Effiziente Lösungen von Spezialfällen des Cutting sticks-Problems

Alexander Büchel
Ulrich Gilleßen
Kurt-Ulrich Witt

Publisher: Dean Prof. Dr. Wolfgang Heiden

Hochschule Bonn-Rhein-Sieg – University of Applied Sciences,
Department of Computer Science

Sankt Augustin, Germany

August 2017

Technical Report 06-2017

Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

ISSN 1869-5272 ISBN 978-3-96043-051-3

Digital Object Identifier doi:10.18418/978-3-96043-051-3
DOI-Resolver http://dx.doi.org/

Effiziente Lösungen von Spezialfällen des Cutting sticks-Problems

Alexander Büchel[1,2], Ulrich Gilleßen[2], Kurt-Ulrich Witt[1,2]

Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
Fachbereich Informatik
[1]b-it Applied Science Institute
[2]Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Optimierung (ADIMO)
alexander.buechel@smail.inf.h-brs.de, ulrich.gillessen@smail.inf.h-brs.de, kurt-ulrich.witt@h-brs.de

Zusammenfassung Das Cutting sticks-Problem ist in seiner allgemeinen Formulierung ein NP-vollständiges Problem mit Anwendungspotenzialen im Bereich der Logistik. Unter der Annahme, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ ist, existieren keine effizienten, d.h. polynomiellen Algorithmen zur Lösung des allgemeinen Problems. In diesem Papier werden für eine Reihe von Instanzen effiziente Lösungen angegeben.

Schlüsselwörter: Cutting sticks-Problem, Mengenpartitionsproblem, Teilsummenaufteilung

1 Problemstellung

Im Folgenden sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $[\,n\,] = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Zahlen von 1 bis n sowie $[\,n\,]_0 = [\,n\,] \cup \{0\}$. Mit $\mathbb{U} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ bezeichnen wir die Menge der ungeraden und mit $\mathbb{G} = \{0, 2, 4, \ldots\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

die Summe der Zahlen von 1 bis n, die so genannte *Dreieckszahl* von n.

Das *Cutting sticks-Problem* ist gegeben durch die Längen $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{N}$ von k Stäben (engl. sticks), die eine Mindestlänge von $n \in \mathbb{N}$ haben, d.h. es ist, $t_j \geq n$, $1 \leq j \leq k$, und für die

$$\sum_{j=1}^{k} t_j = \Delta_n$$

gilt. Die Frage ist, ob die gegebenen Stäbe in n Teile geschnitten werden können, die die Längen von 1 bis n haben. Dieses Problem kann wie folgt als ein Partitionierungsproblem betrachtet werden: Gegeben seien $n, k, t_j, 1 \leq j \leq k$. Können die Elemente von $[\,n\,]$ so in Mengen T_j, $1 \leq j \leq k$, aufgeteilt werden, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind (im Folgenden nennen wir die Mengen T_j auch *Container*):

(i) $\sum T_j = t_j$;[1]

(ii) $T_i \cap T_j = \emptyset$ für $1 \le i, j \le k$ und $i \ne j$;

(iii) $\bigcup_{j=1}^{k} T_j = [\,n\,]$;

(iv) $\sum_{j=1}^{k} t_j = \Delta_n$.

Dabei sind unter der Annahme, dass die Eigenschaften (i) und (ii) gegeben sind, die beiden Eigenschaften (iii) und (iv) äquivalent. Wir nennen $(k; t_1, \ldots, t_k)$ eine *Partition von* n und die Teilmengenfolge $\{T_j\}_{1 \le j \le k}$ eine $(k; t_1, \ldots, t_k)$*-Partitionierung von* $[\,n\,]$. Damit ist das Cutting sticks-Problem äquivalent zu folgendem Mengen-Partitionierungssproblem: Existiert eine $(k; t_1, \ldots, t_k)$-Partitionierung von $[\,n\,]$? Wir bezeichnen dieses Problem kurz mit $\Pi(n; k; t_1, \ldots, t_k)$.

Dies ist ein NP-hartes Entscheidungsproblem. In Fu und Hu (1992) wird gezeigt, dass es für $k, l, t \in \mathbb{N}$ mit $0 < l \le \Delta_n$ und $(k-1)t + l + \Delta_{k-2} = \Delta_n$ eine $(k; t, t+1, \ldots, t+k-2, l)$-Partitionierung von $[\,n\,]$ gibt. Chen et al. (2005) beweisen, dass es eine $(k; t_1, \ldots, t_k)$-Partitionierung von $[\,n\,]$ gibt, falls $\sum_{j=1}^{k} t_j = \Delta_n$ und $t_j \ge t_{j+1}$ für $1 \le j \le k-1$ sowie $t_{k-1} \ge n$ ist. In Büchel et al. (2016) wird ein 0/1-Programm für die Lösung allgemeiner Partitionierungsprobleme angegeben.

In Büchel et al. (2016) wird insbesondere auch die spezielle Variante des Partitionierungsproblems betrachtet, bei der alle Stäbe die selbe Länge haben bzw. bei der die Summe der Elemente jeder Teilmenge gleich sind, d.h. es ist $t_j = t = \mathsf{const}$, $1 \le j \le k$. Diese Probleme nennen wir *homogen* (entsprechen nennen wir allgemeine Problemstellungen *inhomogen*). Das Entscheidungsproblem reduziert sich bei dieser speziellen Variante auf die Frage, ob eine (k, t)-Partitionierung von $[\,n\,]$ existiert, welches wir im Folgenden kurz mit $\Pi(n, k, t)$ bezeichnen. In Straight und Schillo (1979) wird gezeigt, dass für k, t mit $\Delta_n = k \cdot t$ und $t \ge n$ solche Partitionierungen existieren. Diese werden in Büchel et al. (2016) weiter untersucht und für spezielle Fälle Lösungen explizit angegeben. Außerdem wird ein Backtracking-Algorithmus angegeben, der für alle diese Fälle eine Lösung berechnet. In Ando et al. (1990) wird von der Anforderung $\Delta = k \cdot t$ abgewichen und gezeigt, dass die Menge $[\,n\,]$ genau dann in k disjunkte Teilmengen T_j mit $\sum T_j = t$ für $1 \le j \le k$ zerlegt werden kann, wenn $k(2k-1) \le k \cdot t \le \Delta_n$.

In Büchel et al. (2017) wird für homogene Instanzen mit $t = ny + z \ge 2n > z \ge n$ die Spaltung von Containern vorgeschlagenen und dann mithilfe der Parameter

$$x = n - (y+1)(k-1) \tag{1.1}$$
$$z_{\max} = 2x + 1 \tag{1.2}$$
$$= 2(n - (y+1)(k-1)) + 1 \tag{1.3}$$
$$\mathbf{x} = z - x - 1 \tag{1.4}$$

für die Fälle $z = n$ sowie $z < z_{\max}$ effiziente Algorithmen zu korrekten Bestimmung von Lösungen vorgestellt. Des Weiteren werden diese Parameter und ihre Beziehungen untereinander analysiert. Es wird gezeigt, dass $z = n$ genau dann gilt, wenn $2k | n+1$ gilt, sowie

[1] Für eine endliche Menge $M \subset \mathbb{N}_0$ sei $\sum M = \sum_{x \in M} x$.

dass, wenn $2k|n$ oder $n = s^2 - 1$ für $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$, ist, $z < z_{\max}$ gilt und somit die erwähnten Algorithmen angewendet werden können. Im Kapitel 2 dieses Papiers werden für die Fälle $2k|n + 1$ und $2k|n$ neue Verfahren vorgestellt, die ohne Aufspaltung der Container und ohne die oben aufgelisteten Parameter korrekte Lösungen berechnen. Dabei werden die Elemente von $[\,n\,]$ „mäanderartig“ auf die Container aufgeteilt. Mit diesem Verfahren können nun alle Fälle mit $n = \ell k$ bzw. $n + 1 = \ell k$ für alle $\ell \in \mathbb{G}$ gelöst werden, weil dann die Voraussetzungen $2k|n + 1$ bzw. $2k|n$ gegeben sind.

Im Kapitel 3 stellen wir Algorithmen für die Fälle $n = \ell k$ und $n+1 = \ell k$ mit $\ell, k \in \mathbb{U}$, vor. In diesen Fällen ist im Übrigen $z \geq z_{\max}$, was die in Büchel et al. (2017) geäußerte Vermutung verstärkt, dass die Bedingungen $2k|n + 1$, $2k|n$ oder $n = s^2 - 1$ nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für $z < z_{\max}$ ist. Zunächst stellen wir für $\ell = 3$ und $\ell = 5$ Lösungsverfahren vor, und dann rekursive Verfahren für $\ell \geq 7$. Die Rekursionen greifen auf den Fall $\ell - 2$ zurück; die Rekursionsanfänge können $\ell = 5$, $\ell = 3$ oder die Fälle $2k|n$ oder $2k|n + 1$ sein.

In Kapitel 4 geben wir Beispiele für Probleminstanzen, die mit den bisher vorgestellten Verfahren nicht gelöst werden können. Diese Fälle geben möglicherweise Hinweise auf Verfahren, mit denen auch diese Fälle gelöst werden können.

2 Der Mäanderalgorithmus

In Büchel et al. (2016) wird gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Partition

$$\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n + \frac{1}{2} - (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2}\right) \tag{2.1}$$

existiert sowie dass zu diesen jeweils genau eine „triviale“ Partitionierung von $[\,n\,]$ gehört, nämlich für $n \in \mathbb{U}$ die Partitionierung

$$T_1 = \{n\}\,, \;\; T_i = \{n - (i-1), i-1\}\,, 2 \leq i \leq \frac{n+1}{2} \tag{2.2}$$

sowie für $n \in \mathbb{G}$ die Partitionierung

$$T_i = \{n - (i-1), i\}\,, 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \tag{2.3}$$

Diese Partitionierungen werden dort und im Folgenden *Gauß-Partitionierungen* genannt.

Da

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2} = k \cdot t \tag{2.4}$$

und $t \geq n$ ist, gilt für $n > 1$

$$k \leq \frac{n+1}{2} < n \tag{2.5}$$

Wir zeigen im Folgenden, dass es für $n \in \mathbb{G}$ mit $2k|n$ und für $n \in \mathbb{U}$ mit $2k|n{+}1$ immer (k, t)-Partitionierungen von $[\,n\,]$ gibt, die als Verallgemeinerungen der oben dargestellten Gauß-Partitionierungen betrachtet werden können.

2.1 Fall: $n \in \mathbb{G}$ und $2k|n$

Wir betrachten als erstes den Fall $n \in \mathbb{G}$, $n \geq 2$, und $2k|n$. Da n gerade ist, kann k als Werte nur die Teiler von $\frac{n}{2}$ annehmen:

$$k \in \left\{ q : q \middle| \frac{n}{2} \right\} \tag{2.6}$$

Für jedes dieser k ergibt sich als Anzahl der Elemente pro Container T_j, $1 \leq j \leq k$:

$$|T_j| = \frac{n}{k} \in \mathbb{G} \tag{2.7}$$

Wir können uns die Befüllung der k Container T_j mit den jeweils $\frac{n}{k}$ Elementen als eine $\frac{n}{k} \times k$-Matrix

$$T = (\, t_{ij} \,)_{\substack{1 \leq i \leq \frac{n}{k} \\ 1 \leq j \leq k}} \tag{2.8}$$

vorstellen. Für $1 \leq i \leq \dfrac{n}{2k}$ und $1 \leq j \leq k$ sind die Elemente in den ungeraden Zeilen

$$t_{2i-1,j} = n - (\, 2k(i-1) + (j-1) \,) \tag{2.9}$$

und die Elemente in geraden Zeilen

$$t_{2i,j} = n - (\, 2k - 1 \,) - 2k(i-1) + (j-1) = n - 2ki + j \tag{2.10}$$

Dabei werden die Elemente in den Zeilen mit ungeradem Index absteigend und die Elemente in Zeilen mit geradem Index aufsteigend sortiert. Die j-te Spalte von T enthält genau die Elemente des Containers T_j.

Wir betrachten ein paar Beispiele:

Sei $n = 16$, d.h. $\Delta_{16} = 136 = 8 \cdot 17$. Die Teiler von $\dfrac{n}{2} = 8$ sind $1, 2, 4, 8$. Für alle diese Fälle bestimmt die obige Methode eine Lösung. Für $k = 8$ ist das die Gauß-Partitionierung gemäß (2.3). Für $k = 4$ und damit für $t = 34$ ergibt sich:

T_1	T_2	T_3	T_4
16	15	14	13
9	10	11	12
8	7	6	5
1	2	3	4

Sei $n = 30$, d.h. $\Delta_{30} = 465 = 15 \cdot 31$. Die Teiler von $\dfrac{n}{2} = 15$ sind $1, 3, 5, 15$. Für $k = 5$ und damit für $t = 93$ ergibt sich

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
30	29	28	27	26
21	22	23	24	25
20	19	18	17	16
11	12	13	14	15
10	9	8	7	6
1	2	3	4	5

und für $k = 3$ und damit für $t = 155$ ergibt sich

T_1	T_2	T_3
30	29	28
25	26	27
24	23	22
19	20	21
18	17	16
13	14	15
12	11	10
7	8	9
6	5	4
1	2	3

Wie die Beispiele zeigen, werden die Elemente von $[\,n\,]$ mäanderförmig auf die Zeilen von T verteilt. Wir nennen die Paare von Zeilen $t_{2i-1,j}$ und $t_{2i,j}$, $1 \leq i \leq \frac{n}{2k}$, $1 \leq j \leq k$, (*Mäander-*) *Schleifen*. T besteht aus $\frac{n}{2k}$ solcher Schleifen.

Bemerkung 2.1 *Die Gauß-Partitionierung in (2.3) ist ein Spezialfall der durch (2.9) und (2.10) festgelegten Mäander-Partitionierung. Hier ist* $k = \frac{n}{2}$ *und damit* $2k|n$*, und die zugehörige Gauß-Partitionierung besteht aus genau einer Schleife.* □

Die Spaltensummen der Matrix T ergeben jeweils den Wert t:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{k}} t_{ij} = t \tag{2.11}$$

Wir verifizieren dies durch Aufsummieren der Spaltenelemente (2.9) und (2.10):

$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2k}}(n - (2k(i-1) + (j-1))) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2k}}(n - 2ki + j)$

$$= \frac{n^2}{2k} - \left[2k\sum_{i=1}^{\frac{n}{2k}}(i-1) + (j-1)\frac{n}{2k}\right] + \frac{n^2}{2k} - 2k \cdot \frac{\frac{n}{2k}\left(\frac{n}{2k}+1\right)}{2} + j \cdot \frac{n}{2k}$$

$$= \frac{n^2}{2k} - \left[2k\sum_{i=0}^{\frac{n}{2k}-1} i + (j-1)\frac{n}{2k}\right] + \frac{n^2}{2k} - 2k \cdot \frac{\frac{n}{2k}\left(\frac{n}{2k}+1\right)}{2} + j \cdot \frac{n}{2k}$$

$$= \frac{n^2}{2k} - \left[2k \cdot \frac{\frac{n}{2k}\left(\frac{n}{2k}-1\right)}{2} + (j-1)\frac{n}{2k}\right] + \frac{n^2}{2k} - 2k \cdot \frac{\frac{n}{2k}\left(\frac{n}{2k}+1\right)}{2} + j \cdot \frac{n}{2k}$$

$$= \frac{n^2+2kn+2n}{4k} - \frac{jn}{2k} + \frac{n^2-2kn}{4k} + \frac{jn}{2k}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2k}$$

$$= t$$

Da $2k|n$ gilt, ist $\frac{n}{k}$ eine gerade Zahl, d.h. die Anzahl der Zeilen von T ist gerade. Für $0 \leq s \leq \frac{n}{2k} - 1$ gilt somit: Ist $1+s$ ungerade, dann ist $\frac{n}{k} - s$ gerade, ist $1+s$ gerade, dann ist $\frac{n}{k} - s$ ungerade.

Für die Spalte j, d.h. für den Container T_j, gilt:

$$t_{1+s,j} + t_{\frac{n}{k}-s,j} = n+1, \;\; 0 \leq s \leq \frac{n}{2k} - 1 \tag{2.12}$$

$t_{1+s,j}$ und $t_{\frac{n}{k}-s,j}$ sind also bezüglich $n+1$ komplementär. Da $n+1$ ungerade ist, gilt: Ist $t_{1+s,j}$ ungerade, dann ist $t_{\frac{n}{k}-s,j}$ gerade, ist $t_{1+s,j}$ gerade, dann ist $t_{\frac{n}{k}-s,j}$ ungerade.

Wir beweisen nun, dass im Allgemeinen die Matrizen $T = (t_{ij})$ die Bedingung (2.12) erfüllen. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $1+s$ ungerade und damit $\frac{n}{k} - s$ gerade ist, d.h. es ist $2i - 1 = 1 + s$ sowie $2i = \frac{n}{k} - s$ und damit die Zeile $i = \frac{s+2}{2}$ und die dazu komplementäre Zeile $i' = \frac{n-ks}{2k}$. Setzen wir diese Indizes in (2.9) bzw. (2.10) ein, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
t_{i,j} + t_{i',j} &= t_{\frac{s+2}{2},j} + t_{\frac{n-ks}{2k},j} \\
&= n - \left(2k\left(\frac{s+2}{2} - 1\right) + (j-1)\right) + n - 2k \cdot \frac{n-ks}{2k} + j \\
&= n - ks - j + 1 + n - n + ks + j \\
&= n + 1
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Fall, dass $1+s$ gerade und damit $\frac{n}{k} - s$ ungerade ist, d.h. es ist $2i = 1+s$ sowie $2i-1 = \frac{n}{k} - s$ und damit die Zeile $i = \frac{s+1}{2}$ und die dazu komplementäre

Zeile $i' = \dfrac{n-ks+k}{2k}$. Diese Indizes eingesetzt in (2.9) bzw. (2.10) ergeben:

$$\begin{aligned}
t_{i',j} + t_{i,j} &= t_{\frac{n-ks+k}{2k},j} + t_{\frac{s+1}{2},j} \\
&= n - \left(2k\left(\frac{n-ks+k}{2k} - 1\right) + (j-1)\right) + n - 2k \cdot \frac{s+1}{2} + j \\
&= n - n + ks + k - j + 1 + n - ks - k + j \\
&= n + 1
\end{aligned}$$

Mit (2.12) kann (2.11) auch wie folgt verifiziert werden: Da die Spalten aus $\dfrac{n}{2k}$ Paaren bestehen, die die Summe $n+1$ ergeben, ergibt sich als Spaltensumme:

$$\frac{n}{2k} \cdot (n+1) = t \tag{2.13}$$

Folgerung 2.1 *Falls n gerade sowie $2k|n$ und $n+1 \in \mathbb{P}$ ist, dann sind die mit obigem Algorithmus konstruierbaren Partitionierungen die einzigen (k,t)-Partitionierungen von $[\,n\,]$.*

Beweis *Da $n+1 \in \mathbb{P}$ ist, kann wegen (2.5) k kein Teiler von $n+1$ sein. Damit sind alle möglichen Werte von k durch (2.6) gegeben und für diese konstruiert der Algorithmus die jeweils zugehörige Partitionierung.* □

Lemma 2.1 *Es sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \geq 3$. Ist (k,t) eine Partition von $p-1$, dann gilt $p|t$ und $2k|p-1$.*

Beweis *Wir haben*

$$\Delta_{p-1} = \frac{(p-1) \cdot p}{2} = k \cdot t \tag{2.14}$$

Wegen (2.5) gilt:

$$k \leq \frac{p}{2} < p$$

woraus $p \nmid k$ folgt und daraus mit (2.14) $p|t$ und damit

$$\frac{t}{p} = \frac{p-1}{2k}$$

womit auch $2k|p-1$ gezeigt ist. □

Da $p-1 \in \mathbb{G}$ für $p \in \mathbb{P}$, $p \geq 3$, ist, und $2k|p-1$ wegen Lemma 2.1 gilt, folgt unmittelbar

Folgerung 2.2 *Ist $p \in \mathbb{P}$, $p \geq 3$, und $\Delta_{p-1} = k \cdot t$, dann kann mit dem obigen Verfahren eine (k,t)-Partitionierung von $[\,p-1\,]$ konstruiert werden.* □

2.2 Fall: $n \in \mathbb{U}$ und $2k|n{+}1$

Wir betrachten nun den Fall $n \in \mathbb{U}$, $n \geq 3$, und $2k|n{+}1$. In diesem Fall kann k als Werte nur die Teiler von $\frac{n+1}{2}$ annehmen. Wir ergänzen die zu verteilenden Elemente mit der Zahl 0: $[\,n\,]_0 = \{0, 1, \ldots, n\}$. Damit kann das Verfahren für den Fall $n \in \mathbb{G}$ aus dem vorhergehenden Abschnitt ohne Änderung übernommen werden.

Wir betrachten als Beispiel $n = 15$, d.h. $\Delta_{15} = 15 \cdot 8$. Die Teiler von $\frac{n}{2} = 8$ sind $1, 2, 4, 8$. Für alle diese Fälle bestimmt die obige Methode eine Lösung. Für $k = 8$ ist das die Gauß-Partitionierung gemäß (2.2). Für $k = 4$ und damit für $t = 30$ ergibt sich:

T_1	T_2	T_3	T_4
15	14	13	12
8	9	10	11
7	6	5	4
0	1	2	3

Die Unterschiede zum Fall n gerade sind marginal: Neben der Ergänzung der 0 ist die Matrix T im ungeraden Fall eine $\frac{n+1}{k} \times k$-Matrix, die aus $\frac{n+1}{2k}$ Mäander-Schleifen besteht, und die Summe der komplementären Elemente in einer Spalte dieser Matrix ist nicht $n+1$, siehe (2.12), sondern n:

$$t_{1+s,j} + t_{\frac{n+1}{k}-s,j} = n, \;\; 0 \leq s \leq \frac{n+1}{2k} - 1 \tag{2.15}$$

Die Verifikation dieser Beziehung sowie die Verifikation der Spaltensummen

$$\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{k}} t_{ij} = t \tag{2.16}$$

für $1 \leq j \leq k$ gelingt analog dem Fall n gerade im vorigen Abschnitt.

Auch Bemerkung 2.1 kann entsprechend angepasst übertragen werden: Bei der Gauß-Partitionierung für $n \in \mathbb{U}$ ist $k = \frac{n+1}{2}$ und damit $2k|n{+}1$.

Lemma 2.2 *Ist (k, t) eine Partition von $p \in \mathbb{P}$, dann gilt $p|t$ und $2k|p{+}1$.*

Beweis *Wir haben*

$$\Delta_p = \frac{p \cdot (p+1)}{2} = k \cdot t \tag{2.17}$$

Wegen (2.5) gilt:

$$k \leq \frac{p+1}{2} < p$$

woraus $p \nmid k$ folgt und daraus mit (2.17) $p|t$ und damit

$$\frac{t}{p} = \frac{p+1}{2k}$$

womit auch $2k|p{+}1$ gezeigt ist. □

Da $p \in \mathbb{U}$ für $p \in \mathbb{P}$, $p \geq 3$, ist, und $2k|p{+}1$ wegen Lemma 2.2 gilt, folgt unmittelbar

Folgerung 2.3 *Ist $p \in \mathbb{P}$, $p \geq 3$, und $\Delta_p = k \cdot t$, dann kann mit dem obigen Verfahren eine (k, t)-Partitionierung von $[\,p\,]$ konstruiert werden.* □

2.3 Verallgemeinerung auf die Fälle $n = \ell k$ und $n + 1 = \ell k$ mit $\ell \in \mathbb{G}$

Mit dem Mäanderalgorithmus können natürlich alle Probleminstanzen mit $n = \ell k$ und $n + 1 = \ell k$ mit $\ell \in \mathbb{G}$ gelöst werden, denn dann gilt offensichtlich $2k|n$ bzw. $2k|n+1$.

3 Lösungen für die Fälle $n = \ell k$ und $n + 1 = \ell k$ mit $\ell, k \in \mathbb{U}$

Wir stellen jetzt Lösungsverfahren für die „ungeraden" Probleminstanzen vor. Wir beginnen mit $\ell = 3$ und $\ell = 5$ und geben dann für $\ell \geq 7$ ein rekursives Verfahren an, welches als Rekursionsanfänge die beiden Verfahren für $\ell = 3$ und $\ell = 5$ haben kann, aber auch den Mänderalgorithmus aus dem vorigen Kapitel für die Fälle $2k|n$ und $2k|n+1$.

3.1 Fall: $n = 3k,\ k \in \mathbb{U},\ k \geq 3$

$$\Delta_{3k} = \frac{3k(3k+1)}{2} = k \cdot t \tag{3.1}$$

Es folgt

$$t = \frac{3(3k+1)}{2} = \frac{9k+3}{2} \leq 5k < 2n,\ k \geq 3 \tag{3.2}$$

$$n < \frac{3}{2}n < t < 2n \tag{3.3}$$

$$y = 0 \tag{3.4}$$

$$z = t \tag{3.5}$$

$$x = n - (y+1)(k-1) = 3k - k + 1 = 2k + 1 \tag{3.6}$$

$$x' = x + 1 = 2(k+1) \tag{3.7}$$

$$\mathbf{x} = z - x' = 3k - 2k - 2 = \frac{5k-1}{2} \tag{3.8}$$

$$z_{\max} = 2(n - (y+1)(k-1)) + 1 = 2(3k - k + 1) + 1 = 4k + 3 \tag{3.9}$$

$$z \geq z_{\max},\ k \geq 3 \tag{3.10}$$

3.1.1 Lösungsansatz für t gerade

Es sei $k = 4q + 1$, $q \geq 1$, dann ist

$$t = \frac{9(4q+1)+3}{2} = 18q + 6 \in \mathbb{G}$$

t ist also gerade. Wir befüllen die Container wie folgt:

$$T_i = \begin{cases} \left\{ \frac{t-2}{2} - (i-1), \frac{t+2}{2} + (i-1) \right\}, & 1 \leq i \leq \frac{3}{4}(k-1) \\ \\ \left\{ \frac{t}{6}, \frac{t}{3}, \frac{t}{2} \right\}, & i = \frac{3}{4}(k-1) + 1 = \frac{1}{4}(3k+1) \end{cases} \tag{3.11}$$

Die restlichen $k - \frac{1}{4}(3k+1) = \frac{k-1}{4}$ Container werden wie folgt befüllt:

$$\begin{aligned} T_{\frac{3k+5}{4}+i} = \Big\{ & \frac{3k+5}{4} - 3i - 2, \frac{3k+5}{4} - 3i - 3, \frac{3k+5}{4} - 3i - 4, \\ & \frac{3k+5}{4} + 3i, \frac{3k+5}{4} + 3i + 1, \frac{3k+5}{4} + 3i + 2 \Big\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\text{für } 0 \leq i \leq \frac{k-1}{4} - 1 = \frac{k-5}{4}$$

Die Lösung ist korrekt: In den Fällen (3.11) ist offensichtlich die Summe der Elemente in allen Containern gleich t. Für die Container T in (3.12) ergibt sich

$$\sum T = 6 \cdot \frac{3k+5}{4} - 6 = \frac{9k+3}{2} = t$$

Damit ist die Lösung insgesamt korrekt.

Beispiele:

Sei $k = 5$, also $n = 15$ sowie $\Delta_{15} = 120$ und $t = 24$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{11, 13\} \\ T_2 &= \{10, 14\} \\ T_3 &= \{9, 15\} \\ T_4 &= \{4, 8, 12\} \\ T_5 &= \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \end{aligned}$$

Bemerkung: T_5 kann als mäandernd erstellt betrachtet werden.

Sei $k = 9$, also $n = 27$ sowie $\Delta_{27} = 378$ und $t = 42$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz

die Lösung:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{20, 22\}\\
T_2 &= \{19, 23\}\\
T_3 &= \{18, 24\}\\
T_4 &= \{17, 25\}\\
T_5 &= \{16, 26\}\\
T_6 &= \{15, 27\}\\
T_7 &= \{7, 14, 21\}\\
T_8 &= \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}\\
T_9 &= \{1, 2, 3, 11, 12, 13\}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: T_8 und T_9 können auch mäandernd erstellt werden:

T_8	T_9
13	12
10	11
9	8
5	6
4	3
1	2

Sei $k = 13$, also $n = 39$ sowie $\Delta_{39} = 780$ und $t = 60$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{29, 31\}\\
T_2 &= \{28, 32\}\\
T_3 &= \{27, 33\}\\
T_4 &= \{26, 34\}\\
T_5 &= \{25, 35\}\\
T_6 &= \{24, 36\}\\
T_7 &= \{23, 37\}\\
T_8 &= \{22, 38\}\\
T_9 &= \{21, 39\}\\
T_{10} &= \{10, 20, 30\}\\
T_{11} &= \{7, 8, 9, 11, 12, 13\}\\
T_{12} &= \{4, 5, 6, 14, 15, 16\}\\
T_{13} &= \{1, 2, 3, 17, 18, 19\}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: T_{11}, T_{12} und T_{13} können auch mäandernd erstellt werden:

T_{11}	T_{12}	T_{13}
19	18	17
14	15	16
13	12	11
7	8	9
6	5	4
1	2	3

Sei $k = 17$, also $n = 51$ sowie $\Delta_{51} = 1326$ und $t = 78$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{38, 40\} \\
T_2 &= \{37, 41\} \\
T_3 &= \{36, 42\} \\
T_4 &= \{35, 43\} \\
T_5 &= \{34, 44\} \\
T_6 &= \{33, 45\} \\
T_7 &= \{32, 46\} \\
T_8 &= \{31, 47\} \\
T_9 &= \{30, 48\} \\
T_{10} &= \{29, 49\} \\
T_{11} &= \{28, 50\} \\
T_{12} &= \{27, 51\} \\
T_{13} &= \{13, 26, 39\} \\
T_{14} &= \{10, 11, 12, 14, 15, 16\} \\
T_{15} &= \{7, 8, 9, 17, 18, 19\} \\
T_{16} &= \{4, 5, 6, 20, 21, 22\} \\
T_{17} &= \{1, 2, 3, 23, 24, 25\}
\end{aligned}$$

Bemerkung: T_{14}, T_{15}, T_{16} und T_{17} können auch mäandernd erstellt werden:

T_{14}	T_{15}	T_{16}	t_{17}
25	24	23	22
18	19	20	21
17	16	15	14
9	10	11	12
8	7	6	5
1	2	3	4

3.1.2 Lösungsansatz für t ungerade

Sei nun $k = 4q - 1$, $q \geq 1$. Damit ist

$$t = \frac{9(4q-1)+3}{2} = 18q - 3 \in \mathbb{U}$$

d.h. t ist ungerade. Wir befüllen die Container wie folgt:

$$T_i = \left\{ \frac{t-1}{2} - (i-1), \frac{t+1}{2} + (i-1) \right\}, \ 1 \leq i \leq \frac{3k-1}{4} \tag{3.13}$$

Wir berechnen nun das kleinste und das größte durch diese Zuteilung vergebene Element aus $[\, n\,]$:

$$\begin{aligned}
\min \bigcup_{i=1}^{\frac{3k-1}{4}} T_i &= \frac{t-1}{2} - \left(\frac{3k-1}{4} - 1 \right) &(3.14)\\
&= \frac{\frac{9k+3}{2} - 1}{2} - \frac{3k-5}{4} &(3.15)\\
&= \frac{3}{2}(k+1) &(3.16)\\
\max \bigcup_{i=1}^{\frac{3k-1}{4}} T_i &= \frac{t+1}{2} + \left(\frac{3k-1}{4} - 1 \right) &(3.17)\\
&= \frac{\frac{9k+3}{2} + 1}{2} + \frac{3k-5}{4} &(3.18)\\
&= 3k &(3.19)\\
&= n &(3.20)
\end{aligned}$$

Es bleiben von $[\, n\,]$ jetzt also noch die Elemente $1, 2, \ldots, \frac{3}{2}(k+1) - 1 = \frac{3k+1}{2}$ auf

$$k - \frac{3k-1}{4} = \frac{k+1}{4}$$

Container der Größe $t = \frac{9k+3}{2}$ zu verteilen. Wir setzen

$$\begin{aligned}
n' &= \frac{3k+1}{2} &(3.21)\\
k' &= \frac{k+1}{4} &(3.22)\\
t' &= t &(3.23)
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\Delta_{n'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3k+1}{2} \cdot \left(\frac{3k+1}{2} + 1 \right) \tag{3.24}$$

$$= \frac{9k^2 + 12k + 3}{8} \tag{3.25}$$

$$= \frac{k+1}{4} \cdot \frac{9k+3}{2} \tag{3.26}$$

$$= k' \cdot t' \tag{3.27}$$

Das heißt: Um das Ausgangsproblem $\Pi\left(3k, k, \frac{3(3k+1)}{2}\right)$ endgültig zu lösen, bleibt noch, das Problem $\Pi(n', k', t')$ zu lösen. Dazu stellen wir fest, dass

$$n' + 1 = \frac{3k+1}{2} + 1 = 3 \cdot \frac{k+1}{2} = 3 \cdot 2k' \tag{3.28}$$

also $2k' | n' + 1$ ist. Für diesen Fall ist in Kapitel 2.2 ein Lösungsverfahren dargestellt: Mäandern der Elemente $0, 1, 2, \ldots, \frac{3}{2}(k+1) - 1 = \frac{3k+1}{2}$ auf die k' Container.

Beispiele:

Sei $k = 3$, also $n = 9$ sowie $\Delta_9 = 45$ und $t = 15$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{7, 8\} \\ T_2 &= \{6, 9\} \\ T_3 &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

Sei $k = 7$, also $n = 21$ sowie $\Delta_{21} = 231$ und $t = 33$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{16, 17\} \\ T_2 &= \{15, 18\} \\ T_3 &= \{14, 19\} \\ T_4 &= \{13, 20\} \\ T_5 &= \{12, 21\} \\ T_6 &= \{0, 3, 4, 7, 8, 11\} \\ T_7 &= \{1, 2, 5, 6, 9, 10\} \end{aligned}$$

Sei $k = 11$, also $n = 33$ sowie $\Delta_{33} = 561$ und $t = 51$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz

die Lösung:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{25, 26\} \\
T_2 &= \{24, 27\} \\
T_3 &= \{23, 28\} \\
T_4 &= \{22, 29\} \\
T_5 &= \{21, 30\} \\
T_6 &= \{20, 31\} \\
T_7 &= \{19, 32\} \\
T_8 &= \{18, 33\} \\
T_9 &= \{0, 5, 6, 11, 12, 17\} \\
T_{10} &= \{1, 4, 7, 10, 13, 16\} \\
T_{11} &= \{2, 3, 8, 9, 14, 15\}
\end{aligned}$$

Sei $k = 15$, also $n = 45$ sowie $\Delta_{45} = 1035$ und $t = 69$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{34, 35\} \\
T_2 &= \{33, 36\} \\
T_3 &= \{32, 37\} \\
T_4 &= \{31, 38\} \\
T_5 &= \{30, 39\} \\
T_6 &= \{29, 40\} \\
T_7 &= \{28, 41\} \\
T_8 &= \{27, 42\} \\
T_9 &= \{26, 43\} \\
T_{10} &= \{25, 44\} \\
T_{11} &= \{24, 45\} \\
T_{12} &= \{0, 7, 8, 15, 16, 23\} \\
T_{13} &= \{1, 6, 9, 14, 17, 22\} \\
T_{14} &= \{2, 5, 10, 13, 18, 21\} \\
T_{15} &= \{3, 4, 11, 12, 19, 20\}
\end{aligned}$$

3.2 Fall: $n + 1 = 3k,\ k \in \mathbb{U},\ k \geq 3$

Es ist

$$\Delta_{3k-1} = \frac{(3k-1) \cdot 3k}{2} = k \cdot t \tag{3.29}$$

und damit

$$t = \frac{3(3k-1)}{2} = \frac{9k-3}{2} \tag{3.30}$$
$$y = 0 \tag{3.31}$$
$$z = t \tag{3.32}$$
$$x = 2k \tag{3.33}$$
$$\mathbf{x} = \frac{5}{2}(k-1) \tag{3.34}$$
$$z_{\max} = 4k+1 \tag{3.35}$$
$$z \geq z_{\max},\ k \geq 5 \tag{3.36}$$

3.2.1 Lösungsansatz für t gerade

Sei $k = 4q - 1$, $q \geq 1$, dann ist

$$t = \frac{9k-3}{2} = \frac{9(4q-1)-3}{2} = 6(3q-1) \in \mathbb{G}$$

t ist also gerade. Wir befüllen die Container wie folgt:

$$T_i = \begin{cases} \left\{ \frac{t-2}{2} - (i-1), \frac{t+2}{2} + (i-1) \right\}, & 1 \leq i \leq \frac{1}{4}(3k-1) \\ \left\{ \frac{t}{2}, \frac{t}{3} - 1, \frac{t}{6}, 1 \right\}, & i = \frac{1}{4}(3k-1) + 1 = \frac{3}{4}(k+1) \end{cases} \tag{3.37}$$

Es bleiben noch $k - \frac{3}{4}(k+1) = \frac{k-3}{4}$ Container zu befüllen. Die Gesamtbilanz stimmt, denn es ist:

$$\frac{1}{4}(3k-1) + 1 + \frac{k-3}{4} = k$$

Diese Container werden mit den übrig gebliebenen Elementen

$$2, \ldots, \frac{t}{6} - 1, \frac{t}{6} + 1, \frac{t}{3} - 2$$

wie folgt befüllt:

$$\begin{aligned} T_{\frac{3k+7}{4}+i} = \Big\{ &\frac{3k+7}{4} - 3i - 3, \frac{3k+7}{4} - 3i - 4, \frac{3k+7}{4} - 3i - 5, \\ &\frac{3k+7}{4} + 3i - 1, \frac{3k+7}{4} + 3i, \frac{3k+7}{4} + 3i + 1 \Big\} \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\text{für } 0 \leq i \leq \frac{k-3}{4} - 1 = \frac{k-7}{4}$$

Die Lösung ist korrekt: In den Fällen (3.37) ist offensichtlich die Summe der Elemente in allen Containern gleich t. Für die Container T in (3.38) ergibt sich

$$\sum T = 6 \cdot \frac{3k+7}{4} - 12 = \frac{9k-3}{2} = t$$

Damit ist die Lösung insgesamt korrekt.

Beispiele:

Sei $k = 3$, also $n = 8$ sowie $\Delta_8 = 36$ und $t = 12$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{5, 7\} \\ T_2 &= \{4, 8\} \\ T_3 &= \{1, 2, 3, 6\} \end{aligned}$$

Da $8 = 3^2 - 1$ ist, ist dies eine Probleminstanz, die in Büchel et al. (2017) Q-Instanz genannt wird. Für diese Instanzen wird dort ein Lösungsverfahren vorgestellt; die Lösung dort stimmt mit der obigen überein.

Sei $k = 7$, also $n = 20$ sowie $\Delta_{20} = 210$ und $t = 30$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{14, 16\} \\ T_2 &= \{13, 17\} \\ T_3 &= \{12, 18\} \\ T_4 &= \{11, 19\} \\ T_5 &= \{10, 20\} \\ T_6 &= \{1, 5, 9, 15\} \\ T_7 &= \{2, 3, 4, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

Sei $k = 11$, also $n = 32$ sowie $\Delta_{32} = 528$ und $t = 48$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{23, 25\} \\ T_2 &= \{22, 26\} \\ &\vdots \\ T_8 &= \{16, 32\} \\ T_9 &= \{1, 8, 15, 24\} \\ T_{10} &= \{5, 6, 7, 9, 10, 11\} \\ T_{11} &= \{2, 3, 4, 12, 13, 14\} \end{aligned}$$

Sei $k = 15$, also $n = 44$ sowie $\Delta_{44} = 990$ und $t = 66$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz

die Lösung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{32, 34\} \\ T_2 &= \{31, 35\} \\ &\vdots \\ T_{11} &= \{22, 44\} \\ T_{12} &= \{1, 11, 22, 33\} \\ T_{13} &= \{8, 9, 10, 12, 13, 14\} \\ T_{14} &= \{5, 6, 7, 15, 16, 17\} \\ T_{15} &= \{2, 3, 4, 18, 19, 20\} \end{aligned}$$

Sei $k = 19$, also $n = 56$ sowie $\Delta_{56} = 1569$ und $t = 84$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{41, 43\} \\ T_2 &= \{40, 44\} \\ &\vdots \\ T_{14} &= \{28, 56\} \\ T_{15} &= \{1, 14, 27, 42\} \\ T_{16} &= \{11, 12, 13, 15, 16, 17\} \\ T_{17} &= \{8, 9, 10, 18, 19, 20\} \\ T_{18} &= \{5, 6, 7, 21, 22, 23\} \\ T_{19} &= \{2, 3, 4, 24, 25, 26\} \end{aligned}$$

3.2.2 Lösungsansatz für t ungerade

Sei nun $k = 4q + 1$, $q \geq 1$, dann ist

$$t = \frac{9k-3}{2} = \frac{9(4q+1)-3}{2} = 3(6q+1) \in \mathbb{U}$$

d.h. t ist ungerade. Wir befüllen in diesem Fall die Container wie folgt:

$$T_i = \left\{ \frac{t-1}{2} - (i-1), \frac{t+1}{2} + (i-1) \right\}, \; 1 \leq i \leq \frac{1}{4}(3k+1) \tag{3.39}$$

Wir berechnen nun das kleinste und das größte durch diese Zuteilung vergebene Element aus $[\,n\,]$:

$$\min \bigcup_{i=1}^{\frac{3k+1}{4}} T_i = \frac{t-1}{2} - \left(\frac{3k+1}{4} - 1\right) \tag{3.40}$$

$$= \frac{\frac{9k-3}{2} - 1}{2} - \frac{3k-3}{4} \tag{3.41}$$

$$= \frac{1}{2}(3k-1) \tag{3.42}$$

$$\max \bigcup_{i=1}^{\frac{3k+1}{4}} T_i = \frac{t+1}{2} + \left(\frac{3k+1}{4} - 1\right) \tag{3.43}$$

$$= \frac{\frac{9k-3}{2} + 1}{2} + \frac{3k+1}{4} - 1 \tag{3.44}$$

$$= 3k - 1 \tag{3.45}$$

$$= n \tag{3.46}$$

Es bleiben von $[\,n\,]$ jetzt also noch die Elemente $1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(3k-1) - 1 = \frac{3}{2}(k-1)$ auf

$$k - \frac{3k+1}{4} = \frac{k-1}{4}$$

Container der Größe $t = \dfrac{9k-3}{2}$ zu verteilen. Wir setzen

$$n' = \frac{3}{2}(k-1) \tag{3.47}$$

$$k' = \frac{k-1}{4} \tag{3.48}$$

$$t' = t \tag{3.49}$$

Dann gilt

$$\Delta_{n'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3k-3}{2} \cdot \left(\frac{3k-3}{2} + 1\right) \tag{3.50}$$

$$= \frac{9k^2 - 12k + 3}{8} \tag{3.51}$$

$$= \frac{k-1}{4} \cdot \frac{9k-3}{2} \tag{3.52}$$

$$= k' \cdot t' \tag{3.53}$$

Das heißt: Um das Ausgangsproblem $\Pi\left(3k-1, k, \frac{3(3k-1)}{2}\right)$ endgültig zu lösen, bleibt noch, das Problem $\Pi(n', k', t')$ zu lösen. Dazu stellen wir fest, dass

$$n' = \frac{3(k-1)}{2} = 3 \cdot \frac{k-1}{2} = 3 \cdot 2k' \tag{3.54}$$

also $2k'|n'$ ist. Für diesen Fall ist in Kapitel 2.1 ein Lösungsverfahren dargestellt: verallgemeinerte Gauß-Partitionierung der Elemente $1, 2, \ldots, \frac{3}{2}(k-1)$ auf die k' Container.

Beispiele:

Sei $k = 5$, also $n = 14$ sowie $\Delta_{14} = 105$ und $t = 21$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{10, 11\} \\
T_2 &= \{9, 12\} \\
T_3 &= \{8, 13\} \\
T_4 &= \{87, 14\} \\
T_5 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}
\end{aligned}
$$

Sei $k = 9$, also $n = 26$ sowie $\Delta_{26} = 351$ und $t = 39$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{19, 20\} \\
T_2 &= \{18, 21\} \\
T_3 &= \{17, 22\} \\
T_4 &= \{16, 23\} \\
T_5 &= \{15, 24\} \\
T_6 &= \{14, 25\} \\
T_7 &= \{13, 26\} \\
T_8 &= \{1, 4, 5, 8, 9, 12\} \\
T_9 &= \{2, 3, 6, 7, 10, 11\}
\end{aligned}
$$

Sei $k = 13$, also $n = 38$ sowie $\Delta_{38} = 741$ und $t = 57$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz die Lösung:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{28, 29\} \\
T_2 &= \{27, 30\} \\
&\vdots \\
T_{10} &= \{19, 38\} \\
T_{11} &= \{1, 6, 7, 12, 13, 18\} \\
T_{12} &= \{2, 5, 8, 11, 14, 17\} \\
T_{13} &= \{3, 4, 9, 10, 15, 16\}
\end{aligned}
$$

Sei $k = 17$, also $n = 50$ sowie $\Delta_{50} = 1275$ und $t = 75$. Dann ergibt sich mit obigem Ansatz

die Lösung:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{37, 38\} \\
T_2 &= \{36, 39\} \\
&\vdots \\
T_{13} &= \{25, 50\} \\
T_{14} &= \{1, 8, 9, 16, 17, 24\} \\
T_{15} &= \{2, 7, 10, 15, 18, 23\} \\
T_{16} &= \{3, 6, 11, 14, 19, 22\} \\
T_{17} &= \{4, 5, 12, 13, 20, 21\}
\end{aligned}
$$

Bemerkung 3.1 *Für Probleminstanzen mit $n = 3k$ und $n + 1 = 3k$ haben wir Lösungsverfahren kennen gelernt, die rekursiv auf die Mäanderalgorithmen aus Kapitel 2 zurückgreifen.*

3.3 Fall: $n = 5k,\ k \in \mathbb{U},\ k \geq 3$

$$\Delta_{5k} = \frac{5k(5k+1)}{2} = k \cdot t \tag{3.55}$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{5(5k+1)}{2} = \frac{25k+5}{2} > 12k > 10k > 2n && (3.56)\\
&= 5k \cdot 1 + \frac{5(3k+1)}{2} && (3.57)\\
y &= 1 && (3.58)\\
z &= \frac{5(3k+1)}{2} && (3.59)\\
x &= n - (y+1)(k-1) = 5k - 2k + 2 = 3k + 2 && (3.60)\\
x' &= x + 1 = 3(k+1) && (3.61)\\
\mathbf{x} &= z - x' = \frac{9k-1}{2} && (3.62)\\
z_{\max} &= 2(n - (y+1)(k-1)) + 1 = 6k + 5 && (3.63)\\
z &\geq z_{\max} && (3.64)
\end{aligned}
$$

3.3.1 Lösungsansatz für t gerade

Wir betrachten zunächst den Fall $k = 4q - 1$, $q \geq 1$. Dafür ist

$$t = \frac{5(5(4q-1)+1)}{2} = 10(5q-1) \in \mathbb{G}$$

t ist also gerade. Wir erhalten die Inhalte der Container T_i in zwei Schritten: $T_i = T_{i1} \cup T_{i2}$, $1 \leq i \leq k$. Im ersten Schritt erhalten wir

$$T_{i1} = \{5k - (i-1), 3k + i\} \tag{3.65}$$

Die Summe der Elemente in T_{i1} beträgt somit $8k + 1$. Es müssen jetzt noch die Elemente $1, 2, \ldots, 3k$ auf die k Container T_{i2} aufgeteilt werden. Es liegt also ein $\Pi\,(\,n', k', t'\,)$-Partitionierungsproblem vor mit $n' = 3k$, $k' = k$ und $t' = \frac{9k+3}{2}$. Dabei ist

$$t' = \frac{9k+3}{2} = \frac{9(4q-1)+3}{2} = 18q - 3 \in \mathbb{U}$$

t' ist also ungerade. Somit können wir das Problem $\Pi\,(\,n', k', t'\,)$ mit dem im Abschnitt 3.1.2 angegebenen Verfahren lösen und so die Container T_{i2} befüllen.

Die Gesamtlösung, die wir erhalten ist korrekt, denn die Summe der beiden Elemente in T_{i1} ergibt $8k + 1$, und die Summe der Elemente in den Containern T_{i2} ist jeweils $\frac{9k+3}{2}$. Somit enthält jeder Container T_i Elemente mit der Summe

$$8k + 1 + \frac{9k+3}{2} = \frac{25k+5}{2} = t$$

3.3.2 Lösungsansatz für t ungerade

Jetzt betrachten wir den Fall $k = 4q + 1$, $q \geq 1$. Dafür ist

$$t = \frac{5(5(4q+1)+1)}{2} = 5(10q+3) \in \mathbb{U}$$

t ist also ungerade. Die Lösung dieser Probleminstanzen erfolgt analog zum obigen Fall t gerade mit dem Unterschied, dass zur Befüllung der Container T_{i2} das Verfahren aus Abschnitt 3.1.1 genommen wird, denn t' ist jetzt gerade:

$$t' = \frac{9k+3}{2} = \frac{9(4q+1)+3}{2} = 18q + 6 \in \mathbb{G}$$

3.4 Fall: $n + 1 = 5k,\ k \in \mathbb{U},\ k \geq 3$

$$\Delta_{5k-1} = \frac{(5k-1)5k}{2} = k \cdot t \tag{3.66}$$

Es folgt

$$t = \frac{5(5k-1)}{2} = \frac{25k-5}{2} > 20k = 4(k+1) > 2n \tag{3.67}$$

$$= (5k-1) \cdot 1 + \frac{3(5k-1)}{2} \tag{3.68}$$

$$y = 1 \tag{3.69}$$

$$z = \frac{3(5k-1)}{2} \tag{3.70}$$

$$x = n - (y+1)(k-1) = 5k - 1 - 2k + 2 = 3k + 1 \tag{3.71}$$

$$\mathbf{x} = z - x' = \frac{9k-7}{2} \tag{3.72}$$

$$z_{\max} = 2(n - (y+1)(k-1)) + 1 = 6k + 3 \tag{3.73}$$

$$z \geq z_{\max},\ k \geq 1 \tag{3.74}$$

3.4.1 Lösungsansatz für t gerade

Sei $k = 4q + 1$, $q \geq 1$, dann ist

$$t = \frac{5(5k-1)}{2} = \frac{5(5(4q+1)-1)}{2} = 10(5q+1) \in \mathbb{G}$$

t ist also gerade. Wir befüllen die Container in zwei Schritten wie folgt:

$$T_{i1} = \{5k - i, 3k + (i-1)\}\,,\ 1 \leq i \leq k \tag{3.75}$$

Die Summe der Elemente in T_{i1} beträgt somit $8k - 1$. Es müssen jetzt noch die Elemente $1, 2, \ldots, 3k - 1$ auf die k Container T_{i2} aufgeteilt werden. Es liegt also ein $\Pi\,(\,n', k', t'\,)$-Partitionierungsproblem vor mit $n' = 3k - 1$, d.h. mit $n' + 1 = 3k$, $k' = k$ und $t' = \frac{3(3k-1)}{2}$. Dabei ist

$$t' = \frac{3(3k-1)}{2} = \frac{3(3(4q+1)-1)}{2} = 3(6q+1) \in \mathbb{U}$$

t' ist also ungerade. Somit können wir das Problem $\Pi\,(\,n', k', t'\,)$ mit dem im Abschnitt 3.2.2 angegebenen Verfahren lösen und so die Container T_{i2} befüllen.

Die Gesamtlösung, die wir erhalten ist korrekt, denn die Summe der beiden Elemente in T_{i1} ergibt $8k - 1$, und die Summe der Elemente in den Containern T_{i2} ist jeweils $\frac{9k-3}{2}$. Somit enthält jeder Container T_i Elemente mit der Summe

$$8k - 1 + \frac{9k-3}{2} = \frac{5(5k-1)}{2} = t$$

3.4.2 Lösungsansatz für t ungerade

Wir betrachten nun den Fall $k = 4q - 1$, $q \geq 1$. Dafür ist

$$t = \frac{5(5(4q-1)-1)}{2} = 5(10q-3) \in \mathbb{U}$$

t ist also ungerade. Wir erhalten die Inhalte der Container T_i in zwei Schritten: $T_i = T_{i1} \cup T_{i2}$, $1 \leq i \leq k$. Im ersten Schritt erhalten wir

$$T_{i1} = \{5k - i, 3k + (i-1)\}\,,\ 1 \leq i \leq k \tag{3.76}$$

Die Summe der Elemente in T_{i1} beträgt somit $8k - 1$. Es müssen jetzt noch die Elemente $1, 2, \ldots, 3k - 1$ auf die k Container T_{i2} aufgeteilt werden. Es liegt also ein $\Pi\,(\,n', k', t'\,)$-Partitionierungsproblem vor mit $n' = 3k - 1$, also $n' + 1 = 3k$, $k' = k$ und $t' = \frac{9k-3}{2}$. Dabei ist

$$t' = \frac{9k-3}{2} = \frac{9(4q-1)-3}{2} = 6(3q-1) \in \mathbb{G}$$

t' ist also gerade. Somit können wir das Problem $\Pi\,(\,n', k', t'\,)$ mit dem im Abschnitt 3.2.1 angegebenen Verfahren lösen und so die Container T_{i2} befüllen.

Die Gesamtlösung, die wir erhalten ist korrekt, denn die Summe der beiden Elemente in T_{i1} ergibt $8k-1$, und die Summe der Elemente in den Containern T_{i2} ist jeweils $\frac{9k-3}{2}$. Somit enthält jeder Container T_i Elemente mit der Summe

$$8k - 1 + \frac{9k-3}{2} = \frac{5(5k-1)}{2} = t$$

Bemerkung 3.2 *Für Probleminstanzen mit $n = 5k$ und $n+1 = 5k$ haben wir Lösungsverfahren kennen gelernt, die rekursiv auf die Algorithmen für die Fälle $n = 3k$ und $n+1 = 3k$ zurückgreifen.*

3.5 Allgemeiner Fall: $n = \ell k,\ \ell, k \in \mathbb{U},\ k \geq 7$

Es ist:

$$\Delta_n = \frac{\ell k(\ell k+1)}{2} \tag{3.77}$$

$$t = \frac{\ell(\ell k+1)}{2} = \frac{\ell^2 k + \ell}{2} \tag{3.78}$$

$$= \ell k \cdot \frac{\ell-3}{2} + \frac{\ell(3k+1)}{2} \tag{3.79}$$

$$y = \frac{\ell-3}{2} \tag{3.80}$$

$$z = \frac{\ell(3k+1)}{2} \tag{3.81}$$

$$x = n - (y+1)(k-1) \tag{3.82}$$

$$= \ell k - \left(\frac{\ell-3}{2} + 1\right)(k-1) \tag{3.83}$$

$$= \frac{\ell(k+1) + k - 1}{2} \tag{3.84}$$

$$\mathbf{x} = z - x' = \frac{\ell(3k+1)}{2} - \frac{(\ell+1)(k+1)}{2} \tag{3.85}$$

$$= (\ell+1)k + \ell \tag{3.86}$$

$$z_{\max} = 2(n - (y+1)(k-1)) + 1 \tag{3.87}$$

$$= 2\left(\ell k - \left(\frac{\ell-3}{2} + 1\right)(k-1)\right) + 1 \tag{3.88}$$

$$= \ell(k+1) + k \tag{3.89}$$

$$z \geq z_{\max} \tag{3.90}$$

Die Container $T_i = T_{i1} \cup T_{i2}$, $1 \leq i \leq k$, werden wie folgt befüllt:

$$T_i = \{\ell k - (i-1), (\ell-2)k + i\} \tag{3.91}$$

Die Summe der Elemente in T_{i1} beträgt somit $2(\ell-1)k+1$. Es müssen jetzt noch die Elemente $1, 2, \ldots, (\ell-2)k$ auf die k Container T_{i2} aufgeteilt werden. Es liegt also ein $\Pi\,(\,n', k', t'\,)$-

Partitionierungsproblem vor mit $n' = (\ell - 2)k$, $k' = k$ und

$$t' = \frac{(\ell - 2)((\ell - 2)k + 1)}{2}$$

Für das Problem

$$\Pi\left((\ell - 2)k, k, \frac{(\ell - 2)((\ell - 2)k + 1)}{2} \right) \tag{3.92}$$

kennen wir bereits ein Lösungsverfahren, womit die Container T_{i2} befüllt werden können.

Die Gesamtlösung, die wir erhalten ist korrekt, denn die Summe der beiden Elemente in T_{i1} ergibt $2(\ell - 1)k + 1$, und die Summe der Elemente in den Containern T_{i2} ist jeweils t'. Somit enthält jeder Container T_i Elemente mit der Summe

$$2(\ell - 1)k + 1 + \frac{(\ell - 2)((\ell - 2)k + 1)}{2} = \frac{\ell(\ell k + 1)}{2} = t$$

3.6 Allgemeiner Fall: $n + 1 = \ell k,\ \ell, k \in \mathbb{U},\ k \geq 7$

Es ist also $n = \ell k - 1$ und damit

$$\Delta_n = \frac{(\ell k - 1)\ell k}{2} \tag{3.93}$$

$$t = \frac{(\ell k - 1)\ell}{2} = \frac{\ell^2 k - \ell}{2} \tag{3.94}$$

$$= (\ell k - 1) \cdot \frac{\ell - 3}{2} + \frac{3(\ell k - 1)}{2} \tag{3.95}$$

$$y = \frac{\ell - 3}{2} \tag{3.96}$$

$$z = \frac{3(\ell k - 1)}{2} \tag{3.97}$$

$$x = n - (y + 1)(k - 1) \tag{3.98}$$

$$= (\ell k - 1) - \left(\frac{\ell - 3}{2} + 1 \right)(k - 1) \tag{3.99}$$

$$= \frac{\ell(k + 1) + k - 3}{2} \tag{3.100}$$

$$\mathbf{x} = z - x' = \frac{3(\ell k - 1)}{2} - \frac{\ell(k + 1) + k - 1}{2} \tag{3.101}$$

$$= (2\ell - 1)k - (\ell + 2) \tag{3.102}$$

$$z_{\max} = 2(n - (y + 1)(k - 1)) + 1 \tag{3.103}$$

$$= 2\left(\ell k - 1 - \left(\frac{\ell - 3}{2} + 1 \right)(k - 1) \right) + 1 \tag{3.104}$$

$$= (\ell + 1)(k + 1) - 3 \tag{3.105}$$

$$z \geq z_{\max} \tag{3.106}$$

Die Container $T_i = T_{i1} \cup T_{i2}$, $1 \leq i \leq k$, werden wie folgt befüllt:

$$T_i = \{\ell k - i, (\ell - 2)k + (i - 1)\} \tag{3.107}$$

Die Summe der Elemente in T_{i1} beträgt somit $2(\ell - 1)k - 1$. Es müssen jetzt noch die Elemente $1, 2, \ldots, (\ell - 2)k - 1$ auf die k Container T_{i2} aufgeteilt werden. Es liegt also ein $\Pi\,(\, n', k', t'\,)$-Partitionierungsproblem vor mit $n' = (\ell - 2)k - 1$, $k' = k$ und

$$t' = \frac{((\ell - 2)k - 1)(\ell - 2)}{2}$$

Für das Problem

$$\Pi\left(\,(\ell - 2)k - 1, k, \frac{((\ell - 2)k - 1)(\ell - 2)}{2}\right) \tag{3.108}$$

kennen wir bereits ein Lösungsverfahren, womit die Container T_{i2} befüllt werden können.

Die Gesamtlösung, die wir erhalten ist korrekt, denn die Summe der beiden Elemente in T_{i1} ergibt $2(\ell - 1)k - 1$, und die Summe der Elemente in den Containern T_{i2} ist jeweils t'. Somit enthält jeder Container T_i Elemente mit der Summe

$$2(\ell - 1)k - 1 + \frac{((\ell - 2)k - 1)(\ell - 2)}{2} = \frac{\ell(\ell k + 1)}{2} = t$$

Bemerkung 3.3 *Für Probleminstanzen mit $n = \ell k$ und $n + 1 = \ell k$ haben wir Lösungsverfahren kennen gelernt, die rekursiv auf die Algorithmen für die Fälle $n = (\ell - 2)k$ und $n + 1 = (\ell - 2)k$ zurückgreifen.*

4 Überlegungen zu den restlichen Fällen

Für die Fälle $2k|n$ und $2k|n + 1$, für die $z < z_{\max}$ gilt, werden in Büchel et al. (2017) sogenannte Transformationsalgorithmen vorgestellt und deren wesentliche Parameter analysiert. In dieser Arbeit stellen wir für diese Fälle so genannte Mäanderalgorithmen vor, die ohne diese Parameter auskommen. Des Weiteren werden rekursive Verfahren zur Lösung der Fälle $n = \ell k$ und $n + 1 = \ell k$ für $\ell, k \in \mathbb{U}$, für die im Übrigen $z \geq z_{\max}$ gilt, vorgestellt. Damit ist die Klasse der effizient lösbaren homogenen Probleminstanzen stark vergrößert worden.

Dennoch verbleiben Fälle, die mit den in Büchel et al. (2017) und in diesem Papier vorgestellten Verfahren nicht gelöst werden können. Im Folgenden betrachten wir die Fälle für $1 \leq n \leq 50$.

(1) $n = 20$, $k = 6$, also $\Delta_{20} = 210$ und $t = 35$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: T_1, T_2 und T_3 werden mäandermäßig gefüllt:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{20, 15\} \\ T_2 &= \{19, 16\} \\ T_3 &= \{18, 17\} \end{aligned}$$

Es bleibt das Problem $\Pi(n', k', t')$ mit $n' = 14$, $k' = 3$ und $t' = t = 35$ zu lösen. Hier ist $n' + 1 = 15 = 5 \cdot 3 = 5k'$; dieses Problem kann also mit dem Verfahren aus Kapitel 3.4 gelöst werden. Damit ist das Gesamtproblem $\Pi(20, 6, 35)$ gelöst.

(2) $n = 27$, $k = 6$, also $\Delta_{27} = 378$ und $t = 63$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: Wir befüllen die Container in zwei Schritten: $T_i = T_{i1} \cup T_{i2}$, $1 \leq i \leq 6$. Die Container T_{i1} haben die Größe 43, und die Container T_{i2} haben die Größe 20. Die Container T_{i1} werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_{i1} = \{27 - (i - 1), 16 + (i - 1)\}$$

Die Befüllung der Container T_{i2} entspricht dem Problem $\Pi(n', k', t')$ mit $n' = 15$, $k' = k = 6$ und $t' = 20$. Es ist $n' = 15 = 4^2 - 1$. Hierfür kann das Verfahren für Q-Instanzen aus Büchel et al. (2017) verwendet werden.

(3) $n = 32$, $k = 12$, also $\Delta_{32} = 528$ und $t = 44$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: T_i, $1 \leq i \leq 10$, werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_i = \{32 - (i - 1), 12 + (i - 1)\}$$

Es bleiben die beiden Container T_{11} und T_{12} der Größe 44 zu befüllen. Wir spalten diese beiden jeweils in zwei Container der Größe 22: $T_{11} = T_{11,1} \cup T_{11,2}$ bzw. $T_{12} = T_{12,1} \cup T_{12,2}$.

$T_{11,1}$ kann mit dem Element 22 gefüllt werden. Es bleiben jetzt noch die Elemente $1, \ldots, 11$, mit denen die restlichen drei Container der Größe 22 gefüllt werden müssen. Hierbei handelt es sich um das Problem $\Pi(n', k', t')$ mit $n' = 11$, $k' = 3$ und $t' = 22$. Hierbei ist $2k' | n' + 1$. Dieses Problem kann mit dem Verfahren aus Kapitel 2.2 gelöst werden:

$$\begin{aligned} T_{11,2} &= \{5, 6, 11\} \\ T_{12,1} &= \{1, 4, 7, 10\} \\ T_{12,2} &= \{2, 3, 8, 9\} \end{aligned}$$

Damit ist das Ausgangsproblem gelöst.

(4) $n = 32$, $k = 6$, also $\Delta_{32} = 528$ und $t = 88$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: Es werden sechsmal zwei Container aus (3) zu einem Container zusammengefasst.

(5) $n = 35$, $k = 10$, also $\Delta_{35} = 630$ und $t = 63$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: T_i, $1 \leq i \leq 4$ werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_i = \{35 - (i - 1), 28 + (i - 1)\}$$

Es bleibt das Problem $\Pi(n', k', t')$ mit $n' = 27$, $k' = 6$ und $t' = t = 63$ zu lösen. Dieses ist in (2) gelöst.

(6) $n = 35$, $k = 14$, also $\Delta_{35} = 630$ und $t = 45$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: T_i, $1 \leq i \leq 13$, werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_i = \{35 - (i - 1), 10 + (i - 1)\}$$

T_{13} wird mit den restlichen Elementen, deren Summe 45 ergibt, befüllt: $T_{13} = \{1, \dots, 9\}$. Damit ist das Problem $\Pi(35, 14, 45)$ gelöst.

(7) $n = 39$, $k = 12$, also $\Delta_{39} = 780$ und $t = 65$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: T_i, $1 \leq i \leq 7$ werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_i = \{39 - (i - 1), 26 + (i - 1)\}$$

Es bleibt das Problem $\Pi(n', k', t')$ mit $n' = 25$, $k' = 5$ und $t' = t = 65$ zu lösen. Hier ist $n' = 25 = 5 \cdot 5 = 5k'$; dieses Problem kann also mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.3.2 gelöst werden. Damit ist das Gesamtproblem $\Pi(39, 12, 65)$ gelöst.

(8) $n = 39$, $k = 6$, also $\Delta_{39} = 780$ und $t = 130$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: Es werden sechsmal zwei Container aus (7) zu einem Container zusammengefasst.

(9) $n = 39$, $k = 15$, also $\Delta_{39} = 780$ und $t = 52$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: T_i, $1 \leq i \leq 13$ werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_i = \{39 - (i - 1), 23 + (i - 1)\}$$

Es bleiben die beiden Container T_{14} und T_{15} der Größe 52 zu befüllen. Wir spalten diese beiden jeweils in zwei Container der Größe 26: $T_{14} = T_{14,1} \cup T_{14,2}$ bzw. $T_{15} = T_{15,1} \cup T_{15,2}$.

$T_{14,1}$ kann mit dem Element 26 gefüllt werden. Es bleiben jetzt noch die Elemente $1, \dots, 12$, mit denen die restlichen drei Container der Größe 26 gefüllt werden müssen. Hierbei handelt es sich um das Problem $\Pi(n', k', t')$ mit $n' = 12$, $k' = 3$ und $t' = 26$. Hierbei ist $2k' \mid n'$. Dieses Problem kann mit dem Verfahren aus Kapitel 2.1 gelöst werden:

$$\begin{aligned} T_{14,2} &= \{1, 6, 7, 12\} \\ T_{15,1} &= \{2, 5, 8, 11\} \\ T_{15,2} &= \{3, 4, 9, 10\} \end{aligned}$$

Damit ist das Ausgangsproblem gelöst.

(10) $n = 44$, $k = 18$, also $\Delta_{44} = 990$ und $t = 55$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: T_i, $1 \leq i \leq 17$, werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_i = \{44 - (i - 1), 11 + (i - 1)\}$$

T_{18} wird mit den restlichen Elementen, deren Summe 55 ergibt, befüllt: $T_{15} = \{1, \dots, 10\}$. Damit ist das Problem $\Pi(44, 18, 55)$ gelöst.

(11) $n = 44$, $k = 6$, also $\Delta_{44} = 990$ und $t = 165$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: Es werden sechsmal drei Container aus (10) zu einem Container zusammengefasst.

(12) $n = 44$, $k = 10$, also $\Delta_{44} = 990$ und $t = 99$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: Wir befüllen die Container in zwei Schritten: $T_i = T_{i1} \cup T_{i2}$, $1 \leq i \leq 10$. Die Container T_{i1} haben die Größe 69, und die Container T_{i2} haben die Größe 30. Die Container T_{i1} werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_{i1} = \{44 - (i-1), 25 + (i-1)\}$$

Die Befüllung der Container T_{i2} entspricht dem Problem $\Pi(n', k', t')$ mit $n' = 24$, $k' = k = 10$ und $t' = 30$. Es ist $n' = 24 = 5^2 - 1$. Hierfür kann das Verfahren für Q-Instanzen aus Büchel et al. (2017) verwendet werden.

(13) $n = 48$, $k = 14$, also $\Delta_{48} = 1176$ und $t = 84$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: T_i, $1 \leq i \leq 6$, werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_i = \{48 - (i-1), 36 + (i-1)\}$$

Es bleiben die Container T_i, $7 \leq i \leq 14$ der Größe 84 zu befüllen. Wir spalten diese jeweils in zwei Container der Größe 42: $T_i = T_{i,1} \cup T_{i,2}$, $7 \leq i \leq 14$.

$T_{7,1}$ kann mit dem Element 42 gefüllt werden. Es bleiben jetzt noch die Elemente $1, \ldots, 35$, mit denen die restlichen fünfzehn Container der Größe 42 gefüllt werden müssen. Hierbei handelt es sich um das Problem $\Pi(n', k', t')$ mit $n' = 35$, $k' = 15$ und $t' = 42$. Es ist $n' = 35 = 6^2 - 1$. Hierfür kann das Verfahren für Q-Instanzen in Büchel et al. (2017) verwendet werden.

Damit ist das Ausgangsproblem gelöst.

(14) $n = 50$, $k = 15$, also $\Delta_{50} = 1275$ und $t = 85$:

Man erreicht eine Lösung wie folgt: T_i, $1 \leq i \leq 8$ werden mäandermäßig gefüllt:

$$T_i = \{50 - (i-1), 35 + (i-1)\}$$

Die Befüllung der Container T_i, $9 \leq i \leq 15$ entspricht dem Problem $\Pi(n', k', t')$ mit $n' = 34$, $k' = 7$ und $t' = t = 85$. Hier ist $n' + 1 = 35 = 5 \cdot 7 = 5k'$; dieses Problem kann also mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.4.2 gelöst werden. Damit ist das Gesamtproblem $\Pi(50, 15, 85)$ gelöst.

Wir können also mithilfe unserer abgesicherten Verfahren alle Fälle $n \leq 50$ lösen. Dazu müssen die Fälle, die nicht direkt mit diesen Verfahren gelöst werden, so aufbereitet werden, dass für Teilprobleme die bekannten Verfahren angewendet werden können. Für die Aufbereitung sind allerdings Systematiken erforderlich, die gegebenenfalls zu einem „universellen“ Lösungsverfahren führen könnten.

Literatur

Ando, K., Gervacio, S., Kano, M.: Disjoint Subsets of Integers having a constant Sum, *Discrete Mathematics 82,* 1990, 7 - 11

Büchel, A., Gilleßen, U., Witt, K.-U.: Betrachtungen zum Cutting sticks-Problem, Technical Report 01-2016, Fachbereich Informatik, Hochschule Bonn-Rhein-Sieg 2016

Büchel, A., Gilleßen, U., Witt, K.-U.: Ansätze für effiziente Lösungen von Cutting sticks-Problemen und deren Charakterisierung, Technical Report in Vorbereitung, Fachbereich Informatik, Hochschule Bonn-Rhein-Sieg 2017

Chen, F.-L., Fu, H.-L., Wang, Y., Zhou, J.: Partition of a Set of Integers into Subsets with prescribed Sums, *Taiwanese Journal of Mathematics 9,* 2005, 629 - 638

Fu, H.-L., Hu, W.-H.: A Special Partition of the Set I_n, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications 6,* 1992, 57 - 60

Jagadish, M.: An Approximation Algorithm for the Cutting-Sticks Problem, 2015, 170 - 174

Straight, H. J., Schillo, P.: On the Problem of Partitioning $\{1, \ldots, n\}$ into Subsets having equal Sums, *Proceedings of the American Mathematical Society 74(2),* 1979, 229 - 231