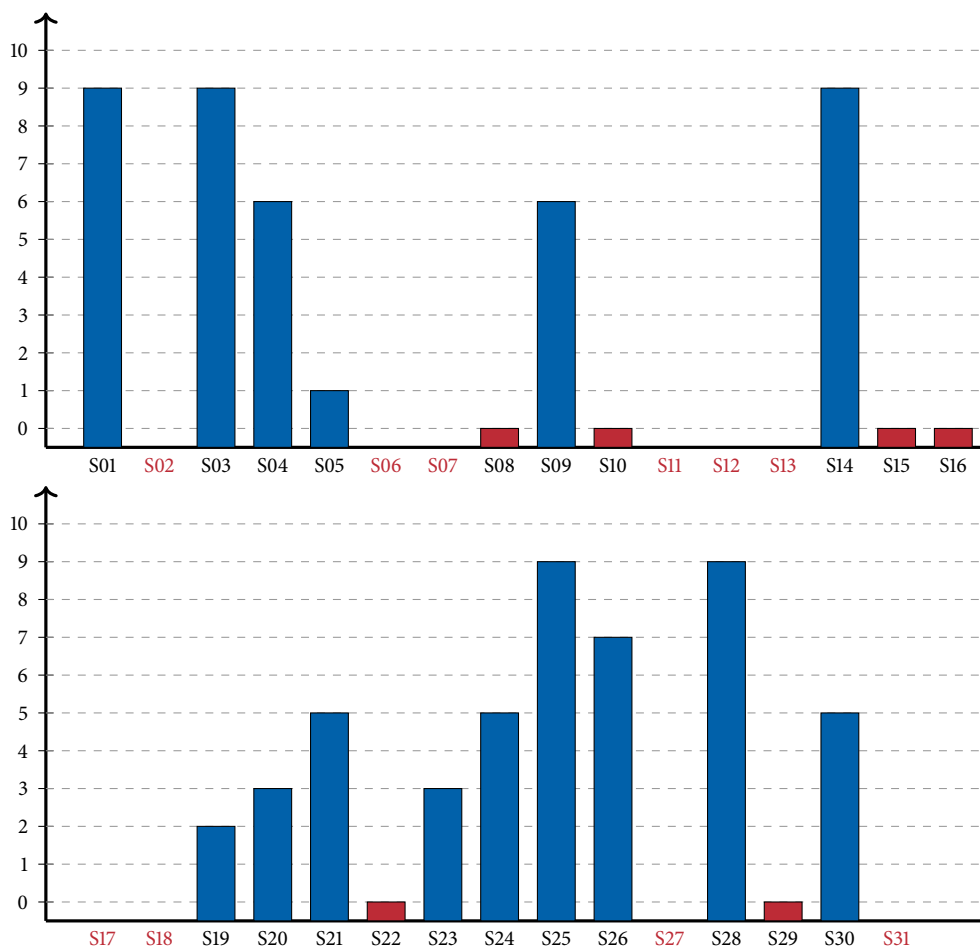


Abbildung 10.1: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Injektivität (Interviewtermin 3).

Somit erreichten sechs der 21 Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von 0; dies entspricht einem relativen Anteil von 28.6 %. Knapp die Hälfte, nämlich 47.6 %, haben einen Summenwert von kleiner gleich drei Punkten. Lediglich fünf der 21 Studierenden (23.8 %)

erzielten acht oder mehr Punkte, was ein konsistentes und fundamentiertes Verständnis des Begriffes impliziert.

10.2.1.2 Surjektivität

Tabelle 10.3: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 3).

| Student | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 | FV | Σ |
|---------|--|----|----|----|----|----|----|----------|
| S01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S03 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S04 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 7 |
| S05 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 2 |
| S06 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | |
| S07 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | |
| S08 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 |
| S09 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 3 |
| S10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 |
| S11 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | |
| S12 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | |
| S14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | | 7 |
| S15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S17 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | |
| S18 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | |
| S19 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 2 |
| S20 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 5 |
| S21 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 4 |
| S22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S23 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ | 5 |
| S24 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | | 6 |
| S25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |

| | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| S26 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | | 6 |
| S28 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S30 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | ✓ | 3 |

In Tabelle 10.4 sind die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien dargestellt. Zu beachten ist hierbei wieder, dass bei Kategorie S5 und S6 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 42$, statt $n = 21$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag bei acht der 27 Studierenden eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Abbildungskonzepts zugrunde.

Tabelle 10.4: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 3).

| Kategorie | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 16 | 6 | 14 | 11 | 19 | 18 | 8 |
| Relativ | 0.762 | 0.286 | 0.667 | 0.524 | 0.452 | 0.429 | 0.381 |

In Abbildung 10.2 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts Surjektivität visualisiert. Studierende, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme am Interview abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

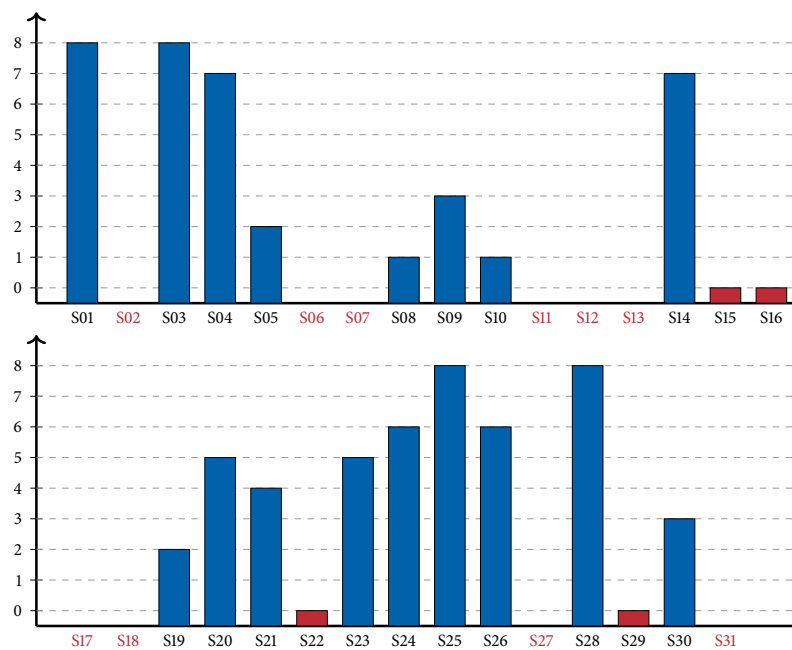


Abbildung 10.2: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 3).

Somit erreichten vier der 21 Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von 0; dies entspricht einem relativen Anteil von 19.0 %. Sechs Studierende (28.6 %) erreichten einen Summenwert von kleiner gleich zwei Punkten. Lediglich sechs der 21 Studierenden (28.6 %) erzielte sieben oder mehr Punkte, was ein konsistentes und fundamementiertes Verständnis des Begriffes impliziert.

10.2.2 Fehlvorstellungen

In diesem Abschnitt werden Fehlvorstellungen hinsichtlich der beiden Konzepte „Injektivität“ und „Surjektivität“ dargestellt und erläutert.

10.2.2.1 Injektivität

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Injektivität“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte von Interviewtermin 2 fünf induktiv gewonnene Kategorien. Diese sind in Abbildung 10.3 dargestellt.

Die einzelnen Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden sind in Tabelle 10.5 dargestellt. Im Vergleich zu Interviewtermin 2 ergaben sich keine neuen Kategorien. Die Interviewauszüge zu den jeweiligen Klassen ähneln sehr stark denen aus Abschnitt 9.3.4.1. Deshalb wird an dieser Stelle auf eine detaillierte Erläuterung verzichtet.

10.2.2.2 Surjektivität

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Surjektivität“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte von Interviewtermin 3 vier induktiv gewonnene Kategorien. Diese sind in Abbildung 10.4 dargestellt.

Die einzelnen Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden sind in Tabelle 10.6 dargestellt. Im Vergleich zu Interviewtermin 2 ergaben sich keine neuen Kategorien. Die Interviewauszüge zu den jeweiligen Klassen ähneln sehr stark denen aus Abschnitt 9.3.4.1. Deshalb wird an dieser Stelle auf eine detaillierte Erläuterung verzichtet.



Abbildung 10.3: Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ (Interviewtermin 3).

Tabelle 10.5: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 3).

| | | |
|-----------------------------------|---|---------------|
| Abbildung | Das Konzept „Injektivität“ wird mit einer oder beiden Eigenschaften (Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit) einer Abbildung gleichgesetzt. | S10, S29 |
| Fehlendes Grundverständnis | Es zeigt sich ein fehlendes Grundverständnis von mathematischen Formeln oder Prinzipien. | S15, S16, S29 |
| Nicht-Surjektivität | Unter „Injektivität“ wird die Eigenschaft „Nicht-Surjektivität“ verstanden. | S08 |
| Nicht-Injektivität | Unter „Injektivität“ wird das genaue Gegenteil verstanden. | S05, S10 |
| Bijektivität | Unter „Injektivität“ wird die Eigenschaft „Bijektivität“ verstanden. | S09 |



Abbildung 10.4: Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ (Interviewtermin 3).

Tabelle 10.6: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 3).

| | | |
|-----------------------------------|--|------------------------------|
| Abbildung | Das Konzept „Surjektivität“ wird mit einer oder beiden Eigenschaften (Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit) einer Abbildung gleichgesetzt. | S16, S22 |
| Bijektivität | Unter „Surjektivität“ wird die Eigenschaft „Bijektivität“ verstanden. | S23 |
| Nicht-Injektivität | Unter „Surjektivität“ wird die Eigenschaft „Nicht-Injektivität“ verstanden. | S29 |
| Fehlendes Grundverständnis | Es zeigt sich ein fehlendes Grundverständnis von mathematischen Formeln oder Grundprinzipien | S05, S09, S15, S16, S29, S30 |

10.3 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem

Definition, Vorüberlegungen sowie das Kategorienschema sind identisch zu den Ausführungen in den Abschnitten 9.4.1 und 9.4.2.

10.3.1 Bewertung der mentalen Modelle

Die Ergebnisse der Kodierung der bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ relevanten Interviewpassagen unter Verwendung des in Abschnitt 9.4.2 beschriebenen Kategorienschemas sind in Abbildung 10.7 dargestellt. Das Symbol „✓“ in der Spalte FV bedeutet, dass bei den Studierenden eine Fehlvorstellung vorliegt. Diese Fehlvorstellungen werden nachfolgend in Abschnitt 10.3.2 klassifiziert und erläutert.

Tabelle 10.7: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 3).

| Student | L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | L7 | L8 | L9 | FV | Σ |
|---------|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| S01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S03 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S04 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S05 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 7 |
| S06 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | | |
| S07 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | | |
| S08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S09 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 8 |
| S10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S11 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | | |
| S12 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | | |
| S14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S16 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 2 |
| S17 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 2</i> | | | | | | | | | | |

| S18 | Studienabbruch nach Interviewtermin 2 | | | | | | | | | | |
|-----|---------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| S19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S20 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | ✓ | 7 |
| S21 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 4 |
| S22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S23 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 5 |
| S24 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | ✓ | 4 |
| S25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S26 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | ✓ | 4 |
| S28 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S30 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 7 |

Aus Tabelle 10.7 wird ersichtlich, dass lediglich fünf Studierende die formale Definition von linearer Unabhängigkeit richtig wiedergeben konnten; in Teilen gelang dies vier weiteren Teilnehmerinnen und Teilnehmern. In Tabelle 10.8 sind die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass bei Kategorie L8 und L9 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $N = 42$, statt $N = 21$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag bei neun der 21 Studierenden eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ zugrunde.

Tabelle 10.8: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 3).

| Kategorie | L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | L7 | L8 | L9 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 8 | 11 | 10 | 10 | 11 | 15 | 10 | 14 | 15 | 9 |
| Relativ | 0.381 | 0.524 | 0.476 | 0.476 | 0.524 | 0.714 | 0.476 | 0.333 | 0.357 | 0.429 |

In Abbildung 10.5 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle der Studierenden am Ende des ersten Semesters visualisiert. Studierende, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme am Interview abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

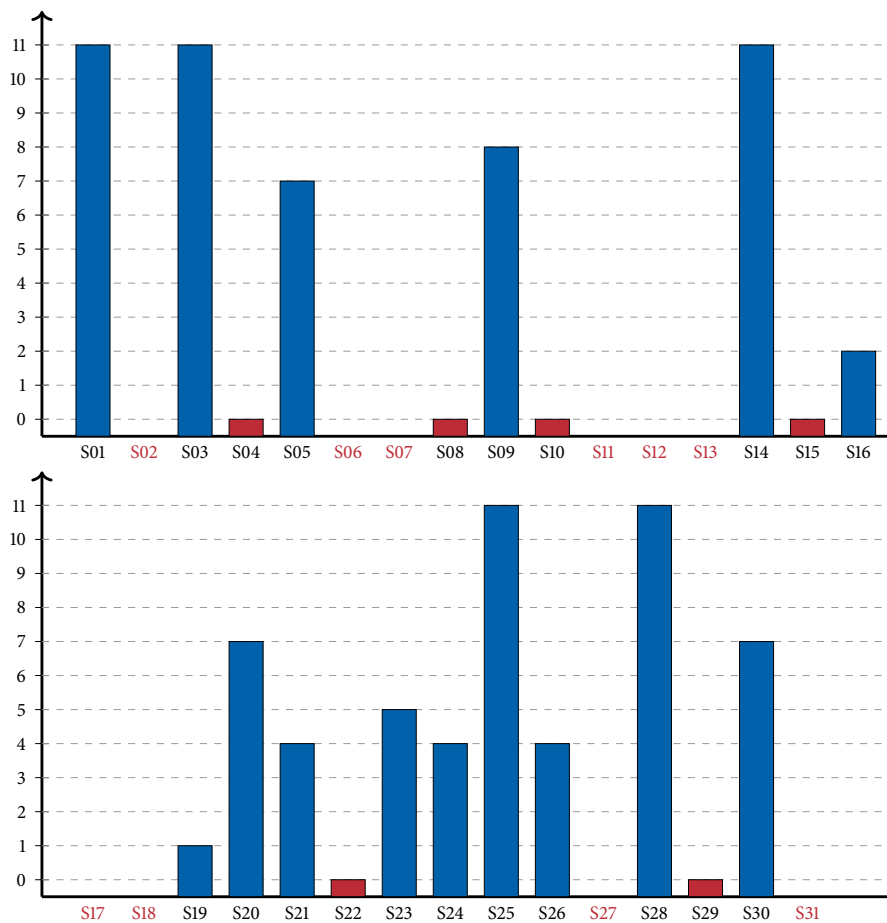


Abbildung 10.5: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 3).

Somit erreichten acht der 21 Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von kleiner gleich drei Punkten, was einem relativen Anteil von ca. 38 % entspricht. Nur fünf Studierende erzielten einen Summenwert von zehn oder mehr Punkten; prozentual sind dies 23,8 % der Gesamtzahl.

10.3.2 Fehlvorstellungen

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte von Interviewtermin 3 fünf induktiv gewonnene Kategorien; dabei handelt es sich um dieselben, die bereits bei Interviewtermin 2 identifiziert wurden. Diese sind in Abbildung 9.15 dargestellt. Die einzelnen Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden sind in Tabelle 9.20

dargestellt. Im Vergleich zu Interviewtermin 2 ergaben sich keine neuen Kategorien. Da die Interviewauszüge zu den jeweiligen Klassen denen aus Abschnitt 9.4.4 stark ähneln, wird an dieser Stelle auf eine erneute detaillierte Erläuterung verzichtet.

Tabelle 10.9: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 3).

| | | |
|--|---|------------------------------|
| Kardinalität Basis | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der Anzahl linear unabhängiger Vektoren einer Basis eines vorgegebenen Vektorraums. | S08, S15, S16, S19, S26 |
| Bedeutung linearer Unabhängigkeit | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der linearen Unabhängigkeit von Vektoren. | S08, S15, S16, S19, S21, S22 |
| Linearkombination der Null | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der in der Definition von linearer Unabhängigkeit enthaltenen Implikation der Linearkombination der Null. | S15, S16, S20, S21 |
| Zusammenhang Basis und EZS | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Basis und EZS. | S15, S22, S24, S26 |
| Bedeutung Basis | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der Bedeutung der Basis als unverkürzbares EZS. | S08, S19, S26 |

KAPITEL 11 Ergebnisse: Mentales Modell zur Mitte des zweiten Semesters

*„Understanding a concept and being able to solve tasks involving the concept may be regarded as synonyms for some students, particularly if being able to solve tasks is enough to pass courses.“
(Juter, 2017, S. 2)*

Überblick:

| | | |
|-------------|--|-----|
| 11.1 | Aufbau des Interviews | 226 |
| 11.2 | Injektivität und Surjektivität | 226 |
| 11.2.1 | Bewertung der mentalen Modelle | 226 |
| 11.2.2 | Fehlvorstellungen | 231 |
| 11.3 | Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem | 232 |
| 11.3.1 | Bewertung der mentalen Modelle | 232 |
| 11.3.2 | Fehlvorstellungen | 235 |
| 11.4 | Folgen und Folgenkonvergenz | 236 |
| 11.4.1 | Definition und Vorüberlegungen | 236 |
| 11.4.2 | Kategorienschema | 244 |
| 11.4.3 | Bewertung der mentalen Modelle | 245 |
| 11.4.4 | Fehlvorstellungen | 247 |

Der vierte Interviewtermin fand in der Mitte des zweiten Semesters im Zeitraum von Ende Juni bis Anfang Juli statt. Von den 21 Studierenden des dritten Interviewtermins nahmen 16 auch an diesem Zeitpunkt teil.

11.1 Aufbau des Interviews

Für das Gebiet „Folgen und Folgenkonvergenz“ stand nur ein Teil der Stichprobe zur Verfügung. Einige Teilnehmer nahmen nicht an der Veranstaltung „Analysis I“ teil, obwohl es der Studienplan so vorsieht. Als Hauptgrund wurde die nichtbestandene Klausur in „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ genannt. Weiter wird für den Studiengang Mathematik für das Lehramt an Realschulen im Sommersemester die Vorlesung „Elemente der Analysis I“ nicht angeboten. Diese wird laut Studienplan erst im dritten Semester besucht.

Der Interviewaufbau zu den Begriffen „Injektivität“, „Surjektivität“ und „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ verlief analog zu Termin 3. Auch im Hinblick auf das Thema „Folgen und Folgenkonvergenz“ war der Intervieweinstieg sehr offen gehalten, die Einstiegsfrage lautete „Was ist eine Folge?“. Den Studierenden blieb so freigestellt, einen formalen oder bildhaft-exemplarischen Einstieg zu wählen. Anschließend wurde um eine formale Definition des Begriffs Folge gebeten. Danach wurde das Thema Folgenkonvergenz thematisiert. Nach der Frage „Wann konvergiert eine Folge?“ wurden die Interviewteilnehmerinnen und -teilnehmer darum gebeten, möglichst anschaulich zu beschreiben, was sie unter dem Begriff Folgenkonvergenz verstehen. Ziel war hierbei, herauszufinden, inwieweit ihnen ihre Vorstellung dabei hilft, anschließend Folgenkonvergenz formal zu definieren bzw. den Konvergenznachweis an der Beispielfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ durchzuführen. Abschließend wurde noch nach einem Beispiel für eine konvergente und eine nicht-konvergente Folge gefragt.

11.2 Injektivität und Surjektivität

Definitionen, Vorüberlegungen sowie das Kategorienschema sind identisch zu den Ausführungen in den Abschnitten 9.3.1 und 9.3.2.

11.2.1 Bewertung der mentalen Modelle

Die Ergebnisse der Kodierung der bzgl. Injektivität und Surjektivität relevanten Interviewpassagen unter Verwendung der in Abschnitt 9.3.2 beschriebenen Kategorienschemata sind in Tabelle 11.1 bzw. 11.3 dargestellt. Dabei sind diejenigen Studierenden, die bereits am dritten

In Tabelle 11.2 sind die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass bei Kategorie I7 und I8 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 32$, statt $n = 16$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag bei sechs der 16 Studierenden eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Konzepts „Injektivität“ zugrunde. Diese werden im nachfolgenden Abschnitt erläutert und klassifiziert.

Tabelle 11.2: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Injektivität (Interviewtermin 4).

| Kategorie | I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 8 | 10 | 9 | 14 | 11 | 0 | 17 | 18 | 6 |
| Relativ | 0.500 | 0.625 | 0.563 | 0.875 | 0.688 | 0.000 | 0.531 | 0.563 | 0.375 |

In Abbildung 11.1 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts Injektivität visualisiert. Studierende, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme am Interview abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

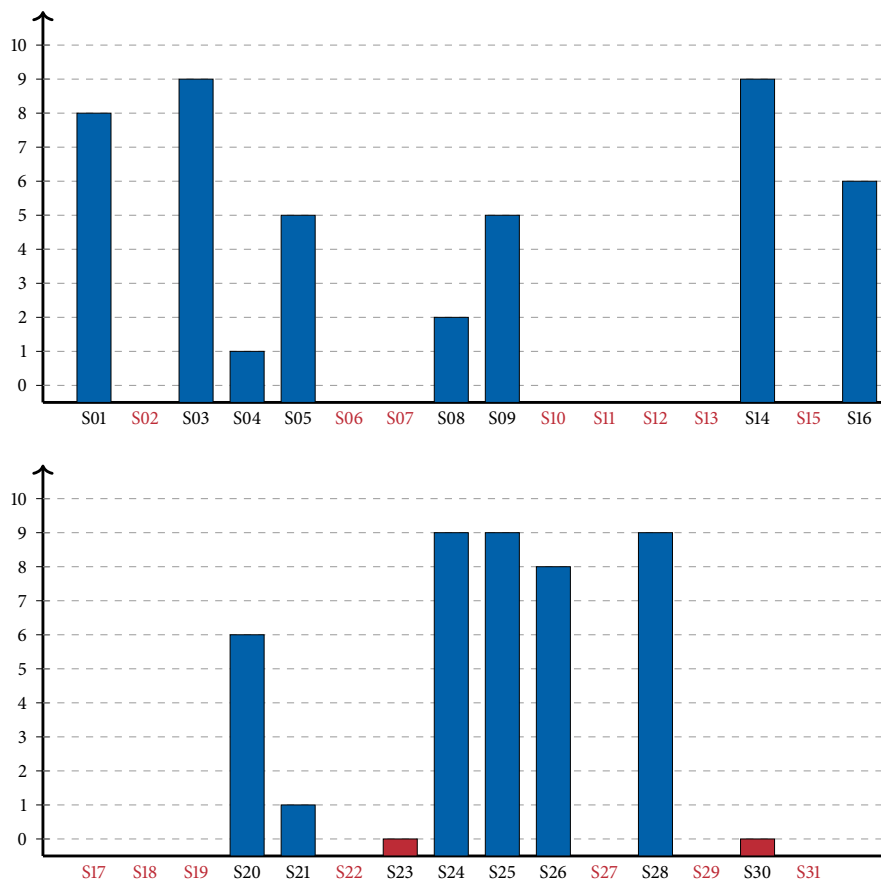


Abbildung 11.1: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Injektivität (Interviewtermin 4).

Somit erreichten zwei der 16 Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von 0; dies entspricht einem relativen Anteil von 12.5 %. Knapp ein Drittel (31.3 %) wies einen Summenwert von kleiner gleich drei Punkten auf. Fünf der 16 Studierenden (31.3 %) erzielten neun oder mehr Punkte, was ein konsistentes und fundamentiertes Verständnis des Begriffes impliziert.

11.2.1.2 Surjektivität

Tabelle 11.3: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 4).

| Student | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 | FV | Σ |
|---------|--|----|----|----|----|----|----|----------|
| S01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S03 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S04 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S05 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | ✓ | 4 |
| S08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S09 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 5 |
| S10 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | |
| S14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S15 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | |
| S16 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 2 |
| S19 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | |
| S20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | | 7 |
| S21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 5 |
| S22 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | |
| S23 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 3 |
| S24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S25 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 7 |
| S26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 8 |
| S28 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 7 |
| S29 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | |
| S30 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | | 6 |

In Tabelle 11.4 sind die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien dargestellt. Zu beachten ist hierbei wieder, dass bei Kategorie S5 und S6 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 32$, statt $n = 16$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag bei vier der 16 Studierenden eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Abbildungskonzepts zugrunde.

Tabelle 11.4: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 4).

| Kategorie | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 13 | 9 | 15 | 15 | 20 | 22 | 4 |
| Relativ | 0.813 | 0.563 | 0.938 | 0.938 | 0.625 | 0.688 | 0.250 |

In Abbildung 11.2 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts Surjektivität visualisiert. Studierende, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme am Interview abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

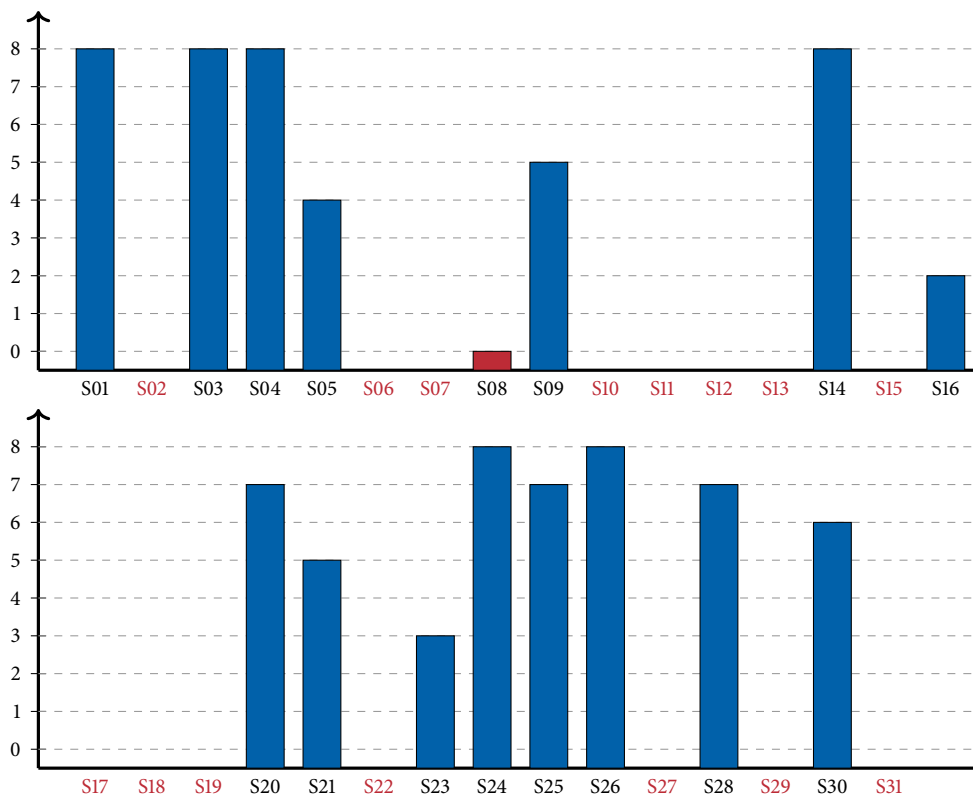


Abbildung 11.2: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 4).

Somit erreichte eine / einer der 16 Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von 0; dies entspricht einem relativen Anteil von 6.3 %. Neun der 16 Studierenden (56.3 %) erzielten

sieben oder mehr Punkte, was ein konsistentes und fundamementiertes Verständnis des Begriffes impliziert.

11.2.2 Fehlvorstellungen

In diesem Abschnitt werden Fehlvorstellungen hinsichtlich der beiden Konzepte „Injektivität“ und „Surjektivität“ dargestellt und erläutert, die sich bei Interviewtermin 4 (Mitte zweites Semester) gezeigt haben.

11.2.2.1 Injektivität

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Injektivität“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte von Interviewtermin 4 die drei induktiv gewonnenen Kategorien „Abbildung“, „Nicht-Surjektivität“ und „Bijektivität“. Diese Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden sind in Tabelle 11.5 dargestellt.

Tabelle 11.5: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 4).

| | | |
|----------------------------|---|-------------------------|
| Abbildung | Das Konzept „Injektivität“ wird mit einer oder beiden Eigenschaften (Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit) einer Abbildung gleichgesetzt. | S04, S08, S21, S23, S30 |
| Bijektivität | Unter „Injektivität“ wird die Eigenschaft „Bijektivität“ verstanden. | S09 |
| Nicht-Surjektivität | Unter „Injektivität“ wird die Eigenschaft „Nicht-Surjektivität“ verstanden. | S08 |

Im Vergleich zu Interviewtermin 2 und 3 ergaben sich keine neuen Kategorien. Da die Interviewauszüge zu den jeweiligen Klassen denen aus Abschnitt 9.3.4.1 sehr stark ähneln, wird an dieser Stelle auf eine detaillierte Erläuterung verzichtet.

11.2.2.2 Surjektivität

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Surjektivität“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte von Interviewtermin 4 die vier induktiv gewonnenen Kategorien „Abbildung“, „Fehlendes Grundverständnis“, „Nicht-Surjektivität“ und „Nicht-Injektivität“. Diese Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden sind in Tabelle 11.6 dargestellt.

Tabelle 11.6: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 4).

| | | |
|-----------------------------------|--|---------------|
| Abbildung | Das Konzept „Surjektivität“ wird mit einer oder beiden Eigenschaften (Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit) einer Abbildung gleichgesetzt. | S16 |
| Fehlendes Grundverständnis | Es zeigt sich ein fehlendes Grundverständnis von mathematischen Formeln oder Grundprinzipien. | S05, S16, S23 |
| Nicht-Injektivität | Unter „Surjektivität“ wird die Eigenschaft „Nicht-Injektivität“ verstanden. | S16 |
| Nicht-Surjektivität | Unter „Surjektivität“ wird das genaue Gegenteil verstanden. | S08 |

Im Vergleich zu Interviewtermin 2 und 3 ergaben sich keine neuen Kategorien. Da die Interviewauszüge zu den jeweiligen Klassen denen aus Abschnitt 9.3.4.1 sehr stark ähneln, wird an dieser Stelle auf eine detaillierte Erläuterung verzichtet.

11.3 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem

Definition, Vorüberlegungen sowie das Kategorienschema sind identisch zu den Ausführungen in den Abschnitten 9.4.1 und 9.4.2.

11.3.1 Bewertung der mentalen Modelle

Die Ergebnisse der Kodierung der bzgl. Injektivität und Surjektivität relevanten Interviewpassagen unter Verwendung des in Abschnitt 9.4.2 beschriebenen Kategorienschemas sind in

Tabelle 11.7 dargestellt. Das Symbol „✓“ in der Spalte FV bedeutet, dass bei den Studierenden eine Fehlvorstellung vorliegt. Diese Fehlvorstellungen werden nachfolgend in Abschnitt 11.3.2 klassifiziert und erläutert.

Tabelle 11.7: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 4).

| Student | L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | L7 | L8 | L9 | FV | Σ |
|---------|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| S01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | | 10 |
| S03 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S04 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| S05 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ | 8 |
| S08 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S09 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 8 |
| S10 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | | | | |
| S14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 9 |
| S15 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | | | | |
| S16 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 1 |
| S19 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | | | | |
| S20 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | ✓ | 6 |
| S21 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 6 |
| S22 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | | | | |
| S23 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 3 |
| S24 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 2 |
| S25 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 7 |
| S26 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 7 |
| S28 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 11 |
| S29 | <i>Studienabbruch nach Interviewtermin 3</i> | | | | | | | | | | |
| S30 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 6 |

Aus obiger Tabelle wird ersichtlich, dass lediglich zwei Studierende die formale Definition von linearer Unabhängigkeit richtig angeben konnten, in Teilen gelang dies fünf weiteren Teilneh-

merinnen und Teilnehmern. In Tabelle 11.8 sind die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass bei Kategorie L8 und L9 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 32$ statt $n = 16$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag bei sechs der 16 Studierenden eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ zugrunde. Diese werden im nachfolgenden Abschnitt erläutert und klassifiziert.

Tabelle 11.8: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 4).

| Kategorie | L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | L7 | L8 | L9 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 7 | 12 | 11 | 9 | 11 | 13 | 10 | 9 | 14 | 6 |
| Relativ | 0.438 | 0.750 | 0.688 | 0.563 | 0.688 | 0.813 | 0.625 | 0.281 | 0.438 | 0.375 |

In Abbildung 11.3 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle der Studierenden Mitte des zweiten Semesters visualisiert. Studierende, die zu diesem Zeitpunkt ihr Studium bzw. die Teilnahme am Interview abgebrochen hatten, sind rot eingefärbt.

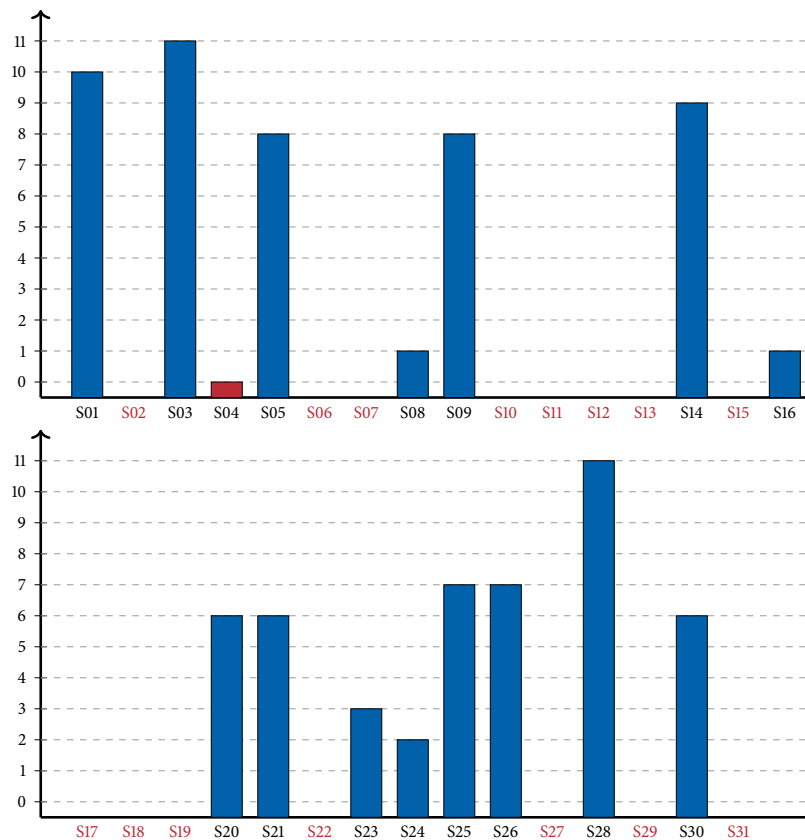


Abbildung 11.3: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 4).

Somit erreichten fünf Studierende einen Summenwert von kleiner gleich 3 Punkten, was einem relativen Anteil von 31.25 % entspricht. Lediglich drei Teilnehmerinnen und Teilnehmer erzielten 10 oder mehr Punkte; dies entspricht einem relativen Anteil von 18.75 %.

11.3.2 Fehlvorstellungen

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte von Termin 4 fünf induktiv gewonnene Kategorien; dabei handelt es sich um dieselben, die bereits bei Interviewtermin 2 und 3 identifiziert wurde. Diese sind in Abbildung 9.15 dargestellt. Die einzelnen Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden zeigt Tabelle 11.9. Im Vergleich zu den Zeitpunkten 2 und 3 ergaben sich keine neuen Kategorien. Da die Interviewauszüge zu den jeweiligen Klassen denen aus Abschnitt 9.4.4 stark ähneln, wird an dieser Stelle auf eine erneute detaillierte Erläuterung verzichtet.

Tabelle 11.9: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 4).

| | | |
|--|---|---------------|
| Kardinalität Basis | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der Anzahl linear unabhängiger Vektoren einer Basis eines vorgegebenen Vektorraums. | S08, S16, S24 |
| Bedeutung linearer Unabhängigkeit | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der linearen Unabhängigkeit von Vektoren. | S23 |
| Linearkombination der Null | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der in der Definition von linearer Unabhängigkeit enthaltenen Implikation der Linearkombination der Null. | S16, S20 |
| Zusammenhang Basis und EZS | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Basis und EZS. | S05, S16 |
| Bedeutung Basis | Es zeigt sich ein falsches Verständnis hinsichtlich der Bedeutung der Basis als unverkürzbares EZS. | S08, S23 |

11.4 Folgen und Folgenkonvergenz

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse und Auswertung zum Konzept „Folgen und Folgenkonvergenz“ vorgestellt. Abschnitt 11.4.1 thematisiert zunächst Vorüberlegungen zu diesem Begriff. Weiter wird in Abschnitt 11.4.2 das Kategorienschema (vgl. auch Abschnitt 8.1.2) beschrieben. In Abschnitt 11.4.3 sind die Ergebnisse der Kodierung der mentalen Modelle dargestellt. Abschnitt 11.4.4 enthält eine Klassifikation und Erläuterung von Fehlvorstellungen.

11.4.1 Definition und Vorüberlegungen

Dieser Abschnitt bietet einerseits Definitionen der Konzepte „Folgen“ und „Folgenkonvergenz“, andererseits werden Vorüberlegungen zum Grenzwertbegriff an Schule und Universität thematisiert, die im Hinblick auf die Konzepte von Bedeutung sind.

11.4.1.1 Folgen und Folgenkonvergenz an der Universität

Folgen bilden einen wichtigen Grundstein jeder Analysis-Vorlesung, da viele weitere Begriffe, wie etwa Reihen, Potenzreihen und Grenzwerte darauf basierend eingeführt werden. Ein zentrales Element stellt in diesem Zusammenhang die Untersuchung der Konvergenz von Folgen dar. Diese wird über das sog. ε - N_ε -Kriterium definiert; siehe Abbildung 11.4.

Besonders die Kurzform dieser Definition,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon,$$

ist ohne eine angemessene Vorstellung nur schwer nachvollziehbar. Zunächst soll versucht werden, ein konsistentes und umfangreiches Verständnis des Begriffes „Folgenkonvergenz“ aufzuzeigen. Die Überlegungen spielen insbesondere im Hinblick auf die Entwicklung des Kategorienschemas eine wichtige Rolle.

Bei einer Folge handelt es sich um eine Funktion aus den natürlichen Zahlen in einen Körper (ohne Einschränkung werden hier die reellen Zahlen \mathbb{R} gewählt). Die Beispiel-Folge soll gegen den Grenzwert 0 konvergieren (s. Abbildung 11.5).

Folgenkonvergenz (Forster, 2016, S. 36)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Man beachte, dass die Zahl N von ε abhängt. Im Allgemeinen wird man N umso größer wählen müssen, je kleiner ε ist.

Konvergiert (a_n) gegen a , so nennt man a den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge und schreibt Die Zahl a heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge, und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder kurz} \quad \lim a_n = a .$$

Auch die Schreibweise

$$a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(gelesen: a_n strebt gegen a für n gegen unendlich) ist gebräuchlich.

Abbildung 11.4: Definition von Folgenkonvergenz.

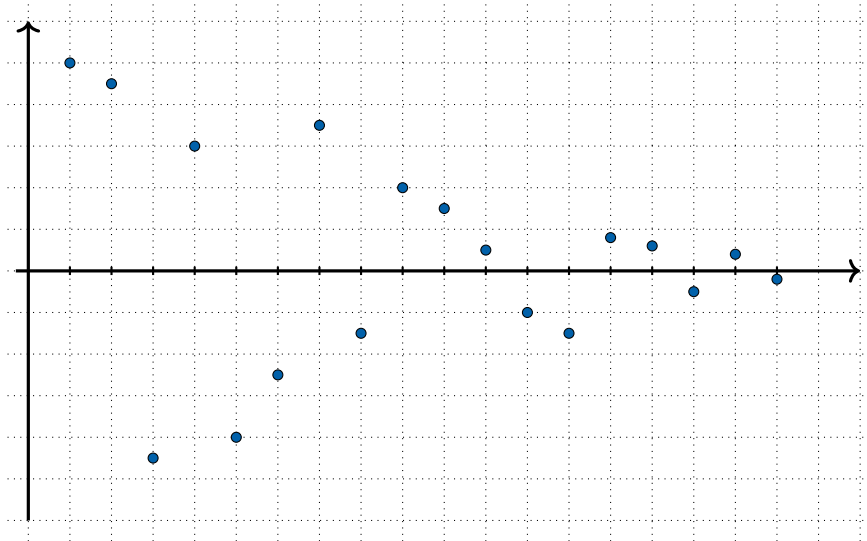


Abbildung 11.5: Beispielfolge mit Grenzwert 0.

Ein wichtiges Charakteristikum einer Folge ist ihr Definitionsbereich, die natürlichen Zahlen. Der Graph einer Folge besteht folglich aus einzelnen Punkten. In der Definition heißt es nun weiter, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Der Ausdruck $|a_n - a|$ steht für den Abstand des n -ten Folgenglieds vom Grenzwert a ; im vorliegenden Fall gilt $a = 0$. Das ε gibt also einen Rahmen vor, innerhalb dem sich alle Folgenglieder

ab einer bestimmten natürlichen Zahl befinden müssen. Hierzu wird zunächst ein beliebiges ε vorgegeben, das in Abbildung 11.5 eingezeichnet wird:

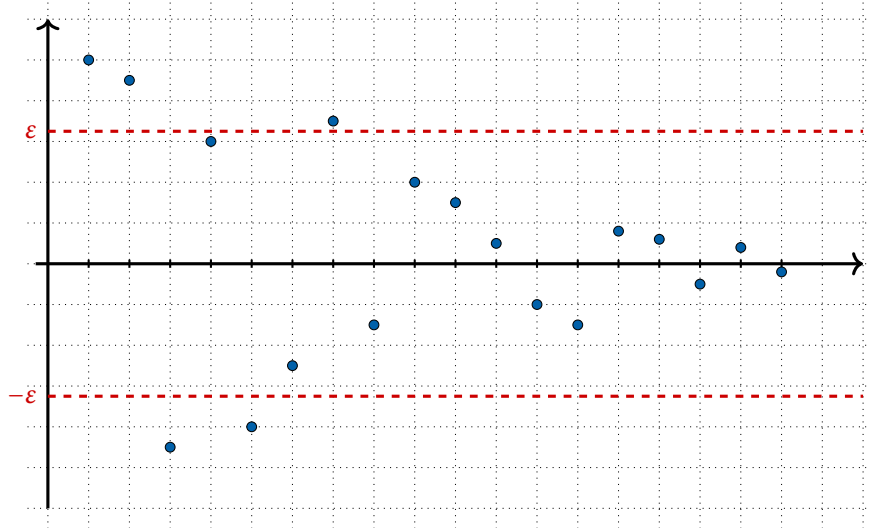


Abbildung 11.6: Folgenkonvergenz: Vorgeben einer Abweichtoleranz ε vom Grenzwert.

Nach der Wahl von ε sucht man nach einer natürlichen Zahl N , ab der alle weiteren Folgenglieder um weniger als ε vom Grenzwert abweichen. Angewendet auf die Beispielfolge ergibt sich somit etwa folgendes N :

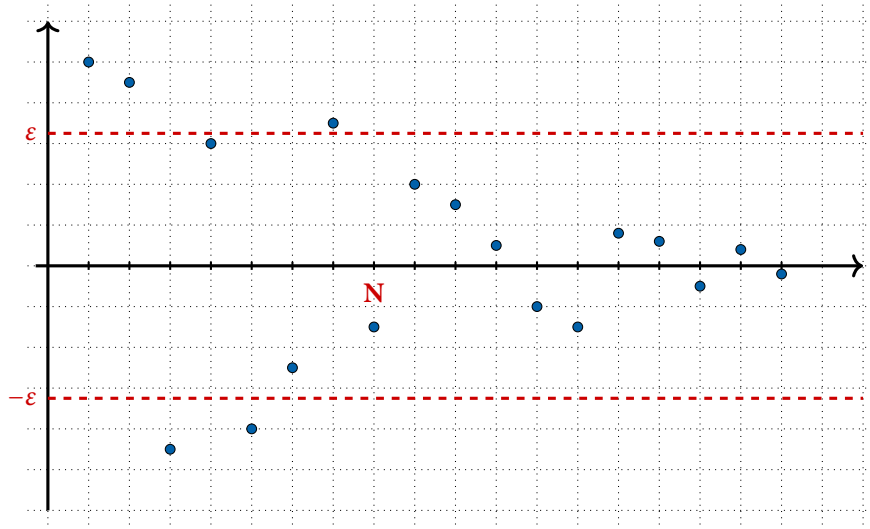


Abbildung 11.7: Folgenkonvergenz: Finden eines für ε passenden Wertes N .

In der Definition heißt es „Für alle $\varepsilon > 0$ “, d.h. man kann ε auch kleiner wählen. Zur besseren Übersicht wird dieses im Folgenden als $\tilde{\varepsilon}$ bezeichnet:

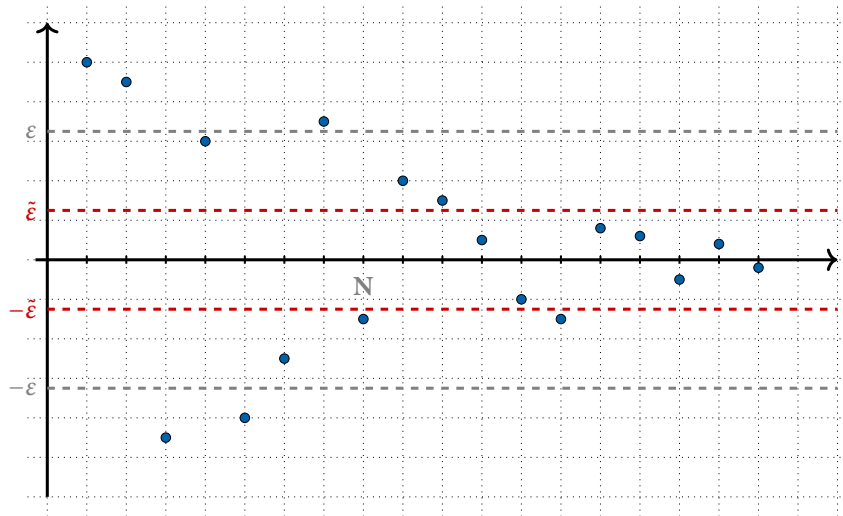


Abbildung 11.8: Folgenkonvergenz: Vorgeben einer kleineren Abweichungstoleranz $\tilde{\epsilon}$ vom Grenzwert.

Das für den Wert ϵ gewählte N kann für $\tilde{\epsilon}$ nicht mehr verwendet werden, da es nach N noch Folgenglieder außerhalb des „ $\tilde{\epsilon}$ -Schlauches“ gibt. Es wird also ein \tilde{N} benötigt, ab dem alle Folgenglieder innerhalb der durch $\tilde{\epsilon}$ vorgegebenen Toleranz bzgl. der Abweichung vom Grenzwert liegen. Diese Eigenschaft wird etwa von folgendem \tilde{N} erfüllt:

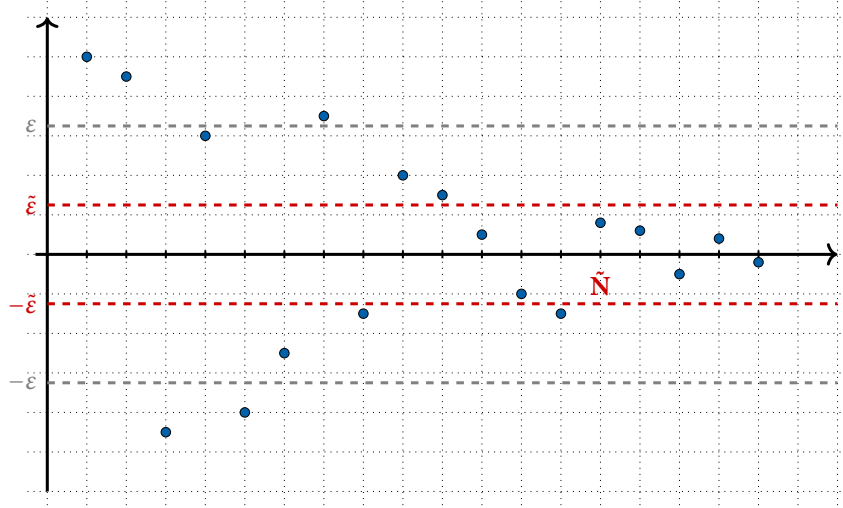


Abbildung 11.9: Folgenkonvergenz: Finden eines für $\tilde{\epsilon}$ passenden Wertes \tilde{N} .

Dieser Schritt (Verkleinern des Wertes von ϵ) lässt sich nun induktiv fortsetzen. Mit kleiner werdenden ϵ wird der Wert von N immer größer werden. Findet man zu jedem noch so kleinen Wert von ϵ eine Zahl N , ab der alle Folgenglieder nur noch weniger als ϵ von einem vorgegebenen Wert a abweichen, konvergiert die Folge gegen diesen Grenzwert a .

Diese Visualisierung von Folgenkonvergenz hat allerdings Grenzen. In den vorherigen Grafiken ist nur ein kleiner Ausschnitt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu sehen. Für das in Abbildung 11.6 gewählte N kann für die vorgegebene Beispielfolge allerdings nicht hundertprozentig sichergestellt werden, ob nicht für größere (als in der Abbildung dargestellte) Werte für n Folgenglieder wieder außerhalb des Toleranzbereichs liegen. Ein berühmtes Beispiel in Bezug auf diese Problematik ist die Definition der Wahrscheinlichkeit durch Richard von Mises (1883-1953). Im Artikel *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* definierte von Mises (1919) „Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines zu A zugehörigen Merkmales innerhalb des Kollektives K “ durch

$$\lim_{N=\infty} \frac{N_A}{N} = W_A.$$

In heutiger Schreibweise würde diese wohl eher wie folgt lauten:

$$P(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(A),$$

wobei $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A sowie $h_n(A)$ die relative Häufigkeit des Eintretens von A nach n Versuchen bezeichnet. In den ehemaligen Schulbüchern *Stochastik Grundkurs* und *Stochastik Leistungskurs* von Barth et al. (2001) war dazu zu lesen: „Die Definition der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* (nämlich *nach* dem Ausführen einer langen Reihe von Versuchen) als Grenzwert stieß auf theoretische Schwierigkeiten, da der Limesbegriff sich nicht auf eine vom Zufall beherrschte Folge anwenden ließ. Es ist zum Beispiel nicht möglich, zu einem vorgegebenen ε ein $n_0 \in \mathbb{N}$ anzugeben, dass $|h_n(A) - P(A)| < \varepsilon$ für *alle* $n > n_0$. Es ist nämlich nicht auszuschließen, da[ss] auch für sehr großes n die relative Häufigkeit $h_n(A)$ sich immer wieder einmal um mehr als ε von dem 'Grenzwert' $P(A)$ unterscheidet“ (Barth et al., 2001, S. 68); s. Abbildung 11.10.

Es ist folglich falsch, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|h_n(A) - P(A)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, da nicht ausgeschlossen werden kann, dass in einer Versuchsreihe die relativen Häufigkeiten auch für beliebig große n auch außerhalb der ε -Umgebung liegen. Diese Problematik zwischen „Stabilisieren“ und „Konvergieren“ findet sich auch im derzeitigen Lehrplan des achtjährigen Gymnasiums wieder, auf den im nächsten Abschnitt gesondert eingegangen wird.

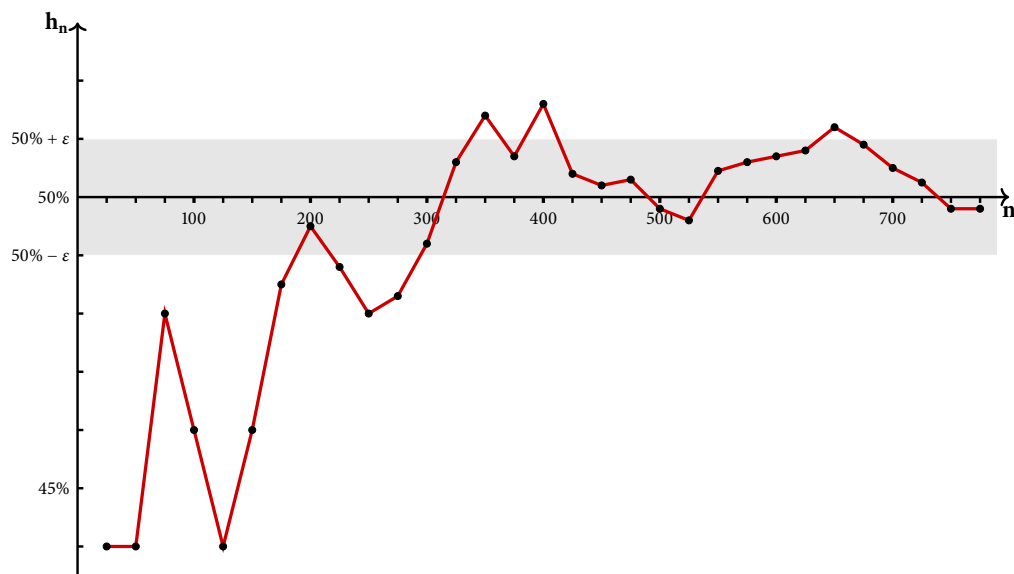
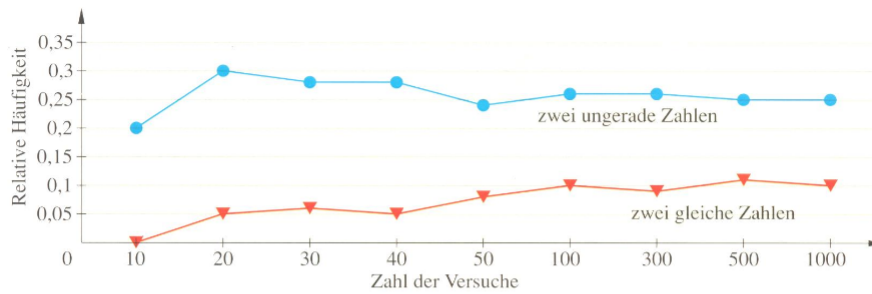


Abbildung 11.10: Relative Häufigkeit h_n (Adler) bei 800 Münzwürfen (nach Barth et al., 2001, S. 71.)

11.4.1.2 Konvergieren vs. Stabilisieren: Der „Konvergenzbegriff“ in der Schule

Studierende bringen in Bezug auf den Konvergenzbegriff bereits Vorstellungen und Anschauungen aus der Schule mit, die im Hinblick auf die formale Definition zu Problemen führen können. Die Begriffe „Konvergieren“ und „Stabilisieren“ finden sich im Lehrplan des achtjährigen Gymnasiums in Bayern sowohl in den Bereichen Stochastik als auch in der Infinitesimalrechnung. In den aktuellen Lehrplänen ist das sogenannte „Empirische Gesetz der großen Zahlen“ bereits im Mathematikunterricht der Unterstufe (6. Klasse) verankert. Die Schülerinnen und Schüler „lernen [...] die relative Häufigkeit [...] als Mittel zur Bewertung einzelner Ergebnisse und als sinnvollen Schätzwert zur Vorhersage von Gewinnchancen (empirisches Gesetz der großen Zahlen) kennen“ (Bayrischer Lehrplan für die 6. Jahrgangsstufe des achtjährigen Gymnasiums, M. 6.1.3). Das „empirische Gesetz der großen Zahlen“ wird dabei rein aus der Anschauung gewonnen (vgl. Abbildung 11.11).

In einem anderen Schulbuch wird es wie folgt formuliert: „Die Erfahrung zeigt, dass sich nach einer ‚großen‘ Anzahl von Durchführungen eines Zufallsexperiments die relative Häufigkeit eines Versuchsergebnisses bei weiteren Durchführungen kaum noch verändert“ (Eisentraut & Schätz, 2009, S. 64). In diesem Zusammenhang wird auch oft von einer „Stabilisierung“ der relativen Häufigkeit um einen bestimmten Wert gesprochen, welcher den Schülerinnen und Schülern



Wie man aus dem **Liniendiagramm** erkennen kann, stabilisiert sich die relative Häufigkeit für Zahlenpaare aus zwei ungeraden Zahlen bei $0,25 = 25\%$ und für Zahlenpaare aus zwei gleichen Zahlen bei $0,1 = 10\%$.

Dieses Ergebnis erwartet man auch, da unter den 100 verschiedenen Zahlenpaaren, die auftreten können, 25 Zahlenpaare aus zwei ungeraden Zahlen vorkommen, nämlich $(1; 1), (1; 3), (1; 5), \dots, (9; 7), (9; 9)$, und 10 Zahlenpaare aus zwei gleichen Zahlen, nämlich $(0; 0), (1; 1), (2; 2), \dots, (8; 8), (9; 9)$.

Bei 1000-maliger Durchführung erwartet man folglich ungefähr 250 Zahlenpaare aus zwei ungeraden Zahlen und etwa 100 Zahlenpaare aus zwei gleichen Zahlen.

Die Tatsache, dass sich die relative Häufigkeit bei wachsender Zahl der Ziehungen jeweils um einen bestimmten Wert stabilisiert, nennt man das **empirische¹ Gesetz der großen Zahlen**.

Abbildung 11.11: Einführung des „empirischen Gesetz der großen Zahlen“ im Schulbuch (Brunnermeier et al., 2004, S. 65)

als „Wahrscheinlichkeit“ vorgestellt wird.

Mit dem Grenzwertbegriff der Analysis treten die Schülerinnen und Schüler erstmals in der 10. Jahrgangsstufe in Kontakt. Dieser wird „[a]nhand des unterschiedlichen Verhaltens von Funktionen an den Rändern ihres jeweiligen Definitionsbereichs“ lediglich „aus der Anschauung heraus“ gewonnen (Bayrischer Lehrplan für die 10. Jahrgangsstufe des achtjährigen Gymnasiums, M. 10.5.2); von einer formalen Definition wird an dieser Stelle explizit abgesehen. Eine Formulierung des Grenzwertbegriffs erfolgt in Prosa (s. Abbildung 11.12).

Kommen die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f für beliebig groß werdende x -Werte einer Zahl a beliebig nahe, so nennt man a den Grenzwert der Funktion f für x gegen plus unendlich ($x \rightarrow +\infty$).

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$

Die Gerade $y = a$ ist waagrechte Asymptote des Graphen von f .

Entsprechend ist der Grenzwert einer Funktion f für $x \rightarrow -\infty$ definiert.

Abbildung 11.12: Eine in Prosa gehaltene Definition des Grenzwerts im Schulbuch (Schmid & Weidig, 2008, S. 142)

Brandl (2013a) spricht hierbei von einem „Nährboden für Fehlvorstellungen“ (S. 41):

Die Propädeutik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Unterstufe kann bei unreflektierter Verallgemeinerung zu verschiedenen Fehlvorstellungen führen, die mit dem, zu diesem Zeitpunkt erst vage im Raum stehenden Begriff der Konvergenz zu tun haben. Deutet man nämlich die 'Stabilisierung' der relativen Häufigkeiten $h_n(A)$ eines Ereignisses A im empirischen Gesetz der großen Zahlen als 'Konvergenz' im Sinne der Analysis, so definiert dies für ein Ereignis A eine objektive A-posteriori-Wahrscheinlichkeit (auch: frequentistische oder statistische Wahrscheinlichkeit): $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(A)$.

An dieser Stelle treten ähnliche Probleme auf, die bereits bei der von Richard von Mises vorgeschlagenen Definition der Wahrscheinlichkeit 1919 für kontroverse Diskussionen geführt haben (vgl. Ende Abschnitt 11.4.1): „Der charakteristische Unterschied zwischen 'Stabilisierung' [...] und 'Konvergenz' im Sinne der Analysis besteht darin, dass man für Ersteres zu einer vorgegebenen Schranke keine Anzahl von Durchführungen des Experiments angeben kann, von der ab der Betrag der Differenz von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit mit Sicherheit stets kleiner als diese Schranke ausfällt. Es werden lediglich größere Abweichungen immer unwahrscheinlicher“ (Brandl, 2013a, S.,41).

Ein weiteres Problem des in der Schule durch Anschauung gewonnenen Grenzwertbegriffs ist die Formulierung „der Graph nähert sich an die Asymptote im Unendlichen beliebig nahe an, erreicht diese allerdings nie“. So gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ aber $\frac{1}{x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In Bezug auf die Konvergenz von Folgen könnte es hier etwa bei der konstanten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ zu Schwierigkeiten kommen. Die Folge konvergiert nach dem Kriterium für Folgenkonvergenz gegen den Wert 1, da für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$$

Der Grenzwert wird also tatsächlich „erreicht“ bzw. wird in diesem Fall sogar von allen Folgengliedern angenommen.

11.4.2 Kategorienschema

Das nachfolgende Kategorienschema, dass zur Kodierung der studentischen Antworten herangezogen wurde, entstand aus der Vorüberlegungen in Abschnitt 11.4.1. Grundlegende Überlegungen wurden hierzu bereits in Abschnitt 8.1.2 thematisiert.

Tabelle 11.10: Kategorienschema zum Konzept „Folgen und Folgenkonvergenz“

| | | | | |
|-------|--|---|---|---|
| (F1) | Folge als Funktion von den natürlichen Zahlen in einen Körper (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) | 0 | 1 | |
| (F2) | Graph einer Folge besteht aus einzelnen Punkten | 0 | 1 | |
| (F3) | Definition Folge | 0 | 1 | 2 |
| (F4) | Konvergente Folge nähert sich beliebig nahe an Grenzwert a an | 0 | 1 | |
| (F5) | Je kleiner ε , umso größer wird N_ε | 0 | 1 | |
| (F6) | Beispiel für eine konvergente Folge | 0 | 1 | |
| (F7) | Beispiel für eine nicht konvergente Folge | 0 | 1 | |
| (F8) | Visualisierung von Folgenkonvergenz | 0 | 1 | |
| (F9) | Definition von Folgenkonvergenz | 0 | 1 | 2 |
| (F10) | Anwendung auf Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ | 0 | 1 | 2 |
| (F11) | Interne Kohärenz | 0 | 1 | 2 |

Die Bewertung des mentalen Modells erfolgt nach dem Kategorienschema in Tabelle 11.10. Aufgrund der Komplexität der Definition von Folgenkonvergenz ist, wie bereits in Abschnitt 11.4.1 beschrieben, eine Visualisierung dieser entscheidend für ein konsistentes Verständnis. Folglich wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer darum gebeten, die in der Definition verwendeten Parameter in einer Skizze darzustellen. Zusätzlich zu den in Abschnitt 8.1.2 beschriebenen dreistufig kodierten Kategorien „Definition“ und „Interne Kohärenz“ gibt es in Bezug auf das Konzept „Folgen und Folgenkonvergenz“ noch eine weitere dreistufige Kategorie. Um zu überprüfen, ob die Studierenden anhand der Definition einen einfachen Beweis der Folgenkonvergenz durchführen können, wurde dies in Bezug auf die Beispielfolge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ gefordert. Die Bearbeitung dieser Aufgabe wurde wie folgt kodiert:

| | |
|---|--|
| 2 | Die Aufgabe wurde inhaltlich und formal korrekt bearbeitet. |
| 1 | Die Aufgabe wurde überwiegend korrekt bearbeitet, es ergaben sich aber kleinere inhaltliche oder formale Fehler. |
| 0 | Die Bearbeitung der Aufgabe ist falsch oder fehlt. |

Aus den kodierten Einheiten wird abschließend ein Summenscore gebildet, der die Qualität des zugrundeliegenden mentalen Modells widerspiegelt. Der maximal erreichbare Wert beträgt 15.

Interraterreliabilität

In Bezug auf das Konzept „Folgen und Folgenkonvergenz“ konnten lediglich 12 Studierende befragt werden. Alle Interviewpassagen wurden von einer geschulten Raterin zweitkodiert. Dabei ergab sich bis auf eine Kategorie eine hundertprozentige Übereinstimmung. Bei F4 kamen die Rater bei einer Teilnehmerin bzw. einem Teilnehmer zu einem unterschiedlichen Ergebnis, was aufgrund der niedrigen Stichprobengröße in einem Cohens Kappa von $\kappa = 0.750$ resultiert.

11.4.3 Bewertung der mentalen Modelle

Die Ergebnisse der Kodierung der bzgl. Folgen und Folgenkonvergenz relevanten Interviewpassagen unter Verwendung der in Abschnitt 11.4.2 beschriebenen Kategorienschemata sind in Tabelle 11.11 dargestellt. Diese beinhaltet nur diejenigen Studierenden, die im zweiten Semester die Analysis I Vorlesung besucht haben. Das Symbol „✓“ in der Spalte FV bedeutet, dass bei den Studierenden eine Fehlvorstellung vorliegt. Diese Fehlvorstellungen werden nachfolgend in Abschnitt 11.4.4 klassifiziert und erläutert.

Tabelle 11.11: Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Folgen und Folgenkonvergenz (Interviewtermin 4).

| Student | F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 | F9 | F10 | F11 | FV | Σ |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|----|----------|
| S03 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | | 13 |
| S04 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 4 |
| S05 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | ✓ | 10 |
| S08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 0 |
| S09 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | ✓ | 7 |
| S14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | | 14 |
| S16 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | ✓ | 5 |
| S24 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | 5 |
| S25 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | ✓ | 7 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| S26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | | 12 |
| S28 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | ✓ | 13 |
| S30 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ | 2 |

Keiner der zwölf Studierenden konnte somit eine Folge formal richtig definieren, in Teilen gelang dies zumindest fünf Teilnehmerinnen und Teilnehmern. Im Hinblick auf die Definition von Folgenkonvergenz erreichten fünf Studierende die maximal mögliche Punktezahl. Tabelle 11.12 beinhaltet die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien. Zu beachten ist hierbei, dass bei den Kategorien F3, F9, F10 und F11 die Gesamtzahl der möglichen Punkte bei $n = 24$, statt $n = 12$ wie bei den restlichen Kategorien liegt. Weiter lag bei acht der 12 Studierenden, also 66,7 % der Gesamtzahl, eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Konzepts „Folgen und Folgenkonvergenz“ zugrunde.

Tabelle 11.12: Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Folgen und Folgenkonvergenz (Interviewtermin 4).

| Kategorie | F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 | F9 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Absolut | 5 | 8 | 5 | 10 | 6 | 11 | 11 | 5 | 13 |
| Relativ | 0.417 | 0.667 | 0.208 | 0.833 | 0.500 | 0.917 | 0.917 | 0.417 | 0.542 |

| Kategorie | F10 | F11 | FV |
|-----------|-------|-------|-------|
| Absolut | 8 | 10 | 9 |
| Relativ | 0.333 | 0.417 | 0.375 |

In Abbildung 11.13 sind die erreichten Summenwerte der mentalen Modelle zum Konzept „Folgen und Folgenkonvergenz“ Mitte des zweiten Semesters visualisiert. Dabei werden erneut nur diejenigen Studierenden berücksichtigt, welche die Analysis-Vorlesung besucht haben.

Somit erreichten fünf der zwölf Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Summenwert von kleiner gleich fünf Punkten; dies entspricht einem relativen Anteil von 41.6 %. Nur drei Studierende erreichten einen Summenwert von 13 oder mehr Punkten; dies entspricht einem Viertel der Gesamtzahl.

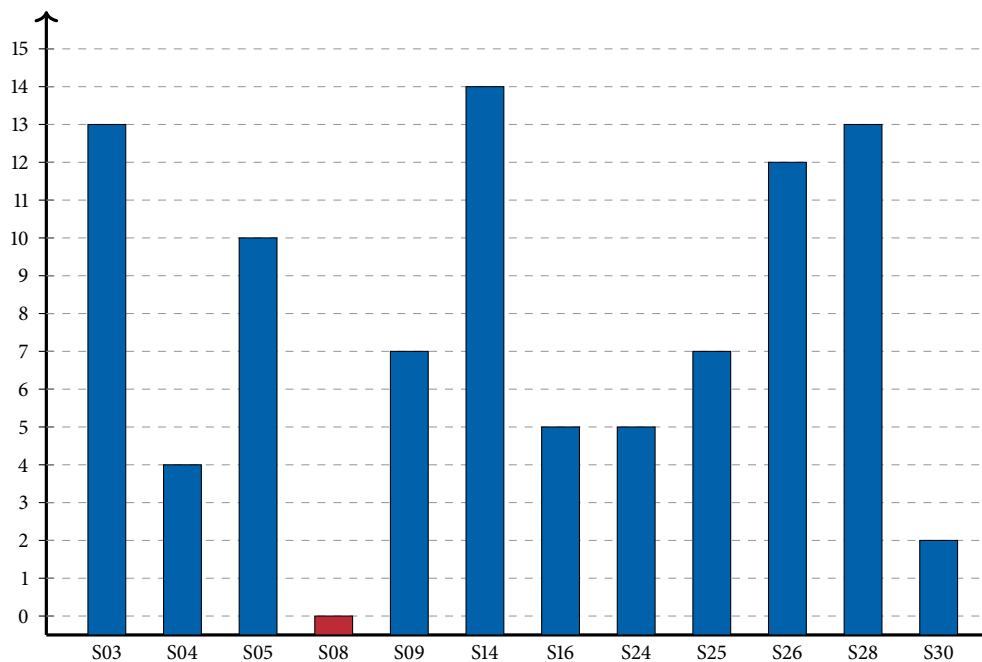


Abbildung 11.13: Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Konzepts „Folgen und Folgenkonvergenz“ (Interviewtermin 4).

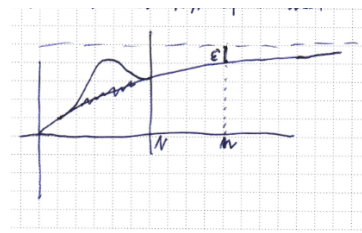
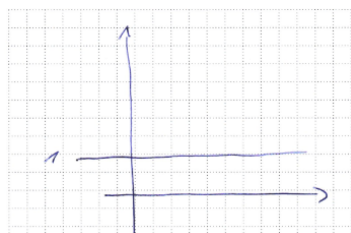
11.4.4 Fehlvorstellungen

In Bezug auf Fehlvorstellungen hinsichtlich des Konzepts „Folgen und Folgenkonvergenz“ ergaben sich bei der Kodierung der Interviewtranskripte von Interviewtermin 4 sechs induktiv gewonnene Kategorien. Diese sind in Abbildung 11.14 dargestellt.

Tabelle 11.13 zeigt eine Erläuterung der einzelnen Kategorien sowie die jeweilige Zuordnung zu den Studierenden. Diese werden im Folgenden anhand von Interviewauszügen erläutert.

Graph

Bei der Hälfte der Teilnehmerinnen und Teilnehmer zeigte sich eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Graphen von Folgen, welche mitunter durch die fehlende Kenntnis der Folgendefinition bedingt ist. So gaben etwa S08 (links) und S25 folgende Graphen als Beispiele für Folgen an:



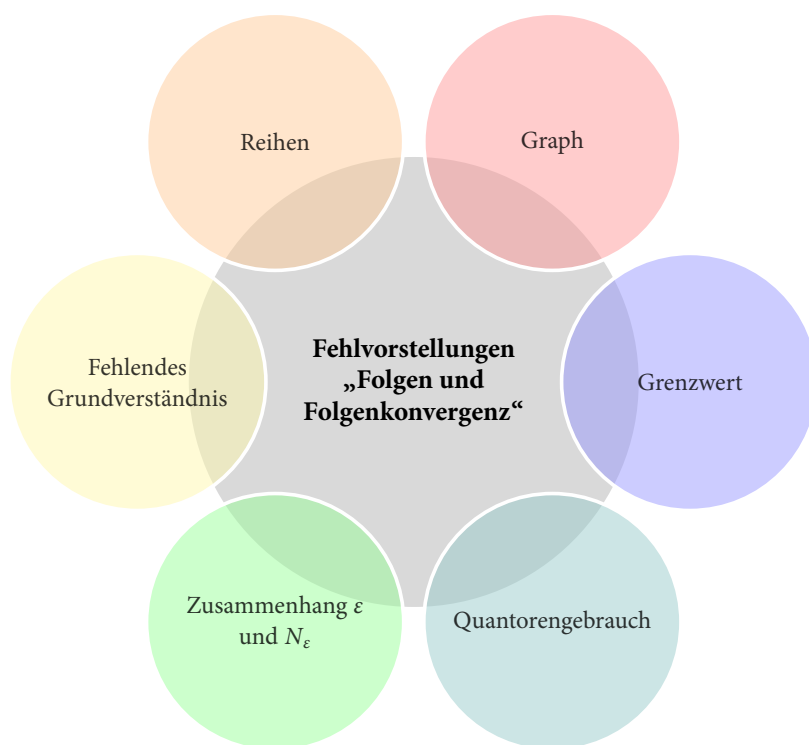


Abbildung 11.14: Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Folgen und Folgenkonvergenz“ (Interviewtermin 4).

Tabelle 11.13: Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Folgen und Folgenkonvergenz“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 4).

| | | |
|---|--|------------------------------|
| Graph | Es zeigt sich eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Graphen von Folgen. | S04, S08, S09, S25, S28, S30 |
| Grenzwert | Es zeigt sich eine Fehlvorstellung hinsichtlich des Grenzwertes von Folgen. | S08, S09 |
| Quantorengebrauch | Es zeigt sich ein falscher Gebrauch des \forall - bzw. \exists -Quantors. | S05, S16 |
| Zusammenhang ϵ und N_ϵ | Es zeigt sich ein falsches Verständnis des Zusammenhangs von ϵ und N_ϵ . | S08, S16, S25 |
| Fehlendes Grundverständnis. | Es zeigt sich ein fehlendes Grundverständnis von mathematischen Formeln oder Grundprinzipien | S04, S16, S25 |
| Reihen | Unter dem Konzept „Folge“ wird das Konzept „Reihe“ verstanden. | S08 |

Grenzwert

Hier zeigt sich die bereits in den Vorüberlegungen dargelegte Problematik. Bei zwei Studierenden lag die Fehlvorstellung zugrunde, dass sich eine Folge zwar beliebig nahe an den Grenzwert annähert, diesen allerdings nie erreicht:

11 **I:** Okay und dann haben Sie ja noch das Kriterium zur Folgenkonvergenz gemacht. Wann
12 konvergiert eigentlich eine Folge? Wie kann man sich das anschaulich vorstellen?

13 **S09:** Ahm/ bei Konvergenz einer Folge ist immer das Endstück entscheidend der Folge
14 ((Mhm)), also was die davor macht ist egal und das kann man sich so vorstellen, dass sie
15 eben gegen einen bestimmten Wert strebt, sprich/ ahm/ sich dem immer mehr annähert,
16 aber den nie wirklich erreicht und (..)/

Eine analoge Vorstellung zeigte sich auch bei S08:

17 **S08:** Ja, ich zeichne mir erst mal ein Bild (S08 zeichnet). Und dann schaut man da praktisch/
18 so und der Abstand ist das ε . Weil da ist ja dann irgendwann der Grenzwert. Sagen wir
19 mal, dass das jetzt 1 ist oder so ((Mhm)). Das ist ja egal. Und ε ist immer der Abstand
20 und man schaut, dass der immer möglichst (..) klein wird. Aber ε ist immer ungleich
21 Null, also ε ist immer größer Null ((Mhm)), d.h. dass das nie den Wert erreicht, aber
22 immer näher an den Wert drangeht.

23 **I:** Würde man dann bei einer konstanten Folge, also zum Beispiel die immer 1 ist, von/
24 ahm/ Grenzwert 1 reden? Weil da ist es ja immer das gleiche.

25 **S08:** (...) Nein.

Diese Fehlvorstellung resultierte im weiteren Interviewverlauf in das Problem, dass S08 glaubte, das ε -Kriterium wäre zum Nachweis der Folgenkonvergenz bei der Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht anwendbar:

26 **I:** Und wie funktioniert das dann mit dem ε ?

27 **S08:** Ich glaub, dass man das mit dem ε nicht beweisen kann. Das muss man anders machen.

Quantorengebrauch

Bei S05 und S16 zeigte sich ein falscher Quantorengebrauch, der in einer Fehlvorstellung hinsichtlich der Bedeutung von ε resultierte:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} n \geq N : |n - a| < \varepsilon$$

- 28 **I:** Wir können es ja mal hier an dem Beispiel $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ machen.
- 29 **S16:** (21) Also sag ich, dass $|\frac{1}{n} - 0|$ / hmm ich weiß jetzt grad nicht mehr genau, wie das ging.
 30 (...) Das ist ja eigentlich $|\frac{1}{n}|$ und den Betrag kann ich auch weglassen, weil ich in den
 31 positiven Zahlen bin. Und (12) das ist dann (..) kleiner als $\frac{1}{N}$ (...) und das ist kleiner als
 32 (...)/ hmm (7) (S16 schreibt). Dann muss ich nur noch voraussetzen, dass $n \geq N$ ist (...)/
 33 hmm und n und N sind aus \mathbb{N} . Und (7) ε ist größer Null (21)/ und N ist (...) größer als
 34 $\frac{1}{\varepsilon}$.
- 35 **I:** Darf man das einfach wählen?
- 36 **S16:** (...) Ahm/ das ist frei wählbar aber irgendwie, weil es ja quasi im Nachhinein/ damit ich
 37 da auf den Schritt komme, muss ich das so wählen.
- 38 **I:** Und warum ist das frei wählbar?
- 39 **S16:** Ahm/ (..) ja weil ich muss ja nur zeigen, dass/ ahm/ ein ε existiert, also kann ich ja/ ich
 40 muss ja nur das ε finden.

Zunächst zeigt S16 bei der Bearbeitung zwar einige richtige Ansätze, allerdings suggerieren seine Äußerungen, dass diese eher durch Reproduzieren einer in der Vorlesung oder Übung bearbeiteten Aufgabe bedingt sind. Ein wirkliches Verständnis resp. ein Bewusstsein darüber, was bei der Aufgabe konkret zu zeigen ist, wird bei S16 nicht erkennbar. Dies zeigt sich im Speziellen bei der Wahl von N , welche S16 darauf zurückführt, dass ja nur ein bestimmtes ε existieren muss.

Zusammenhang ε und N_ε

Eine weitere Fehlvorstellung, die sich bei einem Viertel der Studierenden zeigte, war der falsche

Zusammenhang zwischen ε und N_ε . Anhand der Syntax N_ε ist ersichtlich, dass N_ε von ε abhängt. Je kleiner das ε gewählt wird, umso größer wird das zugehörige N_ε , ab dem alle Folgenwerte innerhalb der vorgegebenen Schranke ε vom Grenzwert abweichen. Bei S25 zeigt sich allerdings eher ein umgekehrter Zusammenhang:

- 41 **S25:** Ich wähle als erstes ein ε , das eine gewisse Größe hat und dieses ε verschieb ich so weit
 42 hinter mein N , bis dieses ε größer ist als der Abstand zwischen meiner Funktion und
 43 dem Limes.

S25 ist sich scheinbar bewusst, dass zunächst das ε gewählt wird, allerdings will er dieses im Folgenden hinter das N verschieben. Eine ähnliche Sichtweise findet sich auch bei S08 und S16.

Fehlendes Grundverständnis

Bei zwei Teilnehmerinnen und Teilnehmer zeigte sich ein fehlendes Grundverständnis hinsichtlich der Definition von Folgenkonvergenz. So schrieb S04

The image shows a handwritten mathematical formula on a grid background. The formula is: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{P}, n \geq N : |u - \alpha| < \varepsilon$. There is a small 'N' written above the 'N' in the quantifier.

und erklärte diese Formel im Anschluss wie folgt:

- 44 **S04:** Mhm genau. Also für alle $\varepsilon > 0$, das heißt halt einfach ein Wert, der größer ist als
 45 Null, egal wie groß. Ahm/ gibt es ein $N \in \mathbb{Z}$ / ahm/ irgendein Wert von der Folge, der
 46 abgebildet wird praktisch. Also wenn die Folge von \mathbb{Z} nach \mathbb{Z} geht, dann gibt es da einen
 47 Wert/ also einen Wert N , dass alle/ für alle n , die ganz größer sind als das N , gilt, dass
 48 n / also der Betrag von n minus irgendeiner beliebigen Zahl immer kleiner wie das ε ist.

In analoger Weise argumentiert auch S16. Beiden Studierenden liegt die Fehlvorstellung zugrunde, dass das n -te Folgenglied nicht n sondern ein Wert a_n ist. Eine weitere Fehlvorstellung zeigte sich bei S25, die bzw. der ε als Abstand zwischen n -ten Folgenglied und Grenzwert ansah:

49 **S25:** [...] Wenn jetzt diese Funktion so einen Hügel macht, so dass sie kurzzeitig mal etwas
 50 näher beim Limes ist und danach wieder etwas abfällt und weiter weggeht, dann würde
 51 das ε nämlich nicht immer kleiner werden, solange bis es auf Null fällt. Und das ε ist
 52 dann immer der Abstand dazwischen, von dem aktuellen n , das ich grad betrachte. Also
 53 wenn ich grad in diesem Zeitpunkt bin mit dem n , dann betrachte ich den Abstand
 54 zwischen meinem Funktionswert und meinem vermuteten Limes und der muss immer
 55 kleiner werden. Oder er kann beliebig klein werden, so muss man das sagen. Er kann
 56 beliebig klein werden/ ich kann mein ε wählen/ das ist ja das was ich mach.

Reihen

Bei S08 zeigte sich eine Vermischung der Konzepte „Folgen“ und „Reihen“. So gab S08 folgende Beispiele für eine konvergente bzw. nicht konvergente Folge an:

Beispiel für konvergente Folge

A handwritten mathematical expression on a grid background: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$. The expression is written in blue ink.

Beispiel für nicht konvergente Folge

A handwritten mathematical expression on a grid background: $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)$. The expression is written in blue ink.

57 **I:** Okay und was wäre dann eine Reihe?

58 **S08:** (...) Hmm hmm hmm (..) ja das wäre ja jetzt zum Beispiel auch eine Reihe.

59 **I:** Also können Folgen und Reihen auch das gleich sein?

60 **S08:** Ich glaub schon ja.

KAPITEL 12 Ergebnisse: Entwicklung der mentalen Modelle

„Wir wissen natürlich, dass es schwer ist, eine gute Idee zu bekommen, wenn wir nur geringe Kenntnis von dem Gegenstand besitzen, und unmöglich, wenn wir überhaupt keine Kenntnis davon haben. Gute Ideen beruhen auf Erfahrung und früher erworbenem Wissen.“
(Pólya, 2010, S. 22)

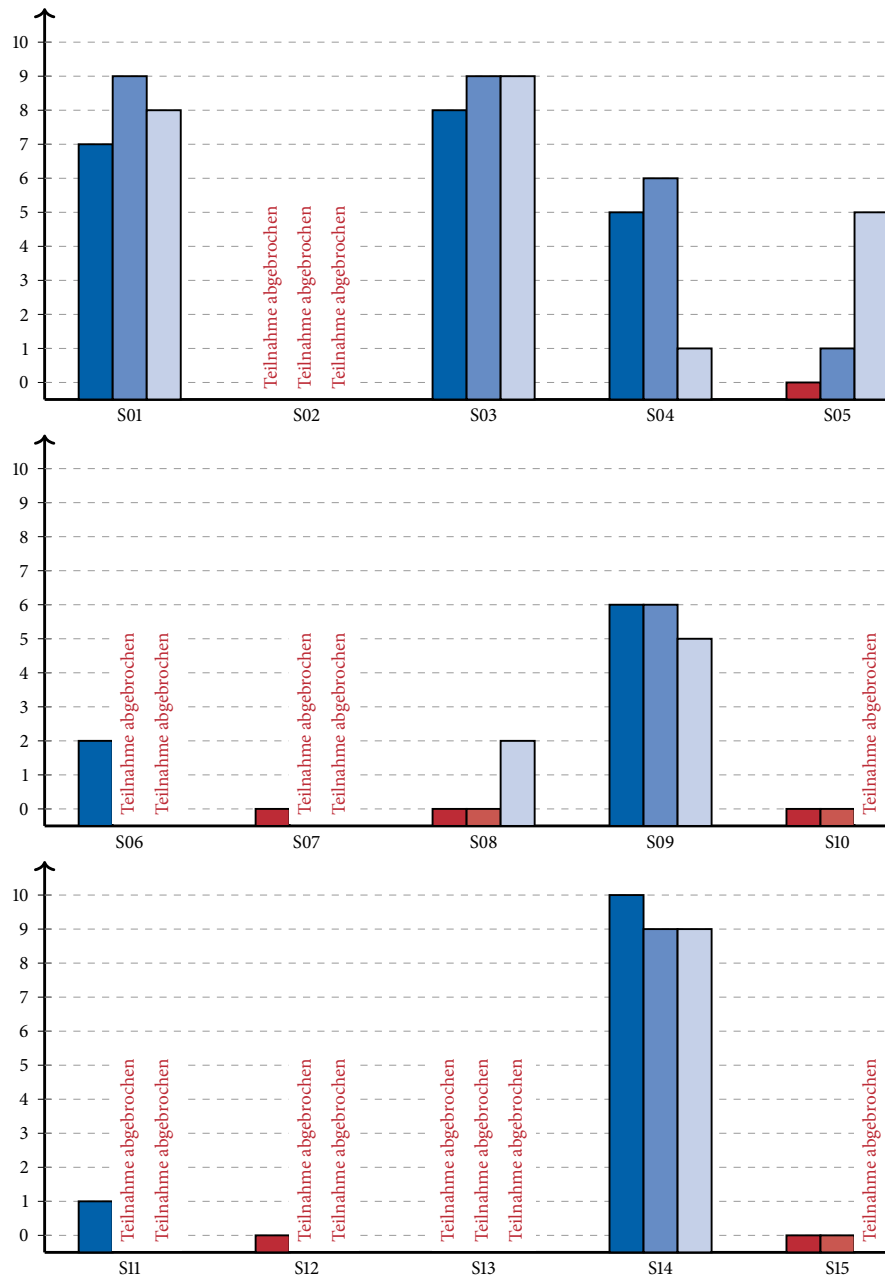
Überblick:

| | |
|---|-----|
| 12.1 Injektivität | 254 |
| 12.2 Surjektivität | 261 |
| 12.3 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem | 263 |

Dieses Kapitel stellt die Entwicklung der mentalen Modelle hinsichtlich der Konzepte „Injektivität“, „Surjektivität“ und „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ über die Interviewzeitpunkte 2 bis 4 hinweg dar. Dazu werden für jede Teilnehmerin bzw. jeden Teilnehmer die in den Kapiteln 9 - 11 ermittelten Summenwerte gegenübergestellt und anschließend zentrale Erkenntnisse beschrieben. In Bezug auf das Konzept „Injektivität“ wird zudem die Begriffsentwicklung zweier Studierender im Rückgriff auf die theoretischen Überlegungen in Kapitel 3 detailliert aufgezeigt.

12.1 Injektivität

Die Entwicklung der mentalen Modelle der Interviewtenehmerinnen und -teilnehmer ist in Abbildung 12.1 dargestellt¹.



¹Aufgrund der besseren Darstellbarkeit wurde auf S31 verzichtet, da S31 die Teilnahme bereits nach Interviewerin 1 abgebrochen hatte.

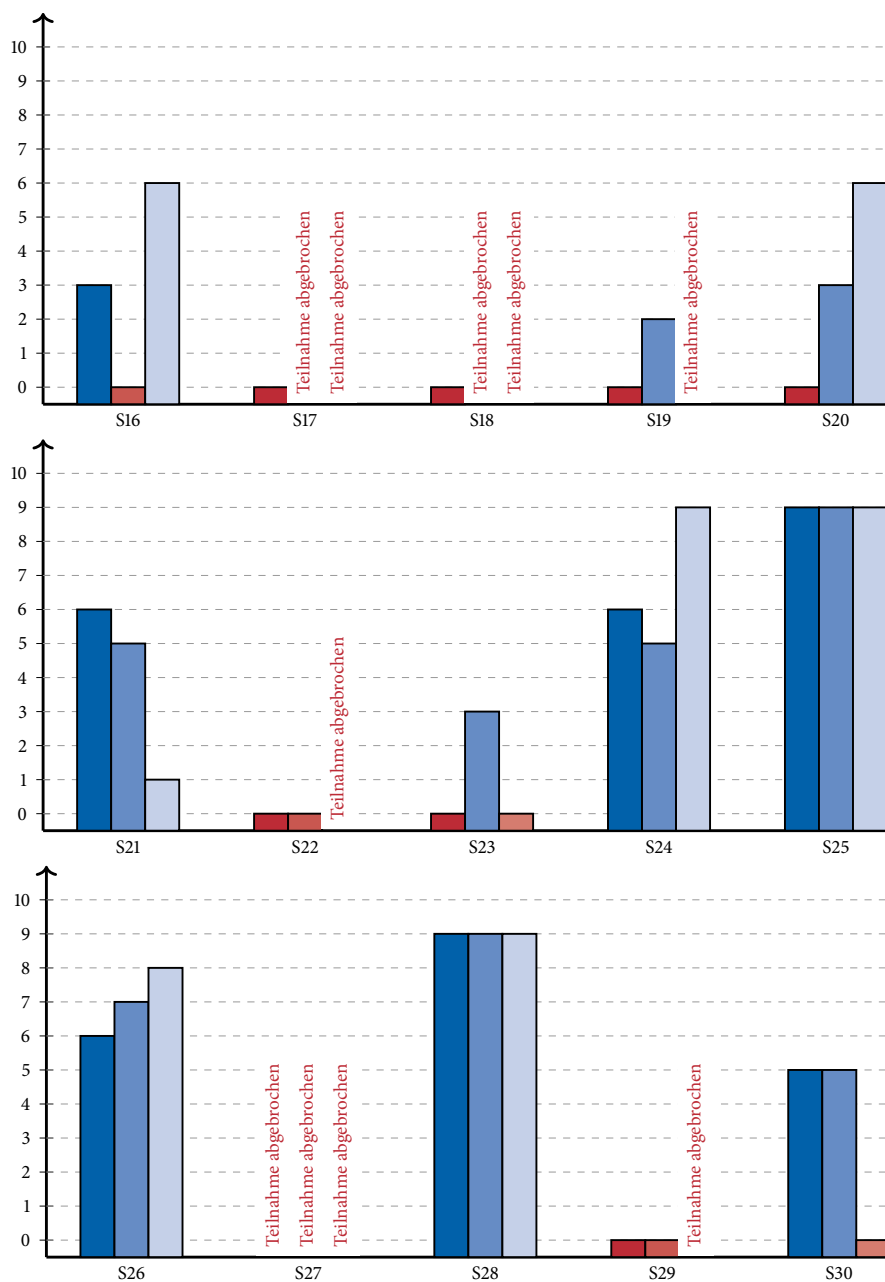


Abbildung 12.1: Entwicklung der mentalen Modelle der Interviewteilnehmerinnen und -teilnehmer bzgl. des Konzepts „Injektivität“ im Laufe der Studie.

Bezugnehmend auf obige Abbildung ist auffällig, dass die Studierenden, die zu Zeitpunkt 1 der Messung ein sehr hohes Niveau des mentalen Modells aufwiesen (S03, S14, S25, S28), dieses über alle drei Messpunkte hinweg beibehalten konnten. Betrachtet man andererseits die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die nach sieben Wochen einen sehr niedrigen Summenwert erzielten (≤ 3), wird ersichtlich, dass von den 16 Studierenden elf ihr Studium im Laufe der

Studie abgebrochen haben. Drei konnten die Qualität des *Concept Image* zwar verbessern, erreichten jedoch einen Summenwert von maximal sechs Punkten. Bei den restlichen zwei Teilnehmerinnen und Teilnehmern zeigte sich keine nennenswerte Verbesserung des mentalen Modells. Die Studierenden, die nach sieben Wochen eine mittlere Qualität aufwiesen (S01, S04, S09, S21, S24, S26, S30), zeigen hinsichtlich der Begriffsentwicklung keine klare Tendenz: Drei erreichten im Laufe der Studie einen höheren, drei einen niedrigeren und eine bzw. einer einen nahezu konstanten Summenwert.

Mit Rückblick auf die theoretischen Überlegungen in Kapitel 3 wird nachfolgend die Begriffsentwicklung zweier Studierenden (S08 und S14) detailliert dargestellt. Dabei werden für jeden Interviewtermin die in Bezug auf das Konzept „Injektivität“ relevanten Passagen angegeben.

Begriffsentwicklung von S08

Nach sieben Wochen Mathematikstudium:

- 1 **S08:** Ahm/ ich zeichne erst mal alle drei Fälle auf, das ist immer einfach ((S08 zeichnet)). Okay. Also
 2 injektiv heißt, wenn man hier praktisch Elemente auf Elemente aus dieser Menge abbildet, aber
 3 in dieser Menge noch Elemente enthalten sind, die nicht benutzt werden [...].
- 4 **I:** Können Sie mir ein Beispiel für eine injektive Abbildung nennen? Oder für eine nicht-injektive?
- 5 **S08:** Ja das habe ich hier ja eh schon aufgezeichnet. Das ist ja ein Beispiel.
- 6 **I:** Gibt es sonst noch was, was Sie mit injektiv verbinden? Was bedeutet das für eine Abbildung,
 7 wenn Sie injektiv ist?
- 8 **S08:** Also ich glaub, ich hab das schon gut erklärt, was ich mir vorstelle. Es müssen einfach rechts
 9 noch Elemente sein, die nicht benutzt werden/ (..) ja genau.
- 10 **I:** Können Sie mir die Definitionen aufschreiben?
- 11 **S08:** Definitionen weniger ((S08: lacht)). Das stell ich mir eher ein bisschen wörtlich vor.
- 12 **I:** Sie haben sich das ja bildlich vorgestellt. Vielleicht versuchen Sie sich aus dem Bild, das sie
 13 haben, eine Definition abzuleiten. Wir können ja anfangen mit: Eine Abbildung f von A nach
 14 B heißt injektiv, wenn?
- 15 **S08:** Hmm (..) ((S08 schreibt)). Ja, wenn die Menge praktisch größer ist mit den y als die andere.
 16 Aber das ist so schwierig darzustellen, als x ja. Ja genau in der Menge. Aber das ist so schwierig
 17 zu definieren.

Kurz vor der Klausur am Ende des ersten Semesters:

- 1 **S08:** Oh Gott nein, da brauchen wir gar nicht anfangen ((S08: lacht)).
- 2 **I:** Ja die Begriffe injektiv und surjektiv vielleicht?
- 3 **S08:** Die kann ich grad noch aufzeichnen.
- 4 **I:** Vielleicht versuchen Sie zunächst mal zu erklären, was Injektivität meint/ was das heißt, wenn
5 eine Funktion injektiv ist, oder eine Abbildung.
- 6 **S08:** Ich zeichne das erst mal auf/ weil sonst ((S08 zeichnet)). Ja genau. [...]
- 7 **I:** Können Sie irgendwie in Worten beschreiben, was Injektivität heißt?
- 8 **S08:** Dass aus der Grundmenge oder Definitionsmenge in der Zielmenge/ oh Gott ((S08: lacht))/ in
9 der Zielmenge/ ahm/ übergeht praktisch/ auf die Zielmenge übergeht, aber bestimmte Elemente
10 in der Zielmenge nicht getroffen werden. So ungefähr.
- 11 **I:** Können Sie die Definition hinschreiben?
- 12 **S08:** Nein.

Mitte zweites Semesters:

- 1 **S08:** Ich glaub, dass ich das noch einigermaßen kann.
- 2 **I:** Also vielleicht versuchen Sie erst mal zu beschreiben, was Injektivität meint.
- 3 **S08:** (..) Schwierig, ich zeichne das erst mal hin (..) ((S08 zeichnet)). Ja ((S08 lacht)).
- 4 **I:** Was wäre das jetzt?
- 5 **S08:** Das ist Injektivität.
- 6 **I:** Und was heißt das?
- 7 **S08:** Das heißt, dass aus der ersten Menge der zweiten Menge/ ahm/ aus der ersten Menge ein Wert/
8 ahm/ Wert aus der zweiten Menge zugeordnet wird, aber in der zweiten Menge mehrere Werte
9 enthalten sein können. [...]
- 10 **I:** Also wenn man jetzt versucht, Injektivität anschaulich zu beschreiben, was heißt dann Injektivität?
11

12 **S08:** (...) Wie ich schon gesagt hab, dass aus der ersten Menge einem Wert ein Wert aus der zweiten
 13 Menge zugeordnet wird, aber die Werte aus der zweiten Menge nicht zweimal verwendet werden
 14 dürfen, aber trotzdem noch zusätzliche Werte enthalten sein können.

15 **I:** Mhm okay. Können Sie mir die Definition von Injektivität aufschreiben?

16 **S08:** Nein ((S08 lacht)). Nein.

17 **I:** Wieso nicht?

18 **S08:** Hmm ich kann das so nicht/ ich hab das nicht so mit den Definitionen. Höchstens das, was ich
 19 jetzt gesagt hab aufschreiben, aber das bringt ja auch nicht.

Im ersten Interview möchte S08 intuitiv ein Bild zeichnen, Definitionen erscheinen S08 nicht wichtig. Abgesehen von der Herangehensweise zeigt sich bei S08 eine Fehlvorstellung. Die Vorstellung von S08 hinsichtlich des Konzeptes „Injektivität“ klingt eher wie „Nicht-Surjektivität“. Möglicherweise wurde in der Vorlesung ein Bild gezeichnet, bei dem Elemente des Wertebereichs von der Abbildung nicht erreicht wurden. Aufgrund der fehlenden Verbindung zu der formalen Definition des Begriffs ist S08 diese Fehlvorstellung nicht bewusst. Weiter wird ersichtlich, dass sich das mentale Modell von S08 über die Interviewzeitpunkte hinweg nahezu nicht verändert. S08 möchte immer noch zuerst ein Bild zeichnen, eine Definition des Begriffs kann an keinem der drei Termine angegeben werden. Es scheint so, als ob S08 gemäß dem theoretischen Ansatz von Tall (2004c) innerhalb der ersten beiden Welten der Schulmathematik verblieben ist. Der Sprung in die formal-axiomatische Welt der Hochschulmathematik ist S08 nicht gelungen.

Begriffsentwicklung von S14

Nach sieben Wochen Mathematikstudium:

1 **S14:** Okay, also dann würd ich mal Urbild und Bild einführen ((Mhm)). Also die Menge der Elemente,
 2 von denen abgebildet wird/ ah die Elemente, die Funktionswerte/ der Wertebereich, sag ich jetzt
 3 mal, der Bildbereich (...).

4 **I:** Sagen wir mal, wir haben eine Abbildung φ von A nach B .

5 **S14:** Genau, genau. Und die Elemente von B , auf die abgebildet wird, das ist jetzt die Bildmenge
 6 ((Mhm)). Die Elemente, die dieses Bild verursachen sag ich jetzt mal, das ist das Urbild. [*erklärt*

7 *Surjektivität*] Injektiv ist, wenn aus/ gegeben sind jetzt mal zwei Werte aus A , a_1 und a_2 ((Mhm)).
 8 Und wenn aus $f(a_1) = f(a_2)$ folgt, dass $a_1 = a_2$ ist, dann ist die Abbildung injektiv. Das heißt,
 9 es gibt keine zwei Elemente aus B mit demselben (.) Urbild. So kann mans sagen ((Mhm)). Oder
 10 zwei Elemente aus A haben nicht das gleiche Bild. Das kann man auch sagen.

11 **I:** Gibt es sonst noch etwas, das Sie mit Injektivität verbinden?

12 **S14:** Hmm da muss ich kurz überlegen (...). Ah genau/ wenn man jetzt mal an lineare Abbildungen
 13 denkt/ da hängt Injektivität mit dem Kern zusammen/ ahm/ genau. Also der Kern darf nur die
 14 Null sein und dann ist das genau injektiv ((Mhm)). [...]

15 **I:** Genau schreiben Sie mir vielleicht auch wieder die formale Definition von injektiv und surjektiv
 16 auf.

17 **S14:** ((S14 schreibt)) Also injektiv, wenn aus Funktionswert von a_1 gleich Funktionswert von a_2 folgt,
 18 dass $a_1 = a_2$ ist bzw. wenn $a_1 \neq a_2$ ist, dann folgt daraus, dass auch der Funktionswert von a_1
 19 ungleich dem Funktionswert von a_2 ist ((Mhm)). Das wäre jetzt injektiv. [...]

Kurz vor der Klausur am Ende des ersten Semesters:

1 **S14:** Also erst mal brauch ich eine Abbildung dafür zwischen zwei nicht-leeren Mengen. Das ist
 2 wichtig. Wenn ich das hab, dann geb ich der Abbildung einen Namen und wenn jetzt/ weil es
 3 ja eine Abbildung ist, muss sowieso/ sagen wir mal wir haben f von X nach Y . Weil es eine
 4 Abbildung ist, muss sowieso jedem x aus X ein Wert zugeordnet werden ((Mhm)). Sonst ist
 5 es keine Abbildung, sondern eine Relation. [...] Aber injektiv ist die Abbildung auf jeden Fall,
 6 wenn jedes y aus Y höchstens einmal getroffen wird ((Mhm)). So kann mans sagen. Das ist
 7 höchstens einmal und bei surjektiv/ ja hmm vielleicht hab ich noch was vergessen. Ja genau
 8 höchstens, das trifft schon. Weil da gibts ja auch welche, die nicht getroffen werden. Das ist
 9 vollkommen egal bei Injektivität. [*erklärt Surjektivität*].

10 **I:** Gut. Können Sie mir die Definitionen noch hinschreiben für Injektivität und Surjektivität?

11 **S14:** Also wir haben/ ich schreib das jetzt mal genau hin ((Ja)) ((S14 schreibt)). Seien A, B Mengen
 12 und wir haben bei uns jetzt in der Vorlesung nicht hingeschrieben, dass die nicht-leer sind,
 13 sondern wir haben einfach nur geschrieben 'Seien A, B Mengen'. Eine Abbildung f von X nach
 14 Y heißt injektiv, wenn aus/ jetzt muss ich mir erst zwei Werte noch/ machen wirs so/ wenn für
 15 $x_1, x_2 \in X$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets folgt, dass $x_1 = x_2$. Ja genau. Das könnte man auch anders
 16 schreiben/ und zwar haben wir ja jetzt, sagen wir mal, $f(x_1) = f(x_2)$, das wäre jetzt meine
 17 A -Aussagen und dann hätte ich hier die B -Aussage und wir haben jetzt 'Wenn A , dann muss B

18 gelten'. Wir könnten jetzt auch sagen 'Wenn nicht B gilt, dann gilt nicht A ', das heißt, wenn die
19 ungleich sind, dann müssen die hier ungleich sein. [...]

Mitte zweites Semester:

1 **S14:** [...] Ich brauch erst einmal eine Abbildung. Sagen wir mal, wir nennen die f und die geht von X
2 nach Y und wie es bei Abbildungen ist, muss ja jedes Element aus X einmal abgebildet werden,
3 sonst ist das keine Abbildung mehr/ das ist die Definition davon. Und jetzt darf ein jedes x
4 nur/ es dürfen nicht zwei x dasselbe Bild haben. Das darf nicht passieren. Wenn ich mir jetzt
5 zum Beispiel eine lineare Funktion anschau, wie $f(x) = x$, dann ist die bijektiv, also auch
6 surjektiv. Aber sie ist auch injektiv, weil es dürfen sich zwei x -Werte nicht einen Bildwert teilen
7 ((Mhm)), so muss mans sagen. Das wäre jetzt mal so anschaulich gesprochen. Also wenn von
8 zwei Elementen aus der Definitionsmenge das Bild gleich ist, dann müssen die Elemente schon
9 gleich gewesen sein. Die Negation davon ist, wenn/ so kann man sichs vielleicht auch noch
10 vorstellen/ wenn die zwei x -Werte nicht gleich sind, dann müssen auch die Funktionswerte/
11 ahm/ nicht gleich sein, genau. Sozusagen. Also kann jeder Wert in der Zielmenge nur höchstens
12 einmal getroffen werden. [erklärt Surjektivität]

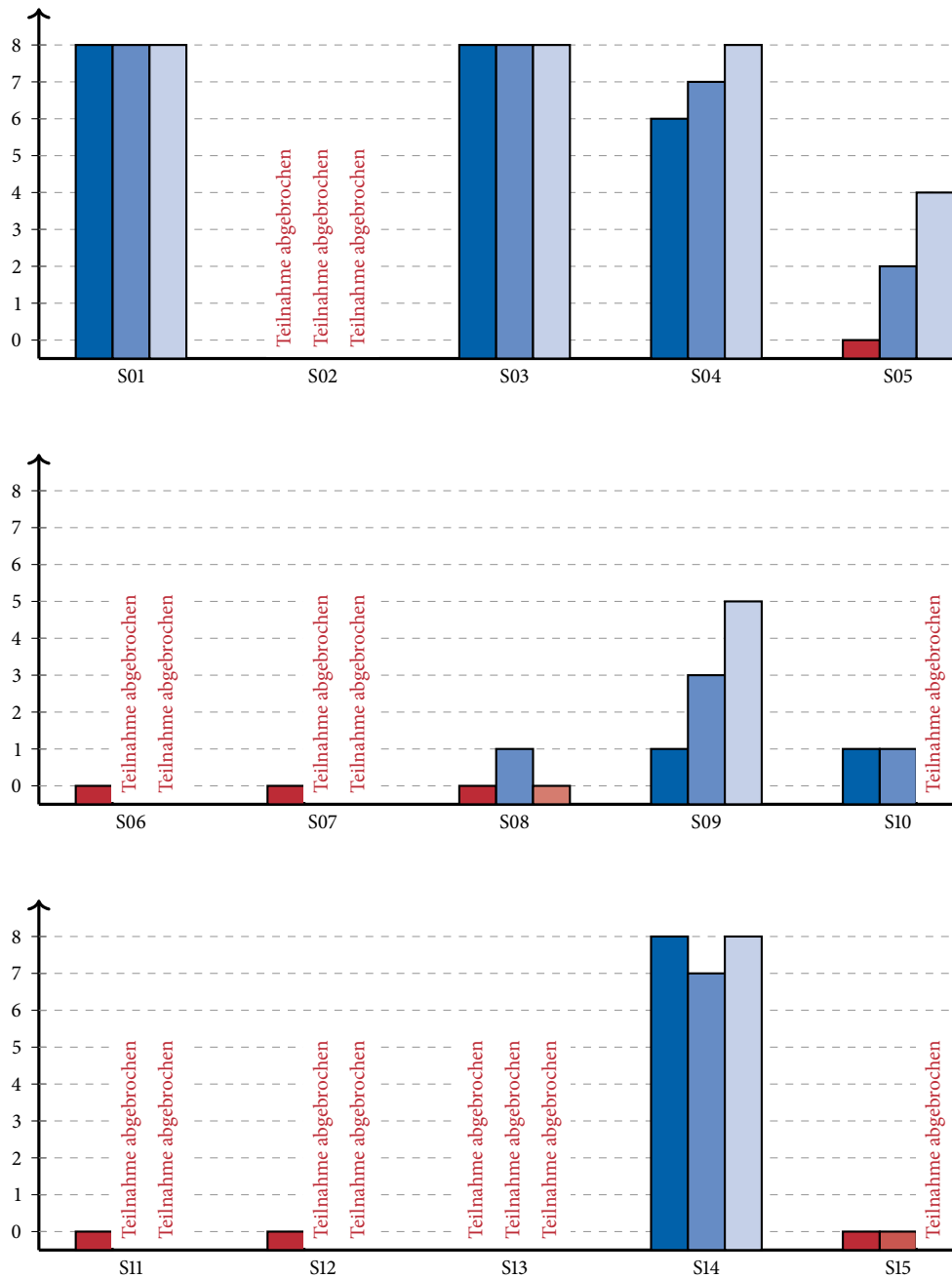
13 **I:** Genau. Können Sie die Definition dieser Begriffe aufschreiben?

14 **S14:** Ja ich glaub schon/ also ich glaub, dass ich das eh gesagt hab so ziemlich. Also zuerst brauch
15 ich mal eine Abbildung/ ganz wichtig. Die bildet von X nach Y ab und ich sag jetzt/ ahm/ ((S14
16 schreibt)). f ist injektiv, genau dann wenn/ ich schreib jetzt/ ahm/ nicht dazu, dass x, y Elemente
17 von X sind, weil ich glaub, dass das einigermäßen klar ist/ $f(x) = f(y)$, dann folgt daraus, dass
18 $x = y$ ist.

Die Ausführungen von S14 unterscheiden sich sehr stark von denen von S08. S14 führt zunächst die Begriffe „Urbild“, „Bild“, „Definitionsmenge“, „Zielmenge“ sowie „Bildmenge“ in Bezug auf Abbildungen ein. Darüberhinaus ist die Erklärung des Konzepts „Injektivität“ formaler und stark an der mathematischen Definition orientiert. Dies ist auch daran erkennbar, dass S14 drei Möglichkeiten nennt, um untersuchen zu können, ob eine Abbildung injektiv ist oder nicht: Die Implikation $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, ihre Kontraposition sowie in Bezug auf lineare Abbildungen die Bedingung $\text{Kern}(f) = \{0\}$. Das mentale Modell von S14 ist bereits nach sieben Wochen Studium sehr umfangreich und konsistent und bleibt über die beiden folgenden Interviewtermine hinweg auf konstant hohem Niveau. Neben dem konsistenten mentalen Modell kann S14 an allen drei Terminen die korrekte Definition des Konzepts nennen.

12.2 Surjektivität

Die Entwicklung der mentalen Modelle der Interviewteilnehmerinnen und -teilnehmer ist in Abbildung 12.2 dargestellt²:



² Aufgrund der besseren Darstellbarkeit wurde erneut auf S31 verzichtet.

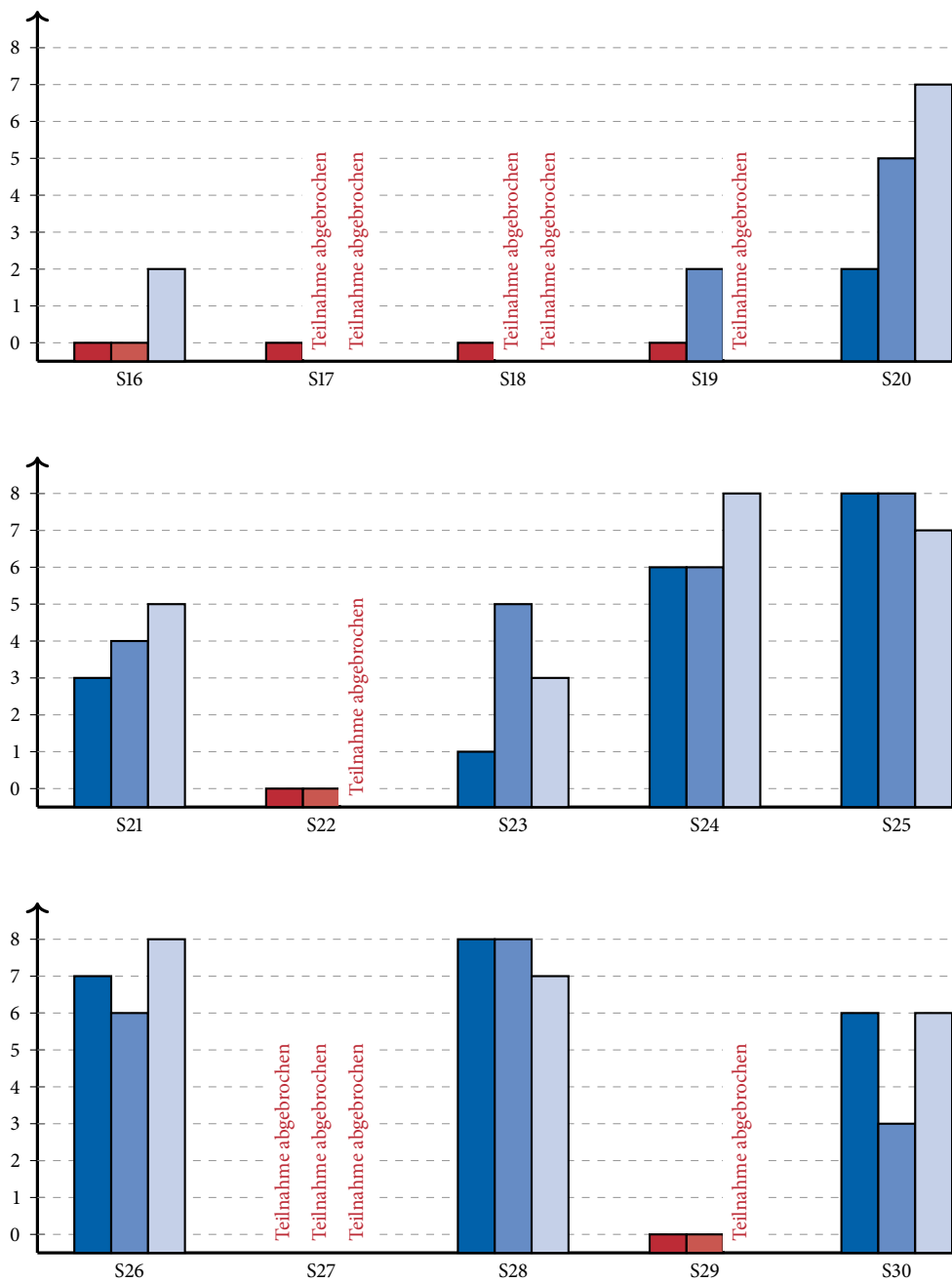


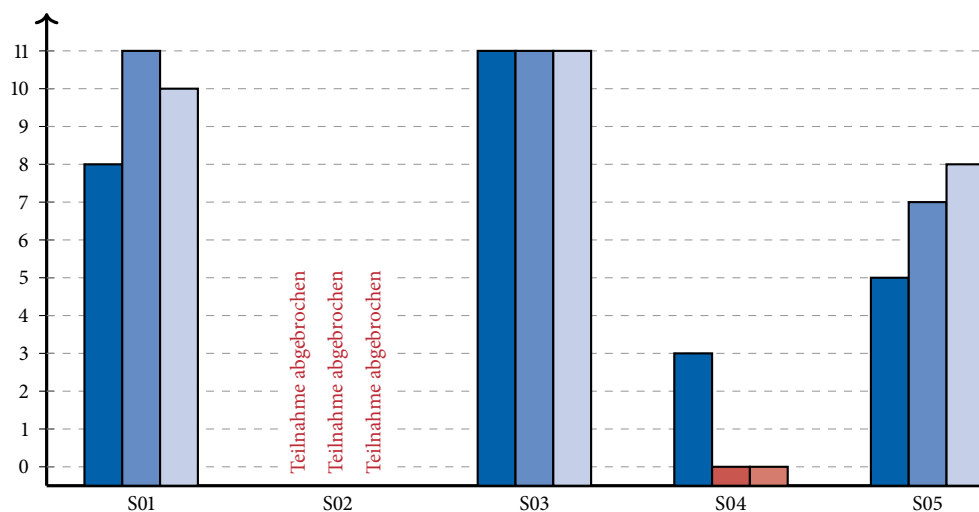
Abbildung 12.2: Entwicklung der mentalen Modelle der Interviewteilnehmerinnen und -teilnehmer bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ im Laufe der Studie.

Analog zu der Entwicklung der mentalen Modelle hinsichtlich des Konzepts „Injektivität“ wird anhand obiger Grafik deutlich, dass die Studierenden, die zu Zeitpunkt 1 der Messung ein sehr hohes Niveau des mentalen Modells aufwiesen (S01, S03, S14, S25, S26, S28), dieses über alle drei Messpunkte hinweg beibehalten konnten. Betrachtet man andererseits die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die nach sieben Wochen einen sehr niedrigen Summenwert erzielten

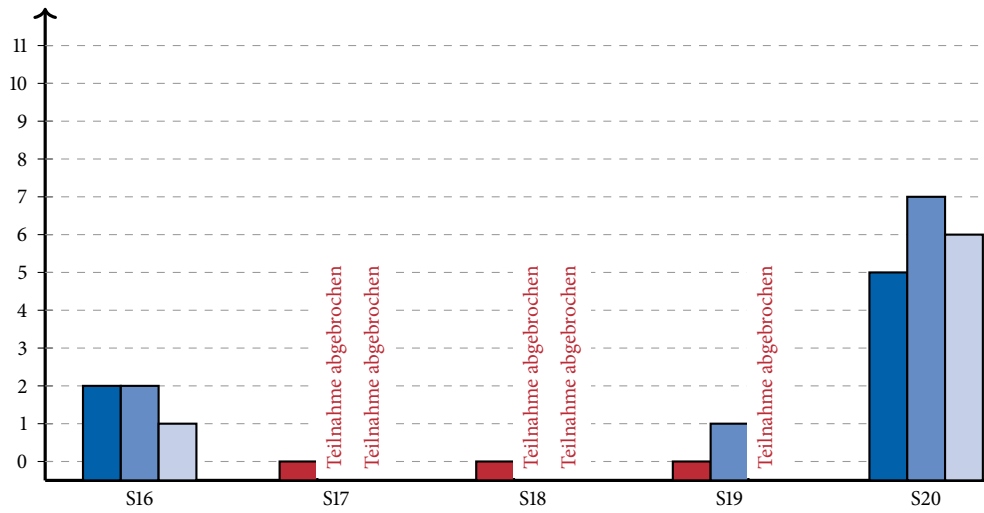
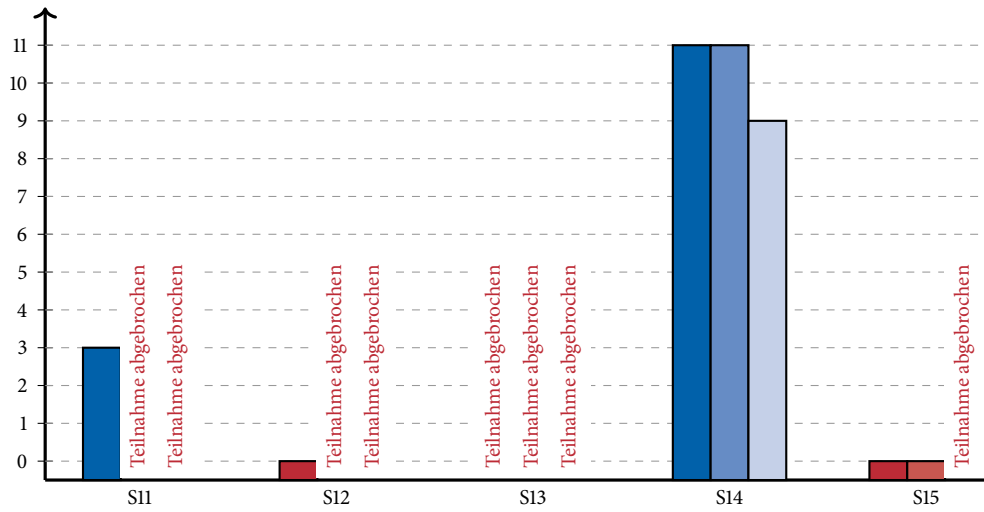
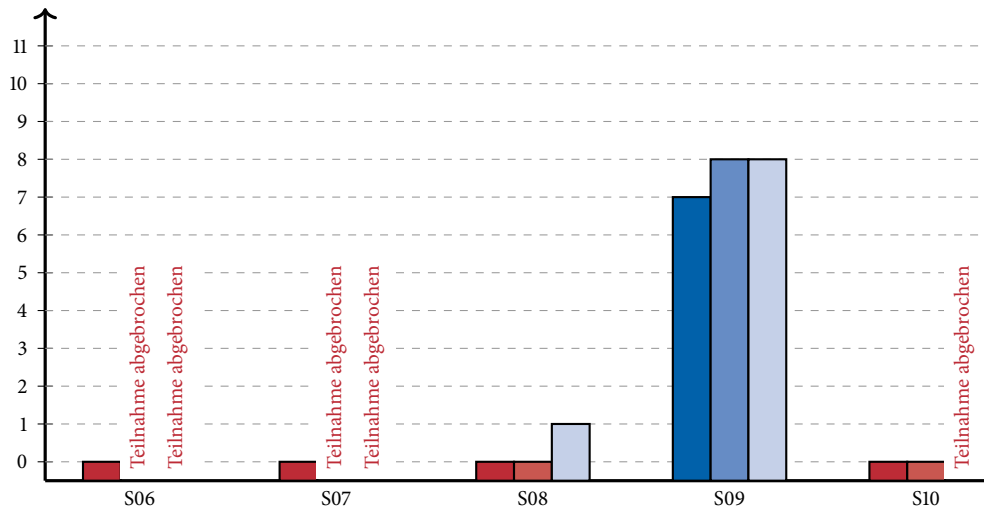
(≤ 2), wird ersichtlich, dass von diesen 17 Studierenden elf ihr Studium im Laufe der Studie abgebrochen haben. Vier konnten die Qualität des *Concept Image* zwar verbessern, allerdings erreichten drei davon nur maximal einen Summenwert von 5 Punkten. Lediglich S20 gelang eine Verbesserung; von zwei Punkten nach sieben Wochen bis auf sieben Punkte Mitte des zweiten Semesters. Bei den Studierenden, die nach sieben Wochen eine mittlere Qualität aufwiesen (S04, S21, S24, S30), ist zumindest eine positive Tendenz erkennbar: drei verbesserten sich, eine bzw. einer verblieb auf nahezu konstantem Niveau.

12.3 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem

Die Entwicklung der mentalen Modelle der Interviewteilnehmerinnen und -teilnehmer bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ ist in Abbildung 12.3 dargestellt³:



³Aufgrund der besseren Darstellbarkeit wurde erneut auf S31 verzichtet



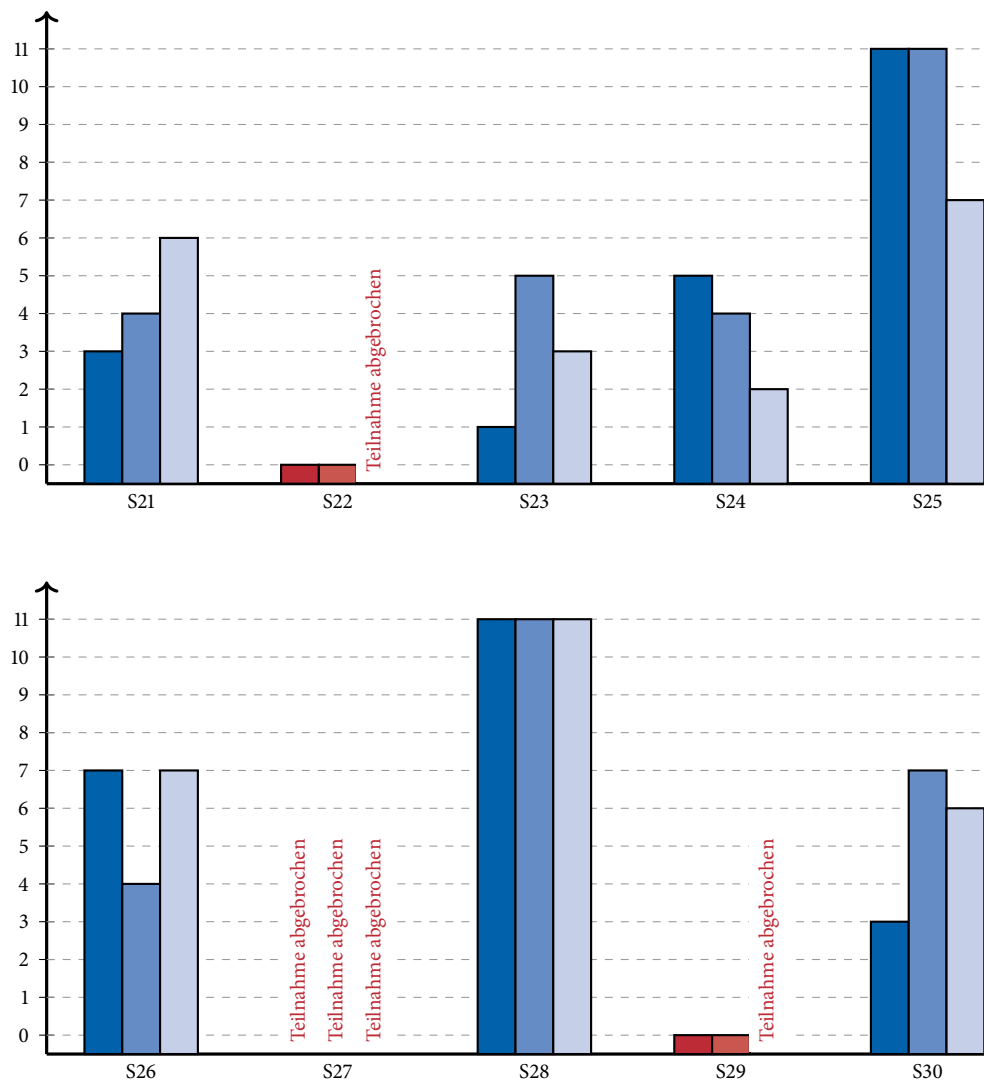


Abbildung 12.3: Entwicklung der mentalen Modelle der Interviewteilernehmerinnen und -teilnehmer bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ im Laufe der Studie.

In Bezug auf das Konzept „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ konnten drei der vier Studierenden, die am ersten Zeitpunkt der Messung ein sehr hohes Niveau hinsichtlich des mentalen Modells aufwiesen (S03, S14, S25, S28), dieses über alle drei Messpunkte hinweg nahezu beibehalten. Lediglich S25 wies am letzten Interviewtermin einen deutlich niedrigeren Summenwert auf. Betrachtet man erneut die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die nach sieben Wochen einen sehr niedrigen Summenwert erzielten (≤ 3), wird ersichtlich, dass von diesen 17 Studierenden elf ihr Studium im Laufe der Studie abgebrochen haben. Weitere vier verblieben hinsichtlich der Qualität ihres *Concept Image* auf sehr niedrigem Niveau. Bei

den verbleibenden zwei Studierenden ist eine Verbesserung erkennbar, allerdings auf maximal sechs Punkte am letzten Messzeitpunkt. Bei den Studierenden, die nach sieben Wochen eine mittlere Qualität aufwiesen (S01, S05, S09, S20, S26, S30), ist keine klare Tendenz erkennbar: zwei erreichten im Laufe der Studie einen höheren, eine bzw. einer einen niedrigeren und drei einen nahezu konstanten Summenwert.

KAPITEL 13 Zusammenfassung und Diskussion

„When coming to decide about the pedagogy of teaching mathematics one has to take into account not only the question how students are expected to acquire the mathematical concepts but also, and perhaps mainly, how students really acquire these concepts.“

(Vinner, 1991, S.67)

Überblick:

| | |
|---|-----|
| 13.1 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse | 268 |
| 13.1.1 Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn | 270 |
| 13.1.2 Begriffsbildung in der Studieneingangsphase | 272 |
| 13.2 Einordnung der Ergebnisse im Hinblick auf deren praktische Relevanz | 276 |
| 13.3 Forschungsdesiderata und Ausblick | 282 |

Dieses Kapitel bietet eine Zusammenfassung sowie Diskussion der Ergebnisse beider beschriebenen Studien; mitunter werden Überlegungen zu der Generalisierbarkeit der Resultate vorgenommen. Dazu bietet Abschnitt 13.1 zunächst einen Überblick über die Ergebnisse, anhand deren die in Kapitel 4 formulierten Forschungsfragen beantwortet werden. Weiter wird hier bereits an manchen Stellen die praktische Relevanz der Resultate in Bezug auf die Lehre aufgezeigt, die anschließend in Abschnitt 13.2 im Gesamtzusammenhang noch einmal resümierend dargestellt wird. Dabei erfolgt insbesondere eine Erläuterung möglicher Kompensationsmaßnahmen für die Hochschullehre in der Studieneingangsphase. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf zukünftige Forschungsinteressen im Feld „Begriffsbildung und -entwicklung in der Studieneingangsphase im Fach Mathematik“.

13.1 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Zentrales Anliegen der vorliegenden Arbeit ist es, den Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn sowie die Begriffsbildung resp. -entwicklung in der Studieneingangsphase hinsichtlich zentraler mathematischer Begriffe von Studienanfängerinnen und -anfängern zu beschreiben.

Die Messung des Kenntnisstandes in Mathematik zu Studienbeginn wird zunächst dadurch motiviert, indem mathematisches Vorwissen als möglicher Bedingungsfaktor für Studienerfolg dargestellt wird. Als Erhebungsinstrument wurde ein Fragebogen konzipiert, der an Erhebungsinstrumenten bereits bestehender Studien orientiert ist und auf diesen aufbaut. Die Messung des Kenntnisstandes erfolgte in zwei aufeinanderfolgenden Jahren jeweils am ersten Tag des Brückenkurses, der eine Woche vor Beginn des Wintersemesters stattfand.

Im Hinblick auf die Begriffsbildung bzw. -entwicklung wurden im theoretischen Teil der Arbeit zunächst allgemein Faktoren betrachtet, die für die Schwierigkeiten im Übergang zwischen den Bildungsinstitutionen Schule und Hochschule verantwortlich gemacht werden. Im Anschluss erfolgte eine Fokussierung auf den sich wandelnden Charakter der Mathematik, der durch das theoretische Modell zum „Drei-Welten-Ansatz“ von Tall (2004c) beschrieben werden kann. Es wurde dargestellt, dass gerade aufgrund des Wandels im Charakter der Mathematik die Fähigkeit zur Begriffsbildung in der Studieneingangsphase eine Schlüsselrolle einnimmt. In Bezug auf die Aneignung und das Verständnis von mathematischen Begriffen wurde das Modell von *Concept Image* und *Concept Definition* von Tall & Vinner (1981) herangezogen.

Als Erhebungsinstrument für die Ausprägung der mentalen Modelle der Studierenden wurde eine leitfadengestützte Interviewbefragung über drei verschiedene Zeitpunkte hinweg gewählt. Die Kategorienschemata zur Kodierung der Interviewtranskripte entstanden theoriegeleitet unter Berücksichtigung des Modells von *Concept Image* und *Concept Definition*. Weiter wurden induktiv zentrale Fehlvorstellungen, die bei den Studierenden hinsichtlich der mathematischen Konzepte zugrunde lagen, identifiziert und kategorisiert.

Bevor nachfolgend die Ergebnisse beider Studien zusammengefasst und diskutiert werden, sollen an dieser Stelle Überlegungen zur Reichweite der Ergebnisse gemacht werden. Beide in dieser Arbeit beschriebenen Studien fanden ausschließlich an der Universität Passau statt. Diese hat bei den Studiengängen, die in Bezug auf die vorliegenden Untersuchungen Relevanz

besitzen, ein eher regionales Einzugsgebiet hinsichtlich der Studierenden. Demzufolge lassen sich die Resultate bezüglich des Kenntnisstandes möglicherweise nicht ohne Weiteres auf andere Universitäten übertragen. Obwohl alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Brückenkurses als Stichprobe für den FHM gewählt wurden, ist die Gesamtzahl mit $N = 111$ (WS 2014 / 2015) und $N = 143$ (WS 2015 / 2016) im Vergleich zu anderen Studien eher gering. Dafür zeigt sich bei beiden Tests eine sehr hohe Übereinstimmung der Ergebnisse. Die Resultate des FHM decken sich weiter mit Ergebnissen ähnlicher Studien im nationalen wie internationalen Raum. Zusammengesetzt ergeben die fragmentierten Studien somit ein Gesamtbild des Mathematik-Kenntnisstandes zu Studienbeginn, das ein eher schwaches Niveau konstatiert.

Schwierigkeiten hinsichtlich der Erhebung von Vorstellungen wurden bereits thematisiert. Die durch die in Abschnitt 8.1 beschriebenen Faktoren bedingte Unschärfe muss bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden; in besonderem Maße gilt dies für die Kontextabhängigkeit. Gemäß dieser werden in einer speziellen Situation oft nur Teile des mentalen Modells aktiviert. Tall (1991a) spricht in diesem Zusammenhang von einem „*temporary concept image*“ bzw. „*evoked concept image*“. Im Rahmen der EmMa-Studie wurden Vorstellungen zu insgesamt sehr einfachen und grundlegenden Konzepten erhoben, ohne dabei tiefergehende Zusammenhänge zu thematisieren. Insofern kann davon ausgegangen werden, dass bei Studierenden, die bei der Kodierung einen niedrigen Summenwert erreichten, tatsächlich eine sehr rudimentäre bis gar keine Vorstellung zu diesen Begriffen vorliegt. Als weiteres Indiz für dieses fragile Begriffsverständnis zeugen die zahlreichen identifizierten Fehlvorstellungen. Aufgrund der Größe der Stichprobe ergibt sich natürlich zwangsläufig eine Einschränkung der Generalisierbarkeit. Weiter kann die Begriffsbildung der Studierenden durch Aufbau und Konzeption der jeweiligen Lehrveranstaltung beeinflusst werden. Folglich ist eine Generalisierung der vorliegenden Ergebnisse auf die Begriffsbildung in anderen Lehrveranstaltungen (an anderen Universitäten) nur eingeschränkt möglich. Im Kontext der hohen Studienabbruchquoten und an vielen Stellen postulierten Schwierigkeiten im Fach Mathematik liefern die vorliegenden Ergebnisse allerdings einen wichtigen Erklärungsansatz sowie Forschungsdesiderata, die in Abschnitt 13.3 beschrieben werden.

13.1.1 Kenntnisstand in Mathematik zu Studienbeginn

Eine erste kurze Diskussion erfolgte bereits in Abschnitt 7.6 direkt im Anschluss an die Ergebnisse des FHM. Zusammenfassend lässt sich im Hinblick auf die Forschungsfragen festhalten, dass die Studienanfängerinnen und -anfänger an der FIM der Universität Passau in allen drei Bereichen „Grundlegende Fertigkeiten und Kenntnisse“, „Fertigkeiten bei der Bearbeitung anwendungsorientierter sowie mehrstufiger Problemstellungen“ und „Vertrautheit mit mathematischen Begriffen und Definition“ ein sehr niedriges Niveau zeigen. Trotz teilweise sehr guter Abiturnoten und der Fokussierung auf das Rechnen und Anwenden bestimmter Routinen in der Schule zeigen sich nach rund einem halben Jahr besorgniserregende Ergebnisse in allen drei Kategorien. Hier liegt die Vermutung nahe, dass die in der Schule vermittelten Kompetenzen nicht langfristig beibehalten werden. Dies widerspricht der bayerischen Definition der Kompetenzorientierung des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB, 2012). Speziell für das Fach Mathematik werden in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife folgende sechs allgemeine mathematische Kompetenzen unterschieden; diesen unterliegt das Ziel, das Spektrum mathematischen Arbeitens in der Sekundarstufe II in hinreichender Breite zu erfassen (KMK-Beschluss, 2012):

- **Mathematisch argumentieren**

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen.

- **Probleme mathematisch lösen**

Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege.

- **Mathematisch modellieren**

Hier geht es um den Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle.

- **Mathematische Darstellungen verwenden**

Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen.

- **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen**

Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten.

- **Mathematisch kommunizieren**

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache.

Diese Kompetenzen sowie ein tiefgehendes Verständnis der in der Schule vermittelten Kenntnisse und Fertigkeiten scheinen nach einem halben Jahr bei einem Großteil der Studienanfängerinnen und -anfänger nicht mehr abrufbar. Dies wurde u.a. bereits von Klymchuk et al. (2011) postuliert:

School mathematics is not truly 'learned' and stored in long term memory but is quickly lost after the final examination is safely passed.

In ähnlicher Weise hinterfragt auch Riedl (2015) das Vorliegen dieser Basiskenntnisse im nationalen Raum. Wie bereits erwähnt, sind diese Ergebnisse vor allem in Bezug auf Lehramtsstudierende beunruhigend. Nach Gueudet et al. (2016) versagt die Lehrerinnen- und Lehrerausbildung darin, Mathematiklehramtsstudierende ausreichend mit inhaltlichem und pädagogisch-inhaltlichem Wissen auszustatten. Daraus resultierend muss hinterfragt werden, ob diese Defizite in elementaren Grundkenntnissen und -fertigkeiten während des Studiums kompensiert werden. Ein drei- bis viertägiger Vorkurs kann hier kaum Abhilfe schaffen.

Aufgrund der vorangegangenen Diskussion in Abschnitt 7.6 sollte der Brückenkurs verstärkt dafür genutzt werden, die Studierenden auf Begriffsbildungsprozesse sowie Arbeitsweisen der Hochschulmathematik vorzubereiten, wie es bereits an vielen anderen Universitäten üblich ist (vgl. Abschnitt 2.3.2). Mitunter aufgrund erster Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit wurde im Wintersemester 2016 / 2017 mit einer Neukonzeption des Passauer Vorkurses begonnen. Dabei steht nun nicht mehr, wie in den vorangegangenen Jahren, das Rechnen von Aufgaben aus der Schulmathematik im Mittelpunkt, sondern es wird verstärkt darauf Wert gelegt, erste Erfahrungen mit der formal-axiomatischen Sichtweise der Hochschulmathematik zu vermitteln.

13.1.2 Begriffsbildung in der Studieneingangsphase

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der EmMa-Studie zusammengefasst sowie im Hinblick auf die Forschungsfragen diskutiert.

13.1.2.1 Abbildungen, Injektivität und Surjektivität

Es überrascht, dass die mentalen Modelle zum Funktions- bzw. Abbildungsbegriff auf derart niedrigem Niveau sind, obwohl die Studierenden hier bereits Vorerfahrungen aus der Schule mitbringen. Dies ist mitunter dadurch bedingt, dass nur bei knapp über der Hälfte überhaupt ein Funktionsbezug erkennbar ist. Paradoxerweise impliziert gerade dieser Funktionsbezug wiederum bei anderen Studierenden Schwierigkeiten, die durch die unterschiedliche Herangehensweise an die Begriffsbildung an den beiden Bildungsinstitutionen Schule und Universität erklärt werden kann. Funktionen bilden zwar einen zentralen Bestandteil in der Schulmathematik, allerdings spielen die Eigenschaften sowie, daraus resultierend, die Definition eine eher untergeordnete Rolle. Gemäß dem Drei-Welten-Ansatz von Tall (2004c) wird das Konzept „Funktion“ induktiv aus der Anschauung heraus gewonnen. Im weiteren Verlauf machen sich die Schülerinnen und Schüler keine Gedanken mehr, „eine Funktion ist halt eine Funktion“; eine formale Definition scheint nicht notwendig. Nur eine(r) von 27 Studierenden konnte im Rahmen der EmMa-Studie den Abbildungsbegriff formal korrekt definieren. Dies gelingt sogar in Bezug auf die „neuen“ Konzepte Injektivität und Surjektivität besser, obwohl zu diesen noch keine Vorerfahrungen vorhanden sind. Die sehr niedrige Qualität der mentalen Modelle zum Abbildungskonzept resultiert in zahlreichen Fehlvorstellungen, die sich weiter auf das Verständnis der Begriffe „Injektivität“ und „Surjektivität“ auswirken. Dieses Erkenntnis deckt sich mit bisherigen Forschungsergebnissen, wie etwa bei Vollrath (1984): „So zeigen sich z.B. bei Studierenden, die eine 3-semesterige Analysis-Vorlesung gehört haben, unter Umständen erschreckende Mängel im Verständnis des Funktionsbegriffs“ (S. 201). Um hier Abhilfe zu schaffen, muss einerseits das Vorverständnis aus der Schule reaktiviert und anschließend darauf aufgebaut werden. Dazu können „Beispiele und Veranschaulichungen sowie Diagramme von Zuordnungen beliebiger Mengen ohne Funktionsterm [...] hilfreich sein, um diese unvollständigen Repräsentationen zu adäquaten mentalen Modellen zu ergänzen“ (Reichersdorfer et al., 2014, S. 47). Auf Grundlage dieser kann schließlich die formal-axiomatische Herleitung

des Funktionsbegriffs erfolgen; nun aber angereichert mit angemessenen Vorstellungen. Auch im Bezug auf die Konzepte Injektivität und Surjektivität zeigt sich nach sieben Wochen Mathematikstudium ein Begriffsverständnis auf sehr niedrigem Niveau. Bei etwas weniger als der Hälfte der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ergab die Kodierung nach den beschriebenen Kategorienschemata bei beiden Begriffen einen Summenwert von null Punkten. Mit Blick auf die identifizierten Fehlvorstellungen wird klar, dass die mentalen Modelle zum „Abbildungskonzept“, zum Konzept „Injektivität“ und zum Konzept „Surjektivität“ zueinander in Interdependenz stehen. Ein fehlendes Begriffsverständnis des einen Konzepts resultiert in Fehlvorstellungen hinsichtlich der anderen Konzepte. Über die drei Interviewzeitpunkte hinweg zeigen sich in Bezug auf die beiden längsschnittlich untersuchten Konzepte nahezu die gleichen Fehlvorstellungen. Diese gehen in Hinblick auf die Häufigkeit des Auftretens zwar zurück, allerdings muss dabei berücksichtigt werden, dass einige Studierende im zeitlichen Verlauf ihr Studium abgebrochen haben, bei denen sich zuvor falsche Vorstellungen zeigten.

Betrachtet man die Entwicklung der mentalen Modelle hinsichtlich beider Konzepte (vgl. Kapitel 6) erscheint die Begriffsbildung in der Studieneingangsphase¹ als wichtiger Indikator, ob diese erfolgreich verläuft oder nicht. Weiter kann diese als ein Bedingungsfaktor für Studienabbruch angesehen werden, denn: alle Studierenden, die im Laufe der Studie ihr Studium abgebrochen hatten, wiesen nach sieben Wochen in Bezug auf beide Konzepte einen sehr niedrigen Summenwert auf.

Gerade aufgrund der beobachteten Interdependenz der drei Konzepte sollte in der Studieneingangsphase folglich speziell darauf Wert gelegt werden, den Zusammenhang dieser explizit zu verdeutlichen und neben der formalen Definition auch den Aufbau eines vollständigen und konsistenten mentalen Modells zu vermitteln. Hierbei können „detaillierte Analysen der Definition mit Variation der Bedingungen aber auch grafische Repräsentationen“ (Reichersdorfer et al., 2014, S. 47) unterstützend wirken.

13.1.2.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem

Analog zum Abbildungsbegriff sind die mentalen Modelle auch in Bezug auf das Konzept „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ auf sehr niedrigem Niveau, obwohl

¹Im Kontext dieser Studie die ersten sieben Wochen.

auch hier bereits Vorerfahrungen aus der Schule vorliegen. Angesichts der FHM-Ergebnisse, nur 14.4 % der Studienanfängerinnen und -anfänger konnten den Begriff „Lineare Unabhängigkeit von drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ “ richtig charakterisieren, ist generell in Frage zu stellen, ob bei dem Großteil der Studierenden Kenntnisse diesbezüglich vorliegen. Betrachtet man die Ergebnisse der Kodierung sowie die identifizierten Fehlvorstellungen genauer, zeigt sich, dass vor allem die Zusammenhänge zwischen den drei Begriffen „Lineare Unabhängigkeit“, „Basis“ und „Erzeugendensystem“ von vielen Studentinnen und Studenten nicht verstanden werden. So liegt beispielsweise bei zwölf der 27 Teilnehmerinnen und Teilnehmer nach sieben Wochen eine Fehlvorstellung bzgl. der Anzahl linear unabhängiger Vektoren einer Basis eines vorgegebenen Vektorraums (hier: \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3) vor. Es fällt zudem auf, dass sich die fünf, nach sieben Wochen identifizierten Fehlvorstellungen auch zu den beiden nachfolgenden Terminen zeigten. Diesen falschen Vorstellungen gilt es demnach in besonderem Maße in den Lehrveranstaltungen entgegenzuwirken.

Im Hinblick auf die Entwicklung der mentalen Modelle zu diesem Konzept zeigen sich starke Parallelen zu den in Abschnitt 13.1.2.1 erhaltenen Ergebnissen. Auch hier erscheinen die ersten Wochen im Mathematikstudium als wichtiger Indikator für einen erfolgreichen Begriffsbildungsprozess sowie für einen Studienabbruch.

Wie in Abschnitt 13.1.2.1 im Bezug auf die Konzepte „Abbildung“, „Injektivität“ und „Surjektivität“ beschrieben, gilt es auch hier, den Aufbau von konsistenten und qualitativ hochwertigen mentalen Modellen zu fördern. Dazu zählen im besonderen Maße auch die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Begriffen. Maßnahmen, wie dies gelingen kann, werden in Abschnitt 13.2 diskutiert.

13.1.2.3 Folgen- und Folgenkonvergenz

Das mentale Modell bzgl. des Konzeptes „Folgen- und Folgenkonvergenz“ konnte nur bei zwölf Teilnehmerinnen und Teilnehmern untersucht werden. Gründe hierfür waren die hohe Stichprobenmortalität, schlechte Klausurergebnisse in „Lineare Algebra und analytische

Geometrie I² sowie der Studienverlaufsplan³. Besonders auffällig ist, dass keine(r) der zwölf Studierenden den Begriff „Folge“ formal richtig definieren konnte; im Hinblick auf „Folgenkonvergenz“ gelang dies zumindest fünf Studentinnen und Studenten. Die Vorüberlegungen in Abschnitt 11.4.1 verdeutlichen, welche Bedeutung die Visualisierung von Folgenkonvergenz für ein konsistentes Begriffsverständnis zu leisten vermag. Allerdings konnten lediglich fünf Teilnehmerinnen und Teilnehmer während der Interviews eine geeignete Visualisierung angeben. Diesem Defizit gilt es in der Vorlesung und Übung Abhilfe zu schaffen. Weiter fällt auf, dass lediglich zwei Studierende den Nachweis von Folgenkonvergenz im Bezug auf die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ formal korrekt führen konnten. Dies lässt sich mitunter durch die identifizierten Fehlvorstellungen erklären, denen u.a. ein fehlerhafter Quantorengebrauch sowie ein fehlender bzw. falscher Zusammenhang der Variablen ε und N_ε zugrunde lag. Weiter zeigte sich bei zwei Studentinnen und Studenten die bereits in den Vorüberlegungen herausgestellte Problematik hinsichtlich des Grenzwertes (s. Fehlvorstellung „Grenzwert“ in Abschnitt 11.4.4).

13.1.2.4 Generalisierte Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden abschließend die zentralen Erkenntnisse hinsichtlich des Begriffsbildungsprozesses in der Studieneingangsphase, losgelöst von den jeweiligen konkreten Konzepten, zusammengefasst. Bei allen untersuchten Begriffen fällt auf, dass nur ein sehr niedriger Prozentsatz der Teilnehmerinnen und Teilnehmer die formale Definition richtig nennen kann. Dies lässt sich bei einem Teil der Studierenden dadurch erklären, dass Definitionen als nicht wichtig erachtet werden, der Fokus liegt verstärkt auf dem Lösen von eher anwendungsorientierten Übungsaufgaben; in besonderem Maße zeigt sich dies bei den Studentinnen und Studenten, die die nicht-vertiefte Mathematikvorlesung besucht haben. Mit Rückbezug auf die theoretischen Überlegungen, insbesondere dem Drei-Welten-Ansatz von Tall (2004c), lässt sich dies mit der bisher gewohnten Herangehensweise in der Schulmathematik begründen (vgl. Abschnitt 3.1.1.4). Gerade in der Studieneingangsphase ist diesbezüglich eine Sensibilisierung der Studierenden, aber auch der Dozierenden wichtig. Darüber hinaus überrascht die

²Einige Studierende entschlossen sich dadurch, nicht an der Vorlesung „Analysis I“ im zweiten Semester teilzunehmen.

³Die Vorlesung „Elemente der Analysis I“ wird für Studierende, die Mathematik nicht vertieft studieren, erst im dritten Semester angeboten.

niedrige Qualität des untersuchten *Concept Image* zu allen Begriffen. Bei der Mehrheit der Studentinnen und Studenten liegen nicht einmal Beispiele oder Gegenbeispiele zu den jeweiligen Konzepten vor. Als weiteres Indiz für das mangelnde Begriffsverständnis zeugen die vielfältig identifizierten Fehlvorstellungen, die sich über alle Interviewzeitpunkte hinweg zeigen. Ein qualitativ niedriges mentales Modell sowie vorhandene Fehlvorstellungen erscheinen zudem als Bedingungsfaktor für Studienabbruch oder -wechsel.

Vergleicht man die erhaltenen Summenwerte zu den untersuchten Begriffen, wird gerade im Bezug auf ein qualitativ hochwertiges Begriffsverständnis deutlich, dass dieses unabhängig vom jeweiligen Konzept erscheint. So erreichten etwa alle vier Studierenden, die hinsichtlich „Injektivität“ einen sehr hohen Wert aufwiesen, diesen ebenfalls bei den Konzepten „Surjektivität“ und „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“. Daraus resultiert eine verstärkte Notwendigkeit der Förderung der Begriffsbildung sowie -entwicklung der Studierenden bereits bzgl. sehr einfacher Begriffe.

Diese Forderung wird mit Blick auf die Begriffsentwicklung verstärkt. Unabhängig vom konkreten Konzept erscheinen die ersten Wochen im Studium als wichtiger Indikator für eine erfolgreiche Begriffsbildung sowie -entwicklung. Gelingt es in der Studieneingangsphase, konsistente und qualitativ hochwertige mentale Modelle zu den Begriffen aufzubauen, verbleiben diese im Laufe der ersten beiden Semester meist auf hohem Niveau. Studierende, denen dies in den ersten Wochen nicht gelingt, zeigen im weiteren Verlauf, wenn überhaupt, nur eine leichte Verbesserung hinsichtlich des *Concept Image*.

13.2 Einordnung der Ergebnisse im Hinblick auf deren praktische Relevanz

„Die Entwicklung mathematischer Kompetenz im Übergang zwischen Schule und Hochschule ist ein fragiler und anfälliger Prozess, in dem beide Institutionen genauso wie die Schülerinnen und Schüler viel Engagement zeigen müssen.“

(Lorbeer & Reiss, 2010, S. 96)

Welche Schlüsse können aus den Ergebnissen der vorliegenden Studien gezogen werden? Es lässt sich nicht leugnen, dass bei vielen Studierenden einerseits ein geringer Kenntnisstand im

Hinblick auf mathematisches Grundwissen sowie ein Mangel an Grundfertigkeiten vorliegt, andererseits starke Defizite in der Begriffsbildung während der Studieneingangsphase vorhanden sind, die mitunter in verschiedenen Fehlvorstellungen resultieren.

Die Problematik hinsichtlich des Kenntnisstands in Mathematik wurde bereits in Abschnitt 7.6 aufgegriffen. Bei den Studienanfängerinnen und -anfängern zeigen sich teilweise erhebliche Defizite in Bezug auf grundlegende Fertigkeiten und Kenntnisse in Mathematik. Überraschend sind zudem die schwachen Ergebnisse bei der Bearbeitung von anwendungsorientierten Problemstellungen, da gerade darauf in der Schulmathematik eigentlich großer Wert gelegt wird. Somit bringt ein großer Teil der Abiturientinnen und Abiturienten nicht die Kompetenzen mit, die ihnen, mit teilweise hervorragenden Noten, in den Zeugnissen bescheinigt wird. An manchen Stellen ist bereits von einer „Kultur des Durchwinkens“⁴ die Rede. Als Konsequenz scheint es unabdingbar, den Lücken in zentralen Basiskenntnissen zu begegnen, doch kann im Rahmen dieser Arbeit nicht beantwortet werden, an welcher Stelle dies geschehen kann. Es bleibt generell fraglich, ob dies Aufgabe der Universität sein soll, wie etwa Cramer & Walcher (2010) argumentieren (S. 114):

Hochschulen müssen ihren Studierenden mit ihren Studienprogrammen bestmögliche Berufschancen eröffnen, und natürlich müssen sie die Studienanfänger auch dort abholen, wo sie stehen. Damit aber das Ziel letztlich erreicht werden kann, müssen die Schulen ihre Abiturienten in die Lage versetzen, ein MINT-Studium ohne zusätzliche Qualifikationen aufnehmen zu können. Die Herstellung der Studierfähigkeit liegt in der Verantwortung der Schulen.

In besonderem Maße zum Nachdenken anregen sollten diese Defizite bei Lehramtsstudierenden. Nach Abschluss ihres Studiums müssen diese Schülerinnen und Schülern in gerade diesen Bereichen unterrichten. Mit welcher Qualität dies gelingen soll, bleibt dahingestellt.

Anders stellt sich die Rolle der Universität im Hinblick auf die Schwierigkeiten im Begriffsbildungsprozess während der Studieneingangsphase dar, da es laut Cramer & Walcher (2010) nicht der primäre Zweck des Schulunterrichts sein kann, auf das Studienfach Mathematik vorzubereiten. Die theoretischen Überlegungen in Kapitel 3 haben gezeigt, dass der Charakter der Mathematik mit dem Wechsel von der Schule an die Universität einen signifikanten Wandel er-

⁴Etwa in einem Artikel der Welt, der von Ergebnissen einer Studie der Konrad-Adenauer-Stiftung berichtet: <https://www.welt.de/politik/deutschland/article154187052/Die-erschreckenden-Bildungsdefizite-junger-Deutscher.html>

lebt. Konzepte werden nunmehr formal definiert; eine bloße Kenntnis der Definition reicht für ein umfassendes Verständnis eines mathematischen Begriffes nicht aus (Hähnisch, 2011). Die formal-axiomatische Herangehensweise bereitet den Lernenden erhebliche Verständnisschwierigkeiten, da sie Intentionen und Vorstellungen ausklammert (Weth, 1999). Laut Tall (1991b) ist es demnach von besonderer Bedeutung „to help students gain insight into what is going on“ (S. 17). Nach Danckwerts et al. (2004) sollte dies, also Brücken zwischen Universität und Schule zu bauen, gemeinsame Aufgabe der Fachwissenschaft und Fachdidaktik sein. Gerade die ersten Wochen scheinen für die Fähigkeit zur Begriffsbildung entscheidend. Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studie, die nach sieben Wochen ein qualitativ hochwertiges Niveau des mentalen Modells zu den untersuchten Begriffen aufwiesen, behielten dieses hohe Level im weiteren Verlauf der Studie bei. Alle Probandinnen und Probanden, die ihr Studium im Laufe der Untersuchung abgebrochen hatten, zeigten zuvor ein sehr niedriges Niveau des *Concept Image* sowie vielfältige Fehlvorstellungen. Derart geringe Summenwerte bei insgesamt sehr einfachen Begriffen sind in Bezug auf das Verständnis komplexerer Konzepte besorgniserregend. Ohne Kenntnis der Definitionen lassen sich die Anforderungen der Universitätsmathematik, dazu zählt etwa das eigenständige Führen von deduktiven Beweisaufgaben und daraus resultierend ein erfolgreiches Studium im Fach Mathematik, nicht bewältigen. Fehlen adäquate mentale Modelle zu diesen Definitionen ist die Gefahr groß, in der Flut von Formalismen und Begriffen zu versinken. So kommt dem Aufbau eines konsistenten mentalen Modells hinsichtlich der formal definierten mathematischen Konzepte eine große Rolle zu. Die Ergebnisse der vorliegenden Studie haben gezeigt, dass dies nur sehr wenigen Studierenden gelingt, zumindest lässt die konstant hohe Qualität der Bewertung darauf schließen. Vergleicht man die Auswertung zu den einzelnen Begriffen, sind es nahezu immer die gleichen Studierenden, die ein hohes Level erreichen. Wie soll man also reagieren? Ein pragmatischer Ansatz wäre, die Studierenden sich selbst zu überlassen, einem kleinen Teil scheinen die sich wandelnden Anforderungen im Hinblick auf die Begriffsbildung keine Schwierigkeiten zu bereiten. Die Fähigkeit zur Aneignung eines umfangreichen *Concept Image* ist zwar noch kein hinreichender Faktor für Studienerfolg, allerdings dafür zwingend erforderlich. Keiner der Studierenden mit einem derart niedrigen Niveau bzgl. der untersuchten zentralen Begriffe dürfte eine reale Chance haben, eine Klausur zu bestehen. Im Umkehrschluss stellt sich die Frage, ob dies nicht auch positiv zu bewerten ist. Diese Überlegung wurde bereits von Ableitinger & Herrmann (2013) im Hinblick auf Lehramtsstudierende aufgegriffen (S. 328 f):

Die Selektion der für den Lehrberuf am besten geeigneten Studierenden (dazu gehört unbestritten auch das fachliche Können) und die Förderung der studentischen Selbstständigkeit sind sicher begrüßenswerte Folgen eines anspruchsvollen Mathematikstudiums. Diese beiden Argumente werden von Dozentenseite sowie von erfolgreichen Absolventen auch tatsächlich häufig angeführt. Andererseits gehen – gerade in Zeiten eines akuten Mangels an Mathematiklehrkräften – viele Studierende mit Potenzial auf dem Weg verloren. Gerade dieses Klientel gilt es durch Innovationen im Lehrbetrieb zu unterstützen.

Lässt man die Studierenden mit dem Abstraktionsschock alleine, benötigen diese für dessen Aufarbeitung womöglich längere Zeit. Den Ergebnisse der Studie zufolge gelingt dies nicht innerhalb der ersten beiden Semester. Will man den hohen Durchfall- und Studienabbruchquoten entgegenwirken, ist es unerlässlich, geeignete Kompensationsmaßnahmen zu ergreifen. Im Hinblick auf die Begriffsentwicklung in der Studieneingangsphase sollte verstärkt der Aufbau eines qualitativ hochwertigen *Concept Image* gefördert werden. Dies kann und sollte zunächst bereits während des Brückenkurses vorbereitet und anschließend sowohl in der Vorlesung als auch in der Übung gefördert und unterstützt werden. Speziell in Bezug auf die Vorkurse wurde in Abschnitt 2.3 herausgestellt, dass diese an unterschiedlichen Universitäten in verschiedensten Formaten und differierendem Umfang stattfinden. An der Universität Passau bieten sich hier hinsichtlich Dauer und Konzeption noch vielfältige Verbesserungsmöglichkeiten. Die thematisierten Konzepte sollten mit Bildern und Vorstellungen angereichert, die abstrakten Formeln und Definitionen somit veranschaulicht und greifbar gemacht werden. Ganz besonders wichtig ist die Einführung und Vermittlung neuer Lernstrategien zum Begriffserwerb (Reichersdorfer et al., 2014). In ähnlicher Weise argumentiert auch Engelbrecht (2010): „*If we accept the theory of mental models (...), we see the importance of assisting students learn how to develop and use accurate mental models on the one hand, and on the other hand, they also need to be trained in the rules of logic that govern mathematical reasoning*“ (S. 8). Dozentinnen und Dozenten müssen sich dazu vor Augen führen, dass die Studienanfängerinnen und -anfänger durch den Sprung zur formal-axiomatischen Welt der Hochschulmathematik vor eine enorme Herausforderung gestellt werden. Für diese ändert sich nicht nur die Vorstellung von Mathematik auf radikale Art und Weise, gleichzeitig werden an sie ab der ersten Semesterwoche komplett neue Anforderungen an Arbeitsweise und Begriffsverständnis gestellt, die in so kurzer Zeit nur von den Wenigsten bewältigt werden können. Klar ist, dass die Studierenden sehr schnell ein möglichst großes Maß an Selbstständigkeit erwerben müssen. Dies kann allerdings nicht

gelingen, wenn sie dabei allein gelassen werden (Pólya, 2010). Einen vielversprechenden Ansatz liefert hierzu Engelbrecht (2010), der vorschlägt, ein Konzept auf folgenden unterschiedlichen Repräsentationsstufen zu erschließen (S. 8 f, ins Deutsche übersetzt):

- (1) Informelle Erklärung des Konzepts (verbal oder gestikulierend)
- (2) Visuell (Anfertigen einer Skizze)
- (3) Mit formalen mathematischen Symbolen
- (4) Wie würde man anfangen, das Konzept zu beweisen oder zu widerlegen?

In analoger Weise sollte für die Negation des Konzepts vorgegangen werden. Besonders wertvoll sind diese Repräsentationsstufen dadurch, dass einerseits die Bildung eines mentalen Modells zu dem Konzept gefördert wird, andererseits die Bedeutung der formalen Definition im Hinblick auf Beweisprozesse unterstrichen wird.

Den Defiziten in der Begriffsbildung könnte weiter durch eine Verstärkung kommunikativer und kollaborativer Aktivitäten begegnet werden. Nach Danckwerts et al. (2004) sind die Vermittlungsmethoden oft auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung fixiert und die Fachausbildung ist somit eher produkt- und weniger prozessorientiert akzentuiert. Besser wäre eine Balance zwischen Instruktion und Konstruktion. Einen vielversprechenden Ansatz hierfür liefert das „Umdrehen“ der Mathematikvorlesung, auch „*Inverted-*“ oder „*Flipped-Classroom*“-Modell genannt (Fischer & Spannagel, 2012). Diesem Konzept liegt folgende Idee zugrunde (ebd., S. 225 f):

Studierende betrachten sich die Vorlesungsvideos *in Vorbereitung* auf die gemeinsame Sitzung. Dadurch wird in der Präsenzzeit Raum geschaffen für Fragen, Diskussionen und das Lösen bzw. Besprechen von Aufgaben. Das Ziel des *inverted classroom* ist somit, Input-Phasen aus Präsenzveranstaltungen auszulagern, um wertvolle gemeinsame Zeit für Interaktionen und Diskussionen zu schaffen.

Im Gegensatz zur traditionellen Vorlesung, in der die gemeinsame Zeit meist für das Anschreiben bzw. Vortragen des Skriptums durch den Dozierenden genutzt wird, erfolgt die Auseinandersetzung mit der Thematik im *Inverted Classroom*-Modell zunächst alleine. Dazu wird der Dozentenvortrag meist per Video vorverlagert. Anschließend werden die Inhalte während der

Präsenzphase aufgegriffen und vertieft. Dieses Konzept wird speziell im nordamerikanischen Raum schon seit mehreren Jahren erfolgreich in unterschiedlichen Fachrichtungen eingesetzt. Forschungsergebnisse hierzu stellen vor allem die Förderung des Engagements sowie der Interaktion der Studierenden heraus (Fischer & Spannagel, 2012; Schullery et al., 2011), zwei wichtige Faktoren, die im Hinblick auf einen erfolgreichen Begriffsbildungsprozess Relevanz besitzen. Oftmals wird das Modell fälschlicherweise mit „Video-Lernen“ gleichgesetzt. Dem widersprechen Fischer & Spannagel (2012), indem sie die Wichtigkeit der Anwesenheit der Dozentin bzw. des Dozenten in den Präsenzphasen unterstreichen, „weil die Diskussions- und Arbeitsprozesse der Studierenden von einem Experten geleitet, begleitet, unterstützt, kommentiert und berichtigt werden müssen“ (ebd., S. 227). Eine Beschreibung der Umsetzung dieses Konzepts im Rahmen einer Mathematikvorlesung an der PH Heidelberg sowie Evaluationsergebnisse diesbezüglich findet sich in Fischer & Spannagel (2012).

Bei allen Vorteilen muss aber auch berücksichtigt werden, dass dieses Modell nicht ohne weiteres umgesetzt werden kann. Dies setzt einerseits die Akzeptanz und Bereitschaft der Dozierenden voraus, ihre Vorlesung aufzeichnen zu lassen, andererseits muss dies auch mit den Richtlinien der Fakultät bzw. Universität vereinbar sein.

Zusätzlich besitzen die identifizierten Fehlvorstellungen praktische Relevanz. Dozentinnen und Dozenten von Vorlesungen und Übungen haben jahrelange Erfahrung auf ihrem Gebiet. Gerade Einführungsvorlesungen werden dadurch oftmals als fachlich wenig herausfordernd empfunden. Begriffe wie „Abbildung“, „Injektivität und Surjektivität“ oder „Lineare Unabhängigkeit“ werden als selbstverständlich angesehen und schnell übergangen. Gerade hier ist eine Sensibilisierung für die Probleme der Studierenden erforderlich. Kennt man mögliche Fehlvorstellungen, kann man diesen in Vorlesung und Übung gezielt entgegenwirken. Insbesondere bei den Begriffen „Abbildung“ und „Injektivität und Surjektivität“ bietet sich in Anlehnung an die Vorüberlegungen von Abschnitt 9.2.1 an, Zusammenhänge detailliert darzustellen. Es hat sich gezeigt, dass bei vielen Studierenden das Abbildungskonzept vom Funktionsbegriff losgelöst vorliegt. Durch einen Rückgriff auf bereits Gelerntes aus der Schule und eine Verzahnung dieser Begriffe können diese Defizite kompensiert werden. Bezugnehmend auf den Einleitungssatz dieser Arbeit ist es dementsprechend absolut nicht sinnvoll, alles zu vergessen, was man in der Schule gelernt hat. Vielmehr ist es empfehlenswert, an die Vorerfahrungen der Studierenden anzuknüpfen und darauf aufzubauen.

13.3 Forschungsdesiderata und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die Begriffsbildung sowie -entwicklung von Studierenden in der Studieneingangsphase zu dokumentieren. Als Erhebungsinstrument wurde eine leitfadengestützte Interviewbefragung gewählt. Dieses Vorgehen bietet einerseits die Chance, die Vorstellungen der Studierenden detailliert zu erfassen, allerdings resultiert aufgrund des zeitlichen Aufwandes auch eine Restriktion hinsichtlich der Stichprobengröße. Eine weitere Problematik der längsschnittlichen Erfassung stellt die hohe Studienabbruchquote dar. Die EmMa-Studie startete mit 31 Studierenden, von denen bis Mitte des zweiten Semesters 15 die Teilnahme an der Studie bzw. ihr Studium beendeten. Wünschenswert wäre demzufolge eine Methode, um mit akzeptablem Zeitaufwand die Begriffsentwicklung einer noch größeren Stichprobenanzahl zu dokumentieren, ohne dabei zu oberflächlich zu werden. Eine Möglichkeit hierfür wären möglicherweise Mind- bzw. Concept-Maps, wobei die Eignung dieses Instruments zunächst in einer Pilotstudie erprobt werden müsste. Ein Versuch hierzu wurde bereits von Rösken & Rolka (2007) im Hinblick auf die Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zum Integralbegriff unternommen.

Weiter wäre natürlich sehr interessant, ob durch Lehrveranstaltungen, in die konkrete Unterstützungsmaßnahmen in Bezug auf die Begriffsbildung sowie -entwicklung integriert sind, eine signifikante Förderung dieser erzielt werden und den Studierenden folglich der Einstieg in die Hochschulmathematik erleichtert werden kann. Hierzu gilt es zunächst geeignete Materialien zu entwickeln und diese anschließend in den jeweiligen Veranstaltungen zu etablieren.

Bibliographie

- Ableitinger, C. & Herrmann, A. (2013). *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra. Ein Arbeits- und Übungsbuch*. 2. Aufl., Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Ableitinger, C. & Herrmann, A. (2014). Das Projekt „Mathematik besser verstehen“. Ein Begleitprogramm zu den Vorlesungen Analysis und Lineare Algebra im Studienfach Mathematik LA für GyGeBK. In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (Hrsg. I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber & T. Wassong), S. 327–342, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Alcock, L. & Simpson, A. (1999). The rigour prefix. In: *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. O. Zaslavsky), 2, S. 17–24.
- Allen, M. (2010). Learner error, affectual stimulation, and conceptual change. In: *Journal of Research in Science and Technology* (47(2)): S. 151–173.
- Anthony, G. (2000). Factors influencing first-year students' success in mathematics. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (31(1)): S. 3–14.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics* (52): S. 215–241.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (2004). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In: *Research in Collegiate Mathematics Education*, 6, S. 1–32, Heruntergeladen von <http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/APOS-Overview.pdf> am 22. Juni 2016.
- Ball, D. & Bass, H. (2002). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In: *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (Hrsg. E. Simmt & B. Davis), Heruntergeladen von <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED529557.pdf> am 25. Mai 2016.
- Barrow, J. (1996). *Warum die Welt mathematisch ist*. München: DTV-Verlag.

- Barth, F., Haller, R. & Bergold, H. (1985). *Stochastik Leistungskurs*. 3. Aufl., München: Franz Ehrenwirth Verlag.
- Barth, F., Haller, R. & Bergold, H. (2001). *Stochastik Grundkurs*. 7. Aufl., München, Düsseldorf, Stuttgart: Oldenbourg Schulbuchverlag.
- Barzel, B., Eichler, A., Holzäpfel, L., Leuders, T., Maaß, K. & Wittmann, G. (2013). Ein Studienmodell zur konsequenten Vernetzung von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Schulpraxis. In: *Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr. Extended Abstracts zur 2. khdm-Arbeitstagung* (Hrsg. A. Hoppenbrock, S. Schreiber, R. Göller, R. Biehler, B. Büchler, R. Hochmuth & H.G. Rück), S. 13–14, Kassel: khdm-Report 13-01, Heruntergeladen von https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2013081343293/3/khdm_report_13_01.pdf am 18. Mai 2016.
- Bauer, T. & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. In: *Mathematische Semesterberichte* (56(1)): S. 85–103.
- Bellhäuser, H. & Schmitz, B. (2014). Förderung selbstregulierten Lernens für Studierende in mathematischen Vorkursen – ein web-basiertes Training. In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (Hrsg. I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber & T. Wassong), S. 343–358, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Beutelspacher, A., Danckwerts, R. & Nickel, G. (2010). Mathematik Neu Denken. Empfehlungen zur Neuorientierung der universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt. Heruntergeladen von https://www.telekom-stiftung.de/sites/default/files//dts-library/materialien/pdf/publikation_mathematik-neu-denken.pdf am 25. April 2016.
- Biehler, R., Bruder, R., Hochmuth, R. & Koepf, W. (2014a). Einleitung. In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse - Konzepte, Probleme und Perspektiven* (Hrsg. I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber & T. Wassong), S. 1–6, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Biehler, R., Bruder, R., Hochmuth, R., Koepf, W., Bausch, I., Fischer, P.R. & Wassong, T. (2014b). VEMINT – Interaktives Lernmaterial für mathematische Vor- und Brückenkurse. In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (Hrsg. I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber & T. Wassong), S. 261–276, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Bishop, A. (1989). Review of research in visualization in mathematics education. In: *Forcus on Learning Problems in Mathematics* (11(1)): S. 7–16.

- Blum, W. & Henn, H.W. (2003). Zur Rolle der Fachdidaktik in der universitären Gymnasiallehrerausbildung. In: *MNU - Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (56(2)): S. 68–76.
- Büning, H. (2004). Breites Angebot an falschen Lösungen. Mathematikkenntnisse von Studienanfängern im Test. In: *Forschung & Lehre* (11): S. 618–620.
- Bortz, J. (1999). *Statistik: Für Sozialwissenschaftler*. 5. Aufl., Berlin: Springer.
- Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. 4. Aufl., Heidelberg: Springer Medizin Verlag.
- Brandell, G., Hemmi, K. & Thunberg, H. (2008). The widening gap – a Swedish perspective. In: *Mathematics Education Research Journal* (20(2)): S. 38–56.
- Brandl, M. (2008). Von Kegeln zu höheren algebraischen Kurven und wieder zurück. Große Unterrichtseinheit beim Lehrer-Online-Portal 'Begabte fördern', Schulen ans Netz e.V. Bonn, Online aufgerufen unter <http://www.lehrer-online.de/unterricht/sekundarstufen/naturwissenschaften/mathematik/unterrichtseinheit/ue/von-kegeln-zu-hoeheren-algebraischen-kurven-und-zurueck/> am 13. Juli 2016.
- Brandl, M. (2009). Vom Lotto zum Pascalschen Dreieck – eine etwas andere Kurvendiskussion. Große Unterrichtseinheit beim Lehrer-Online Portal 'Begabte fördern', lo-net GmbH Köln, Online aufgerufen unter <http://www.lehrer-online.de/unterricht/sekundarstufen/naturwissenschaften/mathematik/unterrichtseinheit/ue/vom-lotto-zum-pascalschen-dreieck/> am 13. Juli 2016.
- Brandl, M. (2011a). A Constructive Approach to the Concept of Mathematical Giftedness based on Systems Theory. In: *Proceedings of the 6th International conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students* (Hrsg. M. Avotina, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramana, S. L. & E. Velikova), S. 35–39, University of Latvia, Riga, Latvia / Angel Kanchev University of Ruse, Ruse, Bulgaria.
- Brandl, M. (2011b). High attaining versus (highly) gifted pupils in mathematics: a theoretical concept and an empirical survey. In: *CERME 7 – Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Hrsg. M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland), S. 1044–105, University of Rzeszów.
- Brandl, M. (2011c). Manifestation mathematischer Begabung an einem Oberstufeninternat für Hochleistende. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (Hrsg. R. Haug & L. Holzäpfel), S. 139–142.
- Brandl, M. (2013a). Stochastik versus Analysis. Stabilisieren ist nicht Konvergieren. In: *mathematik lehren 180, Themenheft Grenzwerte* S. S. 41–43.

- Brandl, M. (2013b). The Project 'Ways to more MINT-Graduates' of the Bavarian Business Association (vbw) with Focus on the M (=Mathematics) at the University of Augsburg, Germany. In: *Educational Interfaces between Mathematics and Industry – Report on an ICMI-ICIAM-Study* (Hrsg. A. Damlamian, J.F. Rodrigues & R. Sträßler), New ICMI Study Series, Vol. 16, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer.
- Brandl, M. & Barthel, C. (2012). A Comparative Profile of High Attaining and Gifted Students in Mathematics. In: *ICME-12 Pre-Proceedings* S. 1429–1438.
- Börensen, C. & Gensch, K. (2009). *MINT – Wege zu mehr MINT-Absolventen. Zwischenbericht 2009*. München: Bayerisches Staatsinstitut für Hochschulforschung und Hochschulplanung, Heruntergeladen von http://www.ihf.bayern.de/uploads/media/MINT_Zwischenbericht.pdf am 30. Juni 2016.
- Briedis, K., Egorova, T., Heublein, U., Lörz, M., Middendorff, E., Quast, H. & Spangenberg, H. (2008). Studienaufnahme, Studium und Berufsverbleib von Mathematikern. Einige Grunddaten zum Jahr der Mathematik. Heruntergeladen von http://www.dzhw.eu/pdf/pub_fh/fh-200809.pdf am 12. Mai 2016.
- Britton, S., Daners, D. & Stewart, D. (2007). A self-assessment test for incoming students. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (38(7)): S. 861–868.
- Bruner, J.S. (1972). *Der Prozess der Erziehung*. 2. Aufl., Berlin.
- Brunnermeiner, A., Herz, A., Kammermeyer, F., Kilian, H., Kurz, K., Sauer, J., R., S. & Zechel, J. (2004). *Fokus Mathematik 6*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Buchholtz, N., Leung, F.K., Ding, L., Kaiser, G., Park, K. & Schwarz, B. (2013). Future mathematics teachers' professional knowledge of elementary mathematics from an advanced standpoint. In: *ZDM, The International Journal on Mathematics Education* (45(1)): S. 107–120.
- Burger, W.F. & Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. In: *Journal for Research in Mathematics Education* (17(1)): S. 31–48.
- Caravita, S. (2001). A re-framed conceptual change theory? In: *Learning and Instruction* (11): S. 421–429.
- Carmody, G., Godfrey, S. & Wood, L. (2006). Diagnostic tests in a first year mathematics subject. In: *Assessment in Science Teaching and Learning: 2006 National UniServe Conference Proceedings* Heruntergeladen von <http://science.uniserve.edu.au/pubs/procs/2006/carmody.pdf> am 18. August 2016.
- Cocking, R. & Chipman, S. (1988). Math Achievement of Language Minorities. In: *Linguistic and Cultural Influences on Learning Mathematics* (Hrsg. R. Cocking & J. Mestre), S. 17–46, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Cohen, J. (1968). Weighted kappa: Nominal scale agreement with provision for scale disagreement or partial credit. In: *Psychological Bulletin* (70(4)): S. 213–220.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Devilyna, N., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. In: *Journal of Mathematical Behavior* (15): S. 167–192.
- Crafter, S. & Maunder, R. (2012). Understanding transitions using a sociocultural framework. In: *Educational and Child Psychology* (29(1)): S. 10–18.
- Cramer, E. & Walcher, S. (2010). Schulmathematik und Studierfähigkeit. In: *Mitteilungen der DMV* (18): S. 177–212.
- Cretchley, P., Jourdan, N. & Passmore, T. (2007). Secondary-Tertiary Transition: What Mathematics Skills Can and Should We Expect This Decade. In: *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Hrsg. J. Watson & K. Beswick), S. 463–472.
- Crowley, M.L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In: *Learning and Teaching Geometry, K-12* (Hrsg. M. Montgomery-Lindquist), S. 1–16, Reston, Va.: Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.
- Danckwerts, R. (2006). Plädoyer für eine „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ im ersten Semester. In: *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag* (Hrsg. A. Büchter, H. Humenberger, S. Hußmann & S. Prediger), S. 257–264, Hildesheim, Berlin: Franzbecker Verlag.
- Danckwerts, R., Prediger, S. & Vasarhelyi, E. (2004). Perspektiven der universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik für die Sekundarstufen. In: *DMV/GDM-Mitteilungen* (12(2)): S. 76–77.
- Daskalogianni, K. & Simpson, A. (2002). 'Cooling off': The phenomenon of a problematic transition from school to university. In *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Mathematics at the Undergraduate Level*. Heruntergeladen von <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/> am 05. Mai 2016.
- Davis, R.B. & Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly unavoidable Misconception Stages. In: *Journal of Mathematical Behavior* (5): S. 281–303.
- de Guzmán, M., Hodgson, B.R., Robert, A. & Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. In: *Documenta Mathematica* (Hrsg. G. Fischer), S. 747–762, Rosenheim: Geronimo.
- Deci, E.L. & Ryan, R.M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. In: *Zeitschrift für Pädagogik* (39(2)): S. 223–238.

- Deci, E.L. & Ryan, R.M. (2008). The 'what' and 'why' of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. In: *Psychological inquiry* (11(4)): S. 227–268.
- Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen. Heruntergeladen von https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-30759/Dieter_Miriam.pdf am 12. Mai 2016.
- Dieter, M. & Törner, D. (2010). Zahlen rund um die Mathematik. *Preprint der Fakultät für Mathematik (Universität Duisburg-Essen)*, Nr. SM-DU-716. Heruntergeladen von https://www.uni-due.de/imperia/md/content/mathematik/ag_toerner/dieter-toerner-preprint.pdf am 12. Mai 2016.
- Dresing, T. & Pehl, T. (2013). *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse. Anleitungen und Regelsysteme für qualitativ Forschende*. 5. Aufl., Marburg, Heruntergeladen von http://www.audiotranskription.de/download/praxisbuch_transkription.pdf?q=Praxisbuch-Transkription.pdf am 08. März 2017.
- Dörfler, W. & McLone, R.R. (1986). Mathematics as a school subject. In: *Perspectives on mathematics education* (Hrsg. B. Christiansen, A.G. Howson & M. Otte), S. 49–97, Dordrecht: Reidel.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: *Advanced Mathematical Thinking* (Hrsg. D. Tall), S. 95–123, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. & McDonald, M.A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In: *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (Hrsg. D. Holton), S. 275–282, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Duffin, J.M. & Simpson, A.P. (2000). A search for understanding. In: *The journal of mathematical behaviour* (18(4)): S. 415–427.
- Duit, R. & Treagust, D.F. (2003). Conceptual change: a powerful framework for improving science teaching and learning. In: *International Journal of Science Education* (25(6)): S. 671–688.
- Duit, R., Treagust, D.F. & Mansfield, H. (1996). Investigating student understanding as prerequisite to improving teaching and learning in science and mathematics. In: *Improving teaching and learning in science and mathematics* (Hrsg. D.F. Treagust, R. Duit & B.J. Fraser), S. 17–31, New York: Teachers College Press.
- Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (26(4)): S. 109–113.

- Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. In: *Proceedings of the 10th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. L. Burton & C. Hoyles), S. 153–158, London, United Kingdom.
- Eisentraut, W. & Schätz, U. (2009). *delta 6 neu*. Bamberg: C. C. Buchner.
- Embacher, F. (2014). Self-Assessment-Test-Mathematik für Studierende der Physik an der Universität Wien. In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (Hrsg. I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber & T. Wassong), S. 359–373, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. In: *International Journal of Mathematical Education* (41(2)): S. 143–154.
- Fischer, A., Heinze, A. & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule – Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In: *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (Hrsg. A. Heinze & M. Grüßing), S. 245–264, Münster: Waxmann.
- Fischer, M. & Spannagel, C. (2012). Lernen mit Vorlesungsvideos in der umgedrehten Mathematikvorlesung. In: *DeLFI 2012 – Die 10. e-Learning Fachtagung Informatik der Gesellschaft für Informatik e.V.* (Hrsg. J. Desel, J. Haake & C. Spannagel), S. 225–236, Bonn: Köllen Druck + Verlag.
- Flade, L. & Walsch, W. (2000). Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Interview von Lothar Flade mit Werner Walsch. In: *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen* (Hrsg. L. Flade & W. Herget), S. 25–30, Berlin: Volk und Wissen Verlag.
- Flick, U. (2000). *Qualitative Forschung. Theorie, Methoden, Anwendung in Psychologie und Sozialwissenschaften*. 5. Aufl., Reinbek bei Hamburg: Rowohlt's Enzyklopädie.
- Forster, O. (2016). *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. 12. Aufl., Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe (Band 1)*. 2. Aufl., Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Freytag, C., Härtinger, R., Herz, A., Kammermeyer, F., Kilian, H., Kurz, K., Saueremann, B., Schmitt, B., Sinzinger, M., Wagner, A., Zebhauser, E., Zebhauser, M. & Zechel, J. (2006). *Fokus Mathematik. Jahrgangsstufe 8. Gymnasium Bayern*. Berlin: Cornelsen Verlag.

- Galbraith, P. & Haines, C. (1997). Some mathematical characteristics of students entering applied mathematics courses. In: *Teaching and learning mathematical modelling* (Hrsg. S.K. Houston, W. Blum, I.D. Huntley & N.T. Neill), S. 77–92, Chichester, UK: Albion.
- Gensch, K. & Kliegl, C. (2011). *Studienabbruch – was können Hochschulen dagegen tun? Bewertung der Maßnahmen aus der Initiative „Wege zu mehr MINT-Absolventen“*. München: Bayerisches Staatsinstitut für Hochschulforschung und Hochschulplanung, Heruntergeladen von http://www.ihf.bayern.de/uploads/media/ihf_studien_hochschulforschung-80.pdf am 13. Juli 2016.
- Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a proceptual View of simple Arithmetic. In: *Journal for Research in Mathematics Education* (25(2)): S. 116–141.
- Gruenwald, N., Kossow, A., Sauerbier, G. & Klymchuk, S. (2004). Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus internationaler und deutscher Sicht. In: *Global Journal of Engineering Education* (8(3)): S. 283–293.
- Götz, H., Herbst, M., Kestler, C., Kosuch, H.G., Novotný, J., Sy, B., Thiessen, T. & Zitterbart, A. (2013). *Lambacher Schweizer 11. Mathematik für Gymnasien*. 5. Aufl., Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.
- Götz, H., Herbst, M., Kestler, C., Kosuch, H.G., Novotný, J., Sy, B., Thiessen, T. & Zitterbart, A. (2014). *Lambacher Schweizer 12. Mathematik für Gymnasien*. 5. Aufl., Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.
- Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A.A., Kwon, O.N. & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. ICME 13, Hamburg: Springer Open.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. In: *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. A. Gutiérrez & L. Puig), 1, S. 3–19, University of Valencia, Spain.
- Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Halmos, P. (1985). *I want to be a mathematician. An Automatography*. New York: Springer-Verlag.
- Hamann, T., Kreuzkam, S., Schmidt-Thieme, B. & Sander, J. (2014). „Was ist Mathematik?“ Einführung in mathematisches Arbeiten und Studienwahlüberprüfung für Lehramtsstudierende. In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (Hrsg. I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber & T. Wassong), S. 375–387, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hank, B. (2013). *Konzeptwandelprozesse im Anfangsunterricht Chemie. Eine quasiexperimentelle Längsschnittstudie. Dissertation*. Berlin: Logos Verlag GmbH.

- Hanke, E. & Schäfer, I. (2017). Students' view of continuity – An empirical analysis of mental images and their usage. Dublin, Ireland: Institute of Education Dublin City University, Heruntergeladen von https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0002.pdf am 05. März 2017.
- Harel, G. (2008). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part I: Focus on Proving. In: *ZDM Mathematics Education* (40): S. 487–500.
- Harel, G. & Tall, D. (1991). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. In: *For the Learning of Mathematics* (11(1)): S. 38–42.
- Harel, G. & Trgalová (1996). Higher mathematics education. In: *International Handbook of Mathematics Education* (Hrsg. A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde), S. 675–700, Kluwer Academic Publishers.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (Hrsg. C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger), S. 1–15, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hefendehl-Hebeker, L., Ableitinger, C. & Herrmann, A. (2010). Mathematik Besser Verstehen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*. S. 93–94.
- Heinze, A. & Grüßing, M. (Hrsg.) (2009). *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht*. Münster, München: Waxmann.
- Hemmi, K. (2008). Students' encounter with proof – the condition of transparency. In: *The International Journal on Mathematics Education* (40(3)): S. 413–426.
- Herrmann, A. (2012). Mathematik besser verstehen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (2): 979–980.
- Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Micheltmore, M. & Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In: *Mathematics and Cognition* (Hrsg. P. Nesher & J. Kilpatrick), S. 70–95, Cambridge: University Press.
- Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2012). Die Entwicklung der Studienabbruchquote an den deutschen Hochschulen. Statistische Berechnungen auf das Basis des Absolventenjahrgangs 2010. Heruntergeladen von http://www.dzhw.eu/pdf/pub_fh/fh-201203.pdf am 12. Mai 2016.

- Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2014). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2012. Heruntergeladen von http://www.dzhw.eu/pdf/pub_fh/fh-201404.pdf am 12. Mai 2016.
- Hähkiöniemi, M. (2006). *The Role of Representations in Learning the Derivative. Report / University of Jyväskylä, Department of Mathematics and Statistics 104*. University of Jyväskylä.
- Hähnisch, C. (2011). *Denkformen des formalen Denkens - Eine qualitative empirische Studie zur spezifischen Kognition von Studienanfängern im Fach Mathematik. Dissertation*. Heruntergeladen von <http://publications.rwth-aachen.de/record/62944/files/3995.pdf> am 16. April 2015.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (Hrsg. J. Hiebert), S. 1–27, Hillsdale: New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S. (1983). *Geometry and the imagination*. New York: Chelsea Publishing Company.
- Hing-Sun, L. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (36(2-3)): S. 161–174.
- Hong, Y.Y., Kerr, S., Klymchuk, S., McHardy, J., Murphy, P., Spencer, S., Thomas, M. & Watson, P. (2009). Modelling the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics Education: Teacher and Lecturer Perspectives. In: *Proceedings of the 10th International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century* (Hrsg. L. Paditz & A. Rogerson), S. 250–254, Dresden, Germany: Dresden University of Applied Sciences.
- Hoppenbrock, A., Schreiber, S., Göller, R., Biehler, R., Büchler, B., Hochmuth, R. & Rück, H.G. (Hrsg.) (2013). *Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr. Extended Abstracts zur 2. khdm-Arbeitstagung*. Kassel: khdm-Report 13-01, Heruntergeladen von https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2013081343293/3/khdm_report_13_01.pdf am 18. Mai 2016.
- Hourigan, M. & O'Donoghue, J. (2007). Mathematical under-preparedness: the influence of the pre-tertiary mathematics experience on students' ability to make a successful transition to tertiary level mathematics courses in Ireland. In: *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* (38(4)): S. 461–476.

- Hoyles, C., Newman, K. & Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (32(6)): S. 829–845.
- Juter, K. (2017). University students' perceptions of concept relations and preferred representations in calculus. Dublin, Ireland: Institute of Education Dublin City University, Heruntergeladen von https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0002.pdf am 20. Februar 2017.
- Kadunz, G. & Sträßler, R. (2004). Image - Metaphor - Diagram: Visualization in learning mathematics. In: *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. M. Hoines & A. Fuglestand), 4, S. 241–248.
- Kajander, A. & Lovric, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics: mcmaster university experience. In: *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* (36(2-3)): S. 149–160.
- Keitel, C. & Otte, M. (1979). Probleme der Profession und des professionellen Wissens des Mathematiklehrers. In: *Mathematisch-physikalische Semesterberichte* (26): S. 154–176.
- Klein, F. (1908). Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Band 1. Nachdruck 1968. Heruntergeladen von <https://www.uni-siegen.de/fb6/didaktik/personen/henrike-allmendinger/klein.pdf> am 27. April 2016.
- Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N. & Sauerbier, G. (2010). University students' difficulties in solving application problems in calculus: student perspectives. In: *Mathematics Education Research Journal* (22(1)): S. 81–91.
- Klymchuk, S., Gruenwald, N. & Jovanoski, Z. (2011). University Lecturers' Views on the Transition from Secondary to Tertiary Education in Mathematics: An International Study. In: *Proceedings of Volcanic Delta 2011, the 8th Southern Hemisphere Conference on Teaching and Learning Undergraduate Mathematics and Statistics* (Hrsg. J. Hannah & M. Thomas), S. 190–201, Rotura and New Zealand.
- KMK-Beschluss (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Heruntergeladen von http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf am 07. Februar 2017.
- Königsberger, K. (2004). *Analysis I*. 6. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* (29(3-4)): S. 223–258.

- Krippendorff, K. (1980). *Content analysis. An Introduction to its Methodology*. London: Sage.
- Lakoff, G. & Núñez, R.E. (2000). *Where Mathematics Comes From. How the embodied Mind brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.
- Landau, E. (1930). Grundlagen der Analysis. Das Rechnen mit Ganzen, Rationalen, Irrationalen, Komplexen Zahlen. Heruntergeladen von <http://www.fernuni-hagen.de/imperia/md/content/ausstellung/juedischemathematiker/landau.pdf> am 27. April 2016.
- Leufer, N. & Prediger, S. (2007). „Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule“. Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis als Bausteine zur Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung. In: *Realitätsnaher Mathematikunterricht vom Fach aus und für die Praxis* (Hrsg. A. Büchter, S. Humenberger, S. Hußmann & S. Prediger), S. 265–276, Hildesheim: Franzbecker.
- Liebendörfer, M. & Hochmuth, R. (2013). Interest in mathematics and the first steps at the university. *Proceedings of the 8th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Heruntergeladen von http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG14/WG14_Liebendorfer.pdf am 05. Mai 2016.
- Liedl, R. & Kuhnert, K. (1992). *Analysis in einer Variablen. Eine Einführung für ein praxisorientiertes Studium*. Mannheim: B I Wissenschaftsverlag.
- Liu, X. (2001). Synthesizing research on students' conceptions in science. In: *International Journal of Science Education* (22(1)): S. 55–81.
- Lorbeer, W. & Reiss, K. (2010). Mathematische Kompetenzentwicklung im Übergang zwischen Schule und Hochschule: Ist der Kulturschock unabwendbar. In: *Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen. Festschrift für Werner Walsch zum 80. Geburtstag* (Hrsg. W. Herget & K. Richter), S. 87–98, Berlin: Franzbecker.
- Luk, H.S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (36(2-3)): S. 161–174.
- Ma, L. (2002). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. 2. Aufl., New York: Taylor and Francis.
- Maharaj, A. (2010). An APOS Analysis of Students' Understanding of the Concept of a Limit of a Function. In: *Pythagoras* (71): S. 41–52.
- Marín Martínez, N. & Jiménez Gomez, E. (2001). Characteristics of the methodology used to describe students' conceptions. In: *International Journal of Science Education* (23(7)): S. 663–690.

- Mayer, H.O. (2013). *Interview und schriftliche Befragung. Grundlagen und Methoden empirischer Sozialforschung*. 6. Aufl., München: Oldenbourg Verlag.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse*. 12. Aufl., Weinheim [u.a.]: Beltz UTB.
- Mayring, P. (2016). *Einführung in die qualitative Sozialforschung. Eine Anleitung zu qualitativem Denken*. 6. Aufl., Weinheim: Beltz Verlag.
- Mejia-Ramos, J.P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K. & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics* (79(1)): S. 3–18.
- Moschner, B. & Dickhäuser, O. (2010). Selbstkonzept. In: *Handwörterbuch pädagogische Psychologie* (Hrsg. D.H. Rost), 4. Aufl., S. 760–767, Weinheim [u.a.]: Beltz.
- Nagy, G. (2007). *Berufliche Interessen, kognitive und fachgebundene Kompetenzen: Ihre Bedeutung für die Studienfachwahl und die Bewährung im Studium*. Dissertation, Freie Universität Berlin. Heruntergeladen von http://www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS_thesis_00000002714 am 05. Mai 2016.
- Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In: *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study (New ICMI Series)* (Hrsg. W. Blum, P. Galbraith, M. Niss & H.W. Henn), 10, S. 3–33, New York: Springer.
- Novotna, J. & Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. In: *Mathematics Education Research Journal* (20(2)): S. 93–104.
- Pfeffer, W. & Brandl, M. (2015). Schwierigkeiten beim Übergang Schule – Hochschule in Mathematik. Eine qualitative Längsschnittstudie. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (Hrsg. H. Linneweber-Lammerskitten), S. 1089–1092.
- Pinto, M.M.F. & Tall, D. (2001). Following Students' Development in a Traditional University Analysis Course. In: *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. M. van den Heuvel-Panhuizen), S. 57–64, Utrecht, The Netherlands: Utrecht University.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Pólya, G. (2010). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. 4. Aufl., Tübingen: Franke Verlag.
- Poincare, H. (1914). *Science and Method*. T. Nelson.

- Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics* (23): S. 595–610.
- Rach, S. (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium. Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester*. Münster: Waxmann.
- Rach, S., Heinze, A. & Ufer, S. (2014). Welche mathematischen Anforderungen erwarten Studierende im ersten Semester des Mathematikstudiums? In: *Journal für Mathematik-Didaktik* (35(2)): S. 205–228.
- Rasslan, S. & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In: *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. A. Cockburn & E. Nardi), S. 89–96, Norwich, UK.
- Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2014). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (Hrsg. I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber & T. Wassong), S. 37–53, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentation und Beweise im Mathematikunterricht. In: *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (Hrsg. M. Prenzel & J. Doll), S. 51–64, Weinheim, Basel: Beltz Verlag.
- Reiss, K., Prenzel, M., Rinkens, H.D. & Kramer, J. (2010). Konzepte der Lehrerbildung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (Hrsg. A.M. Lindmeiner & S. Ufer), S. 91–98, Münster: WTM-Verlag.
- Riedl, L. (2015). Fachmathematische Kenntnisse von Studierenden des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen. Eine explorative Quer- und Längsschnittstudie. Dissertation.
- Robert, A. & Schwarzenberger, R. (1991). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. In: *Advanced Mathematical Thinking* (Hrsg. D. Tall), S. 127–139, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Roh, K.H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. In: *Educational Studies in Mathematics* (69(3)): S. 217–233.
- Rosch, E. & Mervis, C. (1975). Family Resemblances: Studies in the Internal Structure of Categories. In: *Cognitive Psychology* (7): S. 573–605.
- Rosnick, P. & Clement, J. (1980). Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. In: *Journal of Mathematical Behavior* (3): S. 3–27.

- Roth, W.M. (2008). The nature of scientific conceptions: A discursive psychological perspective. In: *Educational Research Review* (3): S. 30–50.
- Rösken, B. & Rolka, K. (2006). A Picture is worth a 1000 Words - The Role of Visualization in Mathematics Learning. In: *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. J. Novotná, M. Moraová & N. Stehlíková), S. 457–464, Prague: PME.
- Rösken, B. & Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. In: *The Montana Mathematics Enthusiast* (3): S. 181–204.
- Rutke, U. (2007). Schülervorstellungen und wissenschaftliche Vorstellungen zur Entstehung und Entwicklung des menschlichen Lebens: ein Beitrag zur didaktischen Rekonstruktion. Dissertation. Heruntergeladen von https://edoc.ub.uni-muenchen.de/8625/1/Rutke_Ulrike.pdf am 08. November 2016.
- Schiefele, U. & Köller, O. (2010). Intrinsische und extrinsische Motivation. In: *Handwörterbuch pädagogische Psychologie* (Hrsg. D.H. Rost), 4. Aufl., S. 336–344, Weinheim [u.a.]: Beltz.
- Schiefele, U. & Wild, K.P. (1994). Lernstrategien im Studium: Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. In: *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie* (15(4)): S. 185–200.
- Schmid, A. & Weidig, I. (2008). *Lambacher Schweizer 10. Mathematik für Gymnasien*. Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.
- Schmitz, B. & Wiese, B. (2006). New Perspectives for the Evaluation of Training Sessions in Self-Regulated Learning: Time-series analyses of diary data. In: *Contemporary Educational Psychology* (31): S. 64–96.
- Schneider, M.C. & Kolter, J. (2014). *Kategorisierung mathematischer Bündelungsprozesse von Grundschullehrerstudierenden*. Kassel: khdm-Report 14-02, Heruntergeladen von https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2014012444809/3/khdm_report_14_2.pdf am 18. Mai 2016.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London: Academic Press Inc.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Hrsg. D. Grouws), S. 334–370, New York: Macmillan.
- Schullery, N., Reck, R. & Schullery, S. (2011). Toward Solving the High Enrollment, Low Engagement Dilemma: A Case Study in Introductory Business. In: *International Journal of Business, Humanities and Technology* (1(2)): S. 1–9.

- Schwarzenberger, R. (1982). Current Issues and Problems in Mathematics Teaching. In: *Teaching Mathematics* (Hrsg. M. Cornelius), S. 1–16, New York: Nichols Publishing Company.
- Selden, A. & Selden, J. (2013). Proof and problem solving at university level. In: *The Mathematics Enthusiast* (10(1-2)): S. 303–334.
- Sfard, A. (1992). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. In: *Educational Studies in Mathematics* (22): S. 1–36.
- Spiegel Online (2014). Bachelor-Abbrecher: Studenten in Mint-Fächern scheitern am häufigsten. Heruntergeladen von <http://www.spiegel.de/unispiegel/studium/studienabbruch-jeder-vierte-bachelorstudent-bricht-studium-ab-a-971349.html> am 12. Mai 2016.
- Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (2004). Lehrplan des achtjährigen Gymnasiums. Mathematik: Jahrgangsstufen 11/12. Online aufgerufen unter <http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192> am 10. Februar 2017.
- Steinbauer, R., Süß-Stepancik, E. & Schichl, H. (2014). Einführung in das mathematische Arbeiten – der Passage-Point an der Universität Wien. In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (Hrsg. I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber & T. Wassong), S. 375–387, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Stroth, G., Törner, G., Scharlau, R., Blum, W. & Reiss, K. (2001). Vorschläge zur Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und -lehrern für das Lehramt an Gymnasien in Deutschland, DMV-/GDM-Denkschrift zur Lehrerbildung. Heruntergeladen von <http://www.mathematik.de/ger/presse/pressemitteilungen/pdf/lehrer.pdf> am 17. Mai 2016.
- Stylianou, D. & Silver, E. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. In: *Mathematical Thinking and Learning* (6(4)): S. 353–387.
- Tall, D. (1994). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking: Biological Brain and Mathematical Mind. In: *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. J. Ponte & J. Matos), S. 33–39, Lisbon, Portugal: PME.
- Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. O. Zaslavsky), 1, S. 111–118, Haifa, Israel.
- Tall, D. & Bakar, M. (1991). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. In: *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (1): S. 104–111.

- Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. In: *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology* (23(1)): S. 39–50.
- Tall, D.O. (1991a). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D.O. (1991b). Reflections. In: *Advanced Mathematical Thinking* (Hrsg. Tall, D. O.), S. 251–259, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D.O. (1991c). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: *Advanced Mathematical Thinking* (Hrsg. Tall, D. O.), S. 3–21, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D.O. (1997). From School to University: The Effects of Learning Styles in the Transition from Elementary to Advanced Mathematical Thinking. In: *Proceedings of The Seventh Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference* (Hrsg. M.O.J. Thomas), S. 9–26, University of Auckland.
- Tall, D.O. (2001). Natural and Formal Infinities. In: *Educational Studies in Mathematics* (48(2)): S. 199–238.
- Tall, D.O. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics. In: *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, S. 91–107, Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.
- Tall, D.O. (2004a). Building Theories: The Three Worlds of Mathematics. In: *For the Learning of Mathematics* (24(1)): S. 29–32.
- Tall, D.O. (2004b). Introducing Three Worlds of Mathematics. In: *For the Learning of Mathematics* (23(3)): S. 29–33.
- Tall, D.O. (2004c). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. In: *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, S. 281–288, Bergen, Norway.
- Tall, D.O. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. In: *Mathematics Educational Research Journal* (20(2)): S. 5–24.
- Tall, D.O. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: *Educational Studies in Mathematics* (12(2)): S. 151–169.
- Terhart, E. (Hrsg.) (2000). *Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission*. Weinheim, Basel: Beltz Pädagogik.
- Thomas, M.O.J., De Freitas, I., Huillet, D., Ju, M.K., Nardi, E., Rasmussen, C. & Xie, J. (2015). Key mathematical concepts in the transition from secondary to university. In: *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (Hrsg. S.J. Cho), S. 265–284, New York: Springer.

- Thurston, W.P. (1990). Mathematical Education. In: *Notices of the American Mathematical Society* (37): S. 844–850.
- Törner, G. & Grigutsch, S. (1994). 'Mathematische Weltbilder' bei Studienanfängern – eine Erhebung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* (15(3)): S. 211–251.
- Ufer, S. & Reiss, K. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. In: *Jahresbericht der DMV* (4): S. 155–177.
- Ulm, V. (2009). Mathematische Begabung und ihre Förderung im Unterricht. In: *Tagungsband zum 100. MNU-Kongress* Heruntergeladen von http://www.mnu.de/extern/lv-rp-lvt2009/Artikel_Herr_Ulm.pdf am 07. Juli 2016.
- Ulm, V. (Hrsg.) (2010). *Mathematische Begabungen fördern*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Vandebrouck, F. (2011). Students' conceptions of functions at the transition between secondary school and university. In: *Proceedings of the 7th Conference of European Research in Mathematics Education* (Hrsg. M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda), S. 2093–2102, Rzeszow, Poland.
- Viholainen, A. (2008). *Prospective Mathematics Teachers' Informal and Formal Reasoning About The Concepts of Derivative and Differentiability*. Jyväskylä.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (14): S. 293–305.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: *Advanced Mathematical Thinking* (Hrsg. D. Tall), S. 65–81, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. In: *Journal for Research in Mathematics Education* (20(4)): S. 356–366.
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive path sin the development of some simple geometrical concepts. In: *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Hrsg. R. Karplus), S. 177–184, Berkeley, California: University.
- Volkert, K.T. (1986). *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Vollrath, H.J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Vollrath, H.J. (1987). Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. Herrn G. Pickert zum 70. Geburtstag gewidmet. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (19(3)): S. 123–127, Heruntergeladen von <http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/vollrath/papers/045.pdf> am 27. April 2016.

- Vollrath, H.J. & Weigand, H.G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. 3. Aufl., München: Spektrum Akademischer Verlag.
- von Mangoldt, H. & Knopp, K. (1980). *Einführung in die höhere Mathematik. Für Studierende und zum Selbststudium. Band 1: Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre*. 16. Aufl., Stuttgart: Hirzel Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft.
- von Mises, R. (1919). Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: *Mathematische Zeitschrift* (5(1)): S. 52–99.
- Walsch, W. (1972). *Zum Beweisen im Mathematikunterricht*. Berlin: Volk und Wissen Verlag, Heruntergeladen von <http://tocs.ulb.tu-darmstadt.de/74801309.pdf> am 18. Mai 2016.
- Watson, P., Kerr, S., Klymchuk, S., McHardy, J., Murphy, P., Spencer, S., Thomas, M. & Hong, Y. (2009). Teachers' Perspectives on the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics Education. In: *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Hrsg. Hunter, R. and Bicknell, B. and Burgess, T.), 1. Aufl., S. 241–248, Palmerston North, NZ: Merga.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. In: *Educational Studies in Mathematics* (48(1)): S. 101–119.
- Weigand, H.G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B. & Wittmann, G. (2013). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. 5. Aufl., Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Weller, J., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. In: *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* (9(1)): S. 5–28.
- Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. & Merkovsky, R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. In: *Research in collegiate mathematics education* (Hrsg. A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel & F. Hitt), S. 97–131, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- Weth, T. (1999). *Kreativität im Mathematikunterricht. Begriffsbildung als kreatives Tun*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker Verlag.
- Wild, E., Hofer, M. & Pekrun, R. (2006). Psychologie des Lernens. In: *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch* (Hrsg. A. Krapp & B. Weidenmann), 5. Aufl., S. 315–327, Weinheim: Beltz.
- Wild, K.P. (2005). Individuelle Lernstrategien von Studierenden. Konsequenzen für die Hochschuldidaktik und die Hochschullehre. In: *Beiträge zur Lehrerbildung* (23(2)): S. 191–206.

- Wilkerson, M.H. & Wilensky, U. (2011). How do Mathematicians Learn Mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics* (78(1)): S. 21–43.
- Winsløw, C. (2010). Comparing theoretical frameworks in didactics of mathematics: The GOA-model. In: *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Hrsg. V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello), S. 1675–1684, Lyon, France: CERME.
- Winsløw, C. (2014). The transition from university to high school and the case of exponential functions. In: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (Hrsg. B. Ubuz, C. Haser & A. Mariotti), S. 2476–2485, Antalya, Turkey.
- Winsløw, C. & Grønbaeck, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: Contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques* (34(1)): S. 59–86.
- Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. In: *Journal für Mathematikdidaktik* (4(3)): S. 175–204.
- Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (4(2)): S. 35–41.
- Wittmann, E. (2009). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6. Aufl., Wiesbaden: Vieweg und Teubner.
- Witzel, A. (1982). *Verfahren der qualitativen Sozialforschung. Überblick und Alternativen*. Frankfurt am Main [u.a.]: Campus-Verlag.
- Witzel, A. (1985). Das problemzentrierte Interview. In: *Qualitative Forschung in der Psychologie: Grundfragen, Verfahrensweisen, Anwendungsfelder* (Hrsg. G. Jüttemann), S. 227–255, Weinheim: Beltz Verlag.
- Witzke, I. (2012). Mathematik – eine (naive) Naturwissenschaft im Schulunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (Hrsg. M. Ludwig & M. Kleine), S. 949–952, Münster: WTM Verlag.
- Wolf, P. & Biehler, R. (2014). *Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium. Werkstattbericht der khdm-AG Ing-Math-TPI: Mathematik für Maschinenbauer*. Kassel: khdm-Report 14-03, Heruntergeladen von https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2014013144836/3/khdm_report_14_3.pdf am 18. Mai 2016.
- Yerushalmy, M. (2005). Challenging known transitions: Learning and teaching algebra with technology. In: *For the Learning of Mathematics* (25(3)): S. 37–42.

- Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D_4 . In: *Journal for Research in Mathematics Education* (27(4)): S. 435–457.
- Zimmermann, B. (1992). Profile mathematischer Begabung. Fallstudien aus dem Hamburger Projekt sowie aus der Geschichte der Mathematik. In: *MU* (38(1)): S. 19–41.
- Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. In: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (Hrsg. W. Zimmermann & S. Cunningham), S. 1–8, Washington, DC.
- Zucker, S. (1996). Teaching at the university level. In: *Notices of the American Mathematical Society* (43): S. 863–865.

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Übersicht über den Ablauf des Forschungsprojekts (Interviewzeitpunkte). | 2 |
| 2.1 | Notenverteilung der 1. Klausur zur Linearen-Algebra-I im Wintersemester 2014 / 2015. | 22 |
| 2.2 | Notenverteilung der 2. Klausur zur Linearen-Algebra-I im Wintersemester 2014 / 2015. | 22 |
| 2.3 | Befragung der Teilnehmerinnen und Teilnehmer am „Brückenkurs Mathematik“ der Universität Passau. (Quelle: Gensch & Kliegl, 2011, S. 93). | 25 |
| 3.1 | Definition von Stetigkeit im Schulbuch der 11. Klasse (Götz et al., 2013, S. 58 f). | 48 |
| 3.2 | Die unterschiedliche Bedeutung von Definitionen in den drei Welten von David Tall. Nach (Tall, 2008, S. 4). | 51 |
| 3.3 | Kausalität zwischen mathematischer Begabung, Kompetenzen, Leistung und Bewertung, in Anlehnung an Brandl (2011c). | 54 |
| 3.4 | Kausalität zwischen mathematischer Begabung, Kompetenzen, Leistung und Bewertung im Übergang von der Schulmathematik zur Hochschulmathematik. | 54 |
| 3.5 | Aspekte des Lernens geometrischer Begriffe nach (Weigand et al., 2013, S. 103). | 64 |
| 3.6 | Van-Hiele Stufen im Begriffsbildungsprozess in der Geometrie. | 65 |
| 3.7 | Veranschaulichung der Begriffe <i>Concept Image</i> und <i>Concept Definition</i> (nach Rösken & Rolka, 2007). | 74 |
| 3.8 | Wechselbeziehung von <i>Concept Image</i> und <i>Concept Definition</i> während eines Begriffsbildungsprozesses (nach Vinner, 1983). | 77 |
| 3.9 | Angenommene unidirektionale Richtung während des Begriffsbildungsprozesses (nach Vinner, 1983). | 77 |
| 3.10 | Szenario 1: Lösen von mathematischen Problemstellungen über die formale Definition unter Zuhilfenahme des dazu vorliegenden mentalen Modells (nach Vinner, 1983). . . | 79 |
| 3.11 | Szenario 2: Lösen von mathematischen Problemstellungen rein über die formale Definition (nach Vinner, 1983). | 79 |
| 3.12 | Szenario 3: Rückgriff auf das mentale Modell, aus welchem die formalen Definitionen abgeleitet werden, mit welchen die Problemstellung anschließend gelöst wird (nach Vinner, 1983). | 80 |
| 3.13 | Szenario 2: Lösen von mathematischen Problemstellungen rein über das <i>Concept Image</i> (nach Vinner, 1983). | 80 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.14 | Bedeutung von <i>Concept Image</i> und <i>Concept Image</i> in Hinblick auf mathematische Problemstellungen (Tall, 2001). | 82 |
| 6.1 | Aufgabe 19 aus der Dozentenversion des FHM. | 100 |
| 6.2 | Verteilung der Teilnehmer am FHM-1 auf die Studiengänge der FIM | 101 |
| 6.3 | Verteilung der Teilnehmer am FHM-2 auf die Studiengänge der FIM | 102 |
| 7.1 | Beispiel einer Bearbeitung aus Bewertungskategorie <i>Falsch</i> | 114 |
| 7.2 | Vergleich der Ergebnisse je Aufgabe von FHM-1 (links) und FHM-2 (rechts). | 138 |
| 7.3 | Aufgaben ehemaliger Mathematik-Abiturprüfungen mit Relevanz zu Aufgabe 19. | 140 |
| 8.1 | Übersicht über die in den jeweiligen Interviews thematisierten mathematischen Konzepte. | 156 |
| 8.2 | Dimensionen des <i>Concept Image</i> (nach Rösken & Rolka, 2007). | 157 |
| 8.3 | Visualisierung der Stichprobenmortalität je Studiengang für Interviewzeitpunkte 1 (=dunkelblau) bis 4 (=hellblau). | 162 |
| 8.4 | Übersicht über Mortalität der Stichprobe. | 163 |
| 9.1 | Gegenüberstellung der Definition einer Funktion im Schulbuch (Fokus Mathematik 8 - Gymnasium Bayern, S. 30) und der Definition einer Abbildung im Vorlesungsskript zur „Linearen Algebra I“. | 168 |
| 9.2 | Ergebnisse einer Untersuchung zu mentalen Prototypen zum Abbildungsbegriff in Bezug auf Abbildungsvorschriften (Tall & Bakar, 1991, S. 109) | 169 |
| 9.3 | Ergebnisse einer Untersuchung zu mentalen Prototypen zum Abbildungsbegriff in Bezug auf Graphen (Tall & Bakar, 1991). | 170 |
| 9.4 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Abbildungskonzepts (Interviewtermin 2). | 175 |
| 9.5 | Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Abbildungskonzeptes (Interviewtermin 2). | 176 |
| 9.6 | Definition der Begriffe „Injektivität“, „Surjektivität“ und „Bijektivität“ im Vorlesungsskript „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“. | 182 |
| 9.7 | Visualisierung einer injektiven, aber nicht surjektiven Abbildung. | 183 |
| 9.8 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Injektivität (Interviewtermin 2). | 187 |
| 9.9 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 2). | 190 |
| 9.10 | Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ (Interviewtermin 2). | 191 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 9.11 | Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ (Interviewtermin 2). | 196 |
| 9.12 | Definition und Satz zu den Begriffe „Lineare Abhängigkeit“ sowie „Linear Unabhängigkeit“ im Schulbuch der 12. Klasse (Götz et al., 2014, S. 118 f). | 200 |
| 9.13 | Definition von „Lineare Unabhängigkeit“ im Vorlesungsskript. | 201 |
| 9.14 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 2). | 205 |
| 9.15 | Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 2). | 206 |
| 10.1 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Injektivität (Interviewtermin 3). | 214 |
| 10.2 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 3). | 216 |
| 10.3 | Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ (Interviewtermin 3). | 218 |
| 10.4 | Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ (Interviewtermin 3). | 219 |
| 10.5 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 3). | 222 |
| 11.1 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Injektivität (Interviewtermin 4). | 228 |
| 11.2 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 4). | 230 |
| 11.3 | Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 4). | 234 |
| 11.4 | Definition von Folgenkonvergenz. | 237 |
| 11.5 | Beispielfolge mit Grenzwert 0. | 237 |
| 11.6 | Folgenkonvergenz: Vorgeben einer Abweichungstoleranz ε vom Grenzwert. | 238 |
| 11.7 | Folgenkonvergenz: Finden eines für ε passenden Wertes N | 238 |
| 11.8 | Folgenkonvergenz: Vorgeben einer kleineren Abweichungstoleranz $\tilde{\varepsilon}$ vom Grenzwert. | 239 |
| 11.9 | Folgenkonvergenz: Finden eines für $\tilde{\varepsilon}$ passenden Wertes \tilde{N} | 239 |
| 11.10 | Relative Häufigkeit h_n (Adler) bei 800 Münzwürfen (nach Barth et al., 2001, S. 71.) | 241 |
| 11.11 | Einführung des „empirischen Gesetz der großen Zahlen“ im Schulbuch (Brunnermeiner et al., 2004, S. 65) | 242 |

| | |
|--|-----|
| 11.12 Eine in Prosa gehaltene Definition des Grenzwerts im Schulbuch (Schmid & Weidig, 2008, S. 142) | 242 |
| 11.13 Übersicht zu den erreichten Summenwerten der mentalen Modellen bzgl. des Konzepts „Folgen und Folgenkonvergenz“ (Interviewtermin 4). | 247 |
| 11.14 Induktiv gewonnene Kategorien hinsichtlich Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Folgen und Folgenkonvergenz“ (Interviewtermin 4). | 248 |
| 12.1 Entwicklung der mentalen Modelle der Interviewteilnehmerinnen und -teilnehmer bzgl. des Konzepts „Injektivität“ im Laufe der Studie. | 255 |
| 12.2 Entwicklung der mentalen Modelle der Interviewteilnehmerinnen und -teilnehmer bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ im Laufe der Studie. | 262 |
| 12.3 Entwicklung der mentalen Modelle der Interviewteilnehmerinnen und -teilnehmer bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ im Laufe der Studie. | 265 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|------|---|-----|
| 2.1 | Studienabbruch im Fach Mathematik an Universitäten (in %) (Quelle: Briedis et al., 2008, S.56). | 20 |
| 6.1 | Soziodemographische Daten und Abiturnoten der FHM-1-Teilnehmer | 101 |
| 6.2 | Soziodemographische Daten und Abiturnoten der FHM-1-Teilnehmer | 103 |
| 7.1 | Bearbeitung von Aufgabe 1 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 110 |
| 7.2 | Bearbeitung von Aufgabe 2 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 111 |
| 7.3 | Bearbeitung von Aufgabe 3 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 113 |
| 7.4 | Bearbeitung von Aufgabe 4 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 113 |
| 7.5 | Bearbeitung von Aufgabe 5 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 115 |
| 7.6 | Bearbeitung von Aufgabe 6 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 116 |
| 7.7 | Bearbeitung von Aufgabe 7 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 117 |
| 7.8 | Bearbeitung von Aufgabe 8 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 118 |
| 7.9 | Bearbeitung von Aufgabe 9 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 119 |
| 7.10 | Bearbeitung von Aufgabe 10 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 120 |
| 7.11 | Bearbeitung von Aufgabe 11 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 121 |
| 7.12 | Bearbeitung von Aufgabe 12 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 122 |
| 7.13 | Bearbeitung von Aufgabe 13 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 123 |
| 7.14 | Bearbeitung von Aufgabe 14 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 124 |
| 7.15 | Bearbeitung von Aufgabe 15 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 125 |
| 7.16 | Bearbeitung von Aufgabe 16 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 126 |
| 7.17 | Bearbeitung von Aufgabe 17 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 127 |
| 7.18 | Bearbeitung von Aufgabe 18 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 128 |
| 7.19 | Bearbeitung von Aufgabe 19 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 130 |
| 7.20 | Bearbeitung von Aufgabe 20 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 132 |
| 7.21 | Bearbeitung von Aufgabe 21 des FHM-1 nach Studiengängen (Angaben in Prozent) . . | 133 |
| 7.22 | Ergebnisse des FHM-D (in %) | 141 |
| 7.23 | Vergleich der Einschätzungen durch die Dozierenden mit den tatsächlichen Ergebnissen (in %). | 141 |
| 8.1 | Geschlecht, Alter und Abiturnote der Teilnehmer an der EmMa-Studie. | 161 |

| | | |
|------|--|-----|
| 9.1 | Kategorienschema zum Konzept „Abbildung“ | 172 |
| 9.2 | Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa Werte bzgl. des Kategorienschemas zum Abbildungskonzept | 173 |
| 9.3 | Bewertung der mentalen Modelle bzgl. des Abbildungskonzepts (Interviewtermin 2). | 173 |
| 9.4 | Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. des Abbildungskonzeptes (Interviewtermin 2). | 175 |
| 9.5 | Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Abbildungskonzepts sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 2). | 177 |
| 9.6 | Kategorienschema zum Konzept „Injektivität“ | 184 |
| 9.7 | Kategorienschema zum Konzept „Surjektivität“ | 184 |
| 9.8 | Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa Werte bzgl. des Kategorienschemas zu Injektivität | 184 |
| 9.9 | Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa Werte bzgl. des Kategorienschemas zu Surjektivität | 185 |
| 9.10 | Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Injektivität (Interviewtermin 2). | 185 |
| 9.11 | Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Injektivität (Interviewtermin 2). | 187 |
| 9.12 | Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 2). | 188 |
| 9.13 | Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 2). | 189 |
| 9.14 | Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 2). | 192 |
| 9.15 | Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 2). | 197 |
| 9.16 | Kategorienschema zum Konzept „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ | 202 |
| 9.17 | Cohens Kappa bzw. gewichtete Cohens Kappa Werte bzgl. des Kategorienschemas zum Konzept „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ | 202 |
| 9.18 | Bewertung der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 2). | 203 |
| 9.19 | Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 2). | 204 |
| 9.20 | Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 2). | 207 |
| 10.1 | Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Injektivität (Interviewtermin 3). | 212 |
| 10.2 | Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Injektivität (Interviewtermin 3). | 214 |
| 10.3 | Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 3). | 215 |

10.4 Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 3). 216

10.5 Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 3). 218

10.6 Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 3). 219

10.7 Bewertung der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 3). 220

10.8 Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 3). 221

10.9 Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 3). 223

11.1 Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Injektivität (Interviewtermin 4). 227

11.2 Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Injektivität (Interviewtermin 4). 228

11.3 Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 4). 229

11.4 Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Surjektivität (Interviewtermin 4). 230

11.5 Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Injektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 4). 231

11.6 Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Surjektivität“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 4). 232

11.7 Bewertung der mentalen Modelle bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 4). 233

11.8 Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ (Interviewtermin 4). 234

11.9 Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Lineare Unabhängigkeit, Basis und Erzeugendensystem“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 4). 235

11.10 Kategorienschema zum Konzept „Folgen und Folgenkonvergenz“ 244

11.11 Bewertung der mentalen Modelle bzgl. Folgen und Folgenkonvergenz (Interviewtermin 4). 245

11.12 Absolute und relative Häufigkeiten der Kategorien bzgl. Folgen und Folgenkonvergenz (Interviewtermin 4). 246

11.13 Beschreibung der Kategorien zu den Fehlvorstellungen bzgl. des Konzepts „Folgen und Folgenkonvergenz“ sowie jeweilige Zuordnung zu den Studierenden (Interviewtermin 4). 248

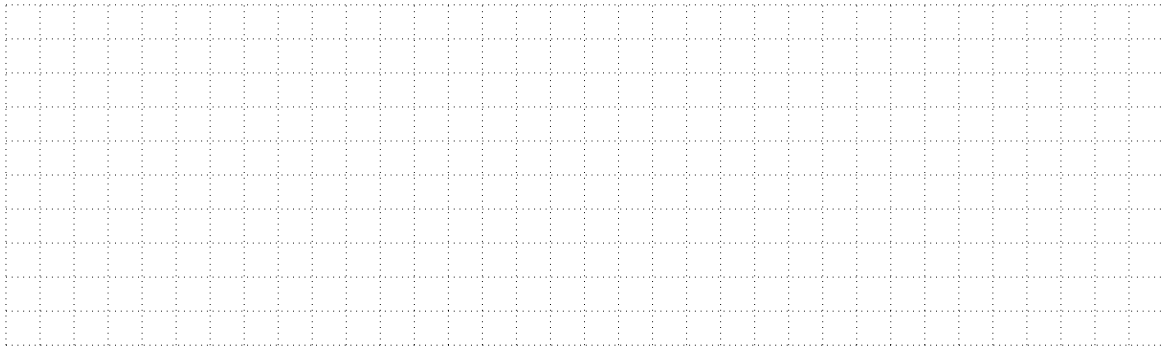
ANHANG

Bearbeitungsbogen (vertieft)

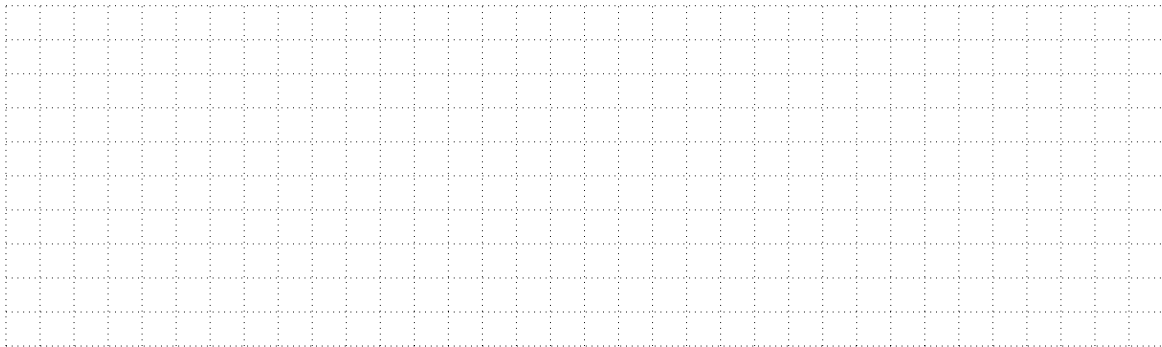
Interviewtermin 4

Matrikelnummer: _____

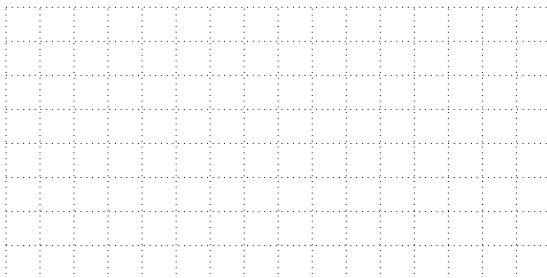
Injektivität:



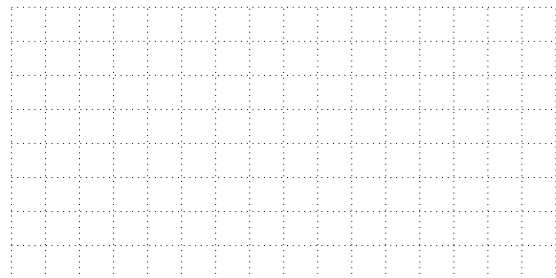
Surjektivität:



Beispiel für eine injektive Funktion



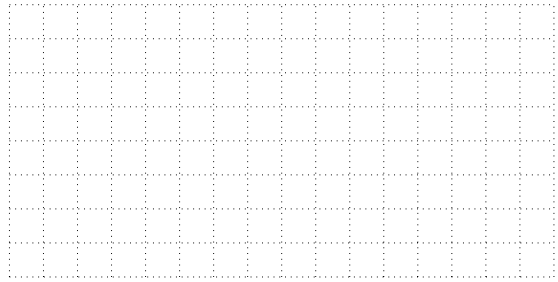
Beispiel für eine nicht injektive Funktion



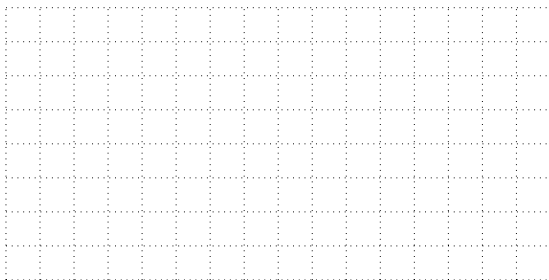
Beispiel für eine surjektive Funktion



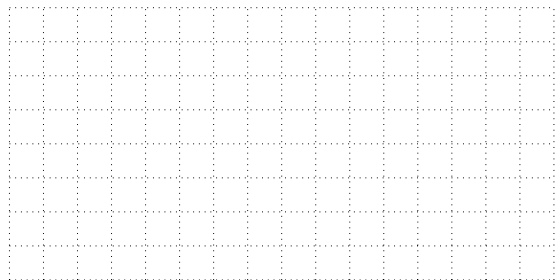
Beispiel für eine nicht surjektive Funktion



Beispiel für eine injektive, aber nicht surjektive Funktion

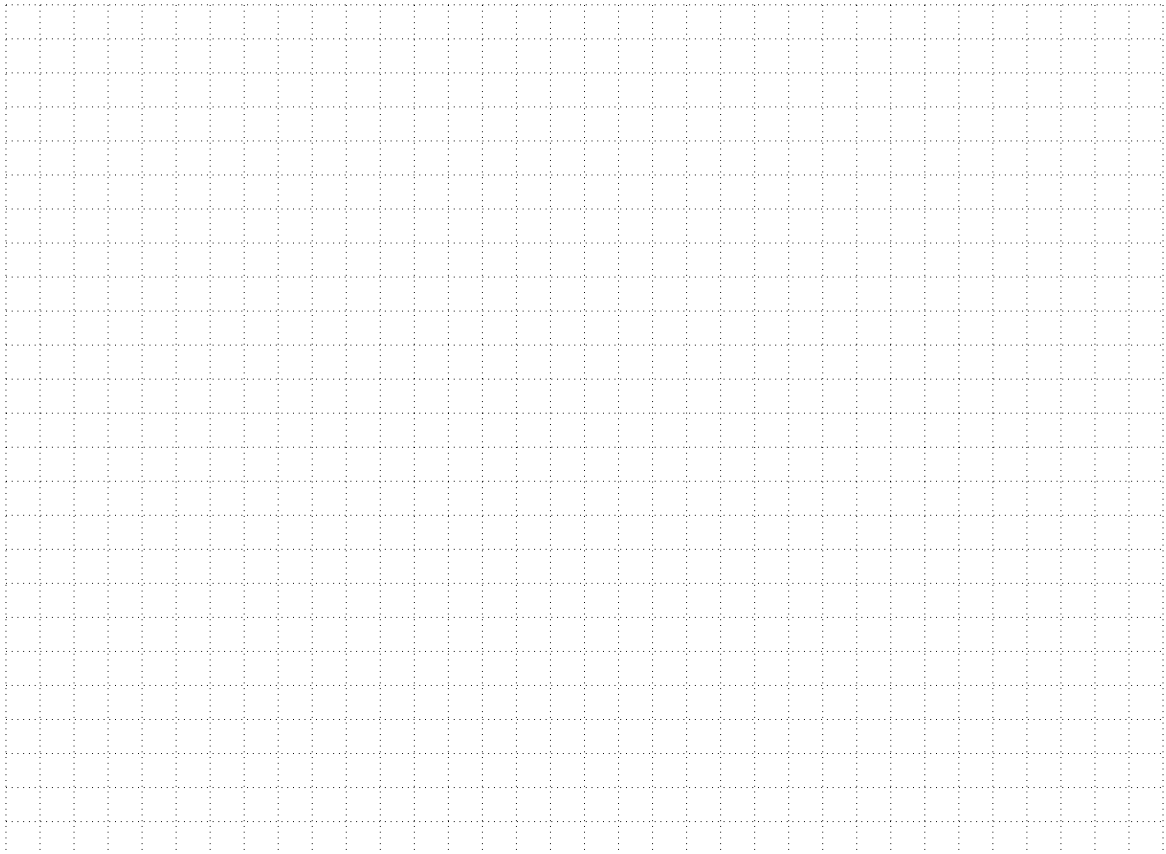


Beispiel für eine surjektive, aber nicht injektive Funktion



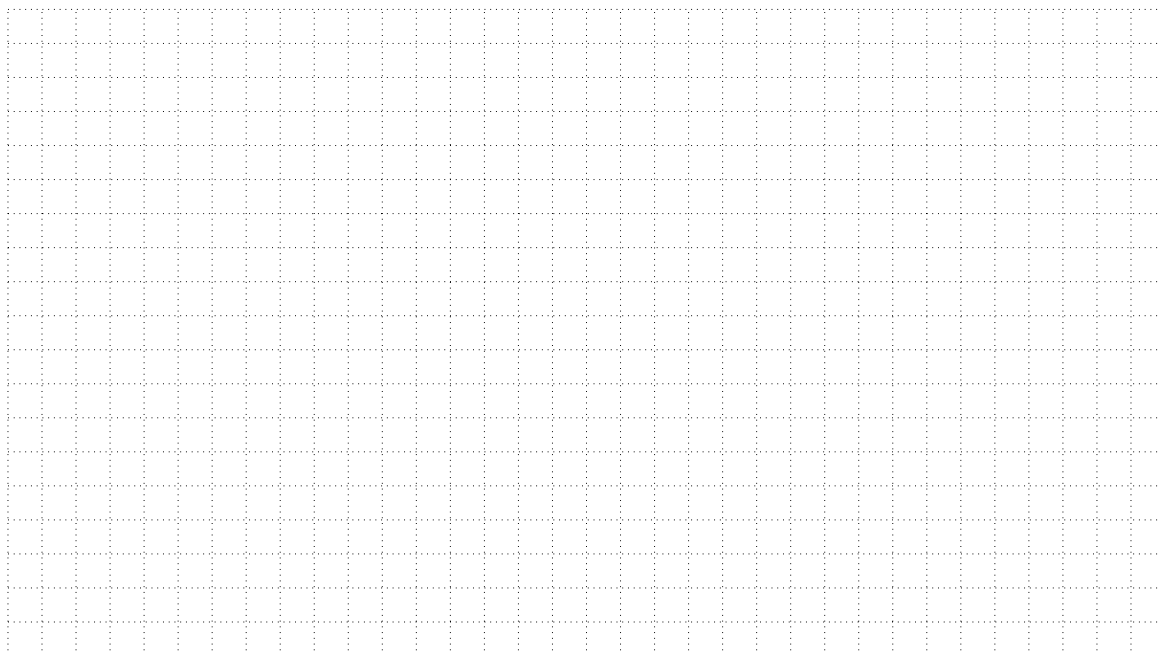
Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$ ist injektiv.

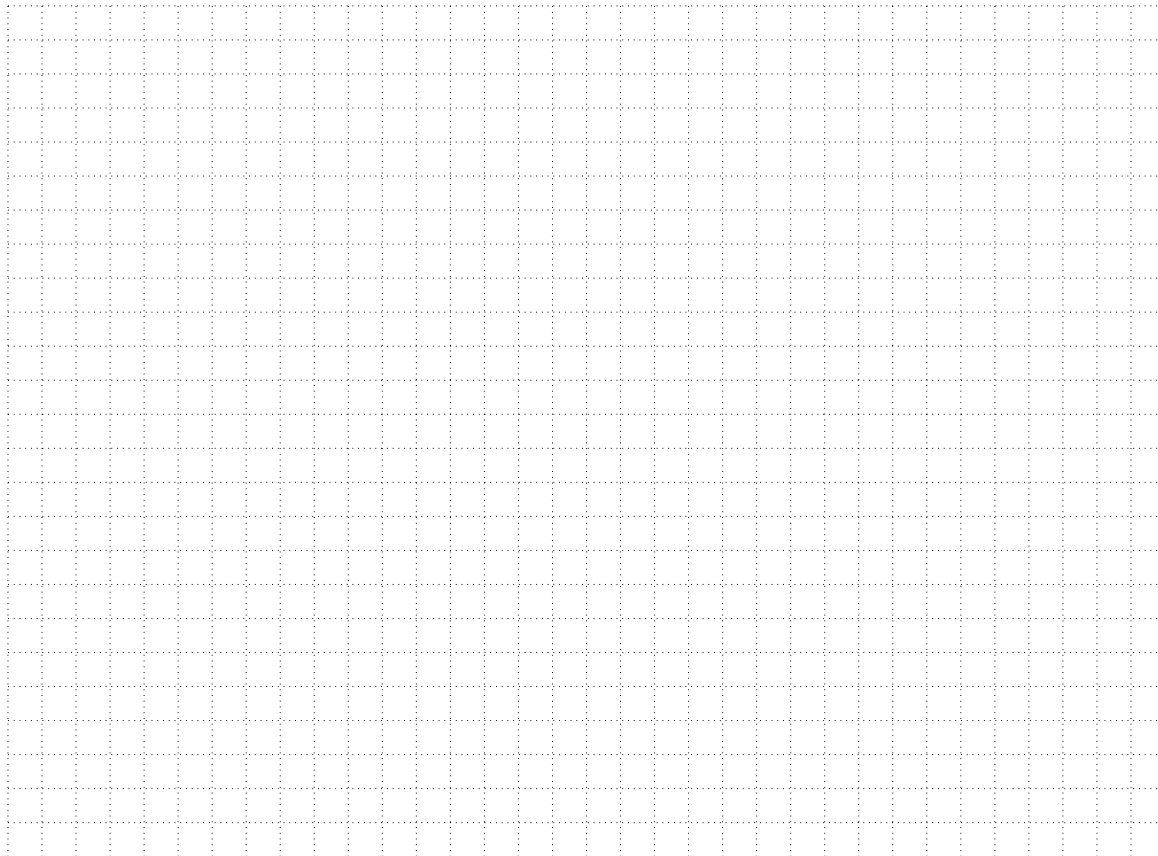


Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$ ist surjektiv.



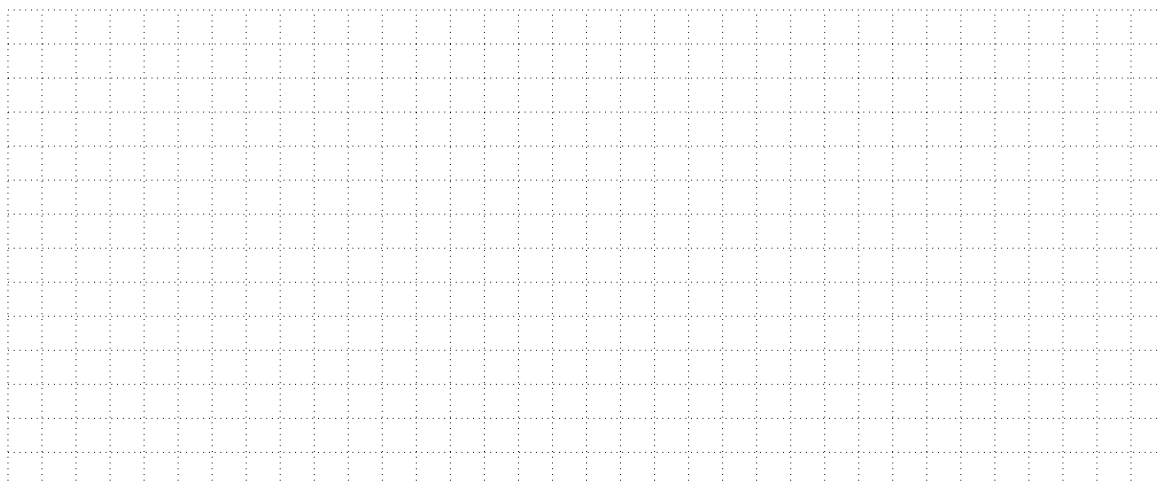
Lineare Unabhängigkeit / Basis / Erzeugendensystem



Folge



Konvergenz einer Folge

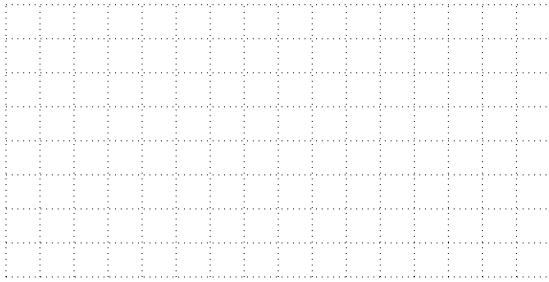


Aufgabe 3

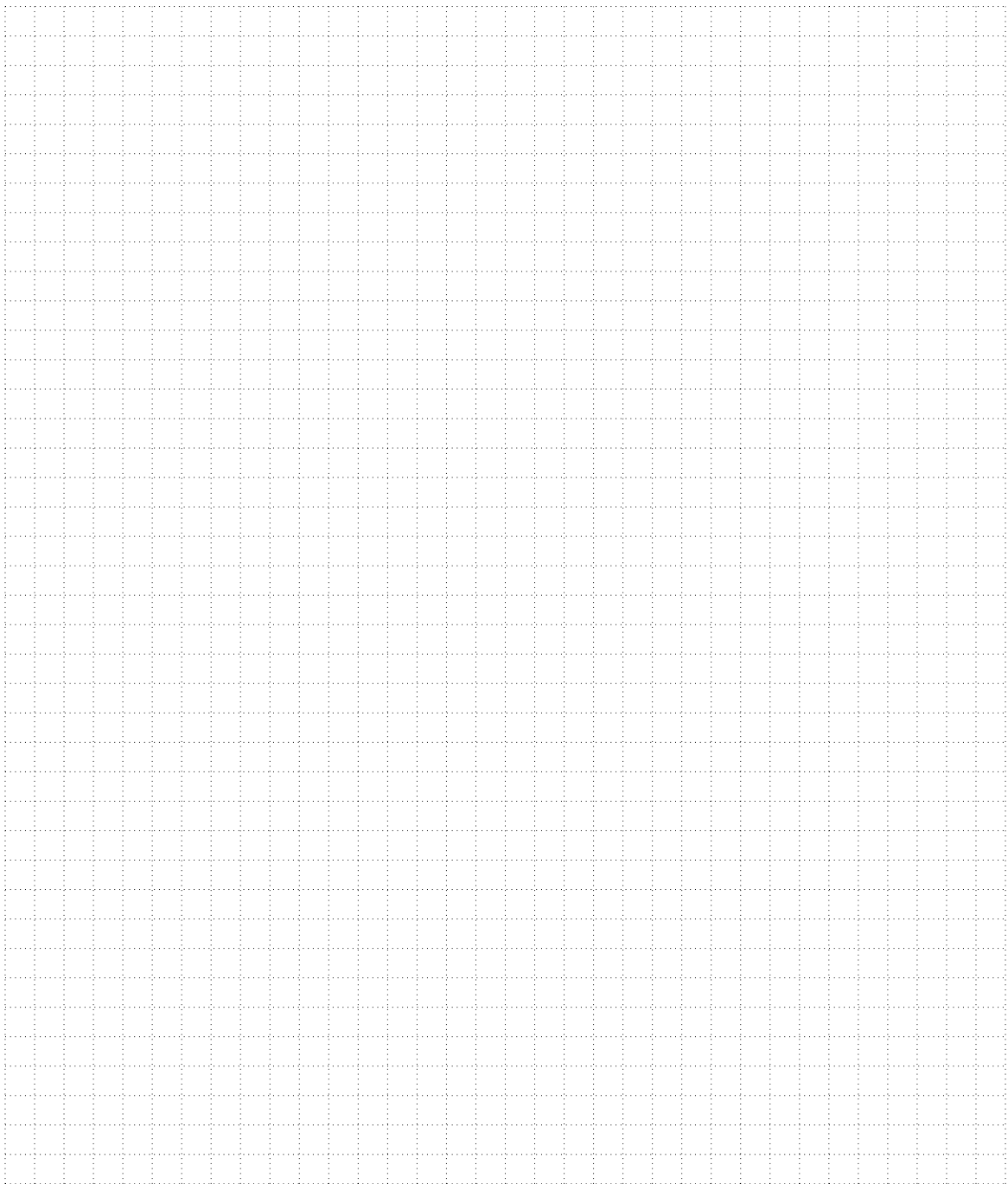
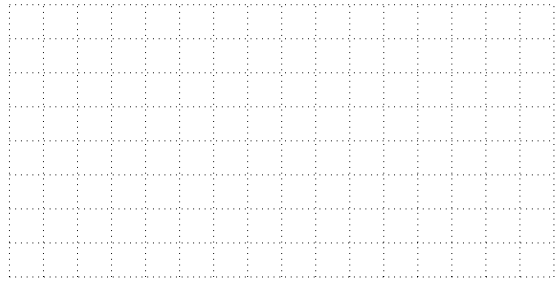
Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Folgenkonvergenz, dass die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert!



Beispiel für konvergente Folge



Beispiel für nicht konvergente Folge



Interraterreliabilität – Berechnung von κ und κ_w

Die Überprüfung der Interraterreliabilität der 0 | 1-kodierten Kategorien erfolgt mittels Berechnung des Cohens Kappa κ (vgl. Bortz & Döring, 2006, S. 276):

| | | | | |
|--------------|---|-----------------|-----------------|----------------|
| | | Beobachter 2 | | |
| | | 0 | 1 | |
| Beobachter 1 | 0 | f_{11} | f_{12} | $f_{1\bullet}$ |
| | 1 | f_{21} | f_{22} | $f_{2\bullet}$ |
| | | $f_{\bullet 1}$ | $f_{\bullet 2}$ | n |

Dabei gilt

$$\kappa = \frac{p - p_e}{1 - p_e}$$

mit

$$p = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^2 f_{jj} \quad \text{und} \quad p_e = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^2 f_{j\bullet} \cdot f_{\bullet j}$$

Die Überprüfung der Interraterreliabilität der 0 | 1 | 2-kodierten Kategorien erfolgt mittels Berechnung des von Cohen (1968) vorgeschlagenen gewichteten Cohens Kappa κ_w (vgl. Bortz, 1999, S. 203 f):

$$\kappa_w = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k v_{ij} \cdot f_{ij}}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k v_{ij} \cdot e_{ij}}$$

mit v_{ij} = quadratische Gewichte, f_{ij} = beobachtete Häufigkeiten, e_{ij} = gemäß H_0 erwartete Häufigkeiten und k = Anzahl der Kategorien.