



**Pedro Renato  
Tavares Pinho**

**Resolução das equações de Maxwell por análise  
multiresolução usando wavelets interpolatórias**



**Pedro Renato  
Tavares Pinho**

**Resolução das equações de Maxwell por análise  
multiresolução usando wavelets interpolatórias**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica, realizada sob a orientação científica do Dr. José Fernando da Rocha Pereira, e co-orientação do Dr. Paulo Jorge Ferreira, Professor Catedrático, ambos do Departamento de Electrónica e Telecomunicações da Universidade de Aveiro

## **O júri**

Presidente

**Prof. Doutor António Ferreira Pereira de Melo**  
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

**Prof. Doutor Paulo Jorge dos Santos Gonçalves Ferreira**  
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

**Prof. Doutor José Fernando da Rocha Pereira**  
Professor Associado da Universidade de Aveiro

**Prof. Doutora Sônia Maria Gomes**  
Professora Associada do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Campinas

**Prof. Doutor António Luís Campos da Silva Topa**  
Professor Auxiliar do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa

**Prof. Doutor Armando Carlos Domingues da Rocha**  
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

## **Agradecimentos**

Cabe-me aqui expressar a minha profunda e sincera Gratidão a todos aqueles que, de algum modo, colaboraram comigo ao longo deste trabalho.

Ao Professor José Fernando da Rocha Pereira, meu Orientador Científico, pela oportunidade que me deu, pela disponibilidade apresentada, pelas condições que me proporcionou na realização deste trabalho e pela motivação constante ao longo de todo o tempo principalmente quando estive mais desanimado. Agradeço, também, por todos os conhecimentos que me foram transmitidos e pelo acompanhamento e revisão atenta que concedeu a esta tese.

Ao Professor Paulo Jorge dos Santos Gonçalves Ferreira, meu co-orientador científico pela sua dedicação e persistência principalmente durante a primeira fase deste trabalho quando pensei que o uso das wavelets estava comprometido. Agradeço, também, pela transmissão de conhecimentos, e pelo acompanhamento e revisão que concedeu a esta tese.

À Professora Sônia Maria Gomes pela forma como me recebeu em Campinas, pelo acompanhamento, disponibilidade e atenção que me deu durante a minha estadia na Unicamp. Pela sua superior transmissão de conhecimentos que permitiu concluir esta tese numa altura em que estava bastante desanimado.

À Daniela, minha namorada e melhor amiga, pelo estímulo constante para ser cada vez melhor.

Aos meus Pais, à minha Avó e duma forma muito especial ao meu Avô.

Aos Meus primos de São Paulo: Victor, Vera, e Vânia.

À Universidade de Aveiro pelo acolhimento como me enquadrou.

À Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT), por me ter concedido uma bolsa de Doutoramento no âmbito do programa PRAXIS XXI.

A todos os que de uma forma directa ou indirecta me ajudaram a terminar esta tese, o meu profundo reconhecimento e agradecimento.

## Resumo

Um dos métodos numéricos mais usados actualmente na análise e simulação de estruturas electromagnéticas é o FDTD, que está obviamente relacionado com uma representação em espaço físico dos campos. As vantagens desta representação incluem o modo simples como se pode aproximar as derivadas, o produto, a soma e a forma elegante de se aplicarem as condições fronteira. Contudo, e dependendo obviamente do problema, normalmente os vectores resultam densos, determinados pela menor dimensão a discretizar originando grelhas uniformes, o que porventura pode levar a uma sobre amostragem espacial e a um aumento do tempo de computação. Por esta razão, há interesse em métodos numéricos adaptativos que usem uma grelha mais refinada apenas em certas regiões do espaço, e menos refinadas noutras. Além disso, com a evolução temporal, é importante que seja possível redefinir as grelhas de uma forma dinâmica e automática, que permitam de alguma forma prever e acompanhar a evolução da solução com o tempo.

Uma maneira de se conseguir grelhas adaptativas esparsas é usar representações baseadas em wavelets de primeira geração. Contudo, as wavelets de segunda geração apresentam outras vantagens tornando a representação mais próxima de uma representação em espaço físico. O método adoptado neste trabalho para a obtenção da grelha adaptativa é baseado nas técnicas de análise wavelet interpolatória. Usando este tipo de análise é possível a construção de um esquema de interpolação adaptativa que permite fazer a ligação entre os ambientes em que as grelhas são uniformes e aqueles em que são esparsas. Usando este método, a estrutura da grelha apresenta uma composição heterogénea: esparsa em regiões de suavidade e densa em regiões de variação mais acentuada. As equações de Maxwell são discretizadas usando wavelets interpolatórias em duas tipos de malhas: entrelaçadas e não entrelaçadas. É feita a comparação do desempenho de cada uma das malhas analisando o comportamento da dispersão e estabilidade e são retiradas as principais conclusões. Para se provar a viabilidade do método são apresentados diversos exemplos de resultados a 1D. Para um dos exemplos é também feita a comparação dos resultados obtidos por este método com os obtidos pelo FDTD.

**Palavras chave:** FDTD, MRTD, wavelets, análise multiresolução, wavelets interpolatórias e malha adaptativa.

## Abstract

FDTD remains one of the most often used numerical methods for the simulation and analysis of electromagnetic structures. It is based on a sampled (physical) representation of the electromagnetic fields, leading to a number of advantages that include the ease with which sums, products and derivatives can be implemented, and the simple and elegant way of handling boundary conditions.

However, FDTD leads in most problems to dense (non-sparse) vectors and matrices, determined by uniform meshes that may adequately represent localized details, but that usually oversample elsewhere in space, increasing the computation time.

For this reason there is a growing demand for adaptive numerical methods based on adaptive meshes, that is, meshes that are finer in regions containing transients, and coarser elsewhere. Since fields evolve with time, spatial adaptivity is not enough. Time varying meshes, able to track the evolution of the solution in time as well as in space, are also necessary for the efficient solution of electromagnetic problems.

One way of obtaining these sparse adaptive meshes is to drop sampled (physical space) representations, and adopt wavelet based representations. First generation wavelets lead to the required adaptive representations, but unfortunately do not seem as attractive when dealing with general boundary conditions, or when computing nonlinear functions such as the product.

The methods adopted in this work emphasize second generation interpolating wavelets. Because these wavelets interpolate, it is possible to maintain the physical space representation, now based on nonuniformly sampled fields, and to handle boundary conditions in a simple way. Furthermore, the computation of products and sums is not difficult, and approximations to the derivatives can be obtained based on finite differences.

We discretized Maxwell equations using two meshes, corresponding to the electric and magnetic fields. The meshes can be either staggered or non-staggered, and adapt in space and in time to the nature of the fields. A comparison of the performance of the staggered and non-staggered meshes is presented, and conclusions are obtained as far as the stability and dispersion are concerned. In order to show the feasibility of the methods, 1D examples and comparisons with FDTD are described.

**Key Words:** FDTD, MRTD, wavelets, multiresolution analysis, interpolating wavelets and adaptive mesh.

## Índice Geral

<b>INTRODUÇÃO E ENQUADRAMENTO.....</b>	<b>1</b>
1.1 INTRODUÇÃO.....	1
1.2 MOTIVAÇÃO.....	6
1.3 ESTRUTURA DA TESE.....	7
1.4 NOTAÇÃO UTILIZADA.....	8
1.5 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS DESTA TESE.....	9
1.6 REFERÊNCIAS.....	9
<b>ESTADO DA ARTE EM MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL .....</b>	<b>11</b>
2.1 MÉTODOS COMPUTACIONAIS.....	11
2.2 O FDTD.....	13
2.3 O ALGORITMO DE KANE S. YEE .....	15
2.4 TAMANHO DAS CÉLULAS E ESTABILIDADE .....	18
2.5 CONDIÇÕES FRONTEIRA ABSORVENTES .....	19
2.5.1 <i>ABC's de Berenger – PML (Perfectly Matched Layer)</i> .....	20
2.6 O ALGORITMO .....	21
2.7 VANTAGENS E INCONVENIENTES DO FDTD CLÁSSICO .....	23
2.8 EVOLUÇÃO E MELHORAMENTOS DO ALGORITMO .....	25
2.8.1 <i>Extensões celulares</i> .....	25
2.8.2 <i>Técnicas no domínio do processamento de sinal</i> .....	26
2.8.2.1 O PSTD.....	26
2.8.2.2 Transformada de Z.....	26
2.8.3 <i>Esquemas explícitos versus implícitos</i> .....	27
2.8.3.1 Esquemas de ordem superior.....	28
2.8.3.2 FDTD - ADI.....	28
2.8.4 <i>Técnicas híbridas</i> .....	29
2.8.5 <i>Computação paralela</i> .....	29
2.8.6 <i>A análise multiresolução</i> .....	30
2.8.6.1 O MRTD .....	30
2.9 SÍNTESE.....	32
2.10 REFERÊNCIAS .....	32
<b>ANÁLISE MULTIRECISOLUÇÃO E WAVELETS .....</b>	<b>37</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	37
3.2 FERRAMENTAS PARA A ANÁLISE DE UM SINAL .....	39
3.2.1 <i>A análise de Fourier</i> .....	40
3.2.2 <i>Transformada de Fourier Localizada</i> .....	41
3.2.3 <i>Transformada de wavelets</i> .....	42
3.3 A ANÁLISE MULTIRECISOLUÇÃO.....	44
3.3.1 <i>Função de escala</i> .....	46
3.3.2 <i>Função wavelet</i> .....	48
3.3.3 <i>Propriedades das funções de escala e de wavelet</i> .....	50
3.3.4 <i>Wavelet de Haar</i> .....	53
3.3.5 <i>Família de wavelets de Daubechies</i> .....	54
3.3.6 <i>Outras famílias de wavelets</i> .....	57
3.4 TRANSFORMADA DISCRETA DE WAVELETS .....	59
3.5 EQUAÇÕES DE MAXWELL E ANÁLISE MULTIRECISOLUÇÃO.....	65
3.5.1 <i>O MRTD</i> .....	66
3.5.1.1 S-MRTD.....	66
3.5.1.2 W-MRTD.....	68
3.5.1.3 Diferentes funções base, diferentes equações.....	70

3.5.1.4	Algumas conclusões sobre o MRTD .....	71
3.5.2	Multiresolução baseada na DWT.....	73
3.5.3	Operador derivada com base em wavelets.....	74
3.5.4	Exemplos numéricos de aplicação da análise multiresolução baseado na DWT. ....	80
3.5.5	Principais problemas desta técnica .....	82
3.6	WAVELETS NO INTERVALO .....	84
3.7	SÍNTESE .....	86
3.8	REFERÊNCIAS.....	86
<b>ANÁLISE MULTIRESOLUÇÃO INTERPOLATÓRIA.....</b>		<b>89</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	89
4.2	AS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DE UM SINAL .....	91
4.2.1	Análise multiresolução ortogonal .....	92
4.2.2	Análise multiresolução biortogonal.....	93
4.2.3	Representações em multiresolução .....	96
4.3	ANÁLISE MULTIRESOLUÇÃO INTERPOLATÓRIA .....	97
4.3.1	Wavelets interpolatórias – conceito.....	98
4.3.2	Wavelets interpolatórias – função de interpolação.....	98
4.3.3	Wavelets interpolatórias – aspecto funcional .....	100
4.3.4	Transformada de wavelet interpolatória.....	102
4.3.5	Condições fronteira para wavelets interpolatórias.....	104
4.3.6	Características das wavelets interpolatórias .....	105
4.4	DISCRETIZAÇÃO E OPERAÇÃO DE FUNÇÕES EM MALHAS ADAPTÁVEIS .....	106
4.4.1	As malhas .....	106
4.4.2	Truncatura: redução de malhas.....	107
4.4.3	Extensão: refinamento de malhas .....	108
4.4.4	Operações algébricas: soma e produto.....	109
4.4.5	Diferenciação.....	110
4.4.6	Problemas de evolução temporal.....	112
4.5	EQUAÇÕES DE MAXWELL .....	113
4.5.1	Modelo em malhas entrelaçadas.....	114
4.5.2	Modelo em malhas não entrelaçadas.....	115
4.5.3	Relações entre os coeficientes $\alpha$ e $\beta$ .....	116
4.6	ANÁLISE DE DISPERSÃO .....	118
4.6.1	Dispersão do modelo analítico.....	118
4.6.2	Dispersão do modelo numérico em malhas entrelaçadas .....	118
4.6.3	Dispersão do modelo numérico em malhas não entrelaçadas .....	121
4.7	ANÁLISE DE ESTABILIDADE DOS MODELOS NUMÉRICOS .....	123
4.7.1	Estabilidade do modelo numérico em malhas entrelaçadas .....	123
4.7.2	Estabilidade do modelo numérico em malhas não entrelaçadas .....	124
4.8	QUE MALHA USAR? .....	126
4.8.1	Fronteiras em malhas entrelaçadas.....	126
4.9	EXEMPLOS DIVERSOS DE APLICAÇÃO DO ALGORITMO.....	128
4.9.1	Propagação num meio homogéneo.....	129
4.9.2	Propagação num meio homogéneo com uma descontinuidade.....	133
4.9.3	Propagação num meio homogéneo com duas descontinuidade.....	136
4.9.4	Propagação na interface entre dois meios diferentes .....	139
4.9.5	Propagação num meio terminado por um condutor eléctrico perfeito num dos extremos.....	141
4.10	SÍNTESE DO CAPÍTULO .....	147
4.11	REFERÊNCIAS.....	147
<b>CONCLUSÕES E TRABALHO FUTURO.....</b>		<b>149</b>
5.1	CONCLUSÕES .....	149
5.2	TRABALHO FUTURO .....	152

## Índice de figuras

FIGURA 2-1 DIAGRAMA ELUCIDATIVO DOS MÉTODOS COMPUTACIONAIS .....	12
FIGURA 2-2 DIAGRAMA EXPLICATIVO DO CÁLCULO DO VALOR DO CAMPO ELÉCTRICO E MAGNÉTICO .....	14
FIGURA 2-3 LOCALIZAÇÃO DAS COMPONENTES DO CAMPO NUMA CÉLULA DE YEE A TRÊS DIMENSÕES .....	18
FIGURA 2-4 CONDIÇÕES FRONTEIRA .....	19
FIGURA 2-5 CONDIÇÕES FRONTEIRA DO TIPO PML .....	21
FIGURA 2-6 FLUXOGRAMA DO FDTD .....	23
FIGURA 3-1 DECOMPOSIÇÃO DE UM SINAL EM DIFERENTES FREQUÊNCIAS .....	40
FIGURA 3-2 TRANSFORMADA DE FOURIER .....	40
FIGURA 3-3 TRANSFORMADA DE FOURIER LOCALIZADA .....	41
FIGURA 3-4 TRANSFORMADA DE WAVELET.....	42
FIGURA 3-5 DECOMPOSIÇÃO DE UM SINAL COM WAVELETS .....	43
FIGURA 3-6 SINUSÓIDE VERSUS WAVELET .....	43
FIGURA 3-7 PROCESSO DA ANÁLISE MULTIRESOLUÇÃO .....	45
FIGURA 3-8 O PROCESSO DA ANÁLISE MULTIRESOLUÇÃO .....	48
FIGURA 3-9 DECOMPOSIÇÃO DE UMA FUNÇÃO POR ANÁLISE MULTIRESOLUÇÃO.....	52
FIGURA 3-10 WAVELETS DE HAAR .....	54
FIGURA 3-11 WAVELETS DE DAUBECHIES .....	55
FIGURA 3-12 WAVELETS DE MEYER .....	57
FIGURA 3-13 COIFLETS E SYMLETS.....	58
FIGURA 3-14 TRANSFORMADA DISCRETA DE WAVELET.....	61
FIGURA 3-15 TRANSFORMADA DISCRETA DE WAVELET.....	62
FIGURA 3-16 APLICAÇÃO DA DWT.....	63
FIGURA 3-17 DECOMPOSIÇÃO DE UMA FUNÇÃO.....	63
FIGURA 3-18 DECOMPOSIÇÃO MULTINÍVEL DE UMA FUNÇÃO.....	64
FIGURA 3-19 MATRIZ DERIVATIVA .....	78
FIGURA 3-20 APLICAÇÃO DA MATRIZ DERIVATIVA AOS COEFICIENTES DA DWT.....	79
FIGURA 3-21 APLICAÇÃO DA MATRIZ DERIVATIVA.....	80
FIGURA 3-22 APROXIMAÇÃO DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO SEGUNDO DIFERENTES NÍVEIS DE RESOLUÇÃO..	80
FIGURA 3-23 EVOLUÇÃO TEMPORAL DO ALGORITMO.....	81
FIGURA 3-24 EVOLUÇÃO TEMPORAL DO ALGORITMO.....	82
FIGURA 4-1 WAVELETS BIORTOGONAIS (BIOR13).....	95
FIGURA 4-2 WAVELETS BIORTOGONAIS .....	96
FIGURA 4-3 CONCEITO DE INTERPOLAÇÃO .....	99
FIGURA 4-4 INTERPOLAÇÃO LINEAR E INTERPOLAÇÃO CÚBICA .....	100
FIGURA 4-5 DETALHE .....	101
FIGURA 4-6 REPRESENTAÇÃO ESPARSA DE UMA FUNÇÃO .....	103

FIGURA 4-7 CONDIÇÕES FRONTEIRA PARA A INTERPOLAÇÃO CÚBICA.....	104
FIGURA 4-8 CONDIÇÕES FRONTEIRA PARA A INTERPOLAÇÃO CÚBICA (SIMETRIA) .....	105
FIGURA 4-9 TRUNCAMENTO DE UMA MALHA .....	107
FIGURA 4-10 REFINAMENTO DE UMA MALHA .....	108
FIGURA 4-11 REPRESENTAÇÃO ESPARSA DE UMA FUNÇÃO E DA RESPECTIVA DERIVADA.....	109
FIGURA 4-12 DIFERENCIAÇÃO EM MALHAS ADAPTATIVAS .....	111
FIGURA 4-13 CÁLCULO DA DERIVADA EM PONTOS PRÓXIMOS DA FRONTEIRA .....	111
FIGURA 4-14 DIFERENCIAÇÃO EM MALHAS ADAPTATIVAS NA FRONTEIRA .....	111
FIGURA 4-15 RELAÇÃO DE DISPERSÃO EM MALHAS ENTRELAÇADAS.....	120
FIGURA 4-16 RELAÇÃO DE DISPERSÃO EM MALHAS NÃO ENTRELAÇADAS .....	122
FIGURA 4-17 COMPARAÇÃO ENTRE OS DOIS MODELOS .....	123
FIGURA 4-18 ESTABILIDADE EM MALHAS ENTRELAÇADAS .....	124
FIGURA 4-19 ESTABILIDADE EM MALHAS NÃO ENTRELAÇADAS .....	125
FIGURA 4-20 INTERPOLAÇÃO NA FRONTEIRA DA COMPONENTE DO CAMPO ELÉCTRICO. ....	127
FIGURA 4-21 INTERPOLAÇÃO NA FRONTEIRA DA COMPONENTE DO CAMPO MAGNÉTICO. ....	128
FIGURA 4-22 PROPAGAÇÃO NUM MEIO HOMOGÉNEO .....	130
FIGURA 4-23 EVOLUÇÃO TEMPORAL DAS COMPONENTES DO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO .....	131
FIGURA 4-24 PERCENTAGEM DE PONTOS SIGNIFICATIVOS .....	132
FIGURA 4-25 EVOLUÇÃO DO ERRO COM O TEMPO .....	132
FIGURA 4-26 COMPARAÇÃO DO DESEMPENHO DO MÉTODO ADAPTATIVO COM O MÉTODO STANDARD .....	133
FIGURA 4-27 PROPAGAÇÃO NUM MEIO HOMOGÉNEO COM UMA DESCONTINUIDADE.....	134
FIGURA 4-28 EVOLUÇÃO TEMPORAL DO CAMPO ELÉCTRICO NA PRESENÇA DE UMA DESCONTINUIDADE .....	135
FIGURA 4-29 PERCENTAGEM DE PONTOS SIGNIFICATIVOS .....	136
FIGURA 4-30 PROPAGAÇÃO NUM MEIO HOMOGÉNEO COM DUAS DESCONTINUIDADES.....	136
FIGURA 4-31 EVOLUÇÃO TEMPORAL DO CAMPO ELÉCTRICO NA PRESENÇA DE DUAS DESCONTINUIDADE.....	138
FIGURA 4-32 PERCENTAGEM DE PONTOS SIGNIFICATIVOS .....	138
FIGURA 4-33 PROPAGAÇÃO NA INTERFACE ENTRE DOIS MEIOS.....	139
FIGURA 4-34 PROPAGAÇÃO NA INTERFACE ENTRE DOIS MEIOS.....	140
FIGURA 4-35 PERCENTAGEM DE PONTOS SIGNIFICATIVOS .....	141
FIGURA 4-36 PROPAGAÇÃO NUM MEIO TERMINADO NUM DOS EXTREMOS POR UM PEC .....	141
FIGURA 4-37 PROPAGAÇÃO NUM MEIO TERMINADO COM UM PEC NUM DOS EXTREMOS .....	143
FIGURA 4-38 PERCENTAGEM DE PONTOS SIGNIFICATIVOS. ....	143
FIGURA 4-39 COMPARAÇÃO ENTRE O FDTD E USANDO WAVELETS INTERPOLATÓRIAS.....	144
FIGURA 4-40 DIFERENÇA ENTRE OS DOIS MÉTODOS.....	145
FIGURA 4-41 COMPARAÇÃO ENTRE OS DOIS MÉTODOS .....	146
FIGURA 4-42 PERCENTAGEM DE PONTOS SIGNIFICATIVOS .....	146

## *Índice de tabelas*

TABELA 3-1 COEFICIENTES DOS FILTROS DAS WAVELETS DE DAUBECHIES .....	56
TABELA 3-2 COEFICIENTES $d_m$ .....	79
TABELA 4-1 COEFICIENTES DE INTERPOLAÇÃO .....	104
TABELA 4-2 COEFICIENTES DA DERIVADA .....	112
TABELA 4-3 COEFICIENTES DE INTERPOLAÇÃO DO ESQUEMA DE REFINAMENTO .....	116
TABELA 4-4 COEFICIENTES $\beta(k)$ .....	117
TABELA 4-5 COEFICIENTES $\alpha(k)$ .....	117
TABELA 4-6 ESTABILIDADE EM MALHAS ENTRELAÇADAS .....	124
TABELA 4-7 ESTABILIDADE EM MALHAS NÃO ENTRELAÇADAS .....	125



### ***Lista de Acrónimos***

ABC	<i>Absorbing Boundary Conditions</i>
CPU	<i>Central Processing Unit</i>
CQF	<i>Filters Quadrature Conjugate</i>
CWT	<i>Continuous Wavelet Transform</i>
DWT	<i>Discrete Wavelet Transform</i>
FDTD	<i>Finite Difference Time Domain</i>
FDTD-ADI	<i>Finite Difference Time Domain – Alternating Direction Implicit</i>
FEM	<i>Finite-Element Method</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
GO	<i>Geometrical Optics</i>
GTD	<i>Geometrical Theory of Diffraction</i>
IDWT	<i>Inverse Discrete Wavelet Transform</i>
MIMD	<i>Multiple Instruction Multiple Data</i>
MoM	<i>Method of Moments</i>
MRTD	<i>Multiresolution Time Domain</i>
PEC	<i>Perfect Electric Conductor</i>
PDE	<i>Partial Differential Equation</i>
PO	<i>Physical Optics</i>
PTD	<i>Physical theory of Diffraction</i>
PML	<i>Perfectly Matched Layer</i>
PSTD	<i>Pseudospectral Time Domain</i>
SIMD	<i>Single Instruction Multiple Data</i>
SPMD	<i>Single Program Multiple Data</i>
STFT	<i>Short Time Fourier Transform</i>
STIE	<i>Space-Time Integral Equation</i>
S-MRTD	<i>Scaling functions Multiresolution Time Domain</i>
TEM	<i>Transverse Electromagnetic</i>
TLM	<i>Transmission Line Matrix</i>
W-MRTD	<i>Wavelet functions Multiresolution Time Domain</i>
xx, yy, zz	Eixos coordenados
1D, 2D, 3D	Uma, duas ou três dimensões



# Capítulo 1

## Introdução e enquadramento

### 1.1 Introdução

O grande desenvolvimento que as novas tecnologias têm vindo a sofrer ao longo dos últimos tempos fez com que o electromagnetismo se afirmasse cada vez mais como uma área presente no nosso dia a dia e nos permitisse compreender, explicar e melhorar o desempenho de muitos dos nossos dispositivos quotidianos. Quando em 1870 James C. Maxwell, unificou a teoria da electricidade e do magnetismo obteve quatro equações representativas que hoje se designam por equações de Maxwell, que explicam e regem todos os fenómenos electromagnéticos. Desde então e tendo por base esta teoria surgiram diversas aplicações tecnológicas desde a difusão de voz e imagem usando ondas electromagnéticas, o radar, a geração de calor por microondas, a detecção remota e mais recentemente as comunicações móveis.

Assim para caracterizar uma estrutura ou dispositivo electromagnético é necessário proceder à resolução das equações de Maxwell, juntamente com as condições fronteira do problema particular. Existem algumas situações concretas em que é possível resolver

estas equações de forma analítica, contudo, na maior parte dos casos que nos interessam é necessário resolver estas equações por métodos numéricos.

A computação electromagnética tornou-se nos últimos tempos uma ferramenta extremamente poderosa e uma técnica importante na resolução dos mais diversos problemas electromagnéticos. A este crescimento não está alheio o grande desenvolvimento que a indústria informática teve nos últimos tempos nomeadamente na capacidade de armazenamento e velocidade de processamento dos dados, o que permite a resolução de problemas cada vez mais complexos.

A análise numérica de sistemas governados por equações quer na forma diferencial quer na forma integral tornou-se nos últimos anos um assunto com bastante interesse em ciência e engenharia. Existe uma variedade de métodos e algoritmos para a resolução de uma equação particular, uns no domínio da frequência e outros no domínio do tempo.

Foram bastantes os métodos numéricos que surgiram para a resolução de problemas electromagnéticos uns com maior aceitação que outros, mas sem dúvida que o FDTD (*Finite Difference Time Domain*) foi daqueles que mais atenção e interesse despertou embora, devido a limitações computacionais, se tivesse que esperar cerca de uma década desde a sua publicação original por Kane S. Yee para que o assunto voltasse a ser discutido.

Este método baseia-se na discretização, tanto espacial como temporal, dos campos electromagnéticos e a aproximação das derivadas parciais que aparecem nas equações rotacionais de Maxwell por coeficientes de diferenças finitas. Desta forma, obtém-se um esquema explícito de equações algébricas que permite ir calculando, em instantes sucessivos, o valor do campo electromagnético em cada ponto do espaço a partir do valor do campo no mesmo ponto e em pontos circundantes em instantes anteriores. O FDTD permite a definição de uma excitação na estrutura e simular a evolução temporal do campo electromagnético na região de interesse. Além disso, uma vez que se trata de um método no domínio do tempo, permite obter numa única simulação a resposta em frequência da estrutura ou dispositivo numa ampla largura de banda (unicamente limitada pela discretização temporal) mediante uma análise em frequência dos campos calculados no domínio do tempo.

O método apresenta muitas outras vantagens nomeadamente:

- ❖ Possibilidade de se analisar estruturas constituídas por diferentes tipos de materiais, sejam homogéneos ou heterogéneos, lineares ou não lineares, dispersivos ou não dispersivos e isotropicos ou anisotropicos;
- ❖ Poder ser formulado em qualquer sistema de coordenadas: cartesiano, cilíndrico, e esférico;
- ❖ Visualizar a evolução temporal de qualquer componente do campo electromagnético.

Apesar de todas as suas vantagens o FDTD também apresenta desvantagens. Uma das principais limitações deste método está obviamente relacionada com a capacidade de memória disponível e pelo tempo de computação exigido, o qual está relacionado com a menor dimensão presente na estrutura a simular.

Ao mesmo tempo que o FDTD atravessava o seu período áureo, com constantes evoluções e melhoramentos, no campo da matemática a análise usando wavelets tinha também um crescimento interessante. Ainda que numa fase inicial a principal aplicação das wavelets fosse no campo do processamento de sinal e compressão de imagem, mais recentemente têm sido aplicadas na resolução de equações diferenciais devido à expansão ortogonal que originam. Estava dado o primeiro passo para a fusão dos dois campos de investigação.

Foi mesmo demonstrado em [1-1] que a análise usando wavelets podia ser aplicada a problemas de electromagnetismo no domínio da frequência via método dos momentos o que permitia um melhoramento da eficiência computacional devido à natureza ortogonal e à multiresolução que era proporcionada pela natureza das wavelets.

Imediatamente a seguir, surgiram técnicas no domínio do tempo (MRTD- *Multiresolution Time Domain*) com o objectivo de também melhorar o desempenho computacional. Estas técnicas tiveram desde o seu aparecimento uma crescente aceitação e aplicação na área da computação electromagnética muito interessante dadas as suas vantagens face ao FDTD convencional. Surgiram assim as técnicas no domínio do tempo associadas às wavelets de Battle-Lemarié [1-2];[1-3];[1-4], às wavelets de Daubechies [1-5];[1-6], e às wavelets de Haar [1-7];[1-8]. Estas técnicas foram aplicadas na modelação de cavidades

ressonantes a 3D [1-3];[1-9], na distribuição dos campos electromagnéticos em linhas *microstrip* a 2D [1-7];[1-10], e a cavidades 3D com diferentes dieléctricos [1-11], como forma de validação da técnica.

O FDTD está relacionado com a representação em espaço físico dos campos. Quando se usa este tipo de representação as principais vantagens que se podem enumerar estão relacionadas com o modo simples como se podem aproximar as derivadas, o produto, a soma e a forma elegante de se aplicar as condições fronteira. Se há vantagens importantes no que se refere principalmente ao cálculo, desvantagens também existem. Dependendo obviamente do problema, normalmente os vectores são densos, determinados normalmente pela menor dimensão a discretizar originando grelhas uniformes, pesadas e que porventura podem levar a uma sobreamostragem em certos pontos do espaço. O principal inconveniente desta representação prende-se portanto no possível aumento do tempo de computação para simular tal grelha.

Por esta razão, há um interesse por métodos numéricos adaptativos que usem uma grelha mais refinada apenas em certas regiões do espaço, e menos refinadas noutras regiões em que a variação seja mais suave. Além disso, com a evolução temporal, é importante que seja possível redefinir as grelhas de uma forma dinâmica e automática, que permitam de alguma forma prever a evolução da solução com o tempo. Ou seja o objectivo é conseguir-se obter uma malha adaptativa em função do tempo que permita uma economia de recursos e a simulação num tempo relativamente curto ou aceitável.

Quando se recorre à representação de uma função usando funções de escala, que na literatura se designa por S-MRTD (*Scaling functions Multiresolution Time Domain*) [1-3], pode-se recorrer ao método de Galerkin para a resolução de uma dada equação diferencial. No entanto este método requer que o operador derivada seja expresso também em termos de funções de escala. Usando esta representação não se consegue todavia uma representação esparsa e adaptativa que é a principal motivação para o uso das wavelets. Contudo, permite melhorar as características de dispersão quando comparada com o FDTD convencional tornando possível o uso de menos células por comprimento de onda.

A representação de uma função usando funções de escala e wavelets, designa-se na literatura por W-MRTD (*Wavelet functions Multiresolution Time Domain*) [1-3]. Este tipo de representação permite, usando a técnica de *thresholding*, extrair os valores mais significativos e reduzir a dimensão da representação, isto é, são eliminados os coeficientes cujo valor é inferior a um valor pré definido. Isto faz com que as exigências em termos de memória usada seja menor e conseqüentemente que o número de operações seja também menor. No entanto, este tipo de representação tem como principais problemas a construção da matriz de diferenciação principalmente quando se recorre a wavelets no intervalo. Outro problema é o cálculo de um produto, de um quadrado ou de outra função não linear que se apresenta bastante complexo e aumenta os tempos de computação de uma forma significativa.

Além disso quando se usam wavelets, tem que se ter alguma atenção no que se refere à aplicação das condições fronteira. Assim, quando se usam wavelets do tipo Battle-Lemarié ou de Daubechies, estas têm um suporte maior que a unidade, no caso das primeiras mesmo infinito, ou seja, a largura das funções é maior que um, conseqüentemente as condições fronteira não são normalmente satisfeitas por cada função de base individual, mas somente pela sobreposição de várias funções base. Conseqüentemente torna-se muito complicado a aplicação de condições fronteira quando se usam wavelets. O que foi referido em relação a wavelet de Battle-Lemarié também é válido para as wavelets de Daubechies que, embora tenham um suporte finito este também é superior à unidade. A excepção à regra é a wavelet de Daubechies de menor grau, que também é conhecida por wavelet de Haar.

Certamente é possível, tal como foi demonstrado em [1-3], criar condições fronteira do tipo parede eléctrica perfeita ou parede magnética perfeita e depois empregar o método das imagens. Contudo, este tipo de condições fronteira para além de não serem muito realistas exigem uma região de computação maior o que implica um aumento em termos de requisitos de memória.

Uma solução possível será usar a wavelet de Haar [1-12], uma vez que esta origina um algoritmo simples devido ao seu suporte compacto e unitário além de apresentar as principais propriedades de um sistema de wavelets. No entanto, a representação de uma função usando este tipo de wavelet pode convergir lentamente e originar um número elevado de coeficientes.

Além destes factores convém também referir que a condição de estabilidade para o MRTD é mais restritiva quando comparada com o FDTD. No entanto, consegue-se simular estruturas num tempo inferior quando comparado com o FDTD uma vez que a relação de dispersão é superior permitindo uma discretização com um número de células por comprimento de onda inferior ao usado no FDTD. Por exemplo os autores de [1-3] afirmam que se podem usar valores próximos de duas células por comprimento de onda (limite de Nyquist) ao contrário do FDTD convencional onde se aconselha a usar dez a vinte células por comprimento de onda para a mesma precisão. Assim se justifica que, apesar da condição de estabilidade, ser mais restritiva se consigam tempos de computação melhores que os proporcionados pelo FDTD convencional.

## 1.2 Motivação

O método adoptado neste trabalho para a obtenção duma grelha adaptativa é baseado nas técnicas de análise wavelet interpolatória usando wavelets de segunda geração (wavelets biortogonais e interpolatórias). Quando se usam este tipo de wavelets a representação em espaço físico e a representação usando funções de escala coincidem. Os coeficientes de aproximação são os mesmos que os valores amostrados. Uma vez que os coeficientes são obtidos da representação física é possível implementar operadores não lineares (multiplicação, quadrados, etc) de uma maneira extremamente simples, assim como a implementação da derivada que pode ser feita usando diferenças finitas. Como as representações se interligam a aplicação das condições fronteira é fácil. Usando este tipo de análise é possível a construção de um esquema de interpolação adaptativa que permite fazer a ligação entre os ambientes em que as malhas são uniformes e o ambiente em que são esparsas.

Neste método, a estrutura da malha apresenta uma composição heterogénea: esparsa em regiões de suavidade e densa em regiões de variação mais acentuada. Esse facto aumenta obviamente a complexidade da estrutura de dados que se tem de usar, mas por outro lado fica-se com uma representação com um número de pontos inferior à representação original. Espera-se com isto que o tempo de computação seja também proporcional a esse número de pontos.

## 1.3 Estrutura da tese

Para se alcançar os objectivos propostos esta tese está dividida em cinco capítulos e organizada da seguinte forma:

Tendo por objectivo enquadrar os leitores nesta área temática, esta tese dedica o seu segundo capítulo ao estudo da arte dos métodos numéricos para a resolução das equações de Maxwell. É dada ênfase a um dos métodos numéricos mais usados em computação electromagnética, o FDTD. São apresentadas as principais propriedades do método, as suas vantagens e inconvenientes. São também referidas as constantes evoluções e melhoramentos que o método sofreu ao longo do tempo por forma a responder às suas principais desvantagens. É apresentado o conceito de análise multiresolução e a sua relação com as equações de Maxwell.

O capítulo seguinte é dedicado à análise multiresolução e wavelets. É explicado como surgiu o conceito de wavelet e são apresentadas as diferentes famílias. É explicado detalhadamente o conceito de análise multiresolução e a sua importância na análise de uma função. Neste capítulo é também apresentada a discretização das equações de Maxwell com base na análise multiresolução usando diferentes famílias de wavelets. São introduzidos os principais problemas que surgem quando se usam as técnicas anteriores e que serviram de motivação para a apresentação do trabalho principal desta tese de Doutoramento.

No quarto capítulo são usadas as wavelets de segunda geração, as wavelets biortogonais e interpolatórias, para efectuar a discretização das equações de Maxwell. São apresentadas as principais vantagens de se usar este tipo de wavelets na discretização das equações de Maxwell, quando comparado com os métodos anteriores para a obtenção duma malha adaptativa. É também explicado o que são wavelets interpolatórias e no que consiste o processo de interpolação. São explicitadas quais as principais operações que se realizam sobre funções quando se usam malhas adaptativas e faz-se uma comparação entre dois tipos de malhas: as entrelaçadas e as não entrelaçadas. De seguida é feito o estudo de dispersão e estabilidade em cada um dos tipos de malhas e retiradas as principais conclusões. Por fim são apresentados vários exemplos a 1D do método proposto para validação do mesmo. Para um dos exemplos é feita a comparação com o FDTD e retiradas as principais conclusões.

No capítulo cinco, são apresentadas as conclusões resultantes deste trabalho. Nesse capítulo são, também, apresentados os potenciais pontos de interesse para estudos futuros.

Este primeiro capítulo termina com a indicação das principais contribuições originais desta tese.

## 1.4 Notação utilizada

Ao longo de todo o texto desta tese de Doutoramento irão aparecer alguns termos em inglês ou porque a sua tradução para português é difícil, ou porque o seu uso não reflectiria o seu real significado, ou ainda por serem termos já universalmente aceites. Esta situação deve-se, fundamentalmente, ao facto de a literatura dominante existente nesta área ser publicada em língua inglesa. Nestes casos, os termos são apresentados em caracteres itálicos. Sempre que possível são também usadas algumas traduções que se consideram apropriadas ou que já se encontram enraizadas no Português.

Uma chamada de atenção especial é feita em relação ao termo *wavelet* usado nesta tese. Segundo [1-13], os franceses chamaram às novas funções *ondelettes*, ondas pequenas. Os ingleses e norte-americanos chamaram-lhes *wavelets*. Em português não existe ainda uma terminologia estabelecida, mas começam a aparecer os neologismos *ondaleta* e *onduleta*. A antiga palavra portuguesa *ôndula* tem, contudo, o significado pretendido, pelo que muitos a preferem. Apesar disto o autor tomou a decisão de usar a palavra *wavelet* e por ser muito referida ao longo do texto, não se coloca em itálico.

Para evitar a repetição de longas expressões técnicas, que tornariam fastidiosa a leitura deste documento, são também usados acrónimos ao longo de todo o texto. Para além de ser apresentada no início deste documento, a correspondência entre os termos técnicos e os respectivos acrónimos, é sempre explicado o seu significado na primeira ocorrência do acrónimo no texto.

Todas as referências bibliográficas usadas ao longo deste texto são evocadas entre parêntesis rectos (da forma [capítulo-ref. xx]) e apresentadas no final de cada capítulo deste documento.

## 1.5 Principais contribuições originais desta tese

As principais contribuições deste trabalho que decorreu durante os últimos quatro anos são apresentadas no capítulo 4. Mas desde já podem-se referir as seguintes:

- ❖ Uso de wavelets interpolatórias na discretização das equações de Maxwell a 1D;
- ❖ Estudo da análise de dispersão e estabilidade usando este tipo de wavelets quer com malhas entrelaçadas quer com malhas não entrelaçadas;
- ❖ Aplicação das wavelets interpolatórias na simulação de diversas situações a 1D como forma de validação da técnica e usando malhas entrelaçadas.

## 1.6 Referências

[1-1] B. Z. Steinberg e Y. Leviatan. On the use of wavelet expansions in the method of moments. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 41 610–619, Mai 1993.

[1-2] M. Krumpholz e L. P. B. Katehi. New prospects for time domain analysis. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 5(11) 382–384, Nov. 1995.

[1-3] M. Krumpholz e L. P. B. Katehi. MRTD: New time-domain schemes based on multiresolution analysis. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 44(04) 555–571, Abr. 1996.

[1-4] E. M Tentzeris, R. L. Robertson, J. Harvey e L. Katehi. Stability and dispersion analysis of Battle–Lemarie based MRTD schemes. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 47(07) 1004–1013, Jul. 1999.

[1-5] M. Werthen e I. Wolff. A novel wavelet based time domain simulation approach. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 6(12) 438–440, Dez. 1996.

[1-6] M. Fujii e W. J. R. Hoefer. Dispersion of time domain wavelet Galerkin method based on Daubechies' compactly supported scaling functions with three and four vanishing moments. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 10(04) 125–127, Abr. 2000.

[1-7] K. Goverdhanam, L. P. B. Katehi, e A. Cangellaris. Application of multiresolution based FDTD multigrid. *Proc. IEEE Int. Symp. on Microwave Theory Tech.* 333–336, 1997.

[1-8] K. Goverdhanam, E. Tentzeris, e L. P. B. Katehi. Treatment of boundaries in multiresolution based FDTD multigrid. *Proc. 14th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics.* 127–134, Mar. 1998.

[1-9] E. Tentzeris, R. Robertson, L. P. B. Katehi, e A. Cangellaris. Space and time-adaptive gridding using MRTD technique. *Proc. IEEE Int. Symp. on Microwave Theory Tech.* 337–340, 1997.

[1-10] E. Tentzeris, M. Krumpholz, e L. P. B. Katehi. Application of MRTD to printed transmission lines. *Proc. IEEE Int. Symp. on Microwave Theory Tech.* 573–577, 1996.

[1-11] R. Robertson, E. Tentzeris, M. Krumpholz, e L. P. B. Katehi. Modeling of dielectric cavity structures using multiresolution time domain analysis. *Int. J. Numer. Model.* 11 55–68, 1998.

[1-12] M. Fujii e W. J. R. Hoefer. A three dimensional Haar wavelet based multiresolution analysis similar to the FDTD method - derivation and application. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 46(12) 2463–2475, Dez 1998.

[1-13] <http://primeirasedicoes.expresso.pt/ed1351/r0132.asp>

## Capítulo 2

# Estado da arte em métodos numéricos para a resolução das equações de Maxwell

---

---

### 2.1 Métodos computacionais

A análise das propriedades electromagnéticas de uma determinada estrutura pode não ser uma tarefa trivial. A maneira talvez mais imediata de se estudar o comportamento de uma determinada estrutura electromagnética seria a observação experimental, porém não seria obviamente a mais eficiente. Uma outra maneira seria a análise matemática, que é bastante usada na análise de estruturas mais simples como são o caso do dipolo, ou de um monopolo. No entanto, à medida que as estruturas começam a ser mais complexas e em que todas as suas dimensões tem influência no desempenho global, assim como elementos exteriores à própria estrutura, a análise matemática torna-se extremamente complicada e por vezes mesmo impossível. Nos nossos dias a caracterização de tais estruturas está dependente de ferramentas de simulação que

possam modelar a estrutura correctamente assim como elementos externos, como pode ser o caso da cabeça, das mãos ou do próprio circuito.

Quando se recorre a métodos computacionais para a análise de problemas electromagnéticos, diversos algoritmos estão disponíveis. Segundo [2-1] estes podem ser divididos em dois grandes grupos: os métodos numéricos e os métodos assintóticos ou de elevada frequência. Enquanto os primeiros se aplicam a estruturas cujas dimensões são da ordem de grandeza do comprimento de onda sendo no máximo de poucas dezenas do comprimento de onda, os segundos são mais indicados para estruturas cujas dimensões sejam de bastantes comprimentos de onda. Por outro lado, os métodos numéricos podem ser subdivididos em dois grupos correspondendo à formulação das equações de Maxwell na sua forma diferencial ou integral. Por sua vez em cada um destes grupos existem métodos no domínio do tempo e métodos no domínio da frequência. No que diz respeito aos métodos assintóticos ou de elevada frequência estes podem ser divididos em dois grupos consoante a abordagem ao problema seja baseada em equações de campo ou em equações de corrente. A Figura 2-1 apresenta um esquema explicitando as divisões anteriores. Depreende-se destas palavras que cada caso é um caso diferente e consoante a estrutura a analisar e os resultados pretendidos ter-se-á de optar por aquele que seja o mais promissor.

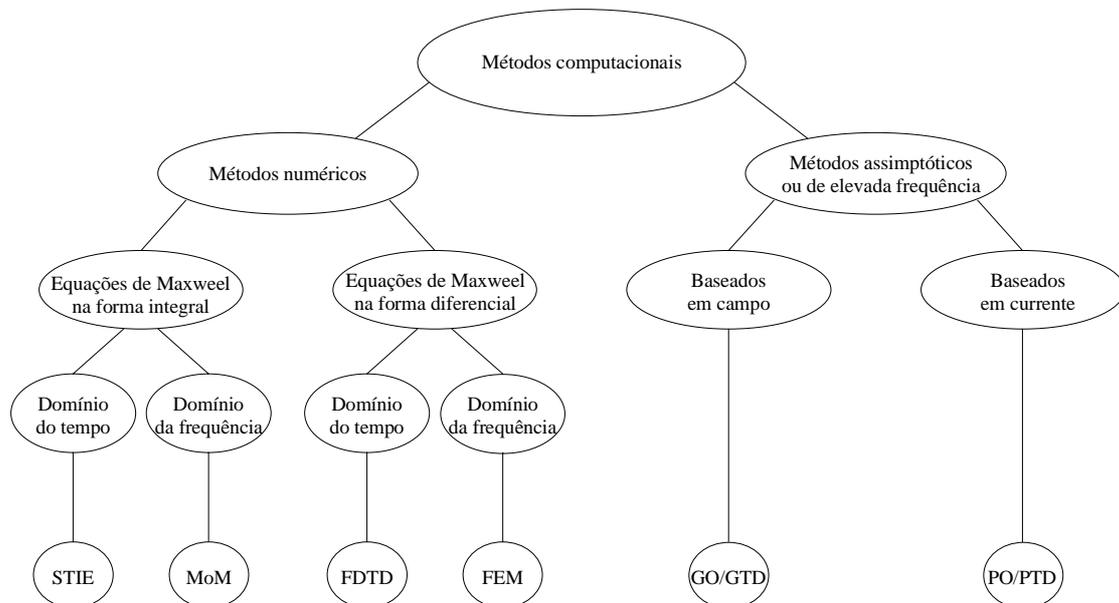


Figura 2-1 Diagrama elucidativo dos métodos computacionais

De entre os métodos numéricos aqueles que surgem com maior aceitação são:

- ❖ Método dos momentos (MoM);
- ❖ Método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD).

Em [2-2] descreve-se o projecto de uma antena para um terminal móvel para a banda de frequências de 1.91 a 2.20 GHz no qual foi usado o FDTD como ferramenta base. Na altura foi apresentado como principal limitação do método o tempo de computação necessário para simular a antena. Nesse trabalho um dos pontos do trabalho futuro que foi apontado foi tentar aumentar o desempenho computacional do método. Este trabalho de Doutoramento surge na sequência desse trabalho e tem como objectivo melhorar o desempenho computacional do método quer em termos de velocidade de processamento quer em termos de memória exigida, possibilitando a obtenção de resultados de simulação num tempo mais curto do que seria de esperar se usássemos o FDTD convencional.

Assim, neste capítulo será feito um estudo ainda que de uma forma superficial sobre o FDTD, apresentando as suas vantagens e inconvenientes bem como as diversas propostas que surgiram com vista a melhorar o desempenho do método e que serviram de motivação para a apresentação deste trabalho.

## 2.2 O FDTD

As equações de Maxwell descrevem a evolução no tempo e no espaço dos campos eléctrico e magnético e são sem dúvida uma ferramenta extremamente poderosa. No entanto, para quem olha pela primeira vez para essas equações e mesmo para quem já possua alguma experiência na área, constata que a resolução de tais equações é complexa. Havia pois necessidade de desenvolver técnicas que permitissem de uma forma acessível a resolução destas equações.

Em Maio de 1966 devido ao artigo publicado por Kane S. Yee [2-3], nascia o FDTD. Na altura o método foi visto como uma maneira simples e elegante de discretizar a forma diferencial das equações de Maxwell. Para tal Yee usou duas grelhas de pontos. Uma

para o campo eléctrico, que apresentava um desfaseamento quer espacial quer temporal em relação à segunda, usada para o campo magnético. Usando estas grelhas de pontos e as equações de Maxwell, Yee deduziu umas equações de actualização dos campos baseadas no valor do campo no instante imediatamente anterior. (ver Figura 2-2).

O essencial deste algoritmo consistia em transformar as equações de Maxwell na sua forma diferencial em equações diferença, discretizadas e facilmente implementáveis em *software*. Estas equações são resolvidas de tal modo que o campo eléctrico é calculado num determinado instante do tempo e o campo magnético é calculado no instante imediatamente a seguir, alternando este processo até que o estado estacionário seja atingido.

Ao transformar-se as equações de Maxwell em equações diferença pode-se facilmente constatar que o valor do campo eléctrico num determinado ponto, e num determinado instante, é dependente do seu valor anterior (daqui a noção de diferenças no tempo) e também da diferença entre os valores do campo magnético, calculados no instante imediatamente anterior, e em pontos localizados um de cada lado do ponto onde está a ser calculado o campo eléctrico. O cálculo do campo magnético é feito de forma semelhante, isto é, o valor do campo magnético é obtido tendo em atenção o valor do mesmo campo no instante anterior e da diferença entre os valores do campo eléctrico no instante precedente e em pontos ao lado do ponto onde o campo magnético está a ser calculado. Isto é, o valor de um campo é dependente do seu valor no instante anterior e dos valores do outro campo em pontos que estão a sua volta. A Figura 2-2 ilustra o método descrito.

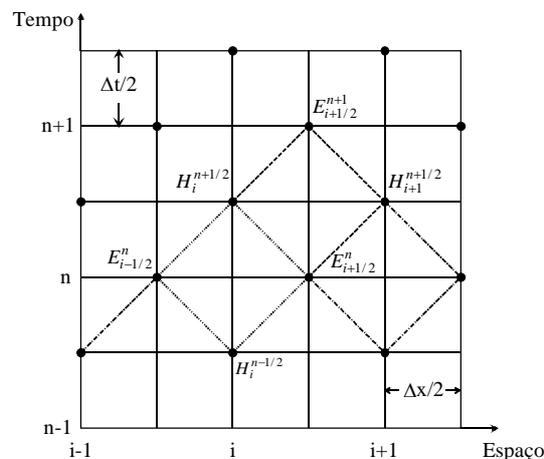


Figura 2-2 Diagrama explicativo do cálculo do valor do campo eléctrico e magnético

Apesar da simplicidade e elegância do método este recebeu muito pouca atenção, imediatamente após a sua publicação. Devido por ventura às limitações computacionais da época em termos de memória, poucos foram aqueles que apostaram no sucesso deste método uma vez que o seu custo computacional era elevado. Além disso, o método apresentava algumas limitações inerentes à sua publicação original nomeadamente a incapacidade para modelar um problema “aberto”. No entanto, o primeiro passo estava dado para uma longa caminhada. Se no início a caminhada foi muito lenta o mesmo não se pode dizer dos últimos 20 anos em que o seu crescimento foi quase exponencial.

## 2.3 O algoritmo de Kane S. Yee

Seguindo a notação de Yee, no caso mais geral, nós teremos quatro graus de liberdade (três no espaço e um no tempo). Yee define um ponto da grelha como:

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (2-1)$$

onde  $i, j, k$  são inteiros e  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  são as dimensões das células segundo as direcções dos eixos coordenados. Do mesmo modo definiu uma função do tempo e do espaço calculada num ponto genérico da grelha pré definida como:

$$F^n(i, j, k) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \quad (2-2)$$

onde  $\Delta t$  é o incremento no tempo, assumido uniforme em todo o intervalo de observação, e  $n$  um inteiro.

Como foi referido anteriormente, a essência do método FDTD consiste em transformar os diferenciais das equações de Maxwell na sua forma diferencial em equações diferença. Basicamente e por aplicação da definição de derivada de uma função num ponto pode-se provar que :

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} \approx \frac{F^n(i + 1/2, j, k) - F^n(i - 1/2, j, k)}{\Delta x} \quad (2-3)$$

note-se aqui o incremento em  $\pm 1/2$  no índice  $i$  correspondendo à diferença finita em torno de  $\Delta x$ . Uma aproximação numérica semelhante para  $\partial F^n(i, j, k)/\partial y$  e  $\partial F^n(i, j, k)/\partial z$  poderia ser escrita simplesmente incrementando respectivamente os índices  $j$  e  $k$  de  $\pm 1/2$ .

De um modo semelhante poder-se-ia obter a derivada em ordem ao tempo:

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} \approx \frac{F^{n+1/2}(i, j, k) - F^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} \quad (2-4)$$

Se aplicarmos as ideias e a notação anterior às equações de Maxwell na sua forma diferencial obteremos as equações que regem o FDTD. Por exemplo, se usarmos a equação (2-5), que se indica a seguir:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho' H_x \right) \quad (2-5)$$

e se substituirmos as derivadas em ordem ao tempo e em ordem ao espaço para um instante genérico  $n$  pelas equações anteriores, obteremos a equação (2-6):

$$\frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k) - H_x^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_{i,j,k}} \left( \begin{array}{c} \frac{E_y^n(i, j, k+1/2) - E_y^n(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \\ - \frac{E_z^n(i, j+1/2, k) - E_z^n(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \\ - \rho'_{i,j,k} \times H_x^n(i, j, k) \end{array} \right) \quad (2-6)$$

Se observarmos todas as quantidades que surgem no lado direito da equação vemos que são todas calculadas no instante  $n$  incluindo o termo associado às perdas magnéticas  $\rho'$ . No entanto os valores de  $H_x$  para o instante  $n$  não estão disponíveis em memória (apenas os valores no instante  $n-1/2$  são supostos estar armazenados em memória), e portanto há necessidade de estimar esse termo e segundo [2-4] deve-se usar o que se designa na literatura como a aproximação semi implícita. Nesta aproximação assume-se que o valor de  $H_x$  no instante  $n$  é igual a média aritmética do valor de  $H_x$  no instante  $n-1/2$  e o valor a calcular no instante  $n+1/2$ , isto é:

$$H_x^n(i, j, k) = \frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k) + H_x^{n-1/2}(i, j, k)}{2} \quad (2-7)$$

Substituindo a aproximação anterior, multiplicando ambos os membros por  $\Delta t$ , juntando os termos em  $H_x^{n+1/2}(i, j, k)$  e  $H_x^{n-1/2}(i, j, k)$  que aparecem em ambos os lados da equação e depois dividindo ambos os membros da equação por  $(1 + \Delta t / \mu_{i,j,k} \times \rho'_{i,j,k} / 2)$  teremos a expressão final para o cálculo de  $H_x$  usando o FDTD, isto é:

$$\begin{aligned}
 H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = & \left( \frac{1 - \frac{\rho'_{i,j,k} \cdot \Delta t}{2 \cdot \mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \cdot \Delta t}{2 \cdot \mu_{i,j,k}}} \right) H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) + \\
 & + \left( \frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \cdot \Delta t}{2 \cdot \mu_{i,j,k}}} \right) \left( \frac{E_y^n(i, j, k + 1/2) - E_y^n(i, j, k - 1/2)}{\Delta z} \right. \\
 & \left. - \frac{E_z^n(i, j + 1/2, k) - E_z^n(i, j - 1/2, k)}{\Delta y} \right)
 \end{aligned} \tag{2-8}$$

De uma maneira similar poderíamos obter as expressões para  $H_y$  e  $H_z$ . Por analogia, poderíamos obter também expressões para  $E_x, E_y, E_z$ . Nestas equações o termo  $\sigma \cdot E^{n+\frac{1}{2}}$  representa as perdas por condução eléctrica e pode ser estimado usando um procedimento análogo ao anterior. Como exemplo apresenta-se a seguir a equação para  $E_z$ .

$$\begin{aligned}
 E_z^{n+1}(i, j, k) = & \left( \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \cdot \Delta t}{2 \cdot \varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \cdot \Delta t}{2 \cdot \varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_z^n(i, j, k) + \\
 & + \left( \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \cdot \Delta t}{2 \cdot \varepsilon_{i,j,k}}} \right) \left( \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + 1/2, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - 1/2, j, k)}{\Delta x} \right. \\
 & \left. - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 1/2, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - 1/2, k)}{\Delta y} \right)
 \end{aligned} \tag{2-9}$$

Se analisarmos as duas equações anteriores podemos verificar que o valor de uma componente do campo num determinado ponto do espaço é dependente apenas do seu valor no instante anterior e dos valores prévios da outra componente em pontos adjacentes. Os restantes valores são constantes e como tal devem ser definidos à partida uma vez que não variam com o tempo. De notar também que este método permite definir para cada ponto do espaço as suas características eléctricas e magnéticas. A Figura 2-3 apresenta a célula de Yee a 3D assim como a posição das diversas componentes do campo electromagnético.

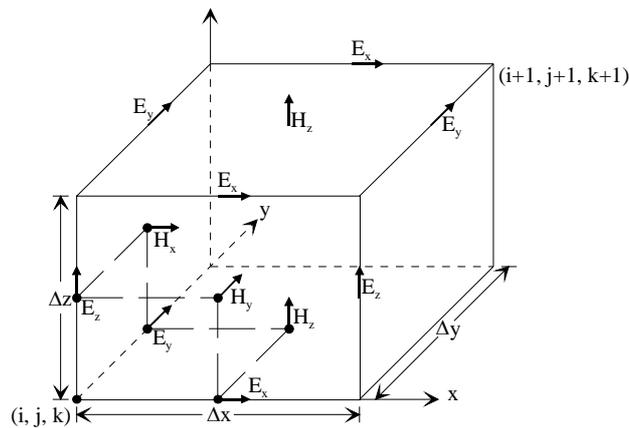


Figura 2-3 Localização das componentes do campo numa célula de Yee a três dimensões

## 2.4 Tamanho das células e estabilidade

Antes de se poder implementar as equações diferença apresentadas no ponto anterior é importante determinar o tamanho das células assim como o incremento no tempo a usar.

A escolha do tamanho das células não é uma tarefa trivial. Por um lado elas devem ser suficientemente pequenas para que os resultados sejam suficientemente fiáveis à maior frequência de interesse. Por outro lado devem ser suficientemente grandes para que possamos ter recursos computacionais disponíveis. Além destes factores é importante o tipo de materiais presentes, uma vez que quanto maior for a permissividade e/ou a condutividade menor é o comprimento de onda a uma dada frequência e consequentemente menor é o tamanho requerido para a célula.

Neste problema o essencial é garantir que o tamanho da célula seja muito menor que o menor comprimento de onda de interesse. A questão óbvia que se pode colocar será pois tão pequena quanto? De acordo com [2-4] um valor normalmente usado é o de dez células por comprimento de onda. No entanto, para situações em que se exige elevada fiabilidade dos resultados poderemos ter vinte ou mais células por comprimento de onda.

Pode-se provar segundo [2-4];[2-5] que por forma a evitar a dispersão nos resultados a seguinte condição de estabilidade terá de ser válida:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_{\max} \left[ \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]^{1/2}} \quad (2-10)$$

onde  $c_{\max}$  é a velocidade máxima de propagação no espaço a ser modelado. Esta condição é conhecida por limite de Courant. Sem entrar em pormenores matemáticos poder-se-á apresentar uma explicação intuitiva acerca desta condição. É necessário garantir que durante cada intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) o algoritmo só consegue propagar a onda através de uma célula. Logo o intervalo de tempo deve ser menor que o tempo que a onda demora para percorrer a distância correspondente a uma célula. Ao fazer-se isto está-se a garantir que a onda não se propaga mais rapidamente que o algoritmo, dando origem a instabilidade na solução.

## 2.5 Condições fronteira absorventes

Uma das dificuldades que surge quando se tenta resolver um problema usando este método tem a ver com o facto de serem problemas abertos, isto é, a solução deve ser obtida para um espaço infinito. Contudo, é evidente que nenhum sistema computacional pode armazenar uma quantidade ilimitada de dados e portanto o espaço onde a solução será obtida deve ser limitado. Este tamanho deve ser tal que englobe as estruturas de interesse mais algumas células entre os objectos a serem modelados e a fronteira propriamente dita. A Figura 2-4 apresenta a ideia anterior.

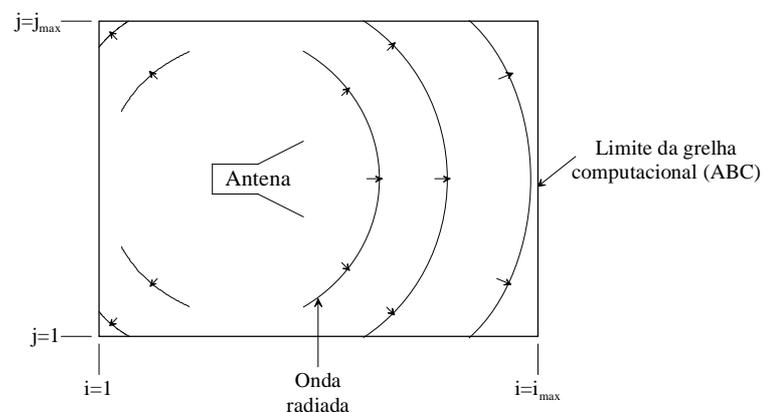


Figura 2-4 Condições fronteira

Contudo, verifica-se que surge um problema na actualização do valor dos campos que caem no limite da grelha computacional, uma vez que a aplicação directa das equações conduz a valores que caem fora da malha definida. Se não existir um processo que de alguma forma, absorva as ondas na extremidade da grelha ocorrerão reflexões não físicas as quais interferirão com os campos no interior da grelha. A solução mais prática para a actualização dos campos na fronteira é aplicar o que se designa na literatura por condições de fronteira absorventes, do inglês *Absorbing Boundary Conditions* (ABC) que devem suprimir a onda reflectida a um nível aceitável. Várias ABC's foram desenvolvidas nas últimas décadas. Destaque vai para as ABC apresentadas por Mur [2-6] e mais recentemente por J. P. Berenger [2-7]. Uma vez que o objectivo desta tese não é o de discutir as ABC's, para maiores detalhes pode-se recorrer a [2-4];[2-5].

Se numa fase inicial as condições fronteira apresentadas por Mur tiveram uma grande aceitação, depois da apresentação do trabalho de Berenger à comunidade científica as suas equações começaram a ser mais usadas uma vez que proporcionavam resultados superiores aos apresentados pelas condições fronteira de Mur. Actualmente porventura as ABC's de Berenger serão as mais usadas e neste trabalho também as usaremos. Na secção seguinte serão apresentadas, ainda que de uma forma superficial, as ABC's propostas por Berenger.

### 2.5.1 ABC's de Berenger – PML (Perfectly Matched Layer)

Este método consiste basicamente em terminar o domínio computacional por uma zona composta por material fictício que absorva as ondas electromagnéticas que incidem sobre o mesmo. Berenger demonstrou que a impedância de onda num meio com perdas é a mesma que no vazio se a relação seguinte se verificar:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\rho'}{\mu_0} \quad (2-11)$$

o que garante a não existência de reflexões quando uma frente de onda incide normalmente sobre a superfície de separação entre ambos os meios [2-7]. Além disso, nessa zona existe uma separação de cada uma das componentes do campo eléctrico e magnético com a possibilidade de se atribuir perdas individuais a cada uma delas. Esta zona é terminada com um condutor eléctrico perfeito. A Figura 2-5 ilustra a ideia anterior.

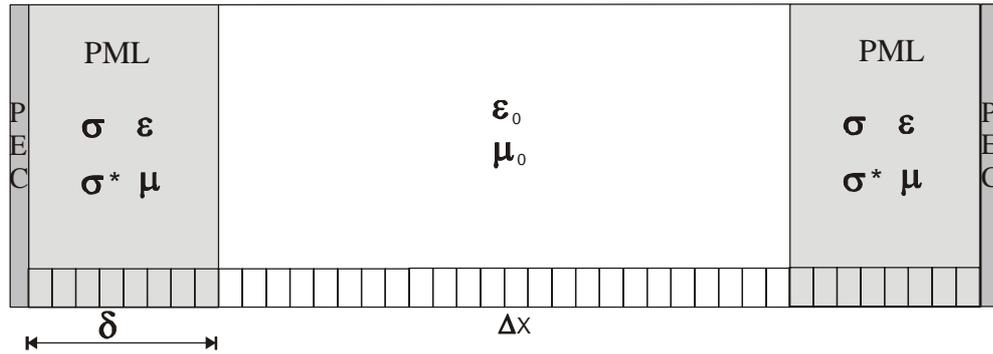


Figura 2-5 Condições fronteira do tipo PML

Desta forma, consegue-se criar um meio cuja impedância de onda é independente da frequência e do ângulo de incidência, obtendo-se coeficientes de reflexão três mil vezes mais pequenos do que os proporcionados por outras técnicas. Para mais esclarecimentos pode-se recorrer a [2-7]. Para terminar esta secção apresentam-se duas das equações usadas na implementação das condições de fronteira absorventes, usando a técnica de Berenger, a de  $H_y$  e a de  $E_z$ .

$$H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) = e^{-\rho'_x(i+1/2)\Delta t/\mu_0} H_y^{n-1/2}(i+1/2, j) + \left( \frac{e^{-\rho'_x(i+1/2)\Delta t/\mu_0} - 1}{\sigma_x(i+1/2)\Delta x} \right) \left( \begin{array}{l} E_{zx}^n(i+1, j) - E_{zx}^n(i, j) \\ + E_{zy}^n(i+1, j) - E_{zy}^n(i, j) \end{array} \right) \quad (2-12)$$

$$E_{zx}^{n+1}(i, j) = e^{-\sigma_x(i)\Delta t/\epsilon_0} E_{zx}^n(i, j) + \left( \frac{e^{-\sigma_x(i)\Delta t/\epsilon_0} - 1}{\sigma_x(i)\Delta x} \right) \left( H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j) \right) \quad (2-13)$$

Nas equações anteriores  $\sigma_x$  e  $\rho'_x$  representam respectivamente as condutividades eléctrica e magnética, as quais são função da posição.

## 2.6 O algoritmo

Depois de discutido o que é o método FDTD, como funciona e quais as equações a usar, é agora importante discutir a forma como pode ser implementado o respectivo algoritmo em computador. A implementação pode ser dividida em três fases:

- ❖ Pré-processamento;
- ❖ Processamento;
- ❖ Pós-processamento.

Na primeira fase é definida a grelha a usar em função da estrutura a analisar. Nomeadamente, é definido o tamanho das células e o número de células em cada dimensão. Em função dos valores anteriores é possível determinar o incremento em tempo a usar de modo a evitar a dispersão de resultados. Finalmente, e com importância fundamental, é nesta fase que se deve identificar a estrutura a modelar, isto é identificar as células onde iremos ter a estrutura e as células onde teremos espaço livre, por outras palavras, definem-se as constantes que em cada ponto descrevem o tipo de material presente.

A fase de processamento é a fase mais importante deste algoritmo. É nesta que se inicia o processo de propagação que termina ao atingir-se o estado estacionário. Assim, para cada intervalo de tempo  $\Delta t$ , são calculadas as três componentes do campo eléctrico em todos os pontos do domínio computacional de acordo com o tipo de material presente, é actualizado o estímulo e são aplicadas as condições fronteira. São também calculadas as três componentes do campo magnético e guardados alguns valores que se considerem relevantes para o intervalo de tempo seguinte nomeadamente para o cálculo das condições fronteira. Finalmente são guardados alguns valores, resultantes deste processamento nesse instante concreto, como por exemplo a corrente, a tensão e alguma componente do campo electromagnético que se pretenda visualizar mais tarde.

Por fim, na fase de pós-processamento é efectuado algum processamento que não está directamente relacionado com o algoritmo, como seja o cálculo de uma FFT (*Fast Fourier Transform*) para a determinação da impedância de entrada ou para o cálculo de um diagrama de radiação. A Figura 2-6 apresenta o fluxograma do algoritmo.

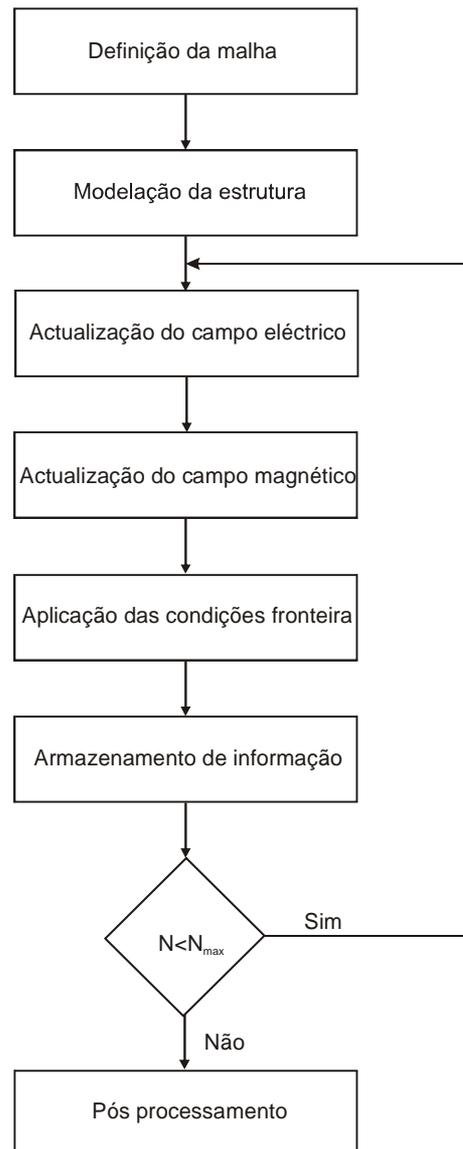


Figura 2-6 Fluxograma do FDTD

## 2.7 Vantagens e inconvenientes do FDTD clássico

Actualmente o FDTD é porventura um dos métodos mais populares para a solução de problemas electromagnéticos. Ainda que o método tenha aparecido há cerca de 40 anos a sua popularidade continua a crescer e o seu custo computacional continua a diminuir. Extensões e actualizações ao método estão continuamente a aparecer. Ao longo deste tempo o algoritmo tem vindo a revelar-se como uma ferramenta poderosa, robusta e que apresenta resultados fiáveis na análise dos diversos problemas electromagnéticos. O

crescimento deste método foi tal que este se estendeu a outras áreas da ciência como a acústica [2-8], a óptica [2-9] e a biologia [2-10], entre outras.

Outra das vantagens deste método reside no facto de este poder ser dirigido a estruturas com geometrias complexas, a materiais não homogéneos e cujas propriedades variem com a frequência. Além disso, a resposta em frequência de uma estrutura pode facilmente ser obtida com uma única simulação recorrendo para tal à FFT.

Com o contínuo crescimento da velocidade de processamento do CPU e com o constante aumento de memória disponível o tamanho dos problemas que se podem resolver hoje são de dimensões maioritariamente superiores aos que se conseguiam resolver há uns anos atrás. No entanto, para problemas com dimensões consideráveis o FDTD é exigente em termos de memória, principalmente quando se pretende modelar pequenos detalhes no domínio computacional, esta exigência depois reflecte-se num tempo de computação elevado. Segundo [2-11] a exigência em memória cresce com  $f^3$  e o tempo de CPU cresce com  $f^4$ , sendo  $f$  a maior frequência considerada na simulação.

Um das mais sérias limitações deste método é pois a sua exigência computacional quer em termos de memória requerida quer em termos de tempo de uso de processador. Esta desvantagem é mais evidente quando se pretende modelar estruturas com dimensões elevadas e/ou com pequenos pormenores. Esta exigência computacional deve-se essencialmente a três factores:

- ❖ O incremento espacial deve ser suficientemente pequeno em relação ao comprimento de onda (normalmente usam-se 10 a 20 células por comprimento de onda);
- ❖ O incremento espacial pode também estar dependente da geometria do problema a analisar obrigando ao uso de uma malha mais fina por forma a poder-se modelar correctamente a estrutura. Consequentemente, os vectores podem ser computacionalmente pesados, resultado de uma sobreamostragem em certos pontos do espaço, originando tempos de computação elevados;
- ❖ O incremento em tempo deve satisfazer a condição de estabilidade de Courant tal como indicado pela equação (2-10).

## 2.8 Evolução e melhoramentos do algoritmo

Por forma a responder as estas limitações várias técnicas têm sido propostas para melhorar a eficiência computacional do método, cada uma das quais com as suas vantagens e inconvenientes. Assim, nos próximos tópicos apresenta-se algumas das técnicas que surgiram e que foram aceites pela comunidade científica.

### 2.8.1 Extensões celulares

Depreende-se do que foi dito anteriormente que os recursos computacionais associados a este método estão intimamente relacionados com o número de células que se usa. No entanto, quando a estrutura a analisar tem pelo menos uma das dimensões que é muito inferior às outras (como exemplo podemos referir o caso de um fio muito fino ou de uma placa de espessura também fina ou desprezável) podemos ter um problema. Se usarmos células adequadas às dimensões maiores estas tornam-se inadequadas para modelar as dimensões inferiores. Pelo contrário se usarmos células adequadas à modelação das dimensões inferiores, estaremos a usar um elevado número de células e a aumentar muito o esforço computacional o que vai tornar o método ineficaz.

Perante esta situação duas soluções são propostas. A primeira aproximação consiste no uso de duas grelhas cujas dimensões sejam adequadas às estruturas em causa. Assim, poderíamos usar uma malha mais apertada para a análise dos pequenos pormenores e uma malha mais larga na restante estrutura. O esforço cairia em combinar de uma forma fisicamente razoável as duas grelhas, o que por vezes é uma tarefa complicada e pode dar origem a erros [2-12].

A segunda aproximação, que é usada por exemplo para modelar um fio fino ou uma slot, é usar apenas uma malha em todo o domínio computacional mas modificando as equações a usar nas células cuja posição coincida com elementos de dimensões reduzidas em pelo menos uma dimensão. O desenvolvimento desta aproximação envolve a aplicação da lei de Maxwell na sua forma integral e não na sua forma diferencial, no entanto, as equações diferença podem na mesma ser facilmente obtidas tal como apresentado em [2-13].

A escolha de uma grelha é de importância crucial para a correcta solução de um problema. A discretização deve ser tal que permita prever de uma forma correcta a evolução do campo principalmente em zonas que apresentem descontinuidades. Por forma a responder a estas exigências foram utilizadas algumas técnicas tais como o uso de grelhas de dimensões variáveis ou o uso de grelhas locais. No entanto, ambas as técnicas apresentam limitações. Ambas requerem um conhecimento à priori sobre a distribuição de campo esperada. Além disso se optarmos por uma grelha não uniforme o incremento de tempo é condicionado pelas menores dimensões e conseqüentemente torna-se inadequado em zonas onde as células possuem um tamanho maior. No caso da segunda opção surgem problemas de estabilidade devido a interpolação que é necessário fazer nas zonas de transição entre a malha mais apertada e a malha mais larga [2-14].

## **2.8.2 Técnicas no domínio do processamento de sinal**

### **2.8.2.1 O PSTD**

Uma das técnicas que recorre a algoritmos da área do processamento de sinais é o PSTD (*Pseudospectral Time Domain*), o qual faz uso da FFT para representar as derivadas espaciais. Usando este método consegue-se chegar a um arranjo de 2 pontos por comprimento de onda [2-14]. A principal contribuição deste algoritmo é conseguir uma grelha mais grosseira com uma amostragem muito perto da frequência de Nyquist e em que se prova que a modelação geométrica não necessita de células mais pequenas.

### **2.8.2.2 Transformada de Z**

Outra das técnicas usadas no domínio do processamento de sinal é o uso da transformada de Z. Em [2-15], a transformada de Z é usada na implementação do FDTD quando materiais dispersivos ou não lineares estão envolvidos. Quando este tipo de materiais está presente a relação entre a densidade de fluxo e o campo eléctrico é a parte mais complicada do problema. Para modelar meios dispersivos as equações normais do FDTD têm de ser modificadas [2-16]. Varias técnicas foram introduzidas para

incorporarem a dispersão na frequência. Estas técnicas revelaram-se importantes na modelação da propagação de um impulso óptico [2-17], na propagação em plasmas magnetizados [2-18] e em tecidos biológicos [2-19]. Estas técnicas podem dividir-se em três grandes grupos. A convolução discreta, discretização da equação diferencial que relaciona  $D(r,t)$  com  $E(r,t)$  e o uso da transformada de Z. A maior motivação para o uso desta técnica é que os integrais de convolução são substituídos por equações algébricas no domínio da transformada.

### 2.8.3 Esquemas explícitos versus implícitos

Dos métodos numéricos usados para resolver PDE's aqueles que tiveram maior aceitação foram os que empregaram diferenças finitas. Usando esta técnica as equações diferenciáveis são substituídas por equações de diferenças finitas. Estas equações relacionam o valor da variável dependente num ponto pertencente à região em estudo com alguns dos seus pontos vizinhos. Este processo consiste essencialmente em estimar uma derivada numericamente. No entanto, quando se parte para uma solução deste género a discretização das equações pode ser feita com diferenças finitas centradas, que é a opção mais comum, ou com diferenças finitas para a frente (do inglês *forward difference*) ou para trás (do inglês *backward difference*) ou então recorrendo a expansão de uma função em série de Taylor que introduz um erro de segunda ordem. Estas técnicas conduzem a equações explícitas em que a estabilidade da equação depende de um factor que terá de ser respeitado. Este tipo de equação conduz a uma implementação simples mas computacionalmente lenta. É neste esquema que surge o FDTD, como um esquema de diferenças finitas centrado e que tem de respeitar a condição de estabilidade de Courant. Refira-se também que quando as derivadas são aproximadas por diferenças não centradas o erro cometido é maior.

Por outro lado pode-se recorrer a um esquema implícito que permite manter a estabilidade em todas as circunstâncias, eliminando o factor de estabilidade limitativo e tornando o algoritmo mais rápido. Este esquema conduz a uma implementação mais complicada com um conjunto simultâneo de  $n$  equações cada uma com  $n$  incógnitas. O custo a pagar pela estabilidade é a resolução de um sistema de equações que pode ser computacionalmente pesado dependendo do número de pontos presentes na grelha.

### 2.8.3.1 Esquemas de ordem superior

O FDTD é um algoritmo com precisão de segunda ordem no tempo e no espaço. Uma das limitações deste método prende-se com os erros de fase que se vão propagando e acumulando ao longo do tempo de cálculo. A dispersão numérica, tal como é conhecida é mais evidente quando o problema a modelar é electricamente grande. Alguns investigadores [2-20] optaram por desenvolver esquemas de diferenças de segunda ordem no tempo e diferenças de quarta ordem no espaço e que designaram por T(2, 4) ou diferenças de quarta ordem quer no tempo quer no espaço que se designam por T(4,4). Usando estes esquemas explícitos consegue-se melhorar os resultados em termos de dispersão quando comparado com o FDTD convencional.

### 2.8.3.2 FDTD - ADI

Mais recentemente surgiu um novo método designado por FDTD-ADI (*Alternating direction implicit*) [2-21];[2-22];[2-23];[2-24]. O FDTD tradicional é baseado num algoritmo de diferenças finitas explícitas que tem de verificar a condição de estabilidade de Courant. Consequentemente o máximo incremento no tempo é limitado pelo tamanho da célula de menores dimensões presente no domínio computacional. Com este novo algoritmo consegue-se eliminar a condição de estabilidade de Courant. Este método é baseado no ADI que é conhecido como o algoritmo das diferenças finitas mas implícitas. Usando diferenças implícitas somos conduzidos a um sistema de equações que pode ser implementado em forma matricial e cujo o custo computacional não é muito significativo.

Usando este método a implementação computacional é mais complicada que o FDTD convencional, no entanto, tem a vantagem do incremento no tempo não estar restringido à condição de estabilidade de Courant mas sim relacionado com questões de precisão de resultados. Como resultado a velocidade de computação pode ser melhorada. Pode-se demonstrar que o número de iterações diminui em cerca de um terço para o mesmo nível de precisão.

## 2.8.4 Técnicas híbridas

O método dos momentos e o FDTD, o primeiro no domínio da frequência e o segundo no domínio do tempo têm sido extensivamente usados na solução de problemas electromagnéticos. Por um lado o método dos momentos revela-se inadequado para modelar estruturas de comprimento eléctrico elevado. Por outro lado o FDTD revela limitações, por exemplo na modelação de estruturas em que uma das suas dimensões seja muito inferior às outras ou na modelação de superfícies curvas. A conjugação dos dois métodos pode em certos casos favorecer a análise de um problema. Segundo [2-25];[2-26] os métodos híbridos operam inteiramente no domínio do tempo, no entanto, o método dos momentos no domínio do tempo não apresenta a flexibilidade nem a maturidade da sua versão no domínio da frequência. Recentemente surgiu uma nova versão híbrida em que o método dos momentos é aplicado no domínio da frequência. Segundo [2-27], o problema é dividido em regiões separadas e cada uma delas é modelada usando o método mais adequado. A ligação entre as regiões é efectuada empregando o princípio de equivalência na fronteira. O custo computacional da implementação de um método híbrido ainda segundo [2-27], é cerca de quatro a dez vezes superior ao FDTD convencional quando se usam células do mesmo tamanho. No entanto, outras técnicas híbridas têm surgido. Por exemplo [2-28], usa o FDTD em conjugação com a equação de onda para reduzir as exigências computacionais na modelação de uma antena Vivaldi. Em [2-29], por exemplo descreve-se um método híbrido que usa o FDTD em conjunto com a teoria uniforme da difracção.

## 2.8.5 Computação paralela

Um dos métodos explorados foi também o uso da computação paralela [2-30];[2-31]. Usando computadores com arquitecturas adequadas que pudessem explorar esse objectivo. De entre as arquitecturas disponíveis destacam-se a arquitectura MIMD (*Multiple – Instruction Multiple Data*), SIMD (*Single Instruction Multiple Data*), SPMD (*Single Program Multiple Data*). Quando se opta por uma solução deste género a cada processador é atribuída uma região física do domínio computacional. Este processo está dependente de uma distribuição equitativa do espaço computacional pelos diferentes processadores de modo que o tempo de computação seja aproximadamente o mesmo.

## 2.8.6 A análise multiresolução

A discretização das equações de Maxwell na sua forma diferenciável, usando diferenças finitas foi o princípio usado por K. S. Yee para a obtenção do FDTD.

A aplicação do método dos momentos [2-32] às equações de Maxwell é também uma aproximação matemática correcta para a discretização da sua forma diferencial ou integral. Segundo [2-33] a aplicação do método dos momentos às equações de Maxwell está na base do aparecimento do TLM (*Transmission Line Matrix*). Do mesmo modo segundo [2-34] o FDTD pode ser derivado usando a mesma aproximação empregando funções base para a expansão dos campos quer no espaço quer no tempo. As funções usadas têm de ser do tipo rectangular.

Uma vez que o método dos momentos permite o uso de qualquer conjunto de funções base ortogonais, o uso de um determinado conjunto de funções pode dar origem a novos esquemas no domínio do tempo e no domínio da frequência. Na literatura o uso de funções de escala e wavelets como um conjunto completo de funções base é designado por análise multiresolução.

### 2.8.6.1 O MRTD

A aplicação da análise multiresolução ao método dos momentos para efectuar a discretização das equações de Maxwell dá origem a um novo esquema no domínio do tempo designado por MRTD (*MultiResolution Time Domain*) [2-35].

A análise usando wavelets foi intensivamente estudada em matemática. Em engenharia as suas primeiras aplicações centraram-se no campo da análise e processamento de sinais e na compressão de imagem. No campo do electromagnetismo a investigação usando wavelets começou em 1993, tornando-se um assunto da ordem do dia e teve um crescimento muito interessante na última década. A par deste desenvolvimento as wavelets também começaram a ser usadas na resolução de equações diferenciais. A aplicação de expansão em wavelets na solução de equações integrais dá origem a matrizes esparsas e portanto com vantagens relativamente a outras funções bases.

O princípio básico do MRTD consiste na expansão dos campos com base em wavelets e na discretização das equações de Maxwell usando o método dos momentos. Na literatura existente sobre este método as funções base usadas foram:

- ❖ wavelets de Battle-Lemarié [2-35];[2-36.];[2-37];
- ❖ wavelets de Haar [2-38];[2-39];
- ❖ wavelets de Daubechies [2-40];[2-41].

Este novo esquema apresenta vantagens em relação ao FDTD convencional nomeadamente em termos de tempo de computação e em termos de exigência de memória, nomeadamente, permite uma discretização com um menor número de pontos por comprimento de onda podendo chegar mesmo perto do limite de Nyquist. O MRTD demonstrou uma economia em termos de memória e tempo de computação. Aliado a este factor, é possível termos uma grelha adaptativa sem os problemas encontrados com o FDTD convencional. Recorre-se ao uso de um conjunto de funções base, a função de escala e a wavelet, permitindo posteriormente o uso da técnica de *threshold*. Usando este princípio é possível desprezar alguns dos coeficientes de wavelet inferiores a um valor e obter assim uma malha adaptativa. Ou seja, os coeficientes de wavelet funcionam aqui como indicadores da regularidade da função.

Algumas das conclusões que podemos tirar são:

- ❖ No método dos momentos, usando wavelets somos conduzidos a matrizes esparsas;
- ❖ No MRTD, o uso das wavelets reduz a dispersão numérica, conduz a tempos de computação menores, menos exigência em termos de memória e permite criar malhas adaptativas de uma forma automática;

Apesar das vantagens referidas anteriormente quando se usam wavelets, existe uma desvantagem séria quando se usa uma análise deste género. Uma vez que as wavelets do tipo Battle-Lemarié ou de Daubechies tem um suporte maior que a unidade, no caso das primeiras mesmo infinito, as condições fronteira numa malha de dimensão igual a um, não são normalmente satisfeitas por cada função de base individual, mas somente pela sobreposição de várias funções base. Consequentemente torna-se muito complicado a aplicação de condições fronteira quando se usam wavelets. O que foi

referido em relação a wavelet de Battle – Lemarié também é válido para as wavelets de Daubechies com excepção da de Haar, já que apesar deste tipo de wavelets ter suporte finito este é superior a unidade aumentando com a regularidade pretendida.

É certamente possível tal como demonstrado em [2-35] criar condições fronteira do tipo parede eléctrica perfeita ou parede magnética perfeita e depois empregar o método das imagens. No entanto, este tipo de condições fronteira são difíceis de implementar em problemas reais, além de termos de ter uma região de computação maior o que implicaria um aumento em termos de requisitos de memória.

Usando expansão em wavelets pode conseguir-se uma redução da resolução espacial até dois pontos por comprimento de onda. Contudo, a condição de estabilidade para o MRTD torna-se mais restritiva, fazendo com que o máximo incremento temporal seja menor, tal como demonstrado em [2-35].

## 2.9 Síntese

Este capítulo debruçou-se sobre o estudo do estado da arte em métodos numéricos para a resolução das equações de Maxwell em particular sobre o FDTD. Foi apresentado o método, as suas vantagens e inconvenientes. Foram também apresentadas diversas propostas com vista a um melhor desempenho computacional do método, assim como as principais limitações de cada uma delas.

## 2.10 Referências

[2-1] W. L. Stutzman e G. A. Thiele. *Antenna theory and design*. John Wiley & Sons, New York, 1998.

[2-2] Pedro Pinho. *Antenas para terminais móveis para a banda de frequências de 1,91 a 2,20 GHz*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Aveiro, Abril 2000.

- [2-3] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 14(3) 302–307, Mai. 1966.
- [2-4] Allen Taflove. *Computacional electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain method*. Norwood, MA. Artech House, 1995.
- [2-5] K. S. Kunz e R. J. Luebbers. *The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics*. Boca Raton; CRC Press, 1993.
- [2-6] G. Mur. Absorbing boundary conditions for the finite difference approximations of the time domain electromagnetics field equations. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility.* 23(04) 377–382, Nov. 1981.
- [2-7] J. P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves. *J. Computational Physics.* 114 185–200, 1994.
- [2-8] R. G. Keys. Absorbing boundary conditions for acoustic media. *Geophysics.* 50 892–902 1985.
- [2-9] P. M. Goorjian e A. Taflove. Direct time integration of Maxwell's equations in nonlinear dispersive media for propagation and scattering of femtosecond electromagnetics solitons. *Optics Lett.* 17 180–182, 1992.
- [2-10] D. M. Sullivan. A frequency –dependent FDTD method for biological applications. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 40 532–539, 1992.
- [2-11] X. Zhu, T. Dogaru e L. Carin. Parallel Implementation of the Biorthogonal MRTD Method. Submetido a *J. Optical Soc. Am.*
- [2-12] P. Monk e E. Suli. Error estimates for Yee's method on non-uniform grids. *IEEE Trans Magnetics.* 30 3200–3203, 1994.
- [2-13] K. S. Kunz e R. J. Luebbers. *The Finite-Difference Time-Domain method for electromagnetics*. Boca Raton; CRC Press, 1993, capítulo 10.

[2-14] F. Zheng, Z. Chen e J. Zhang. A Finite Difference Time Domain method without the courant stability conditions. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 9 (11) 441–443, Nov. 1999.

[2-15] D. M. Sullivan. Z-transform theory and the FDTD method. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 44 28–34, Jan. 1996.

[2-16] W. H. Weedon e C. M. Rappaport. General method for FDTD modeling of wave propagation in arbitrary frequency-dispersive media. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 45 401–410, Mar. 1997.

[2-17] A. Reineix, M. Ariaudo, B. Jecko e A. Barthelemy. Adaptation of the FDTD method to the study of femtosecond electromagnetic soliton. *Microwave optical Tech. Lett.* 7 507–511, 1994.

[2-18] F. Hunsberger, R. J. Luebbers, K. S. Kunz. Finite-difference time-domain analysis of gyrotropic media I: magnetized plasma. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* (40) 1489-1495, 1997.

[2-19] R. Pontalti, L. Cristoforetti, R. Antolini, L. Cescatti. A multi-relaxation (FD)<sup>2</sup>-TD method for modeling dispersion in biological tissues. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 42 526–527, 1994.

[2-20] T. Deveze, L. Beaulie e W. Tabbara. A fourth order scheme for the FDTD algorithm applied to Maxwell equations. *Proc. IEEE Antennas Propagat. Symp.* Chicago, IL. 346–349, 1992.

[2-21] T. Namiki. A New FDTD Algorithm Based on Alternating – Direction Implicit Method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 47(10) 2003–2007, Out. 1999.

[2-22] T. Namiki. 3D ADI – FDTD method – unconditionally stable time – domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 48(10) 1743–1748, Out. 2000.

- [2-23] T. Namiki. Investigation of numerical errors of the two dimensional ADI – FDTD method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 48(11) 1950–1956, Nov. 2000.
- [2-24] F. Zheng, Z. Chen e J. Zhang. Toward the development of a three dimensional unconditionally stable Finite Difference Time Domain method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 48(09) 1550–1558, Set. 2000.
- [2-25] G. Cerri e P. Russo. MoM-FDTD hybrid technique for analyzing scattering problems. *Electron. Lett.* 34 433–440, 1998.
- [2-26] A. R. Bretones, R. Mittra, e G. Martin. A hybrid technique combining the MoM in the time domain and FDTD. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 8 281–283, Ago. 1998.
- [2-27] A. Mohab, A. Mangoud, A. Raed, Abd-Alhameed, e P. S. Excell. Simulation of Human Interaction with Mobile Telephones Using Hybrid Techniques Over Coupled Domains. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 48(11) 2014–2021 Nov. 2000.
- [2-28] P. Aoyagi, R. Mittra. A hybrid Yee algorithm / scalar – wave equation approach. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 41 1593–1600, 1993.
- [2-29] B. Beillard, J. Andrieu, e B. Jecko. Coupling of methods: Finite Difference Time Domain and asymptotic methods. *Electronic Lett.* 32 308–309, 1996.
- [2-30] S. D. Gedney. Finite Difference Time Domain analysis of microwave circuit devices on high performance vector / parallel computers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 43 2510–2514, Out. 1995.
- [2-31] C. Guiffaut e K. Mahdjoubi. A parallel FDTD algorithm using the MPI library. *IEEE Antennas Propagat. Magazine.* 43 94–103, Abr. 2001.
- [2-32] R. F. Harrington. *Field computation by moment methods*. Malabar, Krieger, 1982.
- [2-33] M. Krumpholz e P. Russer. A field theoretical derivation of TLM. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 42(09) 1660–1668, Set. 1994.

[2-34] M. Krumpholz, C. Huber e P. Russer. A field theoretical comparison of FDTD and TLM. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 43(08) 1935–1950, Ago. 1995.

[2-35] M. Krumpholz e L. Katehi. MRTD: New time domain schemes based on multiresolution analysis. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 44(04) 555–571, Abr. 1996.

[2-36] E. M Tentzeris, R. L. Robertson e L. Katehi. PML Absorbing boundary conditions for the characterization of open microwave circuit components using multiresolution Time Domain Techniques (MRTD). *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 47(11) 1709–1716, Nov. 1999.

[2-37] E. M Tentzeris, R. L. Robertson, J. Harvey e L. Katehi. Stability and dispersion analysis of Battle–Lemarié based MRTD Schemes. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 47(07) 1004–1013, Jul. 1999.

[2-38] G. Carat, R. Gillard, J. Citerne e J. Wiart. A DWT based MRTD scheme using Haar wavelets. *Proc. Millennium Conf. on Antennas Propagation.* Davos, Suíça, Abr. 2000.

[2-39] G. Carat, R. Gillard, J. Citerne e J. Wiart. An efficient analysis of planar microwave circuits using a DWT based Haar MRTD scheme. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 48(12) 2261–2270, Dez. 2000.

[2-40] Y. W. Cheong, Y. M. Lee, K. H. Ra, J. G. Kang e C. C. Shin. Wavelet – Galerkin scheme of time dependent inhomogeneous electromagnetic problems. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 9(08) 297–299 Ago. 1999.

[2-41] M. Fujii, W. J. R. Hofer. Dispersion of time domain wavelet Galerkin method based on Daubechies' compactly supported scaling functions with three and four vanishing moments. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 10 (04) 125–127, Abr. 2000.

## Capítulo 3

# Análise multiresolução e wavelets

### 3.1 Introdução

Foi há bem poucos anos que foram definidos os primeiros sistemas de wavelets. É no entanto bem curioso verificar que no início do século XX, em 1910, Haar tinha introduzido um sistema completo de funções ortogonais com muitas das propriedades e características que hoje em dia definem os sistemas de wavelets e que fazem com que sejam uma das ferramentas matemáticas com grande número de aplicações em diversos domínios. Embora com uma definição extremamente simples (as funções são constituídas por ondas rectangulares) as séries de Haar permitem representar de uma forma exacta apenas funções que tomem valores constantes por troços. Deste ponto de vista, podem então ser consideradas como as wavelets de menor grau.

No início da década de oitenta, Jean P. Morlet e Alex Grossmann introduziram o conceito [3-1]. Desde a sua introdução, estas, revelaram ser uma poderosa ferramenta em ciência e engenharia. A ideia que muitos tiveram foi a de criar pequenas ondas, que fossem perfeitamente delimitadas, com princípio, meio e fim, e que servissem para

decompor o sinal original. Tinha nascido um novo instrumento matemático. As wavelets não são mais do que ondas pequenas, com determinadas propriedades que as tornam adequadas para servirem de base para a decomposição de outras funções, assim como senos e cosenos servem de base para a decomposição de Fourier.

Foi contudo apenas na segunda metade da década de oitenta que foram definidos com rigor os conceitos que permitem compreender de uma forma clara a natureza deste tipo de funções, estabelecer as suas propriedades e permitir a construção e geração de outros sistemas de wavelets. Envolvidos neste trabalho pioneiro estiveram vários investigadores. Yves Meyer [3-2], da *Ecole Polytechnique*, e Ingrid Daubechies [3-3]; [3-4], uma matemática belga, deram contributos decisivos para o desenvolvimento dessa ideia. O seu grande contributo terá sido conseguir construir uma família de wavelets ortonormais e de suporte compacto (duração finita). Destacam-se também, entre outros, os trabalhos de Grossman e Morlet [3-1], Mallat [3-5];[3-6] e Battle-Lemarié [3-7].

As wavelets desenvolveram-se nos campos da Matemática, Engenharia, Física Quântica e têm proliferado numa larga gama de aplicações: visão computacional e humana, geologia sísmica, computação gráfica, previsão de terremotos e maremotos, turbulência, fractais, bancos de filtros, distinção celular (células normais versus patológicas), processamento de imagens, eliminação de ruído em sinais (*denoising*), detecção de rupturas e descontinuidades, tons musicais, neurofisiologia, detecção de curtos eventos patológicos (exemplo crises epilépticas) e análise de sinais biomédicos (electrocardiogramas, mamografias, electroencefalogramas etc.), espalhamento em banda larga, modelagem de sistemas lineares, séries temporais, reconhecimento de alvos, óptica, análise de transitórios, visualização volumétrica, previsão do comportamento de mercados financeiros, solução de equações diferenciais ordinárias e parciais, não sendo esta lista exaustiva.

Nas últimas décadas a teoria das wavelets tem despertado um enorme interesse em todas as áreas da ciência e têm demonstrado superioridade em relação à análise de Fourier clássica em diversas situações. A investigação neste campo continua extremamente activa, tanto no que respeita ao aprofundamento dos aspectos teóricos, quanto no que toca ao desenvolvimento de aplicações.

Tal como no caso da análise de Fourier, que até há bem poucos anos era sem dúvida a grande ferramenta utilizada neste tipo de análises, os sistemas de wavelets apresentam um comportamento local no domínio da frequência. Em relação às séries trigonométricas possuem, no entanto, a grande vantagem de apresentarem também um comportamento local no domínio do espaço (ou do tempo). É então de esperar que a utilização de wavelets permita modelar de uma forma mais eficaz campos ou sinais que apresentem variações acentuadas numa determinada zona do espaço. As wavelets permitem ainda representar uma dada função segundo diferentes níveis de resolução. Este facto foi convenientemente explorado por Mallat [3-5] e Meyer [3-2], o que lhes permitiu sistematizar um conceito fundamental no domínio das wavelets, o da análise multiresolução. Neste capítulo será explicado de uma forma superficial a passagem da análise de Fourier para a análise multiresolução assim como os seus principais conceitos básicos.

O sucesso que tem caracterizado a recente utilização de sistemas de funções alternativos na análise e processamento de sinais motivou o trabalho que aqui se apresenta; testar a utilização de sistemas de wavelets na resolução de problemas electromagnéticos.

## 3.2 Ferramentas para a análise de um sinal

A necessidade de se resolverem problemas cada vez mais complexos e de maiores dimensões, aliado ao extraordinário crescimento da capacidade dos meios de cálculo automático, tem motivado nas últimas décadas o desenvolvimento de uma enorme gama de técnicas e ferramentas numéricas.

Se nos reportarmos ao campo da análise e processamento de sinal, são bastantes as transformadas matemáticas que estão à disposição, cada uma com a sua área de aplicação, vantagens e inconvenientes. A transformada de Fourier será a mais conhecida, mas existem mais transformações particularmente relevantes no contexto deste trabalho como:

- ❖ Transformada localizada de Fourier;
- ❖ Transformada de Z;
- ❖ Transformada discreta de wavelets.

### 3.2.1 A análise de Fourier

O trabalho científico de Fourier é um dos marcos da ciência do século XIX. Fourier demonstrou que uma função podia ser representada como uma soma de sinusóides de diferentes frequências. A sua ideia era a de que muitas vezes, é mais fácil tratar matematicamente esta soma de funções do que a função original. Matematicamente a transformada de Fourier é representada por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3-1)$$

O resultado da transformada são os coeficientes de Fourier, os quais multiplicados pela sinusóide de frequência  $\omega$ , constituem as componentes sinusoidais do sinal original. A Figura 3-1 traduz a ideia anterior

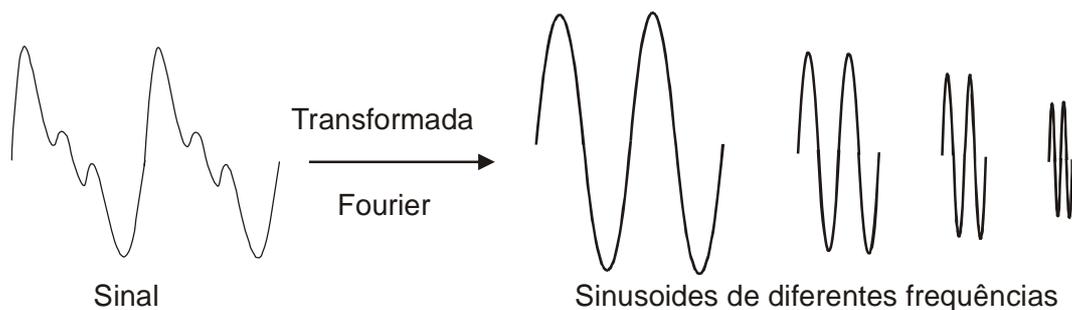


Figura 3-1 Decomposição de um sinal em diferentes frequências

A partir daqui, os matemáticos passaram a utilizar a representação de Fourier para resolver muitos problemas que de outra forma seriam intratáveis. Ao passarmos de um domínio para o outro perde-se, no entanto, a informação respeitante ao domínio de partida. A Figura 3-2 apresenta um esquema da transformada de Fourier.



Figura 3-2 Transformada de Fourier

### 3.2.2 Transformada de Fourier Localizada

A grande maioria dos sinais com que lidamos contêm transitórios, isto é, variações bruscas de sinal provocado pelo início ou fim de um evento. Estas características são a parte mais importante do sinal e a análise de Fourier não é adequada para a sua detecção se pretendermos uma localização no tempo das componentes espectrais do sinal.

Num esforço para corrigir esta deficiência Dennis Gabor (1946) adaptou a transformada de Fourier para analisar apenas partes do sinal no tempo. Esta técnica ficou conhecida como Transformada de Fourier Localizada do inglês *Short Time Fourier Transform* (STFT). A STFT é uma abordagem usual para a análise de sinais que apresentem transitórios, mapeando um sinal  $x(t)$  num sinal bidimensional  $X(t, f)$ . A Figura 3-3 apresenta um esquema desta transformada. Este tipo de análise fica criticamente dependente da escolha da “janela” que se usa para efectuar a análise. Gabor apresentou em [3-7] uma janela gaussiana óptima.



Figura 3-3 Transformada de Fourier Localizada

Fica-se a saber quando e quais as frequências que um sinal possui para um determinado intervalo de tempo. Não podemos saber quais as componentes de frequência que existem num determinado instante. O melhor que poderemos saber é quais as componentes que existem num intervalo de tempo. Trata-se portanto de um problema de resolução. A STFT usa uma resolução fixa (a janela é a mesma para todas as frequências). Se usarmos uma janela apertada temos uma boa resolução no tempo mas uma resolução pobre na frequência. Se usamos uma janela larga temos uma boa resolução em frequência mas pobre no tempo.

### 3.2.3 Transformada de wavelets

A abordagem mais flexível seria variar o tamanho da janela para determinar com mais precisão a informação no tempo ou na frequência. Ainda que a resolução no tempo e na frequência esteja sujeita a limitações (Princípio de incerteza Heisenberg), é possível analisar um sinal usando uma abordagem alternativa designada por análise multiresolução. Esta abordagem faz sentido quando o sinal possui componentes de altas frequências durante um curto período e componentes de baixas frequências por períodos longos.

O próximo passo lógico seria termos uma janela de tamanho variável e que se adaptasse ao sinal. A análise em wavelets permite o uso de janelas com um intervalo de tempo superior em zonas onde queremos informação pormenorizada às baixas frequências e janelas mais apertadas quando queremos informação às altas frequências. Por outras palavras, com a transformada de wavelet temos uma resolução variável. As altas frequências são melhor resolvidas no tempo e as baixas frequências são melhor resolvidas em frequência. A Figura 3-4 apresenta um esquema desta transformada.

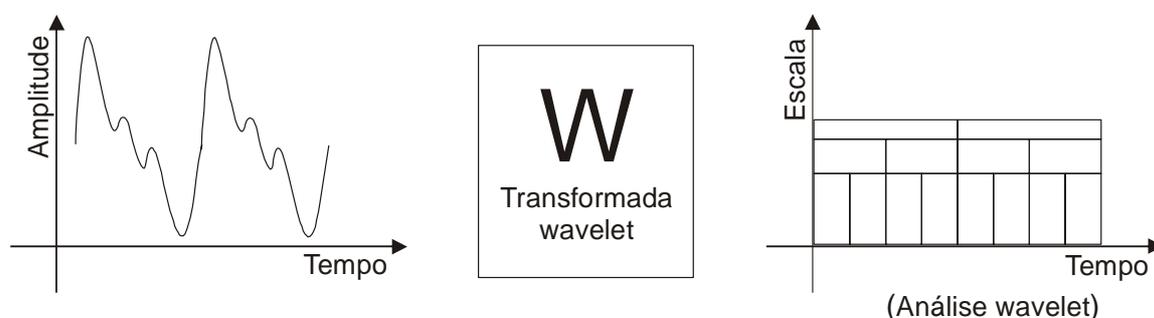


Figura 3-4 Transformada de wavelet

Por exemplo se analisarmos um trecho de uma sinfonia contendo violinos, clarins e flautas, o sinal é constituído por uma mistura que no entanto podemos desdobrar mentalmente e reconhecer os instrumentos. Isto porque de certa forma os nossos filtros auditivos funcionam de forma a separar as frequências "por canais" distintos, e monitorar a intensidade, duração, etc. em cada um desses canais. As wavelets permitem fazer isso. A Análise em tempo – frequência.

Analogamente à análise de Fourier, a transformada contínua de wavelet do inglês *Continuous Wavelet Transform (CWT)* é definida como uma soma ao longo de todo o tempo do sinal multiplicado por versões transladadas e dilatadas ou contraídas da wavelet original

$$C(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (3-2)$$

O resultado da CWT são os vários coeficientes de wavelet  $C$ , os quais são função da escala e da posição. Multiplicando cada coeficiente pela versão da wavelet apropriada obtemos a decomposição de um sinal em wavelets. A Figura 3-5 ilustra a ideia anterior.

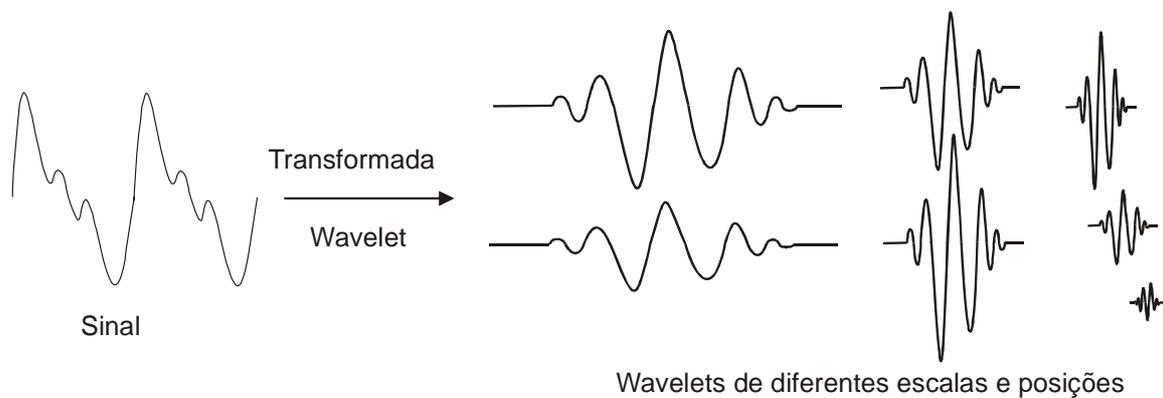


Figura 3-5 Decomposição de um sinal com wavelets

Uma wavelet é uma forma de onda de duração limitada que tem um valor médio nulo. Se compararmos a forma de onda de uma wavelet com uma sinusóide, que é a função base da análise de Fourier, podemos ver que as sinusóides não têm duração limitada, estendem-se de menos a mais infinito e têm uma forma suave e regular. Pelo contrário, as wavelets tendem a ser irregulares e assimétricas e podem ter ou não suporte compacto dependendo da sua natureza (ver figuras à frente).

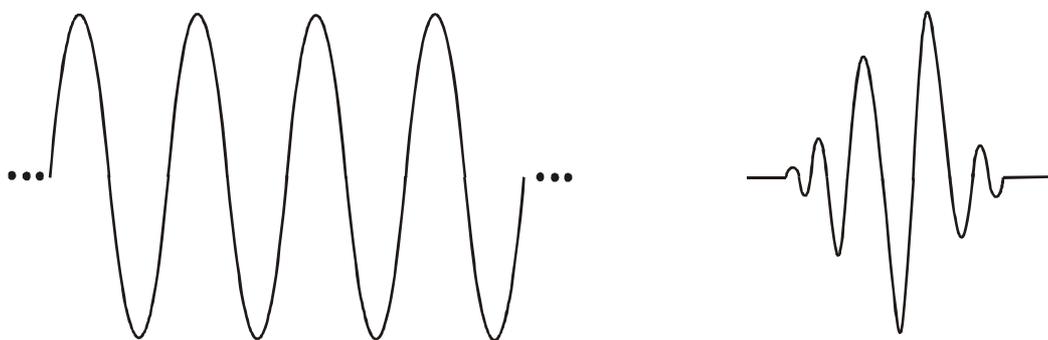


Figura 3-6 Sinusóide versus wavelet

A transformada de wavelet é uma ferramenta de processamento de sinais que tem um trunfo sobre as técnicas clássicas de Fourier: as suas funções bases (wavelets) não pertencem a um espaço finito de soluções, isto é, existem teoricamente infinitas possibilidades de se projectar wavelets com propriedades especiais, voltadas para aplicações específicas. Assim, as wavelets que são utilizadas para compressão de dados podem revelar-se péssimas para aplicações de análises de sinais biológicos, ou síntese de musica. Da mesma forma, wavelets para síntese de sons podem não ser úteis em aplicações para compressão de dados.

### 3.3 A análise multiresolução

As características e propriedades das bases de wavelets podem ser compreendidas mais facilmente se tivermos em conta os conceitos introduzidos pela definição de análise multiresolução. Este conceito foi introduzido por Meyer e Mallat [3-5] e como o próprio nome sugere, aplicando este tipo de análise podemos decompor um função (ou sinal) em diferentes níveis de resolução, ou seja, decompor uma função mais complicada em funções mais simples e estudá-las separadamente. Permite também obter, de uma forma eficaz, a informação necessária para se poder passar de um nível de resolução para o outro. Para melhor compreender a noção de análise multiresolução consideremos a função representada na Figura 3-7 (a). Esta função pode ser representada de uma forma mais grosseira (aproximação) se eliminarmos algumas das suas características. O resultado desta operação está representado em (b). Em (c) representa-se a parte da função que tínhamos suprimido da função original (detalhe). Esta aproximação à função original pode agora também ser dividida novamente em duas partes, eliminando mais alguns detalhes. O resultado está representado em (d) enquanto em (e) se representam os detalhes que foram eliminados. A este processo de ir eliminando detalhes da função original é designado por processo de decomposição dentro da análise multiresolução. Observando as diversas figuras anteriores vemos que a função original pode ser novamente recuperada se adicionarmos à última aproximação obtida todos os detalhes que fomos eliminando. Este processo é designado por processo de reconstrução dentro da análise multiresolução.

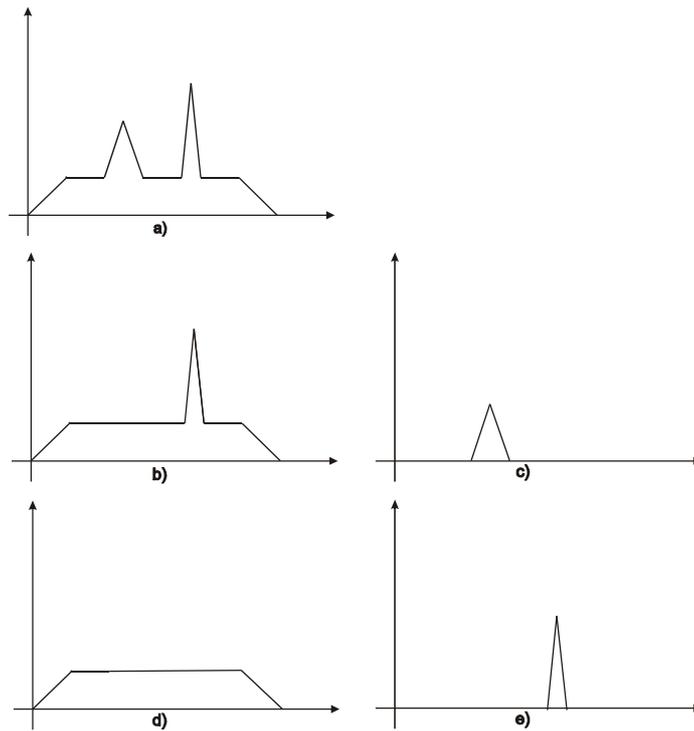


Figura 3-7 Processo da análise multiresolução

Ao efectuar-se esta divisão de uma função em termos de aproximação e detalhe é possível eliminar alguns dos detalhes que estejam abaixo de um determinado valor e posteriormente recuperar o sinal sem que o erro introduzido seja significativo. Ao eliminarmos alguns dos detalhes o que estamos a conseguir é obter uma representação esparsa e adaptativa. Evidentemente para que tudo isto tenha sucesso é necessário que o processo de passar da representação completa para a representação esparsa e vice-versa seja extremamente rápido e eficaz sob pena de comprometer os algoritmos. Esta análise em multiresolução (divisão de um sinal segundo diferentes níveis de resolução) pode ser levada a cabo utilizando as wavelets cujas propriedades particulares vão permitir realizar a decomposição de uma função em funções mais simples e que será descrito de seguida.

Embora a análise multiresolução seja bastante importante, não só pela relevância no tratamento teórico das questões envolvendo bases de wavelets, mas também pelo enorme potencial que encerra em termos de desenvolvimento de aplicações, não cabe neste trabalho fazer um tratamento exaustivo do tema. Introduzem-se apenas, sem grande formalismo matemático, alguns conceitos que serão bastante úteis na compreensão das famílias de bases de wavelets.

Antes de terminar esta secção deixa-se apenas uma notação sobre algumas considerações matemáticas que se vão usar. As funções consideradas satisfazem, por hipótese,  $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 < \infty$ , ou simbolicamente,  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

Define-se também produto escalar ou interno e a norma para o espaço  $L^2(\mathbb{R})$  como:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \cdot g^* \qquad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle \qquad (3-3)$$

### 3.3.1 Função de escala

Para efectuar a análise multiresolução de uma função em  $L^2(\mathbb{R})$ , há necessidade de definir primeiro uma sequência de sub-espacos  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  que verificam as seguintes propriedades [3-6]:

$$\begin{aligned} & \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2 \\ & V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z} \\ & V_{-\infty} = \{0\} \\ & V_{+\infty} = L^2(\mathbb{R}) \end{aligned} \qquad (3-4)$$

Atendendo a esta definição de sub-espacos  $V_j$ , e admitindo por hipótese que os diferentes sub-espacos estão relacionados através da seguinte condição [3-6]:

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \qquad (3-5)$$

e que cada sub-espaco  $V_j$ , será gerado a partir de todas as translações inteiras de uma única função  $f(x)$  que verifique:

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x+k) \in V_0, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \qquad (3-6)$$

Surge então a necessidade de se definir em  $V_0$ , uma função que desempenhe um papel fulcral na análise multiresolução e na geração dos sistemas de wavelets. É a chamada função de escala, usualmente representada na literatura por  $\phi(x)$ . A função de escala  $\phi(x)$  e as suas translações inteiras  $\phi(x-k)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , formam uma base do sub-espaco  $V_0$ . Como consequência das condições atrás enunciadas, as funções  $\sqrt{2}\phi(2x-m)$ , com  $m \in \mathbb{Z}$ , formam uma base para o sub-espaco  $V_1$ . Como  $V_0$  está

contido em  $V_1$ , qualquer função definida em  $V_0$  pode ser expressa como combinação linear das funções que constituem a base do sub-espaço  $V_1$ . Em particular, é possível escrever para a função de escala:

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(2x - k) \quad (3-7)$$

Esta equação é extremamente importante, uma vez que constitui a base para a geração dos diferentes sistemas de wavelets. É conhecida geralmente como equação de dilatação. Em alternativa pode ser designada por equação de refinamento ou por equação de relação de escala. Os coeficientes  $\alpha_k$  denominam-se de coeficientes da função de escala, e verificam a seguinte propriedade:

$$\sum_k (-1)^k \alpha_k = 0 \quad (3-8)$$

Para um dado valor inteiro  $j$ , as funções:

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \text{ com } j, k \in \mathbb{Z} \quad (3-9)$$

obtidas a partir da função de escala  $\phi(x)$  através de uma operação de dilatação e uma translação, formam uma base do sub-espaço  $V_j$ . O inteiro  $j$ , é o chamado parâmetro de dilatação (ou escala), enquanto que o inteiro  $k$  define a translação efectuada.

Define-se então a função de escala como uma função  $\phi(x)$  que pertença a um dado sub-espaço que cumpra as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx &= 1 \\ \|\phi(x)\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx = 1 \\ \langle \phi(x), \phi(x-n) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \cdot \phi(x-n) dx = \delta(n) \end{aligned} \quad (3-10)$$

Sendo assim, podemos dizer que uma função  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  pode ser projectada sobre o sub-espaço  $V_j$  de modo que o desenvolvimento formado pelas funções de escala  $\phi_{j,k}(x)$  constituam uma aproximação  $f_j(x)$  a essa função.

$$f_j(x) \in V_j \Rightarrow f_j(x) = \sum_k a_k \phi_{j,k}(x) \tag{3-11}$$

e onde, devido à propriedade de ortogonalidade da função de escala os coeficientes do desenvolvimento calculam-se como:

$$a_k = \langle f(x), \phi_{j,k}(x) \rangle \tag{3-12}$$

### 3.3.2 Função wavelet

A análise multiresolução conduz directamente a uma decomposição do espaço  $L^2(R)$ . No entanto, quando se projecta uma função sobre o sub-espaço  $V_j$  estamos a perder uma certa informação correspondente aos detalhes da função. Seria pois desejável poder descrever uma função  $f(x)$  em termos da sua aproximação no nível de resolução  $j$ , e dos restantes termos ortogonais que constituem os detalhes mais finos. Defina-se então agora o sub-espaço  $W_{j-1}$  como sendo o complementar ortogonal de  $V_{j-1}$  em  $V_j$ . Tem-se então que:

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \tag{3-13}$$

com  $V_{j-1} \perp W_{j-1}$  e onde  $\oplus$  representa uma soma directa. Daqui resulta que os sub-espaços  $W_j$  são ortogonais e que a sua soma directa é  $L^2(R)$ . A figura seguinte traduz os conceitos anteriores.

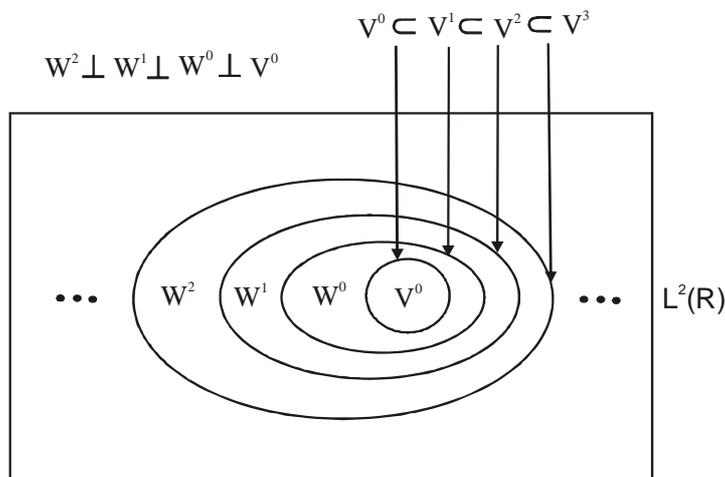


Figura 3-8 O processo da análise multiresolução

A relação entre os diferentes sub-espacos pode-se então expressar da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 V_j \cap W_j &= \{0\} \\
 V_{j+1} &= V_j + W_j \\
 W_{-\infty} \oplus \dots \oplus W_{-1} &= V_0 \\
 L^2 &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \\
 L^2 &= \dots W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots
 \end{aligned} \tag{3-14}$$

Para além da função de escala  $\phi(x)$ , há agora uma outra função, definida em  $W_0$ , cuja definição é essencial para a geração do sistema completo de wavelets. Trata-se da wavelet primária, usualmente representada por  $\psi(x)$ . Esta função que também se denomina por função wavelet propriamente dita, em conjunto com todas as suas translações inteiras,  $\psi(x-k)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , deverá constituir uma base do sub-espaco  $W_0$ .

Como o sub-espaco  $W_0$  está contido no sub-espaco  $V_1$ , a wavelet primária  $\psi(x)$  pode ser expressa como combinação linear das funções que constituem a base de  $V_1$ . Pode então escrever-se que:

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \phi(2x-k) \tag{3-15}$$

que é conhecida como a equação de refinamento. Os coeficientes  $\beta_k$  designam-se de coeficientes da função de wavelet e estão relacionados com os coeficientes  $\alpha_k$  da equação de escala, de modo a garantir a desejada ortogonalidade entre os sub-espacos,  $V_0$  e  $W_0$ . Verifica-se então a seguinte identidade:

$$\beta_k = (-1)^k \alpha(1-k) \tag{3-16}$$

Portanto as funções

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \text{ com } j, k \in \mathbb{Z} \tag{3-17}$$

formam, para um dado valor do parâmetro  $j$ , uma base do sub-espaco  $W_j$ . O conjunto de todas as translações e dilatações da wavelet primária constitui uma base de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Define-se então a função de wavelet como uma função  $\psi(x)$  que pertença a um dado sub-espço que cumpra as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 1$$

$$\|\psi(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\langle \psi(x), \psi(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \cdot \psi(x-n) dx = \delta(n)$$

$$\langle \psi(x), \phi(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \cdot \phi(x-n) dx = 0$$
(3-18)

O conjunto formado pelas funções  $\psi_{j,k}(x)$  constituem uma base ortogonal do sub-espço  $W_j$  e portanto qualquer função  $f(x)$  que pertença ao referido sub-espço pode ser decomposta como uma combinação linear de funções base da seguinte forma:

$$f(x) \in W_j \Rightarrow f(x) = \sum_k b_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$
(3-19)

e onde, devido à propriedade de ortogonalidade da função wavelet, os coeficientes do desenvolvimento calculam-se usando:

$$b_{j,k} = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle$$
(3-20)

### 3.3.3 Propriedades das funções de escala e de wavelet

As principais propriedades dos sistemas de wavelets, e que definem a análise multiresolução, têm vindo a ser referenciadas ao longo das secções anteriores. Não será contudo demais listar de novo as mais relevantes.

1. As funções de escala  $\phi_{j,k}(x)$  formam uma base ortonormada do sub-espço  $V_j$  verificando-se que:

$$\langle \phi_{j,k}(x), \phi_{j,n}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j,k}(x) \phi_{j,n}(x) dx = \delta_{k,n}$$
(3-21)

Isto implica que quando se utilizam funções de escala para a expansão de uma função, não se podem misturar diferentes níveis de resolução  $j$ .

2. As wavelets  $\psi_{j,k}(x)$  formam uma base ortonormada de  $L^2(R)$ . Verifica-se que:

$$\langle \psi_{j,k}(x) \psi_{m,n}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(x) \psi_{m,n}(x) dx = \delta_{j,m} \delta_{k,n} \quad (3-22)$$

3. Para um determinado valor do parâmetro de dilatação  $j$ , verifica-se que as funções  $\phi_{j,k}(x)$   $\psi_{j,k}(x)$  são ortonormais. Tem-se então que:

$$\langle \phi_{j,k}(x) \psi_{j,m}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j,k}(x) \psi_{j,m}(x) dx = \delta_{k,m} \quad (3-23)$$

As duas propriedades anteriores permitem-nos utilizar funções de escala de um nível de resolução juntamente com funções de wavelet de maior ou igual resolução.

4. Qualquer função  $f(x) \in L^2(R)$  pode-se expressar como uma soma de séries convergentes da forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{j_0} \phi_n^{j_0}(x) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^j \psi_n^j(x) \quad (3-24)$$

e devido à ortogonalidade das funções de escala e wavelet, os coeficientes do desenvolvimento podem-se calcular do seguinte modo.

$$\begin{aligned} a_n^{j_0} &= \langle f(x), \phi_n^{j_0}(x) \rangle \\ b_n^j &= \langle f(x), \psi_n^j(x) \rangle \end{aligned} \quad (3-25)$$

5. A transformada de Fourier da função de escala é uma função passa baixo, enquanto que a transformada de Fourier da wavelet primária é uma função passa banda. Isto implica que no desenvolvimento em multiresolução as funções de escala podem-se utilizar para representar o conteúdo de baixas frequências do sinal (aproximação), enquanto as wavelets primárias representam o conteúdo de frequências superiores (detalhes).
6. Para toda a função de wavelet  $\psi(x)$ , existe um número natural  $M$  tal que  $\psi(x)$  é ortogonal a todos os polinómios de grau  $k \leq M - 1$ :

$$\int x^k \psi(x) dx = 0 \quad K = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \quad (3-26)$$

Diz-se então que a wavelet primária possui  $M$  momentos. É esta propriedade que é responsável pela representação das variações abruptas do campo electromagnético e armazenamento dessa informação nos coeficientes da

wavelet. Isto significa que se usarmos um desenvolvimento em funções de escala e wavelets, então os coeficientes de escala,  $a_n^{j_0}$ , são mais significativos que os coeficientes de wavelets,  $b_n^j$ , a menos que o campo experimente variações abruptas. Desta forma, consegue-se realizar um algoritmo adaptativo utilizando como critério para justificar um aumento ou diminuição da resolução o valor dos coeficientes da wavelet. Isto significa que o valor de  $M$  dá-nos uma ideia do grau de precisão obtido ao realizar a aproximação de uma função utilizando unicamente funções de escala. Quanto maior for  $M$  maior será a informação armazenada nos coeficientes de escala e menor a informação de detalhe armazenado nos coeficientes da wavelet.

Usando os princípios da análise multiresolução consegue-se fazer a decomposição e a reconstrução de uma função e deste modo temos a possibilidade de analisar quais os detalhes que são significativos e os que não são. Isto permite a definição de uma grelha adaptativa. A Figura 3-9 apresenta a decomposição de uma função genérica usando a wavelet de Haar onde é possível observar a aproximação, os detalhes e a função reconstruída.

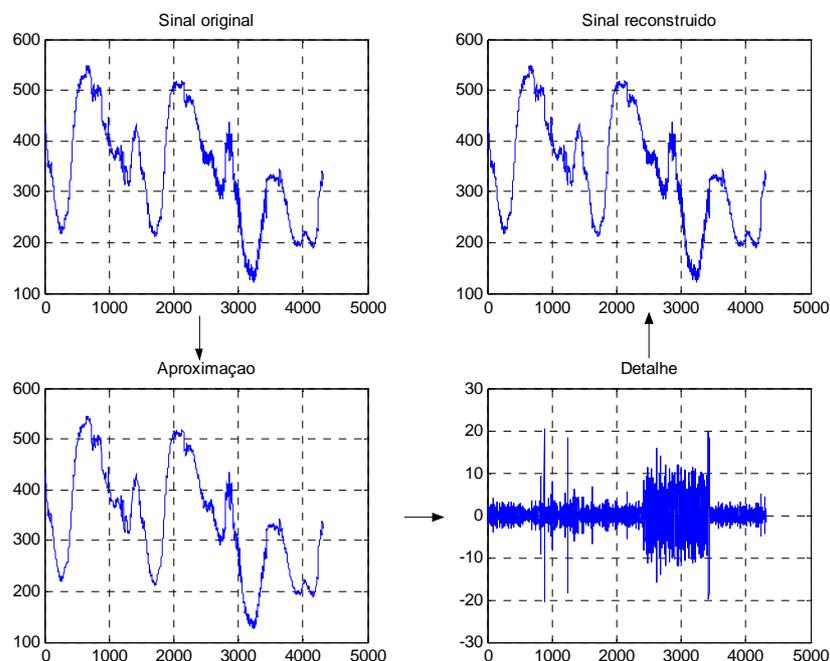


Figura 3-9 Decomposição de uma função por análise multiresolução

### 3.3.4 Wavelet de Haar

A maioria das funções de escala e de wavelet utilizadas não possuem uma expressão analítica fechada. Só em alguns casos como as funções de Haar, Meyer, e Shannon, se define uma expressão analítica que as descreve. No entanto, apenas é necessário conhecer os coeficientes de escala  $\alpha_k$  e os coeficientes de wavelet  $\beta_k$ . Mais, pode-se dizer que estes coeficientes se podem interpretar como coeficientes de filtros sendo esta a grande vantagem da análise multiresolução.

Assim temos, que a função de escala no caso da wavelet de Haar é definida por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3-27)$$

ou seja, é uma função constante no intervalo  $[0,1]$ .

É fácil verificar que esta função verifica a equação de dilatação, se considerarmos  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$  e  $\alpha_k = 0$  para valores de  $k$  diferentes, obtendo-se:  $\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1)$ .

Já a função wavelet propriamente dita é obtida substituindo na equação da wavelet primária  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = -1$  e também  $\beta_k = 0$  para outros valores de  $k$  diferentes, obtendo-se a seguinte equação de refinamento :  $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1)$  sendo então definida por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3-28)$$

Para se formar o sistema de wavelets de Haar, há agora que obter as dilatações e as translações, quer da função de escala, quer da wavelet primária. A Figura 3-10 apresenta as wavelets de Haar assim como os coeficientes dos filtros.

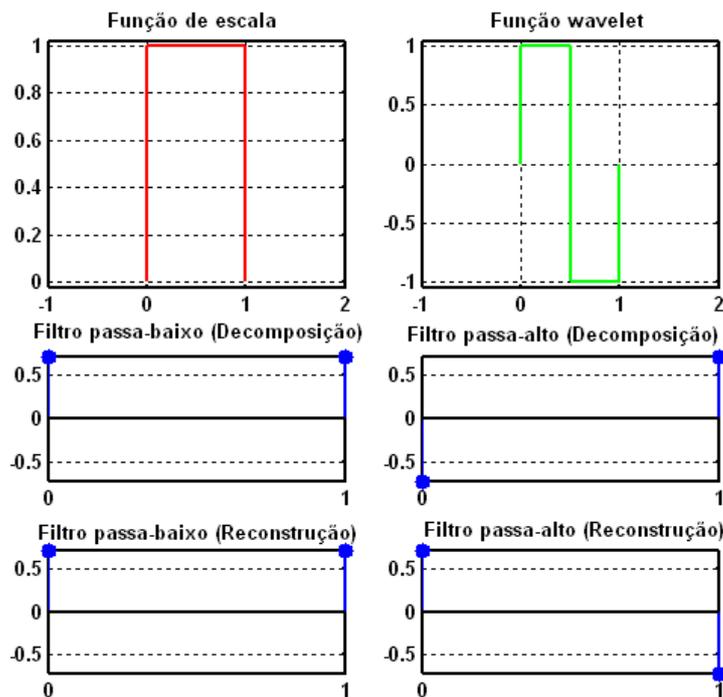


Figura 3-10 Wavelets de Haar

### 3.3.5 Família de wavelets de Daubechies

As wavelets de Daubechies [3-3], formam sistemas completos de funções ortonormais. A geração de tais sistemas passa pela obtenção da respectiva função de escala:  $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(2x - k)$  a qual é caracterizada pelos diferentes valores dos coeficientes  $\alpha_k$ .

Os coeficientes  $\alpha_k$  como se referiu anteriormente podem ser interpretados como coeficientes de um filtro. Os sistemas de wavelets de Daubechies são organizados em diferentes famílias, cada uma das quais caracterizada por um número diferente de coeficientes  $\alpha_k$  não nulos. Cada família é identificada pelo seu número de família, denotado aqui por  $N$ , e cujo valor é igual a metade do número de coeficientes do filtro. As funções de escala assim definidas tomam valores diferentes de zero apenas no intervalo  $[0, 2N - 1]$ . A este intervalo costuma chamar-se suporte da função de escala.

A wavelet primária de cada uma das famílias anteriores, pode ser definida através da respectiva equação de refinamento:  $\psi(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} \beta_k \phi(2x-k)$  onde os coeficientes  $\beta_k = (-1)^k \alpha(1-k)$ , são condicionados pela necessidade de se garantir a ortonormalidade entre a função de escala e a wavelet primária. O suporte da wavelet primária  $\psi(x)$  é igual ao da função de escala correspondente. A Figura 3-11 representa algumas wavelets da família de Daubechies, assim como os coeficientes dos filtros.

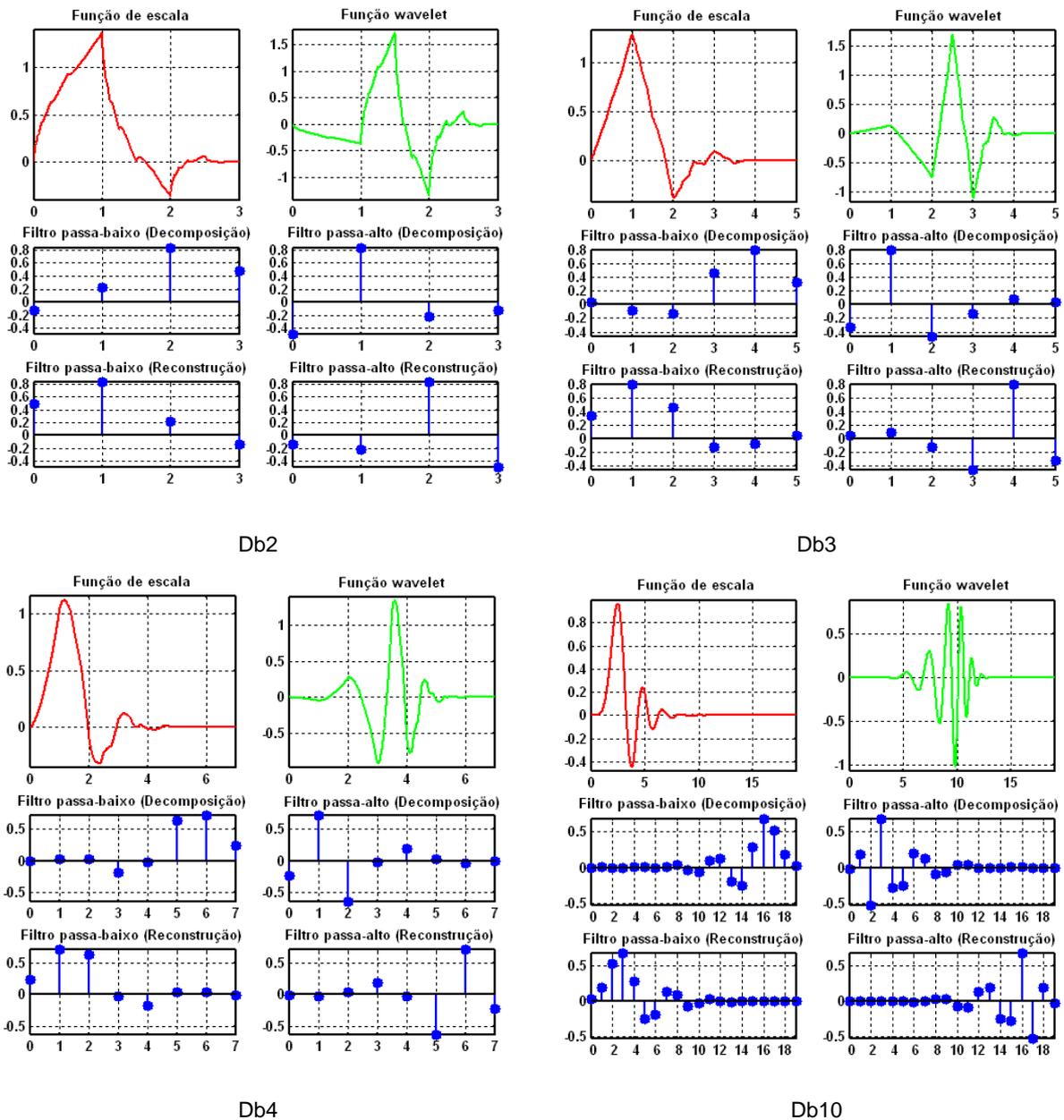


Figura 3-11 Wavelets de Daubechies

A regularidade das wavelets de Daubechies aumenta à medida que cresce o valor de  $N$ . Para cada uma das famílias de wavelets de Daubechies, o sistema completo de funções é obtido considerando translações e dilatações, quer sobre a função de escala quer sobre a wavelet primária. A determinação dos coeficientes dos filtros está fora do âmbito deste trabalho e pode ser encontrado em [3-8]. Deixa-se aqui apenas os respectivos valores.

COEFICIENTES DOS FILTROS PASSA BAIXO $[\phi]$ E PASSA ALTO $\psi$						
	Db1		Db2		Db3	
k	$\alpha_k$	$\beta_k$	$\alpha_k$	$\beta_k$	$\alpha_k$	$\beta_k$
0	0,70710678	0,70710678	0,48296291	-0,12940952	0,33267055	0,03522629
1	0,70710678	-0,70710678	0,83651630	-0,22414386	0,80689150	0,08544127
2			0,22414386	0,83651630	0,45987750	-0,13501102
3			-0,12940952	-0,48296291	-0,13501102	-0,45987750
4					-0,08544127	0,80689150
5					0,03522629	-0,33267055
	Db4		Db5		Db6	
k	$\alpha_k$	$\beta_k$	$\alpha_k$	$\beta_k$	$\alpha_k$	$\beta_k$
0	0,23037781	-0,01059740	0,16010240	0,00333573	0,11154074	-0,00107730
1	0,71484657	-0,03288301	0,60382927	0,01258075	0,49462389	-0,00477726
2	0,63088077	0,03084138	0,72430853	-0,00624149	0,75113391	0,00055384
3	-0,02798377	0,18703481	0,13842815	-0,07757149	0,31525035	0,03158220
4	-0,18703481	-0,02798377	-0,24229489	-0,03224487	-0,22626469	0,02752287
5	0,03084138	-0,63088077	-0,03224487	0,24229489	-0,12976687	-0,09750161
6	0,03288301	0,71484657	0,07757149	0,13842815	0,09750161	0,12976687
7	-0,01059740	-0,23037781	-0,00624149	-0,72430853	0,02752287	0,22626469
8			-0,01258075	0,60382927	-0,03158220	0,31525035
9			0,00333573	-0,16010240	0,00055384	-0,75113391
10					0,00477726	0,49462389
11					-0,00107730	-0,11154074

Tabela 3-1 Coeficientes dos filtros das wavelets de Daubechies

### 3.3.6 Outras famílias de wavelets

Vários são os sistemas de wavelets ortogonais que têm sido construídos em  $L^2(\mathbb{R})$ . O que os distingue é fundamentalmente a sua maior ou menor localização no domínio do espaço e da frequência e a sua regularidade.

Além da família de wavelets de Daubechies [3-3], outros sistemas surgiram, sendo os mais citados as wavelets de Meyer, de Battle-Lemarié, *coiflets*, e *symlets*. As wavelets propostas por Meyer [3-2] apresentam suporte compacto no domínio da frequência. No domínio do espaço, embora, tenham um comportamento acentuadamente local, são definidas sobre toda a recta dos reais. Apresentam no entanto um decaimento mais rápido que qualquer função do tipo  $1/x^p$ , embora não possuam decaimento exponencial. As wavelets de Battle-Lemarié [3-2] são construídas com base em funções *spline*. Estas wavelets têm também suporte não compacto no domínio do espaço mas apresentam um decaimento exponencial. A Figura 3-12 apresenta as wavelets de Meyer.

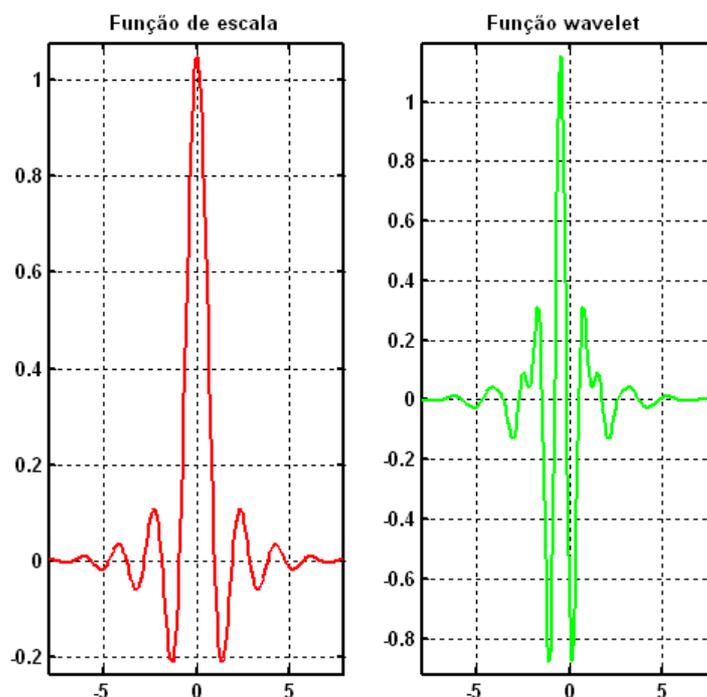


Figura 3-12 Wavelets de Meyer

Por outro lado as *coiflets*, e *symlets* apresentam suporte compacto no espaço, isto é, estão definidas num intervalo fechado apresentando um comportamento semelhante à família de wavelets de Daubechies. A Figura 3-13 apresenta estas famílias de wavelets.

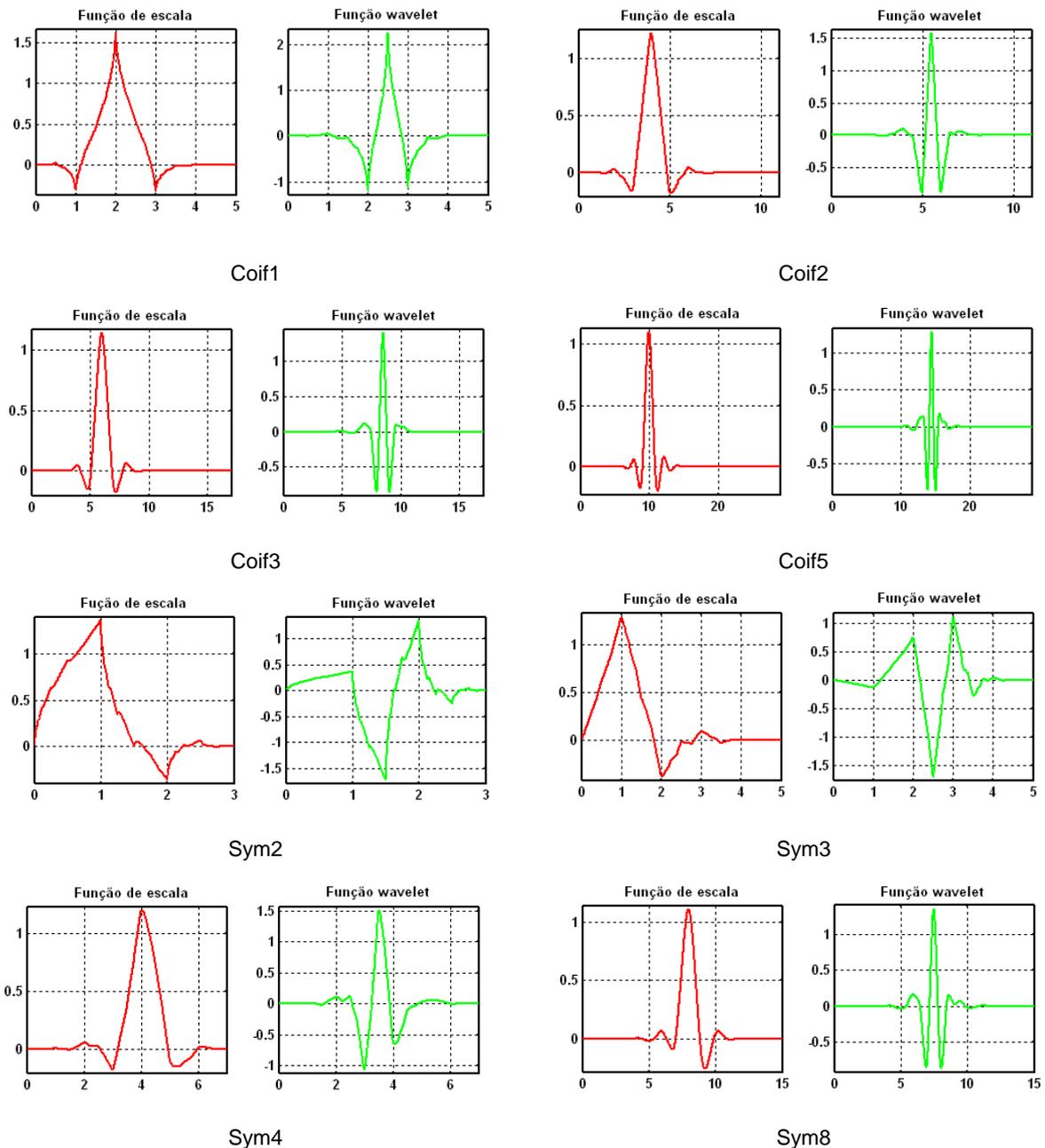


Figura 3-13 *Coiflets* e *symlets*.

O sistema de wavelets proposto por Daubechies é o único que consegue definir as funções sobre um intervalo limitado no domínio do espaço e ao mesmo tempo garantir a ortogonalidade. Estas wavelets retêm boas características de localização no domínio da

frequência, enquanto que o suporte compacto no domínio do espaço lhes confere aqui um comportamento estritamente local. Foi esta família de wavelets que se usou na primeira fase deste trabalho sem conseguirmos no entanto alcançar os resultados pretendidos como mais tarde se indica.

### 3.4 Transformada discreta de wavelets

Tendo sido definido o conceito de análise multiresolução e a sua importância no processo de decomposição de uma função é agora importante definir uma ferramenta que permita fazer a passagem de uma representação em multinível para uma representação convencional e vice-versa. Importante neste processo é a velocidade com a esta transformação tem de ser feita sob pena de comprometer o algoritmo.

Na secção anterior foram apresentadas as equações correspondentes à função de escala e à wavelet primária. Estas equações vão permitir trabalhar com a função de escala e a wavelet primária utilizando unicamente os seus coeficientes  $\alpha_k$  e  $\beta_k$ .

Uma maneira eficiente de implementar este esquema usa filtros e designa-se por algoritmo piramidal ou em cascata e foi desenvolvido por Mallat em 1988 [3-6]. Usando este algoritmo é possível obter os coeficientes de escala e de wavelet de uma função  $f(x)$  num determinado nível de resolução mediante sucessivas convoluções entre os coeficientes  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  e os coeficientes de escala de um nível superior. Os coeficientes resultantes designam-se por coeficientes da transformada discreta em wavelets da função  $f(x)$ .

Como foi referido anteriormente podemos aproximar uma função  $f(x)$  num nível de resolução  $j+1$  de acordo com a seguinte equação:

$$f^{j+1}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^j \phi_n^j(x) + \sum_{-\infty}^{\infty} b_n^j \psi_n^j(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^{j+1} \phi_n^{j+1}(x) \quad (3-29)$$

Isto significa que se tivermos os coeficientes  $a^j$  pertencentes à aproximação de uma função no nível de resolução  $J$ , podemos obter os coeficientes  $a^j$  e  $b^j$

correspondentes ao desenvolvimento em termos de menor resolução ( $j < J$ ). O processo de obtenção dos termos de menor resolução a partir dos termos de resolução superior recebe o nome de transformada discreta em wavelets, do inglês *Discret Wavelet Transform* (DWT).

Usando as equações da função de escala e da wavelet primária chega-se à relação entre os coeficientes de escala de ordem superior e os coeficientes de escala e wavelet de ordem inferior:

$$\begin{aligned} a^{j-1}(k) &= \sum_n \alpha(n-2k)a^j(n) \\ b^{j-1}(k) &= \sum_n \beta(n-2k)a^j(n) \end{aligned} \tag{3-30}$$

Como é lógico, a reconstrução dos coeficientes de escala num nível de resolução mais fino,  $j$ , pode ser obtido a partir dos coeficientes de escala e wavelet numa escala mais grossa  $j-1$ . O processo que o permite fazer designa-se por transformada inversa em wavelets do inglês *Inverse Discret Wavelet Transform* (IDWT). Do mesmo modo que se obteve as equações anteriores para a decomposição pode-se agora chegar à seguinte equação de reconstrução:

$$a^j(k) = \sum_n a^{j-1}(n)\alpha(k-2n) + \sum_n b^{j-1}(n)\beta(k-2n) \tag{3-31}$$

As operações de decomposição e reconstrução traduzidas pelas equações anteriores podem ser interpretadas como convoluções associadas respectivamente a uma operação de decimação e interpolação por dois.

Este algoritmo pode também ser visto como um processo de filtragem digital em que o sinal se decompõe em duas partes, uma que contém as baixas frequências e que vem dado pelas funções de escala e outro que contém as altas frequências e que é traduzido pelas funções de wavelet. Senão vejamos, do processamento de sinal sabemos que o processo de filtragem consiste na convolução de uma sequência de entrada  $x(n)$  com os coeficientes do filtro  $h(n)$ , sendo a saída dada por:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n-k) \tag{3-32}$$

Ora é exactamente isso que acontece em (3-30). Essas equações mostram que os coeficientes de escala e wavelet no nível de resolução  $j-1$  podem ser obtidos pela convolução dos coeficientes de escala do nível  $j$  com os coeficientes do filtro  $\alpha(-n)$  e  $\beta(-n)$  seguido de uma decimação por 2. Os coeficientes  $\alpha(-n)$  e  $\beta(-n)$  correspondem aos coeficientes de  $\alpha(n)$  e  $\beta(n)$  invertendo a sua ordem. Matematicamente a decomposição pode ser vista como:

$$\begin{aligned} a^{j-1}(k) &= \sum_n \alpha(n-2k)a^j(n) = \sum_n \tilde{\alpha}(2k-n)a^j(n) \\ &\Rightarrow a^{j-1} = [\tilde{\alpha} * a^j] \downarrow 2, \quad \text{com } \tilde{\alpha} = \alpha(-k) \end{aligned} \tag{3-33}$$

$$\begin{aligned} b^{j-1}(k) &= \sum_n \beta(n-2k)a^j(n) = \sum_n \tilde{\beta}(2k-n)a^j(n) \\ &\Rightarrow b^{j-1} = [\tilde{\beta} * a^j] \downarrow 2, \quad \text{com } \tilde{\beta} = \beta(-k) \end{aligned}$$

Tendo em conta que os filtros  $\alpha(n)$  e  $\beta(n)$  são finitos e formados por um número  $N$  de coeficientes, os filtros  $\tilde{\alpha}(n)$  e  $\tilde{\beta}(n)$  podem ser expressos em função dos primeiros da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(n) &= \alpha(N-1-n) \\ \tilde{\beta}(n) &= \beta(N-1-n) \end{aligned} \tag{3-34}$$

De um modo semelhante a reconstrução pode ser vista como:

$$\begin{aligned} a^j(k) &= \sum_n (a^{j-1}(n)\alpha(k-2n) + b^{j-1}(n)\beta(k-2n)) \\ &\Rightarrow a^j = (\alpha * [a^{j-1}] \uparrow 2) + (\beta * [b^{j-1}] \uparrow 2) \end{aligned} \tag{3-35}$$

A Figura 3-14 ilustra a situação descrita anteriormente.

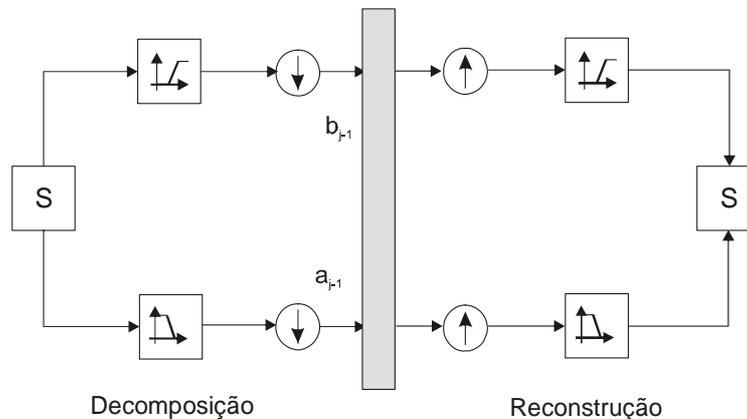


Figura 3-14 Transformada discreta de wavelet.

Os filtros de decomposição  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  juntamente com os filtros de reconstrução  $\alpha$  e  $\beta$  formam um sistema que é designado por filtros de quadratura conjugada (CQF). O modo como estes filtros são construídos pode ser encontrado na diversa bibliografia disponível sobre o assunto [3-9].

Este processo de decomposição pode ser efectuado um determinado número de vezes. A Figura 3-15 ilustra o princípio.

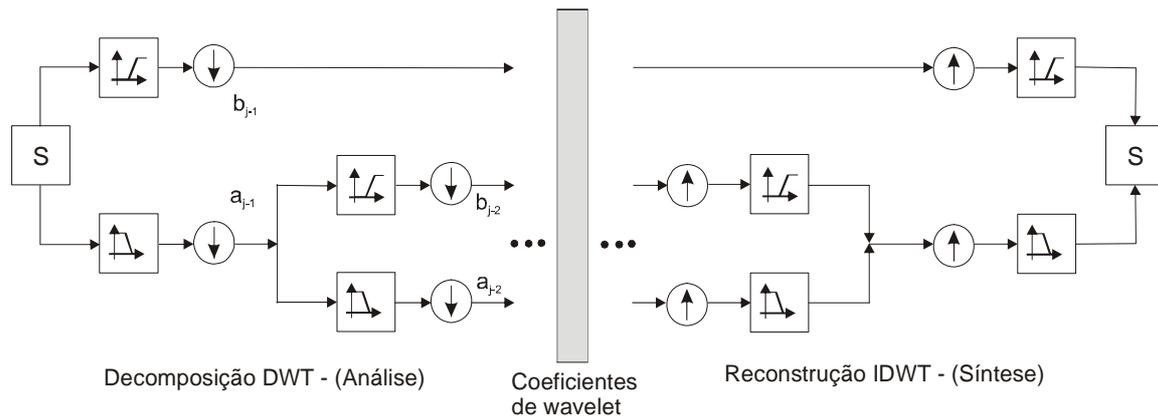


Figura 3-15 Transformada discreta de wavelet.

Os filtros de reconstrução para além de serem importantes para a reconstrução do sinal estão também relacionados como vimos anteriormente com as formas de onda da wavelet primária e da função de escala. Assim, os coeficientes do filtro  $\beta(n)$  determinam a forma de onda da wavelet que se usa, enquanto que os coeficientes do filtro  $\alpha(n)$  estão relacionados com a forma de onda da função de escala.

Usando o algoritmo de Mallat é extremamente rápido o cálculo de uma DWT. Usando este algoritmo podemos falar em aproximações e detalhes. As aproximações são as componentes de baixa frequência do sinal (escala elevada), os detalhes representam as componentes de alta frequência (escala baixa). A Figura 3-16 apresenta o resultado da aplicação de uma DWT a um sinal. Da figura pode-se concluir que os coeficientes de detalhe são pequenos e consistem essencialmente no ruído de alta frequência enquanto os coeficientes de aproximação contêm menos ruído que o sinal original e representam as componentes de baixa frequência do sinal. A análise e síntese do sinal foi feita com *symlets* (Sym4).

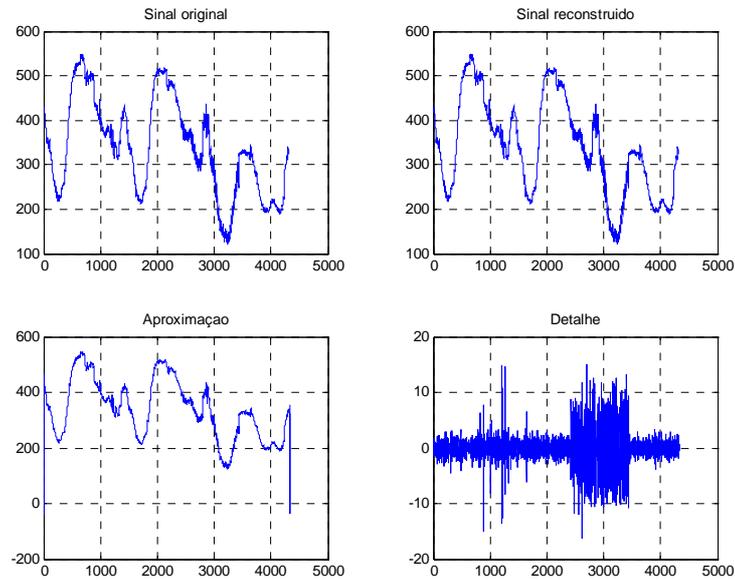
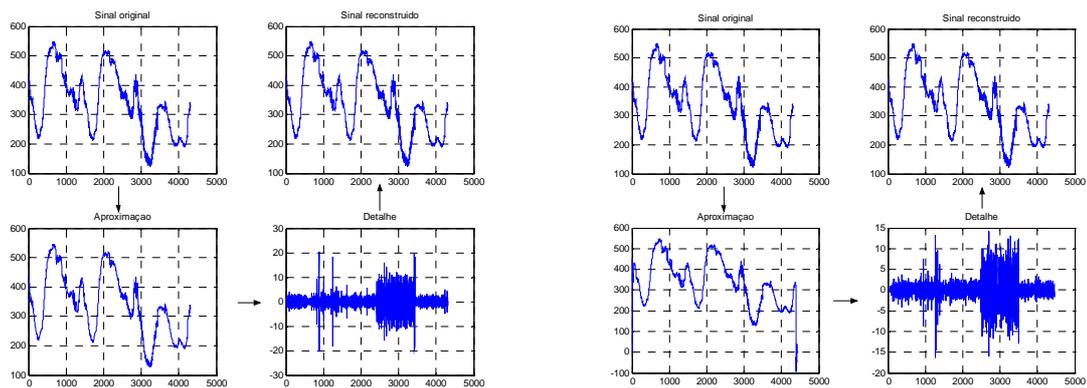


Figura 3-16 Aplicação da DWT

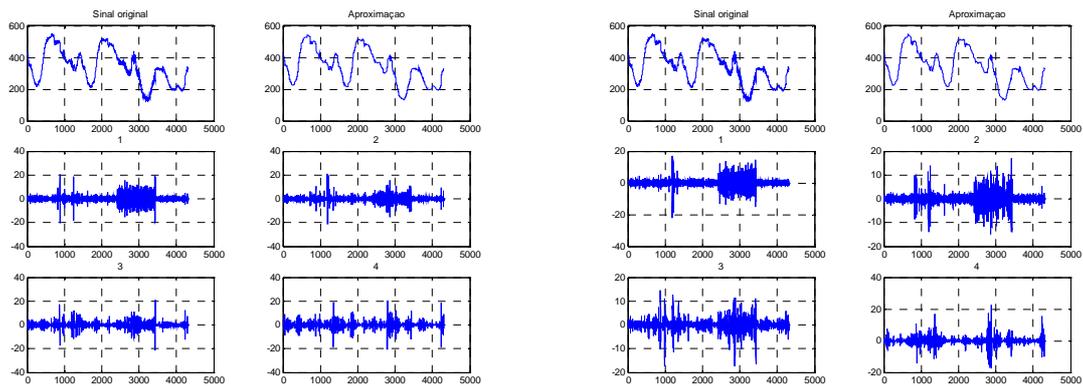
A Figura 3-17 apresenta também a decomposição do sinal anterior usando outras famílias de wavelet, nomeadamente a wavelet de Haar e a wavelet de Daubechies (Db35) e usando um único nível de decomposição. A Figura 3-18 representa a mesma função mas em que se usaram quatro níveis de decomposição.



Decomposição com a wavelet de Haar

Decomposição com a wavelet de Daubechies

Figura 3-17 Decomposição de uma função



Decomposição com a wavelet de Haar

Decomposição com a wavelet de Daubechies

Figura 3-18 Decomposição multinível de uma função

As principais características da transformada de wavelet discreta são:

- ❖ Utiliza apenas os coeficientes do filtro  $\alpha(n)$ , sendo os outros determinados com base nos coeficientes anteriores;
- ❖ Tem sequências e filtros finitos (truncados) existindo diversas formas de lidar com as fronteiras (periodização, reflexão, preenchimento com zero, e wavelets no intervalo);
- ❖ Dá origem a algoritmos rápidos: número de operações  $O(N)$  ;
- ❖ É de fácil implementação (cálculo recursivo);
- ❖ Generaliza-se facilmente para várias variáveis.

Como foi referido anteriormente os coeficientes  $a_j$  correspondentes à aproximação de nível  $j$  de uma função  $f(x)$ , obtêm-se a partir do produto interno entre a função e a respectiva função de escala de resolução  $j$ ,  $\phi_{j,k}(x)$  tal como indicado a seguir.

$$a_n^j = \langle f(x), \phi_n^j(x) \rangle \tag{3-36}$$

Se o nível de resolução  $j$ , for suficientemente grande, a função de escala pode-se aproximar a uma função delta de Dirac, de forma que o produto interno é simplesmente o valor da amostra da função  $f(x)$ .

$$a_n^j = \langle f(x), \phi_n^j(x) \rangle \approx 2^{-j/2} f(x - 2^{-j}(m_l + n)), \text{ em que} \tag{3-37}$$

$$m_l = \int x^l \phi(x) dx$$

e define-se como o momento de ordem 1 da função de escala. Esta aproximação é especialmente boa se os momentos da função de escala são nulos ou pequenos.

### 3.5 Equações de Maxwell e análise multiresolução

Na resolução numérica de equações diferenciais parciais é comum o uso de esquemas de diferenças finitas em malhas regulares. Estes métodos têm sido amplamente utilizados e continuarão a sê-lo, devido aos bons resultados em geral e à sua facilidade de programação. Porém, em casos frequentes, em que as soluções apresentam mudanças bruscas de comportamento, o uso de uma malha regular não é o mais conveniente. Se for usada uma malha refinada capaz de descrever com precisão as funções em zonas de mudanças bruscas, nas zonas de comportamento suave serão utilizados muitos pontos, o que, além de não ser necessário, vai fazer com que o custo computacional seja excessivamente alto. Se for usada uma malha pouco refinada, o custo computacional diminuirá, assim como a qualidade dos resultados, devido a uma pobre representação da função próximo das irregularidades. Por esta razão, vários esquemas adaptativos têm sido propostos.

Neste trabalho considera-se um esquema adaptativo para a solução numérica de equações que envolvem variação temporal. Em cada passo de tempo, a malha espacial é irregular e escolhida dinamicamente: terá mais pontos em zonas onde o comportamento da solução seja brusco, e menos pontos onde o comportamento seja mais suave. Para a detecção de tais regiões, utilizam-se coeficientes de wavelet como indicadores de regularidade local. As wavelets e a análise multiresolução são o meio mais natural de se conseguir essa grelha dinâmica. O esquema é aplicado na resolução das equações de Maxwell que regem a propagação num dado meio. A obtenção da grelha adaptativa está dependente da aplicação da técnica de *threshold*.

O esquema adaptativo é uma combinação do esquema explícito de diferenças finitas com ferramentas desenvolvidas visando a redução do custo computacional. A qualidade das soluções obtidas através do método adaptativo é estabelecida ao compará-las com as soluções de referência.

### 3.5.1 O MRTD

A análise usando wavelets tem sido amplamente estudada no campo da matemática, ainda que a sua principal aplicação se tenha encontrado no campo do processamento de sinais e na compressão de imagem.

A aplicação do método dos momentos [3-10] às equações de Maxwell é também uma aproximação matemática correcta para a discretização da sua forma diferencial ou integral. Segundo [3-11] as equações que regem o FDTD podem também ser deduzidas recorrendo ao método dos momentos e usando funções base do tipo rectangular para a expansão dos campos no espaço e no tempo.

Uma vez que o método dos momentos permite o uso de qualquer conjunto de funções base ortogonais, o uso de um determinado conjunto de funções pode dar origem a novos esquemas no domínio do tempo e no domínio da frequência. Na literatura o uso de funções de escala e wavelets como um conjunto completo de funções base é designado por análise multiresolução. No campo do electromagnetismo, e numa fase inicial, a aplicação da análise multiresolução ao método dos momentos para efectuar a discretização das equações de Maxwell deu origem a um novo esquema no domínio do tempo designado por MRTD [3-12];[3-13].

Em [3-12];[3-13] foram usadas as funções de escala e wavelet de Battle – Lemarie. Em [3-12] foi feita apenas uma expansão usando funções de escala em [3-13] foram feitas duas expansões: uma usando só funções de escala que se designou por S-MRTD e outra baseada na expansão usando funções de escala e wavelets e designada por W-MRTD.

#### 3.5.1.1 S-MRTD

O princípio usado para a derivação é similar ao usado para a obtenção das equações de Maxwell quando se usa o método dos momentos. Para a derivação do S-MRTD as componentes do campo são representadas por uma série de funções de escala no espaço e por funções rectangulares no tempo. Tal como no FDTD a expansão das

componentes do campo magnético são deslocadas em metade do intervalo de discretização no espaço e no tempo em relação as componentes do campo eléctrico, assim temos:

$$E_X(\vec{r}, t) = \sum_{k,l,m,n=-\infty}^{\infty} E_{l+1/2,m,n}^{\phi_x} h_k(t) \phi_{l+1/2}(x) \phi_m(y) \phi_n(z)$$

.....

(3-38)

$$H_X(\vec{r}, t) = \sum_{k,l,m,n=-\infty}^{\infty} H_{l,m+1/2,n+1/2}^{\phi_x} h_{k+1/2}(t) \phi_l(x) \phi_{m+1/2}(y) \phi_{n+1/2}(z)$$

.....

Em que  $E_{l,m,n}^{\phi_\gamma}$  e  $H_{l,m,n}^{\phi_\gamma}$  com  $\gamma = x, y, \text{ ou } z$  são os coeficientes para a expansão dos campos em termos de funções de escala. Os índices  $l, m, n, k$  são os índices relacionados com o espaço e tempo de tal forma que:  $x = l\Delta x, y = m\Delta y, z = n\Delta z$  e  $t = k\Delta t$ , e onde  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$  representam os intervalos de discretização em  $x, y, z, e t$ .

A função  $h_m(x)$  é definida como:

$$h_m(x) = h\left(\frac{x}{\Delta x} - m\right)$$

(3-39)

em que a função  $h(x)$  é a função rectangular definida como:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1/2 \\ 1/2 & \text{se } |x| = 1/2 \\ 0 & \text{se } |x| > 1/2 \end{cases}$$

(3-40)

A função  $\phi_m(x)$  é definida como:

$$\phi_m(x) = \phi\left(\frac{x}{\Delta x} - m\right)$$

(3-41)

em que  $\phi(x)$  representa a função de escala de Battle-Lemarié.

Usando estes desenvolvimentos nas equações de Maxwell e amostrando as equações usando funções rectangulares no tempo e funções de escala no espaço, é possível provar que as seguintes equações são obtidas.

$$\frac{\mathcal{E}}{\Delta t} \left( {}_{k+1}E_{l+1/2,m,n}^{\phi_x} - {}_kE_{l+1/2,m,n}^{\phi_x} \right) = \frac{1}{\Delta y} \sum_{i=-9}^{+8} a(i) {}_{k+1/2}H_{l+1/2,m+i+1/2,n}^{\phi_x} - \frac{1}{\Delta z} \sum_{i=-9}^{+8} a(i) {}_{k+1/2}H_{l+1/2,m,n+i+1/2}^{\phi_y} \quad (3-42)$$

Comparando o FDTD com o esquema S-MRTD pode-se verificar a semelhança entre ambos excepto o operador de diferenças finitas no espaço que agora é diferente. Enquanto no FDTD se tem que:

$$d_x \left( {}_kH_{l,m,n} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left( {}_kH_{l+1/2,m,n} - {}_kH_{l-1/2,m,n} \right) \quad (3-43)$$

Com este novo operador tem-se que:

$$d_x \left( {}_kH_{l,m,n} \right) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=-9}^{+8} a(i) {}_kH_{l+i+1/2,m,n} \quad (3-44)$$

Sabemos também que no FDTD a condição de estabilidade de Courant tem de se verificar e para um esquema com discretização uniforme temos:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta l}{c} = 0.57735 \frac{\Delta l}{c} \quad (3-45)$$

Ainda segundo [3-13] a condição de estabilidade para o S- MRTD é:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max} = 0.368112 \frac{\Delta l}{c} \quad (3-46)$$

Em contraste com o FDTD não é vantajoso a escolha de um  $\Delta t$  perto do limite de estabilidade, mas cerca de cinco vezes inferior.

### 3.5.1.2 W-MRTD

O uso de funções de escala no método dos momentos leva-nos pois a uma grelha mais esparsa que permite a modelação correcta dos campos electromagnéticos em regiões homogéneas. Em regiões do espaço em que o campo varia de uma forma rápida (como por exemplo em descontinuidades) pontos de amostragem adicionais podem ser considerados usando não só funções de escala mas também funções de wavelet. O desenvolvimento deste esquema designou-se na literatura por W-MRTD.

Por simplicidade vamos apenas considerar expansões numa dimensão (em relação a coordenada y) e apenas com um nível de resolução. Assim a expansão dos campos fica:

$$E_X(\vec{r}, t) = \sum_{k,l,m,n=-\infty}^{\infty} \left\{ {}_k E_{l+1/2,m,n}^{\phi x} \phi_m(y) + {}_k E_{l+1/2,m,n}^{\psi x} \psi_m(y) \right\} h_k(t) \phi_{l+1/2}(x) \phi_n(z)$$

.....

(3-47)

$$H_X(\vec{r}, t) = \sum_{k,l,m,n=-\infty}^{\infty} \left\{ {}_{k+1/2} H_{l,m+1/2,n+1/2}^{\phi x} \phi_{m+1/2}(y) + {}_{k+1/2} H_{l,m+1/2,n+1/2}^{\psi x} \psi_{m+1/2}(y) \right\} h_{k+1/2}(t) \phi_l(x) \phi_{n+1/2}(z)$$

.....

Usando os mesmos procedimentos chega-se a uma equação da forma:

$$\frac{\mathcal{E}}{\Delta t} \left( {}_{k+1} E_{l+1/2,m,n}^{\phi x} - {}_k E_{l+1/2,m,n}^{\phi x} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta y} \sum_{i=-9}^{+8} a(i) {}_{k+1/2} H_{l+1/2,m+i+1/2,n}^{\phi x} + \\ \frac{1}{\Delta y} \sum_{i=-9}^{+8} c(i) {}_{k+1/2} H_{l+1/2,m+i,n}^{\psi x} - \\ \frac{1}{\Delta z} \sum_{i=-9}^{+8} a(i) {}_{k+1/2} H_{l+1/2,m,n+i+1/2}^{\phi y} \end{cases}$$
(3-48)

$$\frac{\mathcal{E}}{\Delta t} \left( {}_{k+1} E_{l+1/2,m+1/2,n}^{\psi x} - {}_k E_{l+1/2,m+1/2,n}^{\psi x} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta y} \sum_{i=-9}^{+8} c(i) {}_{k+1/2} H_{l+1/2,m+i+1/2,n}^{\phi x} + \\ \frac{1}{\Delta y} \sum_{i=-9}^{+8} b(i) {}_{k+1/2} H_{l+1/2,m+i+1,n}^{\psi x} - \\ \frac{1}{\Delta z} \sum_{i=-9}^{+8} a(i) {}_{k+1/2} H_{l+1/2,m+1/2,n+i+1/2}^{\psi y} \end{cases}$$

Ainda segundo [3-13] a condição de estabilidade para o W-MRTD com wavelets nas três dimensões é dada por:

$$\Delta t \leq 0.253064 \frac{\Delta l}{c}$$
(3-49)

que é ainda mais limitativo que no esquema S-MRTD.

Ambos os esquemas anteriores foram aplicados a estruturas de microondas simples e os resultados comparados com o FDTD convencional. As conclusões que se puderam tirar foram segundo [3-13];[3-14] as seguintes:

- ❖ A aplicação de expansões em wavelet na solução de equações diferenciáveis dá origem a matrizes esparsas e com vantagem relativamente às funções base convencionais. Nomeadamente, a aplicação da análise multiresolução directamente às equações de Maxwell dá origem a um novo esquema de multiresolução no tempo o MRTD o qual apresenta características de dispersão linear que resulta numa precisão excelente para uma discretização perto do limite de Nyquist, ou seja perto de dois pontos por comprimento de onda ao contrário do FDTD convencional que normalmente usa dez pontos por comprimento de onda;

- ❖ Mas a principal vantagem sem dúvida é a obtenção de uma representação esparsa e adaptativa, ou seja a obtenção de uma grelha não uniforme de uma forma automática recorrendo a técnica de “*threshold*” eliminando os detalhes abaixo de um certo limite e tornando a representação esparsa;
- ❖ O MRTD apresenta também vantagens em relação ao FDTD convencional no que diz respeito as exigências de memória e tempo de execução.

O MRTD é então uma nova técnica para a resolução de problemas no domínio do tempo que recorre à análise multiresolução para a discretização das equações de Maxwell e que demonstra uma excelente capacidade na resolução de problemas electromagnéticos.

### 3.5.1.3 Diferentes funções base, diferentes equações

Dependendo da escolha da função base diferentes esquemas podem resultar, cada um transportando as características das funções base usadas. O MRTD usando as funções de escala de Haar [3-15];[3-16] resulta no FDTD.

Se optarmos por uma expansão usando apenas funções de escala somos conduzidos à seguinte equação:

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} \left( {}_{k+1}E_{l+1/2,m,n}^{\phi x} - {}_k E_{l+1/2,m,n}^{\phi x} \right) = \frac{1}{\Delta y} \left( H_{l+1/2,m+1/2,n}^{\phi z} - H_{l+1/2,m-1/2,n}^{\phi z} \right) - \frac{1}{\Delta z} \left( H_{l+1/2,m,n+1/2}^{\phi y} - H_{l+1/2,m,n-1/2}^{\phi y} \right) \quad (3-50)$$

Já se optarmos por uma representação usando funções de escala e wavelets obtemos as seguintes equações com níveis separados ao contrário das equações que se obtêm quando se usam as wavelets de Battle-Lemarié as quais combinam ambos os níveis.

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} \left( {}_{k+1}E_{l+1/2,m,n}^{\phi x} - {}_k E_{l+1/2,m,n}^{\phi x} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta y} \left( H_{l+1/2,m+1/2,n}^{\phi z} - H_{l+1/2,m-1/2,n}^{\phi z} \right) - \\ \frac{1}{\Delta z} \left( H_{l+1/2,m,n+1/2}^{\phi y} - H_{l+1/2,m,n-1/2}^{\phi y} \right) \end{cases} \quad (3-51)$$

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} \left( {}_{k+1}E_{l+1/2,m+1/2,n}^{\psi x} - {}_k E_{l+1/2,m+1/2,n}^{\psi x} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta y} \left( H_{l+1/2,m+1/2,n}^{\psi z} - H_{l+1/2,m-1/2,n}^{\psi z} \right) - \\ \frac{1}{\Delta z} \left( H_{l+1/2,m,n+1/2}^{\psi y} - H_{l+1/2,m,n-1/2}^{\psi y} \right) \end{cases}$$

No entanto poder-se-ia recorrer a outro tipo de funções base. Por exemplo [3-17] usou as funções de Daubechies, as quais apresentam suporte compacto quando comparadas com as de Battle-Lemarié, obtendo-se a seguinte equação.

$$\frac{\mathcal{E}}{\Delta t} \left( E_{l+1/2,m,n}^{\phi x} - E_{l+1/2,m,n}^{\phi x} \right) = \frac{1}{\Delta y} \sum_i a(i)_{k+1/2} H_{l+1/2,m+i+1/2,n}^{\phi x} - \frac{1}{\Delta z} \sum_i a(i)_{k+1/2} H_{l+1/2,m,n+i+1/2}^{\phi y} \quad (3-52)$$

Em que  $a(i)$  representa os coeficientes da wavelet em número  $i$  consoante a wavelet de Daubechies que se considera.

### 3.5.1.4 Algumas conclusões sobre o MRTD

Em jeito de resumo pode-se dizer que a técnica de Multiresolução no tempo (MRTD) resulta do desenvolvimento dos campos electromagnéticos em funções de escala e wavelets. Esta técnica é baseada no aumento da resolução de um sinal de um nível mais grosseiro para um nível mais fino, usando funções de baixa resolução (funções de escala) combinadas com outras de resolução intermédia (funções wavelet). Diferentes funções podem ser usadas neste tipo de análise: Battle-Lemarié, Haar e Daubechies [3-11]-[3-17]. Nesta técnica as componentes do campo eléctrico e magnético das equações de Maxwell são representadas por uma dupla expansão em funções de escala e wavelets em relação ao espaço e funções rectangulares em relação ao tempo. O método dos momentos [3-10] permite obter um conjunto de equações similares às usadas no FDTD (idênticas no caso das funções de Haar). Tal qual os valores do campo, os coeficientes da expansão são usadas da mesma forma.

Esta técnica reduz substancialmente o esforço computacional porque em contraste com o FDTD convencional que necessita de pelo menos dez células por comprimento de onda, aqui são requeridas menos células por comprimento de onda para obter o mesmo nível de precisão.

Um dos aspectos que afecta a complexidade deste esquema é o tipo de funções usado na expansão dos campos. Por exemplo se usarmos as funções de Battle-Lemarié tem que se considerar um número infinito de coeficientes uma vez que estas apresentam suporte não compacto. Pode-se no entanto truncar a expansão e considerar apenas um

número reduzido de coeficientes, obtendo uma solução aproximada. Este problema não surge se optarmos por funções de suporte compacto como é o caso das funções de Haar ou de Daubechies, não sendo portanto necessário fazer uma truncatura da solução.

Um segundo aspecto está relacionado com o nível de resolução pretendido para a solução. As aproximações referidas [3-11]-[3-17], usam apenas funções de escala para uma primeira aproximação dos campos. Nestes casos e usando o método dos momentos obtêm-se expressões simples. Se no entanto pretendermos um aumento de resolução adicionando funções de wavelet de diferentes níveis a solução torna-se impraticável e o esquema tem de ser modificado para cada um dos novos níveis que se acrescenta.

Um último aspecto que temos de ter em atenção está relacionado com as condições fronteira. Assim, quando se usam as wavelets do tipo Battle-Lemarié ou de Daubechies, que têm um suporte maior que a unidade, ou por outras palavras a largura da função é maior que um, as condições fronteira não são satisfeitas para cada função base individual, mas somente pela sobreposição de várias funções base. Consequentemente torna-se difícil realizar condições fronteira usando wavelets. É certamente possível criar por exemplo uma parede eléctrica perfeita empregando a teoria das imagens como proposto em [3-13], mas este tipo de condição fronteira é difícil aplicar a estruturas complexas assim como a problemas realistas tais como circuitos *microstrip*. Além disso a teoria das imagens requer um aumento da região de computação, aumentando deste modo as exigências em termos de memória. Uma solução possível é usar uma wavelet de suporte unitário tipicamente as wavelets de Haar. Ainda que as wavelets de Haar sejam simples elas satisfazem as principais propriedades das wavelets. Além disso permitem-nos realizar várias condições fronteira mais facilmente e permitem-nos resolver problemas realistas mantendo as vantagens das wavelets. Mas por outro lado quando se usam as wavelets de Haar, dependendo obviamente da função, podemos ter uma convergência lenta se a função variar muito rapidamente originando uma zona em que os detalhes são significativos.

### 3.5.2 Multiresolução baseada na DWT

O MRTD tal como designado por [3-13], foi a primeira aproximação que surgiu de multiresolução no tempo. No entanto uma aproximação diferente foi introduzida por [3-18]. Usando esta aproximação as derivadas em ordem ao tempo são aproximadas com diferenças finitas de segunda ordem, resultando em equações explícitas em relação ao tempo.

$$\begin{aligned} E^n &= E^{n-1} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla \times H^{n-1/2} \\ H^{n+1/2} &= H^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times E^n \end{aligned} \quad (3-53)$$

De seguida o campo electromagnético é expandido num sistema de funções ortonormais. Expressando as equações anteriores em termos de wavelets e funções de escala introduzindo dois operadores um para a distribuição do material e outro para o rotacional, a equação (3-35) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E_w^n &= E_w^{n-1} + \Delta t M(\varepsilon) C(H_w^{n-1/2}) \\ H_w^{n+1/2} &= H_w^{n-1/2} - \Delta t M(\mu) C(E_w^n) \end{aligned} \quad (3-54)$$

Em que  $E_w$  e  $H_w$  representam a expansão em wavelets dos campos electromagnéticos. De acordo com [3-18] o incremento em tempo do algoritmo é determinado pelo operador derivada. Para um operador de segunda ordem o incremento máximo é igual ao do FDTD convencional. Para operadores de ordem mais elevada a condição de estabilidade torna-se mais restritiva, mas a dispersão numérica diminui e consequentemente a densidade de discretização pode ser reduzida.

Mais recentemente uma nova aproximação, semelhante à anterior surgiu, mas baseada na transformada discreta de wavelets (DWT) [3-19]. Usando esta aproximação e fazendo a discretização das equações obtém-se:

$$\begin{aligned} E_k^{n+1} &= E_k^n - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta t}{\Delta z} D(H_k^{n+1/2}) \\ H_k^{n+1/2} &= H_k^{n-1/2} - \frac{1}{\mu} \frac{\Delta t}{\Delta z} D(E_k^n) \end{aligned} \quad (3-55)$$

em que  $D$  representa o operador derivada. O cálculo das derivadas do campo em cada ponto é feito através dos coeficientes da sua transformada de wavelet. O operador

derivada actua nos coeficientes da transformada de wavelet e apresenta-se na forma de uma matriz  $D$  a qual é calculada previamente para cada um dos tipos de wavelet que se usa. Esta matriz tem formas diferentes dependendo do tipo de wavelet usada e do seu suporte e alem disso depende do nível de resolução usado [3-19]. Uma vez conhecidos todos os coeficientes pode-se reconstruir os valores do campo recorrendo à IDWT. O algoritmo pode-se expressar de uma forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E^{\phi^0} \\ E^{\psi^j} \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} E^{\phi^0} \\ E^{\psi^j} \end{bmatrix}^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon} D_z^j \begin{bmatrix} H^{\phi^0} \\ H^{\psi^j} \end{bmatrix}^{n+1/2} \\ \begin{bmatrix} H^{\phi^0} \\ H^{\psi^j} \end{bmatrix}^{n+1/2} &= \begin{bmatrix} H^{\phi^0} \\ H^{\psi^j} \end{bmatrix}^{n-1/2} - \frac{\Delta}{\mu} D_z^j \begin{bmatrix} E^{\phi^0} \\ E^{\psi^j} \end{bmatrix}^n \end{aligned} \quad (3-56)$$

### 3.5.3 Operador derivada com base em wavelets

O objectivo deste ponto é o de calcular os coeficientes da DWT correspondentes à derivada de uma função. Para tal consideremos uma aproximação de nível  $j$  de uma função desenvolvida em termos de uma função de escala de nível  $j$ ,  $\phi_j(x)$  a qual vamos designar de  $f^j(x)$ :

$$f(x) \approx f^j(x) = \sum_k a_k^j \phi_k^j(x) \quad (3-57)$$

onde devido a ortogonalidade das funções de escala, os coeficientes  $a_k^j$  calculam-se do modo normal através de um produto interno:

$$a_k^j = \langle f(x), \phi_k^j \rangle \quad (3-58)$$

A derivada espacial da função  $f^j(x)$  será:

$$\frac{\partial}{\partial x} f^j(x) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_k a_k^j \phi_k^j(x) = \sum_k a_k^j \frac{\partial}{\partial x} \phi_k^j(x) = \sum_k a_k^j \phi_k^j(x) \quad (3-59)$$

No entanto, esta derivada pode-se aproximar representando-a mediante um desenvolvimento de funções de escala de nível  $j$ , da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} f^j(x) = \sum_k a_k^j \phi_k^j(x) \quad (3-60)$$

onde  $a_k^j$ , são os coeficientes da DWT que estamos à procura, correspondentes à derivada da função  $f^j(x)$ , e que podemos obter a partir do produto interno entre a função de escala  $\phi$  e a derivada da função  $f^j(x)$ :

$$a_k^j = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f^j(x), \phi_k^j \right\rangle \quad (3-61)$$

Introduzindo em (3.61) o resultado de (3.60), podemos obter os coeficientes  $a_k^j$

$$a_k^j = \left\langle \sum_l a_l^j \phi_l^j(x), \phi_k^j \right\rangle = \sum_l a_l^j \langle \phi_l^j(x), \phi_k^j(x) \rangle \quad (3-62)$$

Portanto a aproximação de nível  $j$  da derivada de uma função  $f^j(x)$  pode-se expressar do seguinte modo:

$$\frac{\partial}{\partial x} f^j(x) = \sum_k \sum_l a_l^j \langle \phi_l^j(x), \phi_k^j(x) \rangle \phi_k^j(x) \quad (3-63)$$

Devido a relação existente entre os sub-espacos formados por funções de escala e wavelet, uma aproximação de nível  $j$  pode ser obtida através do desenvolvimento de funções de escala e wavelets de resolução  $j-1$ . Desta forma, podemos encontrar a relação existente entre os coeficientes de escala e de wavelet de uma função e a sua derivada. Assim representamos a função  $f^j(x)$ , como uma combinação linear de funções de escala e de wavelet de resolução  $j-1$ :

$$f(x) \approx f^j(x) = \sum_k a_k^j \phi_k^j(x) = \sum_m a_m^{j-1} \phi_m^{j-1}(x) + \sum_m b_m^{j-1} \psi_m^{j-1}(x) \quad (3-64)$$

Do mesmo modo a derivada da função pode ser vista como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f^j(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_m a_m^{j-1} \phi_m^{j-1}(x) + \sum_m b_m^{j-1} \psi_m^{j-1}(x) \right] = \\ &= \sum_m a_m^{j-1} \frac{\partial}{\partial x} \phi_m^{j-1}(x) + \sum_m b_m^{j-1} \frac{\partial}{\partial x} \psi_m^{j-1}(x) = \sum_m a_m^{j-1} \phi_m^{j-1}(x) + \sum_m b_m^{j-1} \psi_m^{j-1}(x) \end{aligned} \quad (3-65)$$

No entanto, do mesmo modo e mais de acordo com as nossas expectativas, pode-se calcular a aproximação de nível  $j$ , da derivada de  $f^j(x)$  como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f^j(x) &= \sum_m a_m^{j-1} \phi_m^{j-1}(x) + \sum_m b_m^{j-1} \psi_m^{j-1}(x), \text{ com} \\ a_m^{j-1} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f^j(x), \phi_m^{j-1}(x) \right\rangle \\ b_m^{j-1} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f^j(x), \psi_m^{j-1}(x) \right\rangle \end{aligned} \quad (3-66)$$

Repetindo o procedimento efectuado com as funções de escala, ou seja substituindo em (3.66) a equação (3.65), podemos obter os coeficientes correspondentes a DWT da derivada de  $f^j(x)$ :

$$\begin{aligned} a_m^{j-1} &= \left\langle \sum_l a_l^{j-1} \phi_l^{j-1}(x) + \sum_l b_l^{j-1} \psi_l^{j-1}(x), \phi_m^{j-1}(x) \right\rangle = \\ &= \sum_l a_l^{j-1} \langle \phi_l^{j-1}(x), \phi_m^{j-1}(x) \rangle + \sum_l b_l^{j-1} \langle \psi_l^{j-1}(x), \phi_m^{j-1}(x) \rangle \\ b_m^{j-1} &= \left\langle \sum_l a_l^{j-1} \phi_l^{j-1}(x) + \sum_l b_l^{j-1} \psi_l^{j-1}(x), \psi_m^{j-1}(x) \right\rangle = \\ &= \sum_l a_l^{j-1} \langle \phi_l^{j-1}(x), \psi_m^{j-1}(x) \rangle + \sum_l b_l^{j-1} \langle \psi_l^{j-1}(x), \psi_m^{j-1}(x) \rangle \end{aligned} \quad (3-67)$$

Estas equações podem-se expressar de forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} a_m^{j-1} \\ b_m^{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi_m^{j-1}, \phi_l^{j-1} \rangle & \langle \phi_m^{j-1}, \psi_l^{j-1} \rangle \\ \langle \psi_m^{j-1}, \phi_l^{j-1} \rangle & \langle \psi_m^{j-1}, \psi_l^{j-1} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m^{j-1} \\ b_m^{j-1} \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

ou de uma forma mais compacta como:

$$[V]^t = [D][V]^t \quad (3-69)$$

onde  $[V]$ , representa o vector formado pelos coeficientes da DWT da aproximação à função  $f^j(x)$ . A dimensão desta matriz depende como é óbvio do número de pontos em que se discretizou o espaço mas também da wavelet usada. O operador derivada pode-se então representar na forma matricial, sendo os elementos desta matriz obtidos à custa dos produtos internos das funções de escala e wavelet e das respectivas derivadas e como tal obtém-se uma matriz esparsa. De acordo com [3-19] temos que:

$$\begin{aligned}
 D_z^j &= \begin{bmatrix} \langle \phi_m^{j-1}, \phi_l^{j-1} \rangle & \langle \phi_m^{j-1}, \psi_l^{j-1} \rangle \\ \langle \psi_m^{j-1}, \phi_l^{j-1} \rangle & \langle \psi_m^{j-1}, \psi_l^{j-1} \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d_{m,l}^{j-1} & \gamma_{m,l}^{j-1} \\ \beta_{m,l}^{j-1} & \alpha_{m,l}^{j-1} \end{bmatrix} \\
 d_{m,l}^{j-1} &= 2^j \int \phi(2^j z - m) \cdot \frac{d}{dz} \phi(2^j z - l) \cdot dz = 2^j d_{m-l} \\
 \gamma_{m,l}^{j-1} &= 2^j \int \phi(2^j z - m) \cdot \frac{d}{dz} \psi(2^j z - l) \cdot dz = 2^j \gamma_{m-l} \\
 \beta_{m,l}^{j-1} &= 2^j \int \psi(2^j z - m) \cdot \frac{d}{dz} \phi(2^j z - l) \cdot dz = 2^j \beta_{m-l} \\
 \alpha_{m,l}^{j-1} &= 2^j \int \psi(2^j z - m) \cdot \frac{d}{dz} \psi(2^j z - l) \cdot dz = 2^j \alpha_{m-l}
 \end{aligned} \tag{3-70}$$

em que segundo o mesmo autor:

$$\begin{aligned}
 d_m &= \int \phi(z - m) \cdot \frac{d}{dz} \phi(z) \cdot dz \\
 \gamma_m &= \int \phi(z - m) \cdot \frac{d}{dz} \psi(z) \cdot dz \\
 \beta_m &= \int \psi(z - m) \cdot \frac{d}{dz} \phi(z) \cdot dz \\
 \alpha_m &= \int \psi(z - m) \cdot \frac{d}{dz} \psi(z) \cdot dz
 \end{aligned} \tag{3-71}$$

Usando as equações de dilatação e de refinamento, apresentadas anteriormente, os coeficientes anteriores podem-se calcular da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 d_m &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \alpha(k) \alpha(k') d_{2m+k-k'} \\
 \gamma_m &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \beta(k) \alpha(k') d_{2m+k-k'} \\
 \beta_m &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \alpha(k) \beta(k') d_{2m+k-k'} \\
 \alpha_m &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \beta(k) \beta(k') d_{2m+k-k'}
 \end{aligned} \tag{3-72}$$

sendo  $N$  o número de coeficientes dos filtros.

Analisando as equações anteriores pode-se ver que todos os coeficientes se obtêm a partir dos coeficientes de  $d_m$ . Estes por sua vez podem-se calcular de forma iterativa a partir das seguintes expressões:

$$d_m = 2 \left[ d_{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N/2} a_{2k-1} \cdot (d_{2m-2k+1} + d_{2m+2k-1}) \right]$$

$$\sum_m m \cdot d_m = -1 \quad (3-73)$$

$$d_m = -d_{-m}$$

e onde

$$a_n = 2 \sum_{i=0}^{N-1-n} \alpha(i) \alpha(i+n), \quad n=1, \dots, N-1 \quad (3-74)$$

A Figura 3-19 apresenta a forma do operador derivada, onde é visível a esparsidade da matriz.

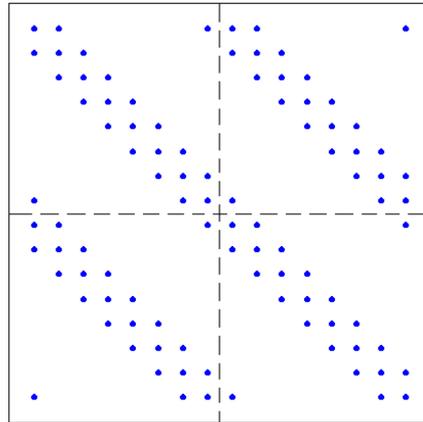


Figura 3-19 Matriz derivativa

A Tabela 3-2 apresenta os coeficientes  $d_m$  correspondentes às wavelets de Daubechies. Em [3-19], pode-se ver o valor dos coeficientes derivativos obtidos para as wavelets de Daubechies, onde também se apresentam os valores de  $\gamma_m, \beta_m, \alpha_m$ .

A Figura 3-20 e a Figura 3-21 apresenta a aplicação do operador derivada a duas funções distintas. Em ambas as situações, a parte esquerda da figura corresponde a uma decomposição com um nível, enquanto a parte direita corresponde a uma decomposição com dois níveis de resolução. Na Figura 3-20 a decomposição foi efectuada com a wavelet de Daubechies (Db4). Na Figura 3-21 a decomposição foi efectuada com a wavelet de Haar.

COEFICIENTES DERIVATIVOS $d_m$				
m	$Db1$	$Db2$	$Db3$	$Db4$
6				-0,00000084
5				0,00017221
4			-0,00034243	0,00222407
3			-0,01461027	-0,03358057
2		0,08333333	0,14518960	0,19200100
1	-0,5	-0,66666660	-0,74512390	-0,79301810
0	0	0	0	0
-1	0,5	0,66666660	0,74512390	0,79301810
-2		-0,08333333	-0,14518960	-0,19200100
-3			0,01461027	0,03358057
-4			0,00034243	-0,00222407
-5				-0,00017221
-6				0,00000084

Tabela 3-2 Coeficientes  $d_m$

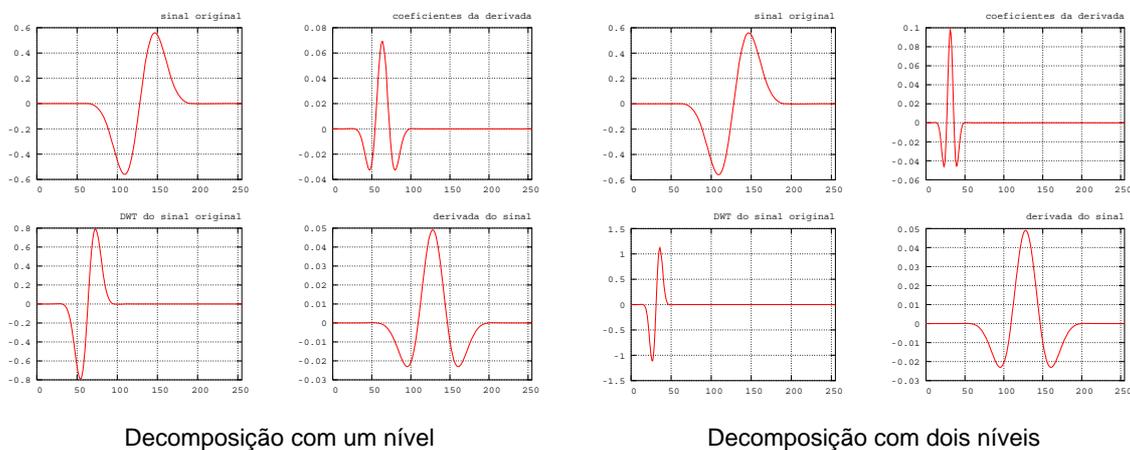


Figura 3-20 Aplicação da matriz derivativa aos coeficientes da DWT

A Figura 3-22 apresenta a aproximação da derivada de uma função usando diferentes níveis de resolução. Na parte esquerda da figura a decomposição foi efectuada usando a wavelet de Haar enquanto na parte direita foi usada a wavelet de Daubechies ( $Db4$ ).

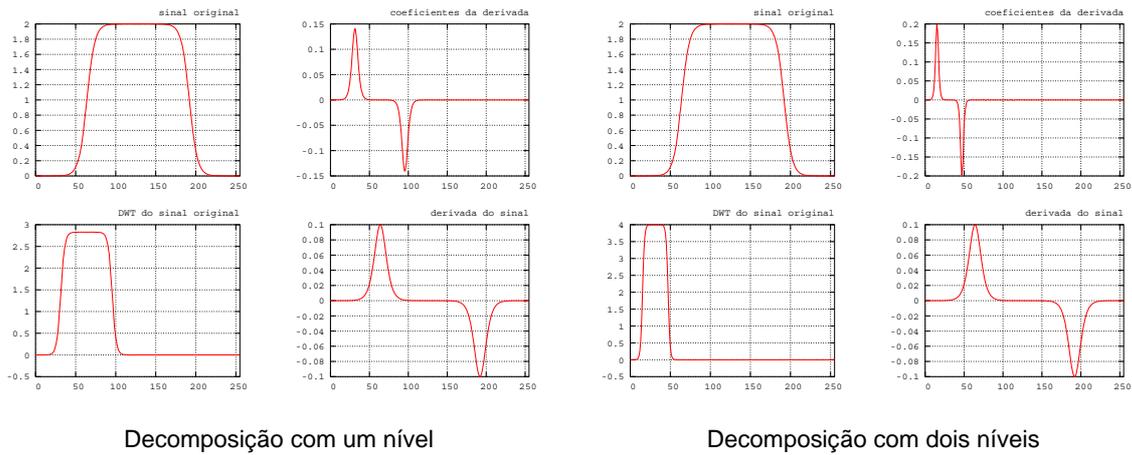


Figura 3-21 Aplicação da matriz derivativa.

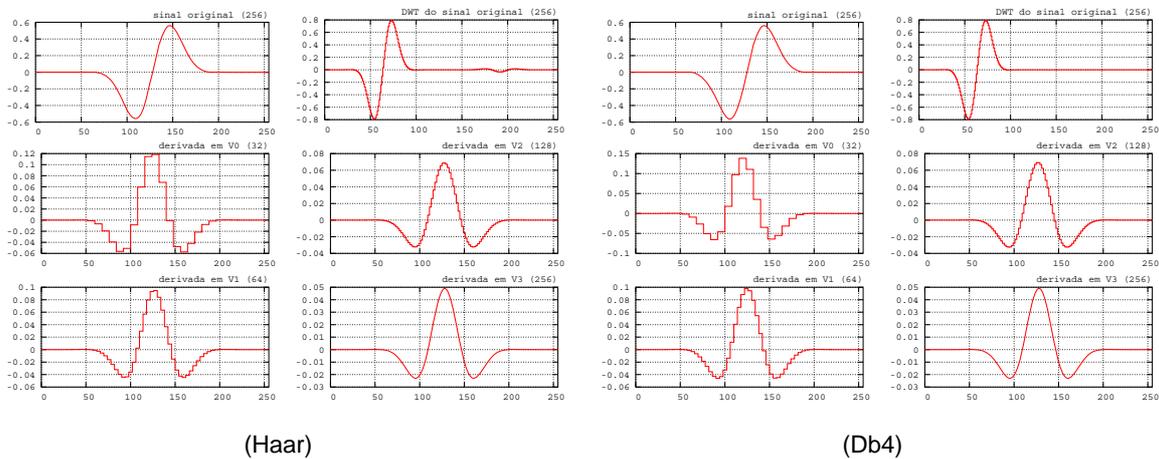


Figura 3-22 Aproximação da derivada de uma função segundo diferentes níveis de resolução

### 3.5.4 Exemplos numéricos de aplicação da análise multiresolução baseado na DWT.

Este foi o ponto de partida na tentativa da resolução das equações de Maxwell. As equações usadas à partida foram as seguintes:

$$E_k^{n+1} = E_k^n - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta t}{\Delta z} D(H_k^{n+1/2}) \tag{3-75}$$

$$H_k^{n+1/2} = H_k^{n-1/2} - \frac{1}{\mu} \frac{\Delta t}{\Delta z} D(E_k^n)$$

ou seja, o cálculo do valor do campo eléctrico é baseado no seu valor no instante anterior mais um termo que é constituído por uma constante a multiplicar pelo resultado

da aplicação do operador derivada ao campo magnético. A actualização do campo magnético é feita de uma forma semelhante, em que agora o operador derivada actua sobre o sinal de campo eléctrico. No entanto para que se possa aplicar o operador derivada tem-se que calcular previamente a DWT do sinal de que se pretendia a derivada. Uma vez calculada a derivada, o seu valor é multiplicado pela respectiva constante e calcula-se uma IDWT cujo resultado é somado à componente do campo electromagnético que se estava a actualizar. O algoritmo funciona bem excepto quando se atinge a fronteira em que o seu valor é diferente do obtido com o FDTD. Na Figura 3-23 pode-se observar a evolução temporal do algoritmo para quatro instantes diferentes. De uma forma geral, os gráficos são semelhantes, a não ser quando se atinge a fronteira.

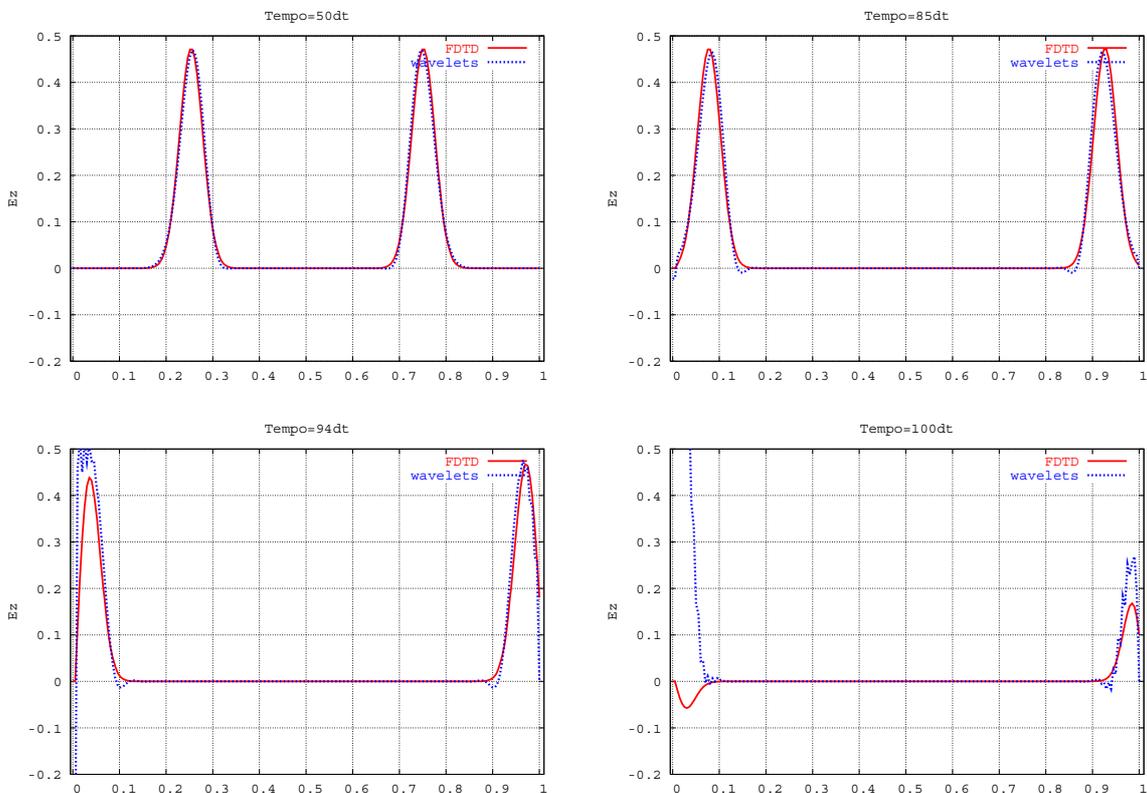


Figura 3-23 Evolução temporal do algoritmo

Tiveram-se problemas na implementação das condições fronteira, e pensa-se que eles estão relacionados com a forma como a DWT era calculada. Neste caso optou-se por calculá-la com periodização o que não corresponde a condições fronteira reais.

Para além deste problema, tiveram-se também problemas quando se colocavam descontinuidades no meio. Nesse caso ao contrário do anterior já não se tinha

constantes, ou seja, o material em cada ponto era dependente da sua posição e conseqüentemente não se podia fazer simplesmente uma multiplicação por uma constante, em vez disso agora tinha-se o produto de duas funções, o qual não é igual ao produto das suas DWT's. A descontinuidade consistia num meio com permissividade relativa  $\epsilon_r = 3$  e foi colocada em  $0.2 \leq x \leq 0.3$ . A Figura 3-24 ilustra os problemas anteriores na propagação de um impulso a 1D para quatro instantes diferentes. Observa-se que quando o impulso atinge a descontinuidade o sinal ganha ruído. Perante estes resultados outras tentativas seguiram-se.

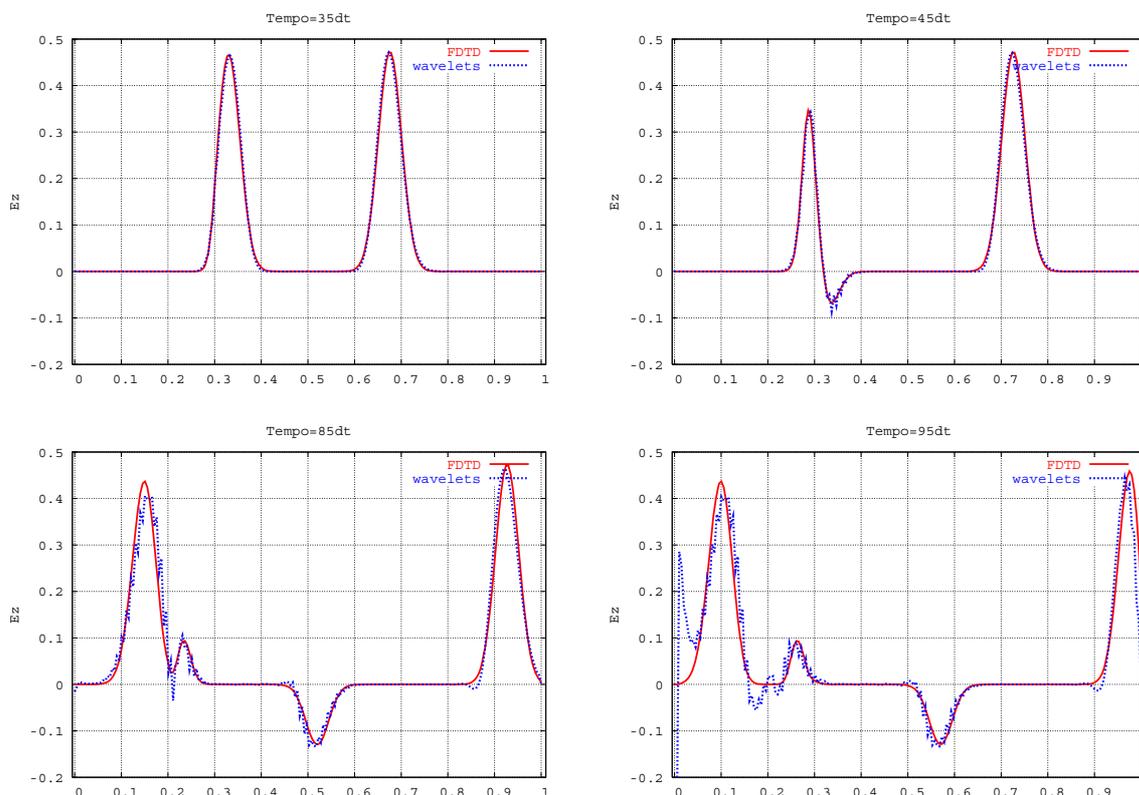


Figura 3-24 Evolução temporal do algoritmo

### 3.5.5 Principais problemas desta técnica

Uma das principais limitações desta técnica está relacionada com as condições fronteira. Para tal deve-se recordar primeiro o modo como o operador derivada foi construído assim como o modo como a transformada discreta de wavelet é calculada. A DWT é calculada usando extensão periódica ou circular, de tal maneira que os elementos que estão situados nos extremos consideram-se contínuos. Isto significa que

o espaço de simulação representado é um espaço cíclico e portanto sem fronteiras de tal forma que um sinal que aparece num extremo reaparece no outro. Geralmente isto não corresponde aos domínios de simulação habituais e como tal devemos modificar os algoritmos para poder incorporar as condições de fronteira adequadas para cada problema concreto.

Em [3-19] o procedimento usado para romper com a estrutura cíclica foi modificar a matriz derivativa, construindo uma matriz estendida adicionando colunas aos extremos da matriz. O número de colunas adjacentes depende do tipo de wavelet. No caso das wavelets de Haar teremos uma coluna adicional em cada lado da matriz. A equação (3-76) apresenta a matriz estendida. No caso das wavelets de Daubechies o número de colunas adicionais é  $2M - 2$  em que  $M$  representa o número de momentos da wavelet. Os pontos adicionais necessários para representar as fronteiras podem ser obtidos usando o método das imagens. Este tipo de condições de fronteira (parede eléctrica ou magnética perfeita) são no entanto um pouco limitativas.

$$\{\alpha_{il}\} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} \end{pmatrix} \quad (3-76)$$

Outros dos problemas que se tem quando se usa este método está relacionado com o modo de construção da matriz derivativa. Ainda que a construção desta matriz seja relativamente simples, esta tem formas diferentes dependendo do tipo de wavelet usada, do seu suporte e do nível de resolução usado. O tipo de wavelet usada e o seu suporte determinam o número de coeficientes diferentes de zero. À medida que aumenta a ordem da wavelet aumenta também o número de coeficientes não nulos.

A sua dimensão está também dependente do nível de resolução usado, à medida que aumenta o nível de resolução as suas dimensões aumentam consideravelmente. Para além destes factores tem que se definir à partida o nível de resolução que se vai usar na decomposição da função uma vez que o nível de resolução usado determina a matriz derivativa. Este nível tem de ser igual de início ao fim da simulação já que se forem usados níveis de resolução diferentes teremos matrizes derivativas diferentes. Assim este método é um pouco limitativo e não permite ter uma certa liberdade. O que seria interessante era conseguir-se calcular a derivada independente do nível de resolução

em que a função foi decomposta de uma forma eficaz e sem aumentar o tempo de computação. Este processo vai ser possível realizar como se verá no próximo capítulo.

Uma ressalva importante deve também ser feita em relação à equação (3.75). Se as constantes que ai surgem puderem variar de ponto para ponto a implementação desta técnica não é assim tão trivial e surgem os problemas referidos anteriormente. Quando se tem uma constante ficamos apenas com a DWT do produto de uma constante por uma função, que é igual ao produto da constante pela transformada da função. No entanto se o valor da constante variar (por exemplo se houver descontinuidades no meio ou se recorrermos à técnica de PML) tem-se que calcular a DWT do produto de duas funções, a qual não é igual ao produto das DWT's. Neste caso as constantes seriam representadas por uma matriz diagonal cujos os elementos dependem do valor da condutividade, permeabilidade e permitividade em cada ponto do espaço.

O problema anterior, que é computacionalmente pesado uma vez que se terá um produto de várias matrizes, é o mesmo que temos quando se usa o PML uma vez que na construção do meio absorvente vamos ter diferentes valores das constantes, o que torna este método um pouco limitativo.

### **3.6 Wavelets no intervalo**

Uma solução para tentar ultrapassar os problemas que surgem com as condições fronteira é usar funções de suporte compacto mas cujo suporte esteja inteiramente contido no intervalo em estudo. Ou seja é importante definir uma base de wavelets para efectuar análises em intervalos limitados e fechados, como é o caso dos modelos que surgem no FDTD. A questão que se coloca é pois a seguinte: como tratar as funções cujo suporte não está inteiramente contido no intervalo definido?

Claro que numa primeira tentativa se pode trincar as funções cujo suporte se encontra parte no interior e parte no exterior do intervalo. No entanto este procedimento apresenta duas grandes limitações. A primeira está relacionada com a perda de ortogonalidade das funções que constituem a base considerada. Consequentemente esta perda terá um impacto bastante negativo, quer na diminuição drástica dos índices

de esparsidade do sistema, quer na diminuição da estabilidade numérica da aproximação definida [3-20]. A segunda limitação prende-se com a escolha e o tratamento das funções a utilizar. Ou seja, podem surgir problemas se o troço do suporte da função localizada no interior do intervalo é muito pequeno e quando nesse troço o valor da função é quase nulo. A consideração dessas funções na aproximação pode ter consequências importantes na estabilidade numérica da aproximação. Por um lado a sua consideração pode dar origem a sistemas muito mal condicionados. Por outro lado, remover as funções com estas características da base de aproximação pode dar origem a problemas de instabilidade locais, do tipo do efeito de Gibbs [3-20].

As funções definidas em intervalos limitados e fechados são úteis em variadas áreas da engenharia. Uma vez que as wavelets até agora apresentadas estão definidas na recta dos reais, as suas propriedades só se mantêm inalteradas se considerarmos todo o domínio  $R$ , tendo pouca aplicação prática em problemas onde se considerem discretizações elementares.

Uma aproximação que se poderia usar era a truncatura que no entanto apresenta os problemas referidos anteriormente. Uma outra metodologia seria definir as bases de funções no intervalo obtendo-se as chamadas wavelets no intervalo.

Conforme se descreve em [3-20], a definição de sistemas de wavelet no intervalo passa pelo tratamento das funções definidas na vizinhança da fronteira do intervalo, que se denominam por funções de extremidade, mantendo inalteradas as funções no domínio, que se passam a designar por funções de interior. Consoante sejam definidas no extremo esquerdo ou direito do intervalo, designam-se por funções de escala ou wavelets à esquerda ou à direita respectivamente.

No entanto a construção de sistemas de wavelets definidas sobre o intervalo evidenciou-se algo difícil, tal como foi referido por Perrier [3-21]. Seguiram-se vários trabalhos nesta área de que se destaca o [3-22] em que o problema é tratado de um ponto de vista matemático, no entanto não é objectivo desta tese a descrição destes aspectos matemáticos, podendo no entanto recorrer-se a [3-20];[3-21];[3-22]. Apenas para se ter um pouco a noção de complexidade que este tema envolve pode-se referir que a diferença de abordagem de Cohen e Perrier na geração das wavelets no intervalo, tendo como base as funções de Daubechies, dá origem a funções de

extremidade se suporte diferente, ou seja funções que estão definidas em intervalos diferentes [3-20].

Além da complexidade matemática que surge quando se usam funções de fronteira verifica-se que a super convergência no que se refere ao operador derivada se perde quando se usam wavelets de fronteira e a matriz de diferenciação é complicada de obter [3-23];[3-24].

### 3.7 Síntese

Neste capítulo abordou-se ainda que de uma forma muito sumária o modo como surgiram as diferentes famílias de wavelets, e explicou-se em que consiste a análise multiresolução. De seguida aplicou-se esse conceito na discretização das equações de Maxwell obtendo-se diferentes esquemas MRTD. Apontaram-se as vantagens destes esquemas e os seus principais inconvenientes que serviram de motivação para o trabalho apresentado nesta tese.

### 3.8 Referências

[3-1] A. Grossmann e J. Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.* 15(04) 723–736.

[3-2] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs*. Volume 1, Hermann, 1<sup>a</sup> edição, Paris, 1990.

[3-3] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure App. Math.* 24(02) 909–996, 1988.

[3-4] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets – II variations on a theme. *SIAM J. Math. Anal.* 24(02) 499–519, 1993.

- [3-5] S. G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*. 11(07) 674–693 1989.
- [3-6] Stéphane Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998.
- [3-7] D. Gottlieb e C. W. Shu. On the Gibbs phenomenon and its resolution. *SIAM J. Math. Anal.* 39(04) 644–668, Dez. 1997.
- [3-8] P. Monasse e V. Perrier. Orthonormal wavelet bases adapted for partial differential equations with boundary conditions. *SIAM J. Math. Anal.* 29(04) 1040–1065, Jul. 1998.
- [3-9] G. Strang e T. Nguyen. *Wavelets and filter banks*. Welesley Cambridge Press, Massachusetts, 1996.
- [3-10] R. F. Harrington. *Field computation by moment methods*. Malabar, Krieger, 1982.
- [3-11] M. Krumpholz, C: Huber e P. Russer. A field theoretical comparison of FDTD and TLM. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 43(08) 1935–1950, Ago. 1995.
- [3-12] M. Krumpholz e L. Katehi. New prospects for time domain analysis. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 5(11) 382–384, Nov. 1995.
- [3-13] M. Krumpholz e L. Katehi. MRTD: New time domain schemes based on multiresolution analysis. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 44(04) 555–571, Abr. 1996.
- [3-14] K. Goverdhanam e L. Katehi. Applications of multiresolution based FDTD multigrid. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 45(03) 385–393, Mar. 1997.
- [3-15] M. Krumpholz, H. G. Winful e L. Katehi. Nonlinear time domain modeling by multiresolution time domain (MRTD). *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 45(03) 385–393, Mar. 1997.

- [3-16] M. Fujii e W. J. R. Hofer A 3D Haar wavelet based multiresolution analysis similar to the FDTD method-derivation and application. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 46(12) 2463–2475, Dez. 1998.
- [3-17] Y. W. Cheong, Y. M. Lee, K. H. Ra, J. G. Kang e C. C. Shin. Wavelet – Galerkin scheme of time dependent inhomogeneous electromagnetic problems. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 9(08) 297–299, Ago. 1999.
- [3-18] M. Werthen e I. Wolff. A novel wavelet based time domain simulation approach. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 6(12) 438–440, Dez. 1996.
- [3-19] C. R. Pérez. Una nueva aproximación a la multirresolución en el dominio del tiempo (MRTD) basada en la transformada discreta en wavelets. Tese de Doutoramento, Universidade de Burgos, Jun. 2002.
- [3-20] A. R. Barbosa. Wavelets no intervalo em elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Jun. 2001.
- [3-21] P. Monasse e V. Perrier. Orthonormal wavelet bases adapted for partial differential equations with boundary conditions. *SIAM J. Math. Anal.* 29(04) 1040–1065, 1998.
- [3-22] A. Cohen, I. Daubechies, e P. Vial. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 1(01) 54–81, 1993.
- [3-23] L. Jameson. On the spline-based wavelet differentiation matrix. *Appl. Numer. Math.* 17 33–45, 1995.
- [3-24] L. Jameson. The differentiation matrix for Daubechies based wavelets on an interval. *SIAM J. Sci. Comput.* 17(02) 498–516, Mar. 1996.

# Capítulo 4

## Análise multiresolução interpolatória

### 4.1 Introdução

*“The possible application of wavelets to differential equations is important. In principle, this application is available. In practice, it is not yet a real success. The overall approach is familiar, but the competition with other methods is severe. We do not necessarily predict that wavelets will win” [4-1].*

Esta frase foi escrita em 1995, e na minha opinião resume a principal motivação para a realização desta tese, ou seja a aplicação de wavelets na resolução das equações diferenciais de Maxwell, e as dificuldades decorrentes.

Existe uma grande variedade de métodos para a resolução de equações diferenciais. Em geral, estas equações não possuem soluções analíticas conhecidas. Com o progresso dos recursos computacionais, a comunidade científica tem-se dedicado a desenvolver técnicas numéricas de resolução dessas equações. Recentemente, houve progressos importantes com uma variedade de técnicas adaptativas, classificadas como sendo de

multiresolução ou de multinível, que são adequadas para o tratamento de estruturas localizadas no espaço. O desenvolvimento dessas técnicas constitui uma área de pesquisa extremamente activa, com excelentes perspectivas de contribuições práticas.

A análise wavelet possui um papel de destaque nesse contexto numérico. Este tipo de análise foi introduzido formalmente na década de 80, e os seus principais resultados foram compilados por Meyer [4-3] e Daubechies [4-2]. Esta nova teoria possui uma forma versátil e elegante de abordar, simplificar e integrar conceitos. Isto resultou na sua rápida adopção em diversas áreas interdisciplinares, com as mais variadas aplicações.

Em especial, na última década, tem sido dado bastante ênfase à análise multiresolução biortogonal, que é desenvolvida no contexto da teoria de wavelets, na resolução numérica de equações diferenciais. O objectivo desta tese é contribuir de forma teórica e computacional na avaliação das discretizações biortogonais nas equações diferenciais parciais evolutivas, em especial as equações de Maxwell, e fazer a sua comparação com o FDTD. Em particular a nossa motivação para o uso de wavelets é, como observado no capítulo anterior, obter uma representação esparsa numa base de wavelets. Assumindo que uma função  $f$  é representada por  $N$  pontos numa grelha uniforme, a mesma função pode ser representada numa base de wavelets, com um erro  $\varepsilon$ , por  $N_s$  pontos (representação esparsa) em que  $N_s \ll N$ . O que se pretende é efectuar o cálculo, nomeadamente de derivadas, produtos ou somas, num tempo proporcional a esses  $N_s$ . As wavelets interpolatórias permitem atingir esse objectivo.

Ao efectuarmos este procedimento estamos a construir a malha adaptativa que tanto procuramos, uma vez que vamos ter coeficientes significativos apenas em alguns pontos do espaço. Usando representações esparsas a multiplicação e a soma de duas funções é feita nos pontos que resultam da reunião das duas grelhas. A derivada de uma função é calculada por diferenças finitas centradas. Sempre que nos cálculos anteriores haja necessidade do valor de uma amostra que não esteja incluída na representação esparsa, esse valor é obtido facilmente de forma recursiva. As condições fronteira podem ser tratadas do mesmo modo que o são quando se usam diferenças finitas numa grelha uniforme. Neste capítulo será demonstrado o modo como se podem obter todas estas vantagens.

## 4.2 As diferentes representações de um sinal

Nesta secção apresentam-se as diferentes representações que se podem ter para representar um sinal. Consideremos portanto que  $f(x)$  representa o valor de um dado sinal em  $x$  (por exemplo o campo eléctrico ou magnético num dado ponto  $x$ ). Para fazer a representação desta função recorre-se basicamente a dois tipos de representação:

- ❖ Representação em espaço físico;
- ❖ Representação usando a análise multiresolução;

A representação em espaço físico ou representação amostrada é definida em termos de um conjunto equidistante de amostras de  $f$ . Os dados correspondentes a esta representação são portanto as amostras.

O FDTD está obviamente relacionado com uma representação em espaço físico dos campos. Quando se usa este tipo de representação as principais vantagens que se podem enumerar estão relacionadas com o modo simples como se podem aproximar a derivada, o produto, a soma e a forma elegante de se aplicar as condições fronteira. Se há vantagens importantes no que se refere principalmente ao cálculo, desvantagens também existem. Dependendo obviamente do problema, em geral os vectores são densos, determinados normalmente pela menor dimensão a discretizar originando grelhas uniformes, pesadas e que porventura podem levar a uma sobreamostragem em certos pontos do espaço. O principal inconveniente desta representação prende-se portanto no possível aumento do tempo de computação para simular tal grelha. É evidente que a 2D e 3D este aumento do tempo de computação é mais acentuado.

Em 1988 Ingrid Daubechies [4-4], apresentou à comunidade científica o seu trabalho onde demonstrou que para além das wavelets de Haar, até então as únicas de suporte compacto, era possível definir uma nova classe com suporte compacto e ortogonais: as wavelets de Daubechies.

Dado um sinal em  $L^2(R)$  e uma base particular de wavelets é possível fazer a sua análise e a respectiva síntese. Por análise entende-se aqui a determinação dos coeficientes de expansão do sinal relativamente a base escolhida. Dados esses

coeficientes é possível efectuar a operação inversa, a síntese, como uma soma pesada dos elementos da base.

Depois disto em 1989, Mallat [4-5], identificou a importante relação entre a transformada de wavelet e a análise multiresolução demonstrando que a análise e a síntese de um sinal relativamente a uma base de wavelets ortogonal poderia ser efectuada usando um banco de filtros ortogonais. O cruzamento desta informação foi o impulso fundamental para o rápido crescimento da teoria de wavelets.

Quando se faz a representação de um sinal usando a análise multiresolução dois tipos de representações são possíveis:

- ❖ Representação usando funções de escala;
- ❖ Representação usando funções de escala e wavelets;

Por sua vez a análise multiresolução pode também ser classificada em ortogonal ou biortogonal que são os conceitos que se vão discutir de seguida.

### 4.2.1 Análise multiresolução ortogonal

A análise multiresolução é uma ferramenta muito útil no estudo de funções contidas no espaço das funções quadraticamente integráveis  $L^2(\mathbb{R})$ , uma vez que estas podem ser aproximadas pelas suas projecções em  $V_j$  (sub-espaco linear). A análise multiresolução ortogonal já foi amplamente discutida no capítulo anterior no ponto 3.3. Apresenta-se aqui apenas as suas principais propriedades para um melhor entendimento do ponto seguinte. Uma análise multiresolução em  $L^2(\mathbb{R})$  é uma sucessão de espaços fechados de  $L^2(\mathbb{R})$  tais que:

$$\begin{aligned}
 &V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z} \\
 &f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \\
 &V_{-\infty} = \{0\} \Leftrightarrow \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \\
 &V_{+\infty} = L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \\
 &\text{Existe } \phi(x) \in V_0 \text{ tal que } \{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ é uma base ortonormal de } V_0
 \end{aligned}
 \tag{4-1}$$

As condições anteriores não são todas independentes. Para além dos sub-espacos  $V_j$ , existem também os sub-espacos complementares  $W_j$ . Estes últimos contêm a diferença de informação entre o nível de resolução  $j$  e o nível de resolução mais refinado  $j+1$ . Por outras palavras, os detalhes que faltam a um nível para que se obtenha o nível seguinte, ou seja  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ . De uma forma geral podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 V_{j+1} &= V_j \oplus W_j \\
 V_{j+1} &= V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j \\
 &\vdots \\
 &\dots \\
 V_{j+1} &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \dots \oplus W_{j-1} \oplus W_j
 \end{aligned}
 \tag{4-2}$$

o que nos leva à representação de uma função usando funções de escala e wavelets tal como se pode ver em 4.2.3.

## 4.2.2 Análise multiresolução biortogonal

A ortogonalidade é uma propriedade importante na análise e síntese de um sinal, mas que pode ser dispensada. Em 1992 Cohen, Daubechies e Feauveau [4-6], introduziram a ideia de se usarem bases de wavelets biortogonais. Nesta situação dois tipos distintos de bases são empregues: uma para a análise e outra para a síntese. Pode-se dizer que temos duas análises multiresolução: a primária e a dual.

- ❖ Primária:  $V_j, W_j, \phi_{j,k}, \psi_{j,k}$
- ❖ Dual:  $\tilde{V}_j, \tilde{W}_j, \tilde{\phi}_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k}$

Até aqui as funções  $\phi(x), \psi(x)$ , não podiam ser simultaneamente ortogonais e originar filtros de fase linear, com excepção da wavelet ortogonal de Haar. A grande vantagem que existe quando se usam bases biortogonais é que estas oferecem maior flexibilidade no projecto do banco de filtros, permitindo a construção de um banco de filtros com fase linear, uma vez que as funções de escala e as wavelets são simétricas.

Consideremos então uma análise multiresolução em  $L^2(\mathbb{R})$  definida pelos pares  $\{V_j, \phi\}$  e  $\{\tilde{V}_j, \tilde{\phi}\}$  relacionadas de tal forma que as funções de escala associadas satisfazem a relação de biortogonalidade, isto é:

$$\langle \phi_k^j, \tilde{\phi}_l^j \rangle = 2^j \int \phi(2^j x - k) \tilde{\phi}(2^j x - l) dx = \delta_{k,l} \quad (4-3)$$

e por isso são designadas por funções de escala conjugadas ou duais.

Tenha-se por hipótese também,  $W_j = V_{j+1} \cap \tilde{V}_j$  e  $\tilde{W}_j = \tilde{V}_{j+1} \cap V_j$  então são válidas as seguintes somas directas:

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j \\ \tilde{V}_{j+1} &= \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j \end{aligned} \quad (4-4)$$

Definindo as funções  $\psi$  e  $\tilde{\psi}$  como:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta(k) \phi(2x - k) \\ \tilde{\psi}(x) &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\beta}(k) \tilde{\phi}(2x - k) \end{aligned} \quad (4-5)$$

em que  $\beta(k) = (-1)^{k+1} \tilde{\beta}(-k+1)$  e  $\tilde{\beta}(k) = (-1)^{k+1} \alpha(-k+1)$ , prova-se que as famílias

$$\begin{aligned} \psi_k^j(x) &= 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \\ \tilde{\psi}_k^j(x) &= 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j x - k) \end{aligned} \quad (4-6)$$

são respectivamente bases de  $W^j$  e  $\tilde{W}^j$ .

As funções  $\psi_k^j$  são chamadas de funções wavelet. As funções  $\tilde{\psi}_k^j$  são conhecidas como funções wavelet conjugadas ou duais. Essas famílias de funções caracterizam-se por satisfazerem as seguintes relações de biortogonalidade:

$$\begin{aligned} \langle \phi_k^j, \tilde{\psi}_l^j \rangle &= 0 \\ \langle \tilde{\phi}_k^j, \psi_l^j \rangle &= 0 \\ \langle \tilde{\psi}_k^j, \psi_l^m \rangle &= \delta_{j,m} \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (4-7)$$

Se  $\psi_k^j = \tilde{\psi}_k^j$  as wavelets são ortogonais. A família de wavelets ortogonais de Daubechies são casos particulares das famílias biortogonais em que  $\phi_k^j = \tilde{\phi}_k^j$   $\psi_k^j = \tilde{\psi}_k^j$ . Se as funções base são diferentes então a família de wavelets é biortogonal.

No caso biortogonal, o conceito de banco de filtros pode na mesma ser empregue [4-6]. Assim, usa-se o par  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  (relacionado com a análise multiresolução dual) para a decomposição e o par  $(\alpha, \beta)$  (relacionado com a análise multiresolução primária) para a reconstrução. Exemplos de wavelets biortogonais são a família de wavelets construída por Cohen, Daubechies e Feauveau [4-6]. A Figura 4-1 apresenta as funções de escala e as funções wavelet quer as aplicadas na decomposição quer as usadas na reconstrução. São também apresentados os coeficientes dos filtros.

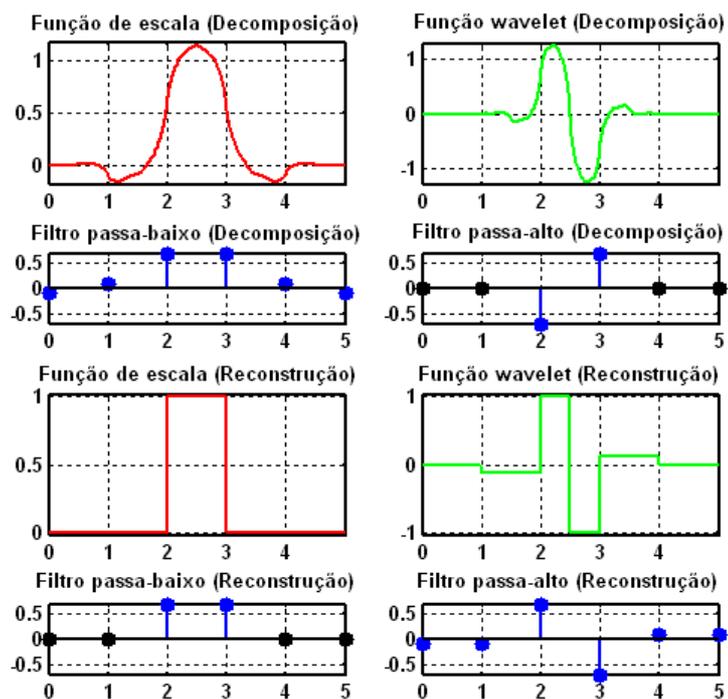


Figura 4-1 Wavelets biortogonais (bior13)

A Figura 4-2 apresenta um conjunto de wavelets biortogonais. São apresentadas as funções de escala e as funções wavelet quer as usadas na decomposição quer as usadas na reconstrução.

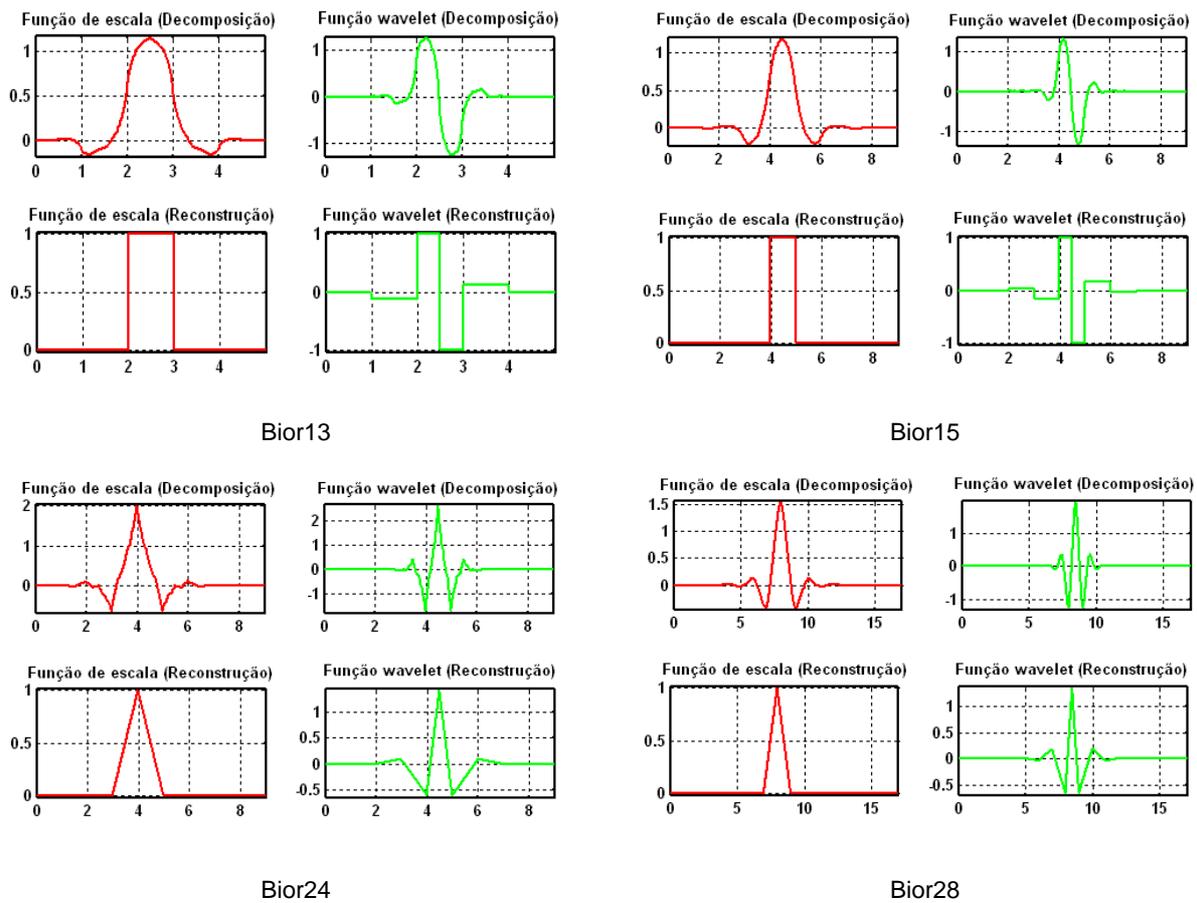


Figura 4-2 Wavelets biortogonais

### 4.2.3 Representações em multiresolução

A análise multiresolução é uma ferramenta muito útil no estudo de funções em  $L^2(R)$  permitindo escrever qualquer função  $f \in V_j$  recorrendo à sua projecção em  $V_j$  como:

$$f(x) = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \text{ onde} \tag{4-8}$$

$$c_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$$

o que constitui a chamada representação da função usando funções de escala.

Se por outro lado atendermos também às projecções sobre  $W_j$ , as quais contêm a diferença de informação entre os níveis  $j$  e  $j+1$  e recorrermos a uma representação usando funções de escala e wavelets podemos escrever qualquer função  $f \in V_j$  como:

$$f(x) = \sum_k c_{0,k} \phi_{0,k}(x) + \sum_{j=0}^{j-1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \text{ onde} \quad (4-9)$$

$$c_{0,k} = \langle f, \phi_{0,k} \rangle \text{ e } d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

De um modo semelhante, no caso de estarmos perante uma análise multiresolução biortogonal e recorrermos a uma representação usando funções de escala e wavelets, podemos escrever qualquer função  $f \in V_j$  como:

$$f(x) = \sum_k c_{0,k} \phi_{0,k}(x) + \sum_{j=0}^{j-1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \text{ onde} \quad (4-10)$$

$$c_{0,k} = \langle f, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle \text{ e } d_{j,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$$

### 4.3 Análise multiresolução interpolatória

Uma função de escala contínua  $\phi(x)$  é denominada de interpolatória se:

$$\phi(n) = \delta_{0,n}, \quad n \in Z \quad (4-11)$$

A definição de função de escala interpolatória  $\phi(x)$  é baseada num esquema de subdivisão interpolatória. A aplicação deste esquema de subdivisão interpolatória simétrica a partir da sequência  $\delta_{0,x}, x \in Z$  dá origem à função de escala de Deslauriers e Dubuc [4-7];[4-8]. A regra básica é a interpolação polinomial de grau  $2p-1$ . As principais características destas funções são:

- ❖  $\phi(x)$  é interpolatória, ou seja  $\phi(x) = \delta_{0,x}, x \in Z$ ;
- ❖  $\phi(x)$  é contínua e possui suporte compacto no intervalo  $[-2p+1, 2p-1]$  e a sua regularidade aumenta à medida que  $p$  cresce;
- ❖  $\phi(x)$  é par, ou seja  $\phi(x) = \phi(-x)$ , pois o esquema interpolador é simétrico e consequentemente é simétrica em torno de  $x = 0$ ;
- ❖  $\phi(x)$  satisfaz a equação de escala;
- ❖ Todo o polinómio  $q(x)$  de grau menor ou igual a  $2p-1$  pode ser escrito como combinação linear de  $\phi_{j,k}, j, k \in Z$ ;

As funções interpolatórias surgiram na literatura no trabalho de Deslauriers e Dubuc como funções fundamentais de um esquema de refinamento interpolante. Esse esquema é baseado num conjunto de malhas interligadas [4-7];[4-8];[4-12].

### 4.3.1 Wavelets interpolatórias – conceito

Se uma função de escala for interpolatória então, podemos afirmar que toda a função  $f \in V_j$  satisfaz a seguinte relação:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2^{-j}k) \phi_{j,k}(x) \quad (4-12)$$

De facto, se considerarmos  $x = 2^{-j}k$  temos que:

$$f(2^{-j}k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \phi_{j,k}(2^{-j}k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \phi(2^j 2^{-j}k - l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \delta_{0,k-l} = c_k \quad (4-13)$$

ou seja, os coeficientes são simples avaliações da função nos pontos da forma  $x = 2^{-j}k$ . Portanto para os calcular não é necessário realizar nenhuma operação complexa (como integração), o que representa uma grande vantagem com respeito a outras bases. Esta será porventura uma das principais propriedades destas wavelets quando comparadas com as wavelets de primeira geração. Assim, quando se usam wavelets biortogonais e interpolatórias a representação física e a representação em funções de escala são essencialmente equivalentes. Os coeficientes de aproximação coincidem com os valores amostrados.

### 4.3.2 Wavelets interpolatórias – função de interpolação

Como referido anteriormente a definição da função de escala interpolatória é baseada num esquema de subdivisão interpolador. A regra básica é a interpolação polinomial de grau  $2p-1$ .

Começando com uma função  $f_k^j$  definida em  $V^j$ , o algoritmo vai gerar uma função nova  $f_{2k+1}^{j+1}$  definida em  $V^{j+1}$ , fazendo uma interpolação de grau  $2p-1$  em cada novo ponto

$2k + 1$ , a partir dos valores de  $f_k^j$  do nível anterior. São utilizados os  $2p$  pontos vizinhos mais próximos em  $V^j$ . Como  $2p$  é um número par, a interpolação é simétrica. A Figura 4-3 apresenta o conceito anterior. Neste exemplo foi usado interpolação linear, ou seja,  $p = 1$ . Poder-se-ia usar interpolação cúbica ( $p = 2$ ), em que se usam os quatro pontos vizinhos mais próximos.

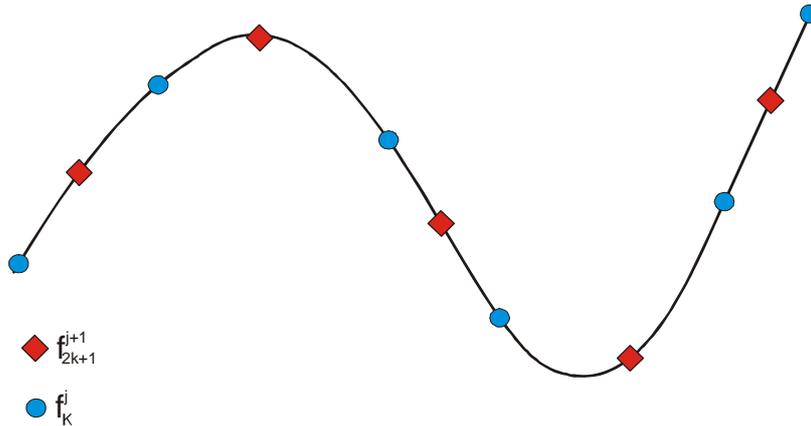


Figura 4-3 Conceito de interpolação

Matematicamente a operação anterior pode ser vista como:

$$f_k^{j+1} = \begin{cases} f_{2k}^{j+1} = f_k^j \\ f_{2k+1}^{j+1} = \mathbf{P}_{2k+1}^{j+1}(x_{j+1,2k+1}) \end{cases} \quad (4-14)$$

ou seja, os pontos de índice par mantêm-se inalterados no nível seguinte e os pontos de índice ímpar são calculados por interpolação à custa dos pontos do nível anterior. Para o cálculo do valor interpolado é usado o seguinte polinómio interpolador:

$$\sum_{l=-\frac{p}{2}+1}^{\frac{p}{2}} f_{k+1}^j \frac{\prod_{h=-\frac{p}{2}+1}^{l-1} (x - x_{j,k+h}) \prod_{h=l+1}^{\frac{p}{2}} (x - x_{j,k+h})}{\prod_{h=-\frac{p}{2}+1}^{l-1} (x_{j,k+l} - x_{j,k+h}) \prod_{h=l+1}^{\frac{p}{2}} (x_{j,k+l} - x_{j,k+h})} \quad (4-15)$$

Da expressão anterior pode-se concluir que o cálculo de um determinado valor depende da ordem de interpolação  $2p - 1$ , e dos pontos que o rodeiam. No caso de  $p = 2$  (interpolação cúbica) o resultado do esquema num ponto genérico da forma  $2k + 1$  é:

$$\mathbf{P}_{2k+1}^{j+1}(x_{j+1,2k+1}) = -\frac{1}{16}(f_{k-1}^j + f_{k+2}^j) + \frac{9}{16}(f_k^j + f_{k+1}^j) \quad (4-16)$$

No caso  $p = 1$  (interpolação linear) o resultado do esquema num ponto genérico  $2k + 1$  é:

$$\mathbf{P}_{2k+1}^{j+1}(x_{j+1,2k+1}) = \frac{1}{2}(f_k^j + f_{k+1}^j) \quad (4-17)$$

que não é mais nem menos que a média aritmética dos dois valores mais próximos.

A Figura 4-4 representa o processo de interpolação. A figura do lado esquerdo corresponde a uma interpolação linear (2 pontos) enquanto a figura do lado direito a uma interpolação cúbica (4 pontos).

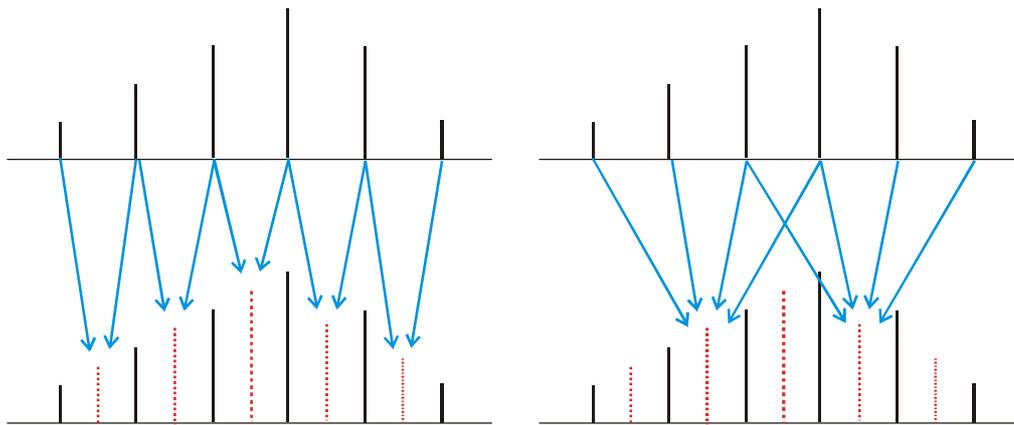


Figura 4-4 Interpolação linear e interpolação cúbica

### 4.3.3 Wavelets interpolatórias – aspecto funcional

Definimos então o operador de interpolação  $P^j f \in V_j$  de uma função contínua  $f \in L^2(\mathbb{R})$  como a sua projecção em  $V_j$ , ou seja:

$$P^j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2^{-j}k) \phi_{j,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \phi_{j,k} \quad (4-18)$$

do mesmo modo podemos também definir:

$$P^{j+1} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2^{-j-1}k) \phi_{j+1,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j+1,k} \phi_{j+1,k} \quad (4-19)$$

Como  $P^{j+1} f - P^j f \in V_{j+1}$  existem então coeficientes  $c_{j+1,k}$  tais que:

$$P^{j+1} f - P^j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j+1,k} \phi_{j+1,k} \quad (4-20)$$

No entanto como  $c_{j+1,2k} = 0$  podemos escrever:

$$P^{j+1} f - P^j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j+1,2k+1} \phi_{j+1,2k+1} \quad (4-21)$$

Definindo então  $\psi(x) = \phi(2x-1)$  como a função wavelet temos que os coeficientes  $c_{j+1,2k+1}$  são designados por detalhes e representam-se por  $d_{j,k}$ . Podemos então escrever a seguinte relação:  $P^{j+1} f - P^j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}$  ou seja,

$$P^{j+1} f = P^j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (4-22)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j+1,k} \phi_{j+1,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \phi_{j,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

A relação anterior é designada de decomposição wavelet, onde a projecção de  $f$  na malha mais fina é decomposta como a projecção de  $f$  na malha mais grossa mais um termo de correcção que depende dos detalhes. Pode-se então dizer que:

$$d_{j,k} = f_{j+1,2k+1} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{j,l} \phi_{j,l}(x_{j+1,2k+1}) \quad (4-23)$$

ou seja os coeficientes  $d_{j,k}$  são a diferença entre o valor da função no ponto  $x_{2k+1}^{j+1}$  e o valor interpolado (erro de interpolação). A Figura 4-5 apresenta a ideia anterior.

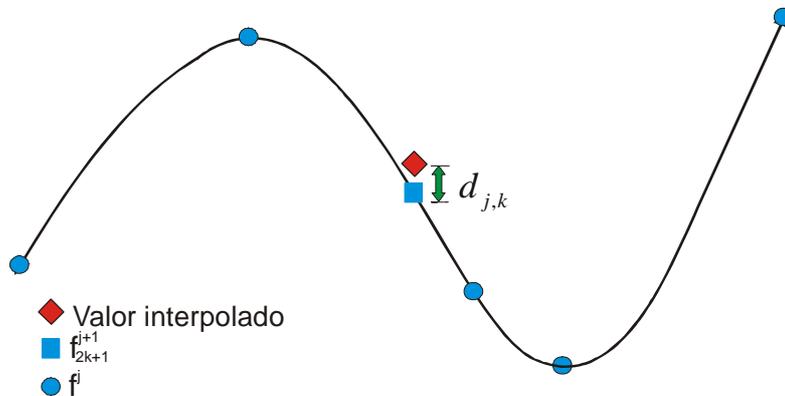


Figura 4-5 Detalhe

Na implementação deste trabalho quando o valor do detalhe é considerado abaixo de um dado limite (erro de interpolação  $\varepsilon$ ) esse detalhe assume-se nulo. Deste modo, obtém-se uma representação que se designa por representação esparsa. Esta é formada por um número de pontos  $N_s$  inferior ao número de pontos  $N$  da função no nível mais fino. É deste modo que se consegue obter uma grelha adaptativa, uma vez que vamos ter mais pontos nas zonas em que o sinal varia mais significativamente e menos pontos onde o sinal é mais suave.

### 4.3.4 Transformada de wavelet interpolatória

Tendo sido definido o modo como se obtêm as aproximações e os detalhes de uma função por análise interpolatória temos que arranjar uma ferramenta que nos permita passar de um tipo de representação para o outro e vice-versa. Podemos então referir que a análise de uma função  $f^{j+1}$  (DWT do caso interpolante) é efectuada em três etapas . Na primeira etapa é feita uma decimação, isto é  $f_{2k}^{j+1} = f_k^j$ . De seguida calcula-se  $\tilde{f}_{2k+1}^{j+1}$  por interpolação recorrendo às fórmulas anteriores. Este valor é uma aproximação a  $f_{2k+1}^{j+1}$ . Por último, analisa-se a diferença entre o valor exacto e o valor aproximado que não é mais que o erro de interpolação. Se este valor for menor que um determinado valor  $\varepsilon$ , então esse ponto pode ser ignorado, obtendo-se assim a representação esparsa. Este processo designa-se por algoritmo de decomposição ou análise de uma função e matematicamente é definido por:

$$\begin{aligned} \{f^{j+1}\} &\longrightarrow \{f^j, d^j\} \\ d^j &= f_{2k+1}^{j+1} - \tilde{f}_{2k+1}^{j+1} \\ \text{Se } d^j < \varepsilon &\Rightarrow d^j = 0 \end{aligned} \tag{4-24}$$

O mesmo processo pode agora ser aplicado à função  $f^j$  que resultou da decomposição anterior e assim sucessivamente obtendo-se o que se designa por decomposição multinível. O processo termina quando se atinge o nível mais grosseiro.

Já o processo inverso, ou seja, a síntese de uma função (IDWT do caso interpolante), é obtida em dois passos. Matematicamente temos:

$$\begin{aligned} f_{2k}^{j+1} &= f_k^j \\ f_{2k+1}^{j+1} &= d_k^j + \tilde{f}_{2k+1}^{j+1} \end{aligned} \tag{4-25}$$

resultando em  $\{f^j, d^j\} \longrightarrow \{f^{j+1}\}$ . Obviamente se a decomposição tiver envolvido mais que um nível de resolução a síntese terá também que ser feita no mesmo número de níveis de resolução para obtermos a função original. Evidentemente que quando o valor do detalhe é desprezado o valor da função passa a ser igual à aproximação que foi calculada aquando do processo de análise. Quando temos uma decomposição multinível, matematicamente teremos a seguinte representação:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{j_0} \phi_k^{j_0}(x) + \sum_{m=0}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^m \psi_k^m(x) \tag{4-26}$$

que corresponde à seguinte mudança de base:

$$\{\phi_k^{j+1}\} \leftrightarrow \{\phi_k^{j_0}\} \cup \{\psi_k^{j_0}\} \dots \cup \{\psi_k^j\} \quad (4-27)$$

Na Figura 4-6 temos a representação esparsa de uma função. Na parte esquerda da figura a função foi inicialmente discretizada com 161 pontos enquanto na parte esquerda a função foi amostrada em 641 pontos. Em ambas o nível mais grosseiro contém seis amostras. A primeira foi decomposta em cinco níveis de decomposição enquanto a segunda foi decomposta em sete níveis. Em ambas as figuras é apresentada a representação esparsa por níveis assim como a função interpolada resultante da decomposição prévia que foi submetida. Nessa decomposição considerou-se  $\varepsilon$  igual  $1 \times 10^{-3}$ . Das figuras vê-se também o número reduzido de pontos usado na representação esparsa respectivamente 40 e 61. Das figuras também é possível observar que os pontos pertencentes a representação esparsa concentram-se principalmente junto às descontinuidades.

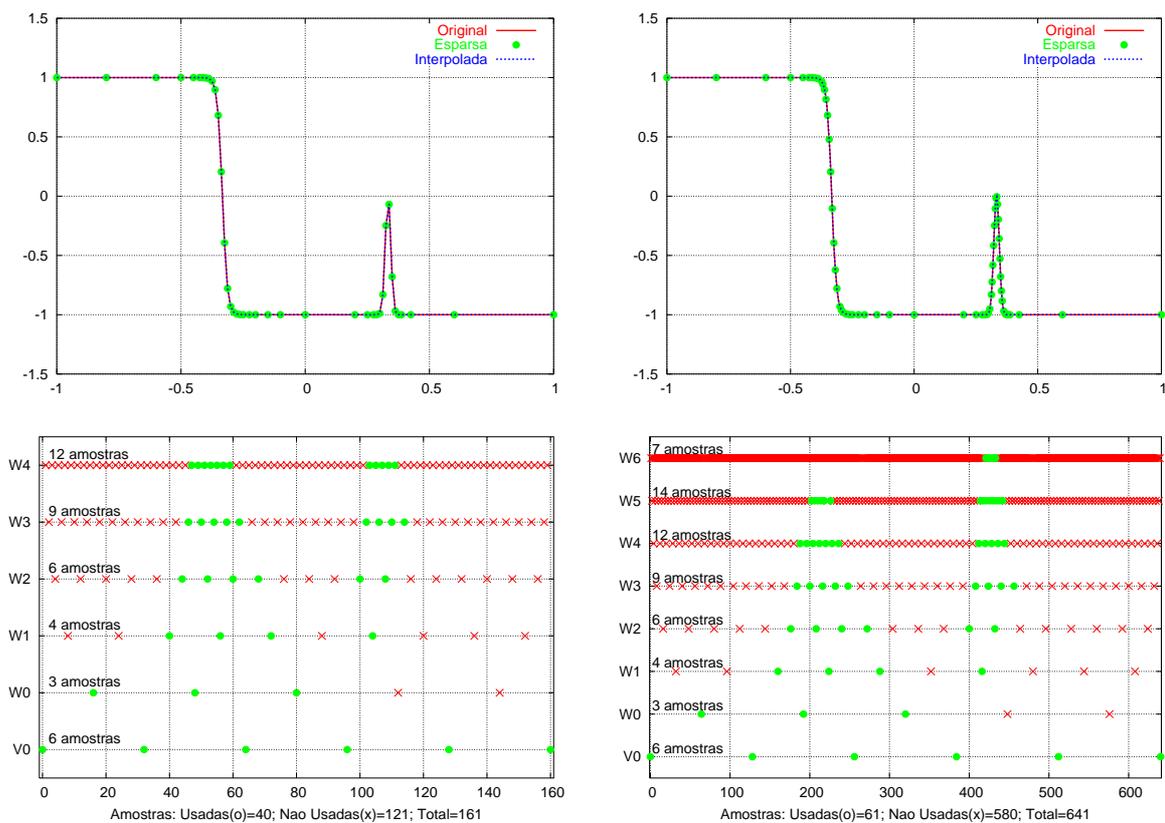


Figura 4-6 Representação esparsa de uma função

### 4.3.5 Condições fronteira para wavelets interpolatórias

Quando se recorre a wavelets interpolatórias podemos ter problemas junto das fronteiras, uma vez que o cálculo de um valor está dependente dos seus vizinhos. Assim, se usarmos interpolação linear esse problema não se levanta uma vez que nenhum dos valores necessários cai fora da fronteira (ver Figura 4-4). No entanto, quando a interpolação é cúbica e estamos num ponto perto da fronteira vamos necessitar de valores que caem fora da fronteira. Para ultrapassar esse problema o que se faz é calcular a interpolação usando apenas pontos no interior da malha. A Figura 4-7 apresenta a ideia anterior. Ao efectuarmos este procedimento a única coisa que se altera é o valor dos pesos a usar que agora é diferente. A Tabela 4-1 apresenta os valores que se usam quer nas fronteiras quer num ponto interior da malha.

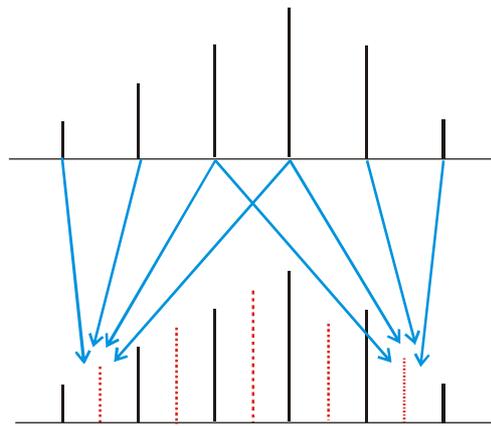


Figura 4-7 Condições fronteira para a interpolação cúbica

$k = 0$	$5/16$	$15/16$	$-5/16$	$1/16$
$0 < k < 1$	$-1/16$	$9/16$	$9/16$	$-1/16$
$k = 1$	$1/16$	$-5/16$	$15/16$	$5/16$

Tabela 4-1 Coeficientes de interpolação

Outra alternativa é usarmos condições de simetria. Esta por sua vez pode ser positiva ou negativa consoante o interesse. Este é o procedimento que vamos usar uma vez que terminamos o espaço computacional com condições do tipo PML, usando nos extremos regiões absorventes terminadas por condutores eléctricos perfeitos, podendo-se portanto ter a vantagem de se usar simetria positiva no caso do cálculo do campo magnético e de

simetria negativa no caso do campo eléctrico. A Figura 4-8 apresenta a ideia anterior. Do lado esquerdo da fronteira é usada simetria positiva, enquanto do lado direito é usada simetria negativa.

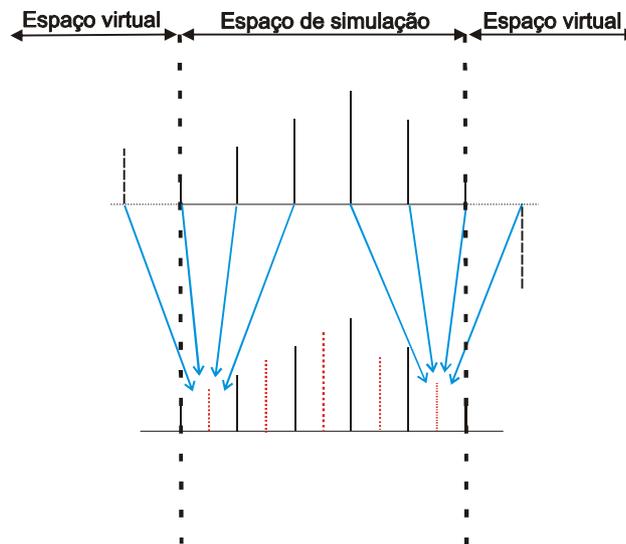


Figura 4-8 Condições fronteira para a interpolação cúbica (simetria)

### 4.3.6 Características das wavelets interpolatórias

Termina-se esta secção com as características que são mais relevantes quando se usam este tipo de wavelets na discretização das equações de Maxwell:

- ❖ Usando wavelets interpolatórias a representação em termos de funções de escala e a representação em espaço físico coincidem. Os coeficientes de aproximação são portanto as amostras dos sinais;
- ❖ Possibilidade de se usar um número de pontos  $N_s$  inferior ao número de pontos  $N$  da função no nível mais fino para a obtenção da solução;
- ❖ A imposição das condições de fronteira é simples, uma vez que estamos a trabalhar com as amostras do sinal;
- ❖ Os esquemas de interpolação permitem manter todas as potencialidades inerentes à redução de dimensionalidade que é proporcionada pelo uso das wavelets, mas a diferenciação, a soma e o cálculo de operadores não lineares como a multiplicação permanecem fáceis ao contrário de outros esquemas tipo MRTD;

## 4.4 Discretização e operação de funções em malhas adaptáveis

A obtenção de uma grelha adaptativa tem como principal objectivo a representação de uma função por valores discretos a partir de uma malha  $M$  de uma maneira precisa e mais económica possível. Naturalmente que  $M$  terá uma maior densidade de pontos nas vizinhanças das singularidades, enquanto que, nas regiões de maior suavidade a grelha será mais esparsa. Esse é justamente o padrão característico da posição dos coeficientes wavelets significativos numa análise de multiresolução. Portanto, eles são bons candidatos a indicadores na construção de tais grelhas. Nesta secção apresenta-se as principais características deste tipo de malhas e as operações que se podem realizar sobre uma malha adaptativa.

### 4.4.1 As malhas

As malhas adaptativas adoptadas neste trabalho possuem as seguintes características:

- ❖ Os pontos de uma malha  $M$  pertencem a uma malha regular  $X^J$ , em que  $J$  é o nível mais refinado, escolhido de tal forma a resolver adequadamente as possíveis irregularidades da função;
- ❖  $M$  deve conter  $X^{j_0}$ , em que  $j_0$  é o nível menos refinado, escolhido de tal forma a garantir uma precisão mínima desejada nas regiões de suavidade;

- ❖ Matematicamente a malha  $M$  é do tipo:  $M = X^{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^{j_m} \Lambda^j$  em que

$$\Lambda^j \subset X^{j+1} \setminus X^j \text{ e } j_0 \leq j_m \leq J.$$

Seja  $f^M$  o conjunto de valores discretos de uma função  $f$  associada a uma malha  $M$  desse tipo. As operações de interesse sobre a representação  $(M, f^M)$  são as que se seguem.

### 4.4.2 Truncatura: redução de malhas

Dada a representação  $(M, f^M)$ , e o parâmetro de truncatura  $\varepsilon > 0$ , define-se uma nova representação eliminando de  $M$  aqueles pontos  $x_{2k+1}^{j+1} \in \Lambda^j$  que estiverem associados a coeficientes wavelet  $|d_k^j| < \varepsilon$ . A malha resultante é denotada por  $M_\varepsilon$  podendo-se definir o operador de truncamento  $T_\varepsilon$  como:

$$(M, f^M) \xrightarrow{T_\varepsilon} (M_\varepsilon, f^{M_\varepsilon}) \tag{4-28}$$

Este procedimento consiste portanto na decomposição ou análise de um sinal. A Figura 4-9 apresenta a decomposição de um sinal genérico em que se usou o valor de  $1 \times 10^{-3}$  como parâmetro de truncatura. A malha obtida tem agora 77 pontos significativos ao contrário dos 321 iniciais. Foram ignorados portanto 244 amostras. Repare-se também que o maior número de amostras concentra-se nas zonas do sinal que variam de uma forma mais acentuada.

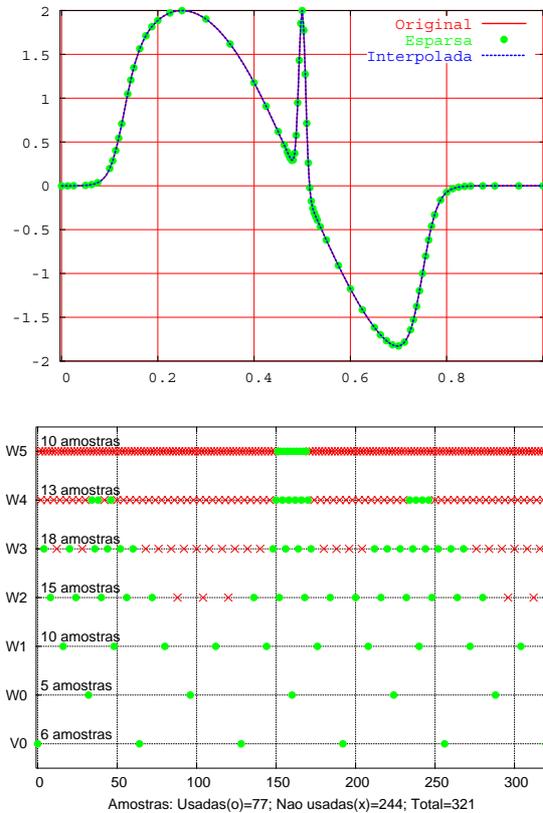


Figura 4-9 Truncamento de uma malha

### 4.4.3 Extensão: refinamento de malhas

Dada uma representação  $(M, f^M)$ , pode ser de interesse ter uma representação  $(\tilde{M}, f^{\tilde{M}})$  numa malha mais fina. Seja  $M$  uma malha do tipo  $M = X^{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^{j_m} \Lambda^j$  tal como definido anteriormente. Tipicamente, para a construção da uma malha mais fina  $\tilde{M} = X^{j_0} \cup \Lambda^{\tilde{M}}$  escolhe-se o conjunto  $\Lambda^{\tilde{M}}$  formado pelos pontos de  $\Lambda^M$  acrescidos de uma vizinhança, isto é, para cada ponto de  $\Lambda^M$  incluem-se também alguns vizinhos, tanto no mesmo nível de escala, como em alguns níveis superiores. Na prática, os valores de  $f^{\tilde{M}}$  nos novos pontos poderão não estar disponíveis. Quando assim for usa-se um esquema de refinamento interpolatório, das escalas inferiores para as superiores. Desta forma fica definido o operador extensão como:

$$(M, f^M) \xrightarrow{E} (\tilde{M}, \tilde{f}^{\tilde{M}}) \tag{4-29}$$

em que  $\tilde{f}$  representa a interpolação de  $f$  em  $\tilde{M}$  a partir dos valores de  $f$  em  $M$ .

A Figura 4-10 apresenta um esquema explicativo do processo. A malha inicial é formada pelo conjunto dos pontos pertencentes à malha mais grossa ( $\square$ ) e por um ponto do nível de resolução superior ( $\diamond$ ). No processo de extensão, são incluídos os dois vizinhos de  $\diamond$  mais próximos e na mesma escala e dois na escala imediatamente superior. Os novos pontos são marcados com o símbolo ( $\circ$ ).

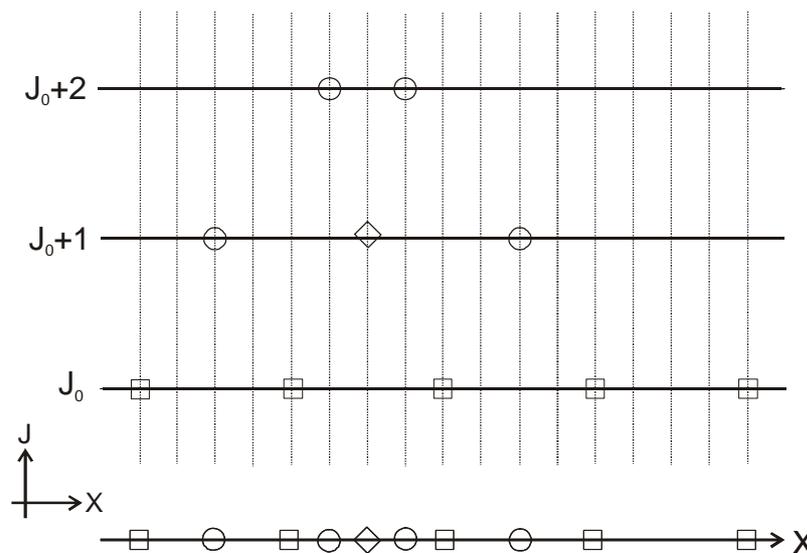


Figura 4-10 Refinamento de uma malha

Este tipo de operação deve ser efectuada sempre que se pretenda melhorar a precisão dos resultados. Por exemplo quando se calcula uma derivada espacial ou quando se faz a evolução temporal do algoritmo.

Espera-se no entanto que o número de pontos de  $M$  seja da mesma ordem do número de pontos de  $\tilde{M}$ , isto é:  $\#(\tilde{M}) = O\#(M)$ . Para que isso ocorra  $M$  deve ter uma estrutura em cone tal como descrito em [4-9] uma vez que a maioria dos pontos que compõem a vizinhança de um dado ponto numa malha em forma de cone, já estão presentes em  $M$ . Na Figura 4-9 é visível a estrutura em forma de cone.

Já no que se refere a derivada para que a sua representação esparsa tenha um erro idêntico ao da função, necessitaremos de partir de uma representação inicial da função com mais pontos do que aqueles que seriam necessários à partida. A Figura 4-11 apresenta a comparação entre as representações esparsas de uma função e da respectiva derivada. Assim, quando se calcula a derivada de uma função com base numa representação esparsa necessita-se de mais pontos do que os que estão disponíveis à partida.

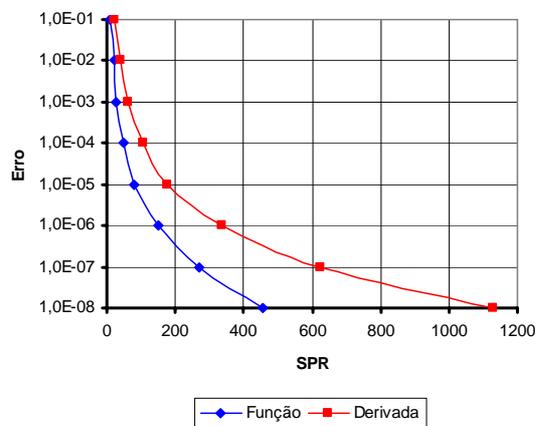


Figura 4-11 Representação esparsa de uma função e da respectiva derivada

#### 4.4.4 Operações algébricas: soma e produto

As operações de soma e multiplicação entre funções representadas em malhas adaptativas são extremamente simples quando as malhas envolvidas são idênticas.

Nesse caso, a operação em questão é efectuada ponto a ponto. Caso contrário, primeiro é necessário acrescentar às representações novos valores pontuais, de tal forma que as representações fiquem com malhas idênticas, e depois efectua-se a operação. Esses valores em falta são obtidos por interpolação.

Ou seja, dadas as representações  $(M, f^M)$  e  $(M', g^{M'})$  as funções  $z = f + g$  ou  $z = f \times g$  são representadas por  $(\tilde{M}, \tilde{z}^{\tilde{M}})$  em que  $\tilde{M} = M \cup M'$ ,  $\tilde{z} = \tilde{f} + \tilde{g}$  ou  $\tilde{z} = \tilde{f} \times \tilde{g}$ , em que  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  são as interpolações de  $f$  e  $g$  em  $\tilde{M}$  a partir de  $f^M$  e  $g^{M'}$ . Se tivermos apenas o produto de uma função por uma constante, então esse produto será simplesmente igual ao valor da constante a multiplicar pelos valores significativos da função sendo que a malha obtida é a mesma.

#### 4.4.5 Diferenciação

Quando se resolvem as equações de Maxwell por métodos numéricos a principal operação envolvida é o cálculo das derivadas espaciais e temporais. Assim é importante saber como se faz a diferenciação de funções representadas em malhas adaptativas.

No cálculo da derivada espacial vamos usar diferenças finitas centradas com espaçamento uniforme, isto é, para cada ponto da malha  $M$  escolhe-se o espaçamento igual à escala local, dada pela menor distância entre o ponto e seus vizinhos. Quando alguns dos pontos necessários ao cálculo da derivada não estiverem presentes na representação, esses serão obtidos novamente por refinamento interpolatório.

Assim, em cada ponto em que se pretende calcular a derivada, determina-se o ponto mais próximo deste pertencente à representação esparsa e designa-se essa distância por  $h_\mu$ . De seguida aplica-se diferenças finitas centradas com um *stencil* de ordem  $p$  e espaçamento  $h_\mu$ . Se um dos pontos necessários ao cálculo da derivada não estiver presente, esse valor é interpolado a partir das escalas inferiores. A Figura 4-12 apresenta um esquema deste princípio. Na primeira situação a derivada é calculada com dois pontos e na segunda situação é calculada com quatro.

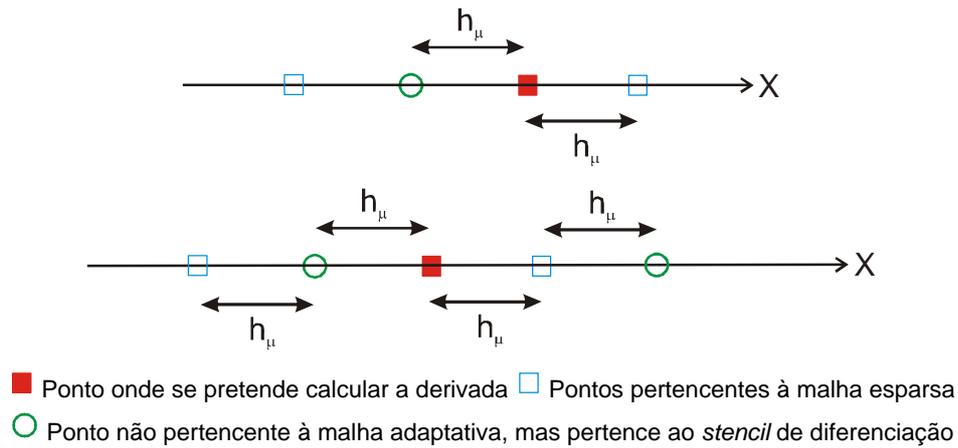


Figura 4-12 Diferenciação em malhas adaptativas

Se algum dos pontos necessários estiver localizado fora da fronteira então pode-se calcular a derivada não com diferenças centradas mas com diferenças à esquerda ou à direita consoante o lado da fronteira em que nos encontramos. Obviamente que aqui o que difere é o peso dos coeficientes no cálculo da derivada.

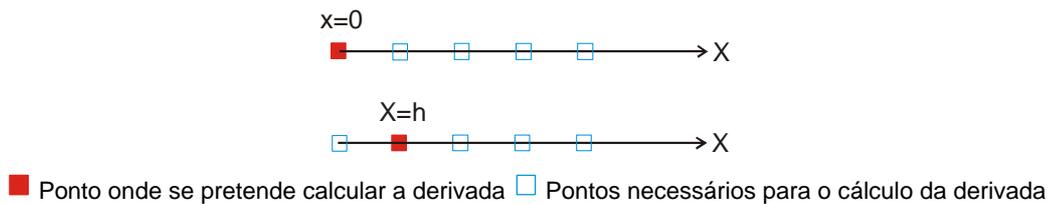


Figura 4-13 Cálculo da derivada em pontos próximos da fronteira

Outro modo consiste em usar na mesma diferenças centradas mas usando condições de simetria (positiva ou negativa) conforme explicado anteriormente. Este foi o procedimento usado neste trabalho. A Figura 4-14 ilustra a ideia anterior.

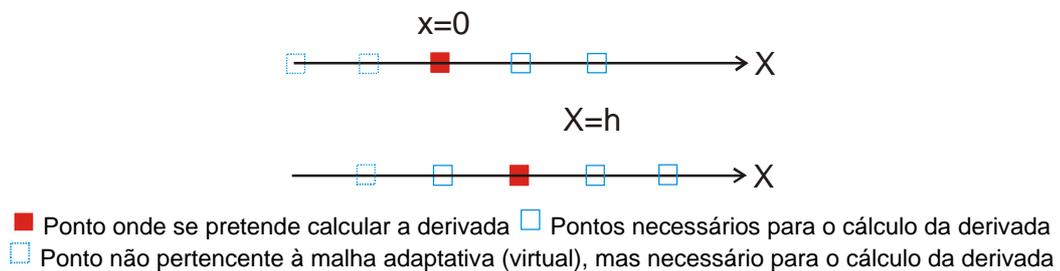


Figura 4-14 Diferenciação em malhas adaptativas na fronteira

Seja  $L$  o operador diferencial e  $L^h$  a sua discretização por diferenças finitas centradas usando uma malha uniforme com espaçamento  $h$ , então o operador de diferenças finitas adaptativa  $L_a$ :

$$(M, f^M) \xrightarrow{L_a} (M, (L_a f)^M) \quad (4-30)$$

é definido em cada ponto  $\mu \in M$  pela seguinte expressão:

$$(L_a f)^M(\mu) = (L^{h_\mu} \tilde{f})(\mu) \quad (4-31)$$

em que  $h_\mu = \min|x - \mu|$  e  $\tilde{f}$  é o resultado do esquema de refinamento aplicado a  $f^M$  até à escala  $h_\mu$ .

O operador de diferenças finitas de primeira ordem será então dado por:

$$L^{(1),h} f(x) = \frac{1}{h} \sum_k \Gamma_{df}^{(1)}(k) f(x + kh) \quad (4-32)$$

em que  $\Gamma_{df}^{(1)}$  são os coeficientes da derivada. A Tabela 4-2 apresenta os valores para a região interior e na fronteira esquerda do intervalo de  $[0, 1]$ . Para a fronteira direita, basta inverter a posição dos coeficientes apresentados na tabela.

$M$	$k$	-2	-1	0	1	2	3	4
2	$x = 0$			$-3/2$	$-1/2$			
	$h \leq x < 1$		$-1/2$	0	$1/2$			
4	$x = 0$			$-25/12$	4	-3	$4/3$	$-1/4$
	$x = h$		$-1/4$	$-5/6$	$3/2$	$-1/2$	$1/12$	
	$2h \leq x < 1-h$	$1/12$	$-2/3$	0	$2/3$	$-1/12$		

Tabela 4-2 Coeficientes da derivada

### 4.4.6 Problemas de evolução temporal

A grande vantagem quando se utilizam malhas adaptativas é tentar aplicar o conceito na resolução numérica de equações diferenciais, neste caso nas equações de Maxwell.

Supõe-se que num dado instante,  $t = n\Delta t$  é conhecida a representação  $(M^n, f^n)$ , em que  $f^n$  são os valores da solução numérica numa malha adaptável  $M^n$ . No instante de tempo seguinte, a representação  $(M^{n+1}, f^{n+1})$  é obtida em quatro fases:

1. Extensão:  $(M^n, f^n) \xrightarrow{\varepsilon} (M^{n+}, f^{n+})$

O processo de extensão está associado à ideia de se obter uma malha  $M^{n+}$  cujos pontos possam representar bem a solução no próximo passo de tempo. Ou seja, espera-se que  $M^{n+}$  contenha  $M^{n+1}$ . Como explicado anteriormente, o processo de extensão da malha é obtido pelo acréscimo de pontos vizinhos na mesma escala e em alguns níveis de escala superiores para prever possíveis deslocamentos das estruturas ou surgimento de estruturas nas escalas mais finas. O tamanho dessa vizinhança pode variar com o fenómeno físico modelado pela equação;

2. Evolução Temporal:  $(M^{n+}, f^{n+}) \xrightarrow{D_a} (M^{n+}, \tilde{f}^{n+1})$

A partir dos valores de  $f^{n+}$  nos pontos da malha  $M^{n+}$  no tempo  $t = n\Delta t$ , faz-se a evolução temporal usando diferenças finitas de primeira ordem com um passo de tempo  $\Delta t$  fixo e dependente das condições de estabilidade. O resultado deste procedimento foi denotado por  $\tilde{f}^{n+1}$ , que corresponde ao valor da solução numérica nos pontos da malha  $M^{n+}$  no instante de tempo  $t = (n+1)\Delta t$ ;

3. Truncamento:  $(M^{n+}, \tilde{f}^{n+1}) \xrightarrow{T_\varepsilon} (M^{n+1}, f^{n+1})$

A malha  $M^{n+}$  não é necessariamente mais adequada para representar a solução numérica em  $t = (n+1)\Delta t$ . Então, aplicando o operador de truncamento a malha  $M^{n+}$ , é possível obter uma representação mais esparsa da malha obtendo-se assim,  $M^{n+1}$ .

O procedimento agora repete-se para o instante de tempo seguinte e assim sucessivamente.

## 4.5 Equações de Maxwell

Consideremos uma onda TEM a propagar-se, segundo o eixo dos  $xx$ , num meio homogéneo caracterizado por uma impedância característica  $Z_0$ . O campo eléctrico está orientado segundo o eixo dos  $zz$  e o campo magnético está orientado segundo o eixo dos  $yy$ . A aplicação das equações de Maxwell nesta situação conduz ao seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{4-33}$$

No FDTD temos duas funções, o campo eléctrico e o campo magnético as quais definem uma malha entrelaçada, quer no espaço quer no tempo. No entanto quando se usam funções em malhas adaptáveis normalmente as malhas são justapostas. Ainda que a análise de dispersão e estabilidade seja conhecida no FDTD, será importante verificar qual o comportamento destes parâmetros quando se usam wavelets interpolatórias para a discretização das equações de Maxwell. Uma vez que podemos ter também dois tipos de malhas (entrelaçadas e justapostas) será importante estudar o comportamento dos referidos parâmetros em cada um dos tipos de malha e tentar perceber qual será a melhor solução para a discretização das referidas equações.

### 4.5.1 Modelo em malhas entrelaçadas

Consideremos os valores discretos do campo eléctrico  $E$  e do campo magnético  $H$  em malhas entrelaçadas dados por:

$$\begin{aligned}E_k^n &\approx E(k\Delta x, n\Delta t) \\ H_{k+1/2}^{n+1/2} &\approx H((k+1/2)\Delta x, (n+1/2)\Delta t)\end{aligned}\tag{4-34}$$

Podemos então definir as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}E(x, n\Delta t) &\approx \sum_k E_k^n \phi(\Delta x^{-1}x - k) \\ H((x+1/2), (n+1/2)\Delta t) &\approx \sum_k H_{k+1/2}^{n+1/2} \phi(\Delta x^{-1}x - k - 1/2)\end{aligned}\tag{4-35}$$

Neste trabalho, a função de escala  $\phi(x)$  é escolhida de entre as funções de escala de Dubuc e Delauriers que satisfazem a condição de interpolação  $\phi(x) = \delta_x$  e que está associada a esquemas de refinamento interpolatório. Os diferentes esquemas de refinamento interpolatório são identificados pelo parâmetro  $p$  que indica uma interpolação polinomial centrada de grau  $2p-1$ .

Utilizando-se o método de colocação associado a tais esquemas de aproximação, obtêm-se discretizações para as derivadas parciais dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta t) &\approx \frac{1}{\Delta x} \sum_k E_k^n \phi'(j-k-1/2) \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \sum_k E_k^n \alpha(j-k) \\
 \frac{\partial H}{\partial x}((j+1/2)\Delta x, (n+1/2)\Delta t) &\approx \frac{1}{\Delta x} \sum_k H_{k+1/2}^{n+1/2} \phi'(j-k+1/2) \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \sum_k H_{k+1/2}^{n+1/2} \alpha(j-k+1)
 \end{aligned} \tag{4-36}$$

em que  $\alpha(u) = \phi'(u-1/2)$ .

Combinando a equação (4-36) com diferenças finitas de primeira ordem no tempo, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 E_j^{n+1} &= E_j^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \sum_k H_{k+1/2}^{n+1/2} \alpha(j-k+1) \\
 H_{j+1/2}^{n+1/2} &= H_{j+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sum_k E_k^n \alpha(j-k)
 \end{aligned} \tag{4-37}$$

## 4.5.2 Modelo em malhas não entrelaçadas

Consideremos agora os valores discretos do campo eléctrico  $E$  e do campo magnético  $H$  em malhas coincidentes. Podemos então escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 E_k^n &\approx E(k\Delta x, n\Delta t) \\
 H_k^n &\approx H(k\Delta x, n\Delta t)
 \end{aligned} \tag{4-38}$$

e podemos então definir as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}
 E(x, n\Delta t) &\approx \sum_k E_k^n \phi(\Delta x^{-1}x - k) \\
 H(x, n\Delta t) &\approx \sum_k H_k^n \phi(\Delta x^{-1}x - k)
 \end{aligned} \tag{4-39}$$

Sendo assim, obtêm-se as seguintes discretizações para as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta t) &\approx \frac{1}{\Delta x} \sum_k E_k^n \beta(j-k) \\
 \frac{\partial H}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta t) &\approx \frac{1}{\Delta x} \sum_k H_k^n \beta(j-k)
 \end{aligned} \tag{4-40}$$

em que  $\beta(u) = \phi'(u)$ . Combinando as fórmulas anteriores com diferenças finitas de primeira ordem no tempo, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} E_j^{n+1} &= E_j^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \sum_k H_k^{n+1} \beta(j-k) \\ H_j^{n+1} &= H_j^n + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sum_k E_k^n \beta(j-k) \end{aligned} \tag{4-41}$$

### 4.5.3 Relações entre os coeficientes $\alpha$ e $\beta$

Sabemos no entanto que a função  $\phi(x)$  satisfaz uma relação de escalonamento dada por:  $\phi(x) = 2 \sum_n h(n) \phi(2x-n)$  em que  $h(n)$  corresponde aos coeficientes de interpolação do esquema de refinamento. Estes coeficientes são simétricos  $h(n) = h(-n)$  e  $h(0) = 1/2$ , e anulam-se para todos inteiros pares  $n \neq 0$  e para todos os inteiros tais que  $|n| \geq 2p-1$ . A Tabela 4-3 apresenta o valores desses coeficientes.

K	P=1	P=2	P=3	P=4
0	1/2	1/2	1/2	1/2
1	1/4	9/32	150/512	1125/4096
2		0	0	0
3		-1/32	-25/512	-245/4096
4			0	0
5			3/512	49/4096
6				0
7				-5/4096

Tabela 4-3 Coeficientes de interpolação do esquema de refinamento

Derivando agora a relação de escalonamento, os coeficientes  $\beta(k)$  podem ser obtidos a partir da solução do problema de valor próprio,  $\phi'(k) = 4 \sum_n h(n) \phi'(2k-n)$  com uma relação de normalização apropriada. Os valores não nulos de  $\beta(k)$ ,  $k > 0$  estão

indicados na Tabela 4-4. Os valores de  $\beta(k)$ ,  $k < 0$  são obtidos da relação de anti-simetria  $\beta(-k) = -\beta(-k)$ .

K	P=1	P=2	P=3	P=4
0	0	0	0	0
1	1/2	2/3	272/365	1747/2203
2		-1/12	-53/365	-1483/7724
3			16/1095	399/11882
4			1/2920	-73/32823
5				-128/743295
6				1/1189272

Tabela 4-4 Coeficientes  $\beta(k)$

Observa-se também que os coeficientes  $\alpha(k)$  podem ser obtidos a partir dos valores de  $\beta(k)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \phi'(k - 1/2) = 4 \sum_n h(n) \phi'(2k - 1 - n) \\ &= 4 \sum_n h(n) \beta(2k - 1 - n) \end{aligned} \tag{4-42}$$

Os valores não nulos de  $\alpha(k)$ ,  $k \geq 0$  estão indicados na Tabela 4-5. Os valores  $\alpha(k)$ ,  $k < 0$  são obtidos pela relação de simetria  $\alpha(-k) = -\alpha(k - 1)$ .

K	P=1	P=2	P=3	P=4
0	1	472/384	1.29181	1.3110340773
1		-36/384	-0.137134	-0.1560100710
2		4/384	0.0287618	0.0419957460
3			-0.00347014	-0.0086543236
4			8.02654e-6	0.0008308695
5				0.0000108999
6				-0.0000000041

Tabela 4-5 Coeficientes  $\alpha(k)$

## 4.6 Análise de dispersão

Para se efectuar a análise de dispersão consideram-se soluções na forma de ondas planas:

$$\begin{aligned} H(x,t) &= H_0 e^{i(\xi x - \omega t)} \\ E(x,t) &= E_0 e^{i(\xi x - \omega t)} \end{aligned} \quad (4-43)$$

em que  $E_0$  e  $H_0$  são constantes,  $\xi$  é a constante de fase,  $\omega$  a frequência angular e  $i$  designa a unidade imaginária.

### 4.6.1 Dispersão do modelo analítico

Substituindo estas expressões nas equações de Maxwell, obtém-se o seguinte sistema algébrico:

$$\begin{bmatrix} -i\omega & -i\xi/\mu \\ -i\xi/\varepsilon & -i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-44)$$

Para que o problema tenha solução não trivial, a matriz do sistema deve ter determinante nulo, ou seja:

$$\frac{\xi^2}{\mu\varepsilon} - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\xi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (4-45)$$

que representa a relação de dispersão associada à propagação de uma onda electromagnética num meio homogéneo, linear e isotropico cujo modelo analítico é descrito pelas equações de Maxwell. Para não haver dispersão  $\xi$  deve ser uma função linear de  $\omega$ .

### 4.6.2 Dispersão do modelo numérico em malhas entrelaçadas.

Substituindo as expressões das ondas planas (4-43) na equação (4-37) respeitante ao campo magnético, obtém-se:

$$He^{i(j+1/2)\xi\Delta x} (e^{-i\omega(n+1/2)\Delta t} - e^{-i\omega(n-1/2)\Delta t}) = \frac{E\Delta t}{\mu\Delta x} e^{-i\omega n\Delta t} \sum_k e^{k\Delta x\xi} \alpha(j-k) \quad (4-46)$$

Fazendo-se as devidas simplificações e uma mudança de índices no somatório, chega-se à expressão seguinte:

$$-2iH \sin \frac{\omega\Delta t}{2} = e^{-i\xi\Delta x/2} \frac{E\Delta t}{\mu\Delta x} \sum_l e^{-il\Delta x\xi} \alpha(l) \quad (4-47)$$

Usando a propriedade de simetria da função básica  $\phi(-x) = \phi(x)$  verifica-se que  $\alpha(-l) = \phi'(-l+1/2) = -\phi'(l-1/2) = -\alpha(l-1)$ . Portanto pode-se concluir que:

$$\sum_l e^{-ilz} \alpha(l) = -2ie^{iz/2} \sum_{l \geq 0} \alpha(l) \sin[(l+1/2)z] = -2ie^{iz/2} \tilde{\alpha}(z) \quad (4-48)$$

em que se pode definir a função:

$$\tilde{\alpha}(z) = \sum_{l \geq 0} \alpha(l) \sin[(l+1/2)z] \quad (4-49)$$

e portanto tem-se:

$$H \sin \frac{\omega\Delta t}{2} = \frac{E\Delta t}{\mu\Delta x} \tilde{\alpha}(\xi\Delta x) \quad (4-50)$$

Usando um raciocínio análogo na equação (4-37), mas agora usando a componente do campo eléctrico, obtém-se a seguinte equação:

$$E \sin \frac{\omega\Delta t}{2} = \frac{H\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \tilde{\alpha}(\xi\Delta x) \quad (4-51)$$

Expressando agora (4-50) e (4-51) na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \sin \frac{\omega\Delta t}{2} & -\frac{\Delta t}{\mu\Delta x} \tilde{\alpha}(\xi\Delta x) \\ -\frac{\Delta t}{\mu\Delta x} \tilde{\alpha}(\xi\Delta x) & \sin \frac{\omega\Delta t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

Para que o problema tenha solução não trivial, o determinante da matriz deve anular-se, o que implica a seguinte relação de dispersão para o modelo numérico em malhas entrelaçadas.

$$\left( \sin \frac{\omega\Delta t}{2} \right)^2 = \left( \frac{\Delta t \tilde{\alpha}(\xi\Delta x)}{\sqrt{\mu\varepsilon\Delta x}} \right)^2 \quad (4-53)$$

Definindo-se  $\Omega = \omega\Delta t$ ,  $\Xi = \xi\Delta x$ ,  $\lambda = \frac{\Delta t}{\sqrt{\mu\varepsilon}\Delta x}$ , tem-se que a relação de dispersão pode ser

expressa como:  $\Omega = \arcsin(\lambda\tilde{\alpha}(\Xi))$ . Para que esta expressão tenha sentido, a escolha de  $\lambda$  deve ser feita de maneira apropriada, o que define a condição de estabilidade como descrito mais à frente. Para melhor compreender a relação de dispersão traduzida pela equação anterior a Figura 4-15 contém os gráficos de  $\Omega$  como função de  $\Xi$ , para  $\lambda = 0,3$ , para diferentes escolhas da função de escala (isto é, de  $p$ ). Devido à anti-simetria dos gráficos, apresenta-se somente a parte de  $0 \leq \Xi \leq \pi$ . Para comparação apresenta-se também o gráfico da recta  $\Omega = \lambda\Xi$  que representa a relação de dispersão do modelo analítico.

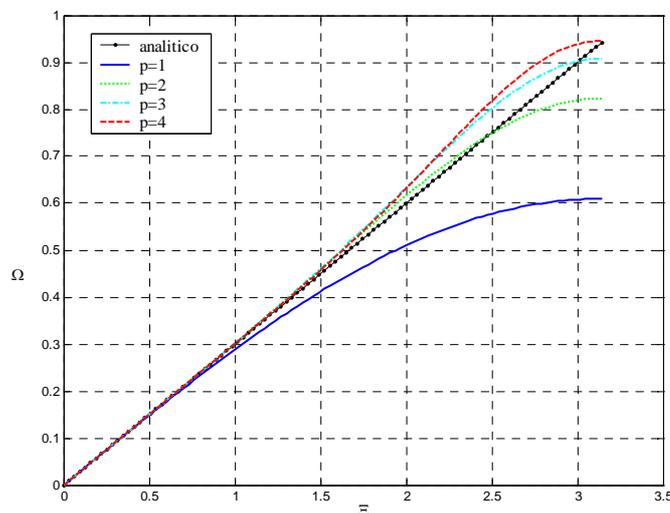


Figura 4-15 Relação de dispersão em malhas entrelaçadas

Como se pode observar pela Figura 4-15 para  $p > 1$ , nota-se que a relação de dispersão do modelo numérico aproxima-se bem da relação linear do sistema analítico, apresentando uma melhoria significativa em relação ao modelo para  $p = 1$  que corresponde ao esquema clássico do FDTD. Este tipo de comportamento já foi observado em [4-10] para um esquema de Galerkin baseado nas funções de escalonamento de Battle-Lemarié. No entanto, aqui para além deste comportamento temos todas as vantagens que estão associadas as wavelets interpolatórias ao contrário do que sucede com as wavelets de Battle-Lemarié. Também se pode observar que os modelos numéricos apresentam relações de dispersão piores que o modelo analítico e tendem a melhorar à medida que o número de coeficientes aumenta.

### 4.6.3 Dispersão do modelo numérico em malhas não entrelaçadas

Substituindo as expressões das ondas planas (4-43) na equação (4-41) respeitante à componente do campo magnético, obtém-se a seguinte equação:

$$He^{ij\xi\Delta x} (e^{-i\omega(n+1)\Delta t} - e^{-i\omega n\Delta t}) = \frac{E\Delta t}{\mu\Delta x} e^{-i\omega n\Delta t} \sum_k e^{k\Delta x\xi} \beta(j-k) \quad (4-54)$$

Fazendo-se as devidas simplificações e uma mudança de índices no somatório, chega-se à expressão seguinte:

$$-2iH \sin \frac{\omega\Delta t}{2} e^{-1/2i\omega\Delta t} = \frac{E\Delta t}{\mu\Delta x} \sum_l e^{-il\Delta x\xi} \beta(l) \quad (4-55)$$

Usando a propriedade de simetria da função básica  $\phi(-x) = \phi(x)$  verifica-se que  $\beta(l) = \phi'(l) = -\phi'(-l) = -\beta(-l)$  de onde se conclui que:

$$\sum_l e^{-ilz} \beta(l) = -2i \sum_{l \geq 1} \beta(l) \sin(lz) = -2i\tilde{\beta}(z) \quad (4-56)$$

em que se pode definir a função:

$$\tilde{\beta}(z) = \sum_{l \geq 1} \alpha(l) \sin(lz) \quad (4-57)$$

e portanto tem-se:

$$H \sin \frac{\omega\Delta t}{2} = \frac{E\Delta t}{\mu\Delta x} \tilde{\beta}(\xi\Delta x) \quad (4-58)$$

Usando um raciocínio análogo na equação (4-41), mas agora usando a componente do campo eléctrico, obtém-se a seguinte equação:

$$E \sin \frac{\omega\Delta t}{2} e^{1/2i\omega\Delta t} = \frac{H\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \tilde{\beta}(\xi\Delta x) \quad (4-59)$$

Expressando agora (4-58) e (4-59) na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \sin \frac{\omega\Delta t}{2} e^{-1/2i\omega\Delta t} & -\frac{\Delta t}{\mu\Delta x} \tilde{\beta}(\xi\Delta x) \\ -\frac{\Delta t}{\mu\Delta x} \tilde{\beta}(\xi\Delta x) & \sin \frac{\omega\Delta t}{2} e^{1/2i\omega\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-60)$$

Novamente para que este sistema tenha solução não trivial, o determinante da matriz deve anular-se, o que implica a seguinte relação de dispersão para o modelo numérico em malhas não entrelaçadas.

$$\left(\sin \frac{\omega \Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{\Delta t \tilde{\beta}(\xi \Delta x)}{\sqrt{\mu \varepsilon} \Delta x}\right)^2 \quad (4-61)$$

A Figura 4-16 contem os gráficos de  $\Omega = \omega \Delta t$  como função de  $\Xi = \xi \Delta x$ , com  $\lambda = 0,3$  para diferentes escolhas da função de escala  $\phi$ . Como os gráficos são anti-simétricos apresenta-se somente a parte de  $0 \leq \Xi \leq \pi$ .

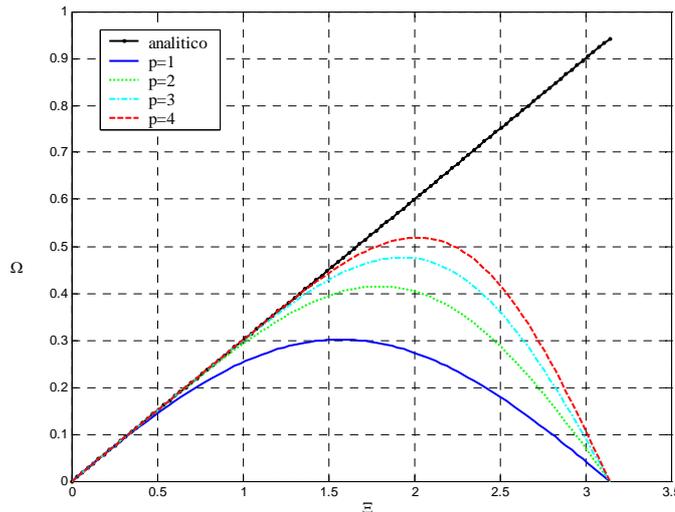


Figura 4-16 Relação de dispersão em malhas não entrelaçadas

Note-se que para as baixas frequências, a relação de dispersão aproxima-se cada vez melhor da relação linear do modelo analítico, à medida que  $p$  aumenta. No entanto para frequências próximas de  $\pi$ , o gráfico de dispersão tende a zero, afastando-se drasticamente do modelo analítico. Este facto faz com que apareçam “ruídos” nas soluções numéricas. Foi este facto que os autores de [4-11] observaram mas que não conseguiram eliminar nem justificar a sua proveniência.

A parte esquerda da Figura 4-17 apresenta uma comparação entre os dois modelos de malhas para o mesmo valor de  $p = 4$ , e o modelo analítico. Da figura pode concluir-se que a relação de dispersão no modelo em malhas entrelaçadas é superior à do modelo em malhas não entrelaçadas. Verifica-se no entanto que se tivermos o cuidado de trabalharmos numa zona mais favorável (frequências baixas ou médias) o modelo de malhas justapostas poderá ser preferível. Deve-se referir também que este último modelo apresenta uma relação de dispersão melhor que o FDTD convencional desde que se use uma ordem superior a 2. A parte direita da Figura 4-17 apresenta essa conclusão.

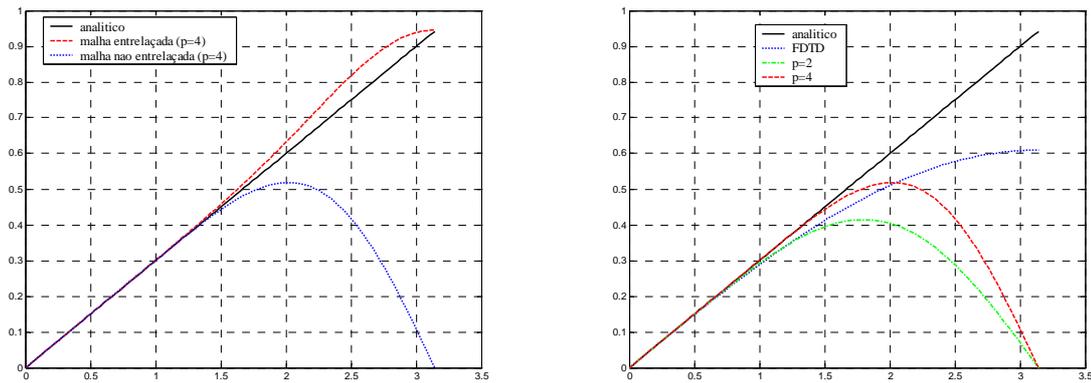


Figura 4-17 Comparação entre os dois modelos

## 4.7 Análise de estabilidade dos modelos numéricos

A condição de estabilidade é determinada impondo-se a condição de que para quaisquer números de onda  $\xi$ , seja possível determinar frequências reais  $\omega$  que satisfaçam a correspondente relação de dispersão.

### 4.7.1 Estabilidade do modelo numérico em malhas entrelaçadas

No modelo em malhas entrelaçadas, atendendo à equação (4-53), para se ter estabilidade é necessário que:

$$\left| \frac{\Delta t \tilde{\alpha}(z)}{\sqrt{\mu \varepsilon} \Delta x} \right| \leq 1, \forall z \quad (4-62)$$

Isto significa que:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\sqrt{\mu \varepsilon} \Delta x} \leq \frac{1}{S_\alpha} \quad (4-63)$$

em que  $S_\alpha = \max_{|z| \leq \pi} |\tilde{\alpha}(z)|$ .

Apresentam-se na Figura 4-18 os gráficos de  $|\tilde{\alpha}(z)|, 0 \leq z \leq \pi$ , para os diferentes esquemas. Pode-se observar que  $S_\alpha = S_\alpha(p)$  é assumido em  $z = \pi$  e que este valor

crece à medida que  $p$  aumenta. Ou seja, a condição de estabilidade fica mais restritiva à medida que se aumenta a ordem do esquema.

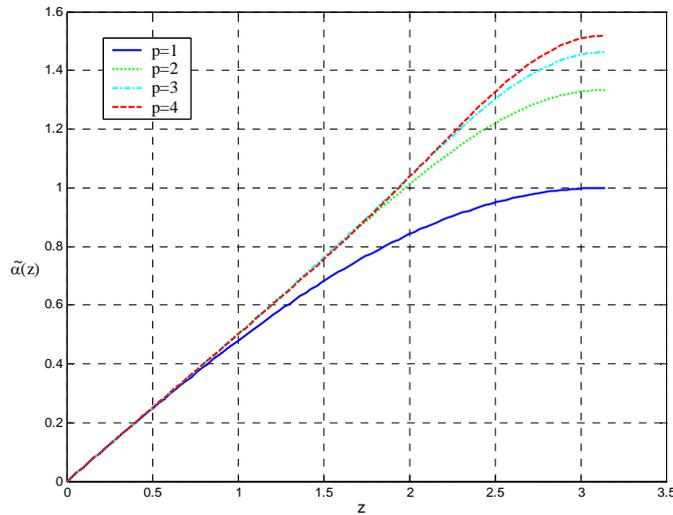


Figura 4-18 Estabilidade em malhas entrelaçadas

A Tabela 4-6 apresenta os parâmetros de estabilidade  $S_{\alpha}^{-1}$  para diferentes valores de  $p$  no sistema com malhas entrelaçadas.

	$\max( \tilde{\alpha}(z) )$	$S_{\alpha}^{-1}$
p=1	1	1
p=2	1.3333	0.75
p=3	1.4612	0.6843
p=4	1.5185	0.6585

Tabela 4-6 Estabilidade em malhas entrelaçadas

### 4.7.2 Estabilidade do modelo numérico em malhas não entrelaçadas

Analogamente, no modelo de malhas não entrelaçadas, tem-se que o esquema é estável se:

$$\left| \frac{\Delta t \tilde{\beta}(z)}{\sqrt{\mu \varepsilon \Delta x}} \right| \leq 1, \forall z \quad (4-64)$$

significando isso que:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\sqrt{\mu\varepsilon\Delta x}} \leq \frac{1}{S_\beta} \tag{4-65}$$

em que  $S_\beta = \max_{|z| \leq \pi} |\tilde{\beta}(z)|$

A Figura 4-19 apresenta os gráficos de  $|\tilde{\beta}(z)|$ ,  $0 \leq z \leq \pi$ , para os diferentes esquemas. Observa-se que  $S_\beta = S_\beta(p)$  também cresce à medida que  $p$  aumenta, no entanto esses valores são inferiores aos seus correspondentes no caso de malhas entrelaçadas. Ou seja, a condição de estabilidade fica menos restritiva para malhas coincidentes.

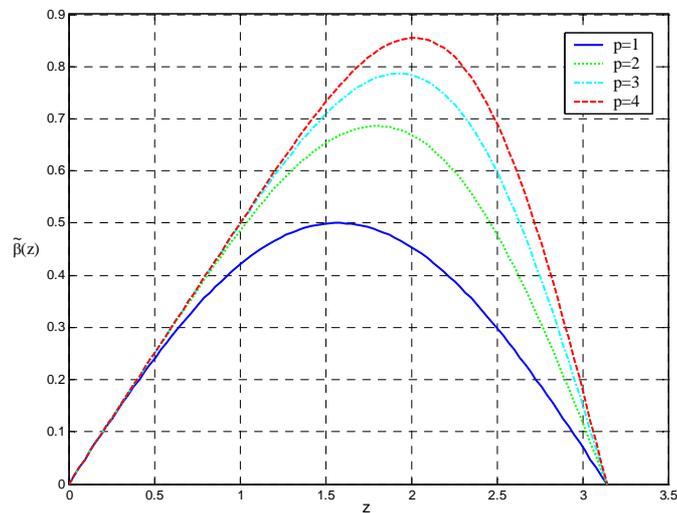


Figura 4-19 Estabilidade em malhas não entrelaçadas

A Tabela 4-7 apresenta os parâmetros de estabilidade  $S_\beta^{-1}$  para diferentes valores de  $p$  no sistema com malhas não entrelaçadas.

	$\max( \tilde{\beta}(z) )$	$S_\beta^{-1}$
p=1	0.4999	2
p=2	0.6861	1.4575
p=3	0.7866	1.2712
p=4	0.8549	1.16972

Tabela 4-7 Estabilidade em malhas não entrelaçadas

## 4.8 Que malha usar?

Se analisarmos os valores das tabelas de estabilidade anteriores chegamos à conclusão que o modelo usando malhas não entrelaçadas apresenta uma melhor condição de estabilidade em relação à das malhas entrelaçadas e mesmo superior ao FDTD. No entanto nestes esquemas a dispersão é pior.

Esta análise permite-nos concluir que ambas as alternativas são válidas. Se optarmos por um arranjo em malhas entrelaçadas a relação de dispersão é melhor mas a condição de estabilidade é mais restritiva se pelo contrário optarmos por um esquema em malhas justapostas a condição de estabilidade é superior mas temos de ter em atenção a dispersão. Estes serão pontos interessante para explorar num trabalho futuro.

Sugere-se então que se possam usar malhas não entrelaçados uma vez que a condição de estabilidade é superior a apresentada pelo FDTD desde que se tenha controlo sobre a dispersão numérica.

Por agora e como o objectivo desta tese é fazermos uma comparação com o FDTD convencional vamos optar por usar um esquema com malhas entrelaçadas que é mais próximo do FDTD.

Ao usarmos um esquema com malhas entrelaçadas vamos ter duas malhas, uma para o campo eléctrico  $E$ , e outra para o campo magnético  $H$ . Consequentemente, vamos ter que fazer operações diferentes sobre cada uma das malhas, uma vez que a localização dos pontos é diferente. Esse aspecto é mais saliente na interpolação nas fronteiras.

### 4.8.1 Fronteiras em malhas entrelaçadas

Antes de iniciar esta secção convém referir que se vão usar condições fronteira do tipo PML. Como tal o domínio computacional termina com um condutor eléctrico perfeito. Uma vez que se usam malhas entrelaçadas o esquema de interpolação na fronteira tem de ser feito com algum cuidado. Assim sabemos que o campo eléctrico  $E$ , é definido em pontos

da forma  $X_k^j = k\Delta x 2^{-j}$  e que na fronteira se verifica a relação  $E(-x) = -E(x)$  por simular um condutor eléctrico perfeito. A Figura 4-20 apresenta um esquema que nos possibilita a interpretação da situação.

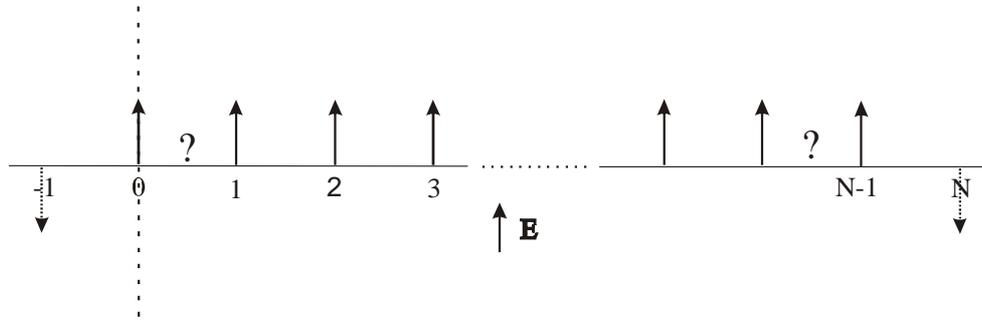


Figura 4-20 Interpolação na fronteira da componente do campo eléctrico.

Para fazermos a interpolação no ponto  $X_1^{j+1}$  temos que usar a seguinte equação:

$$E(X_1^{j+1}) \approx -\frac{1}{16}E(X_{-1}^j) + \frac{9}{16}E(X_0^j) + \frac{9}{16}E(X_1^j) - \frac{1}{16}E(X_2^j) \quad (4-66)$$

mas como  $E(X_{-1}^j) = -E(X_1^j)$  a equação anterior transforma-se em:

$$E(X_1^{j+1}) \approx \left(\frac{1}{16} + \frac{9}{16}\right)E(X_1^j) + \frac{9}{16}E(X_0^j) - \frac{1}{16}E(X_2^j) \quad (4-67)$$

que é a equação que se deve usar na fronteira para a actualização do campo eléctrico.

O campo magnético  $H$  está definido em pontos da forma  $X_k^j = (k + 2^{-l+j})\Delta x 2^{-j}$  e verifica a relação  $H(-x) = H(x)$  por se simular um condutor eléctrico perfeito. A Figura 4-21 apresenta a posição das diversas componentes do campo electromagnético para podermos interpretar a interpolação na fronteira. Na parte superior da figura está representado a posição das componentes do campo eléctrico. Na parte inferior está representado a posição das componentes do campo magnético, e onde se pode observar o entrelaçamento das malhas. A tracejado está representado a fronteira esquerda. Na parte inferior da figura que é a que nos interessa neste momento, temos dois esquemas um apresentando os pontos no nível de resolução  $j$  e outro com os pontos no nível de resolução imediatamente superior  $j+1$ .

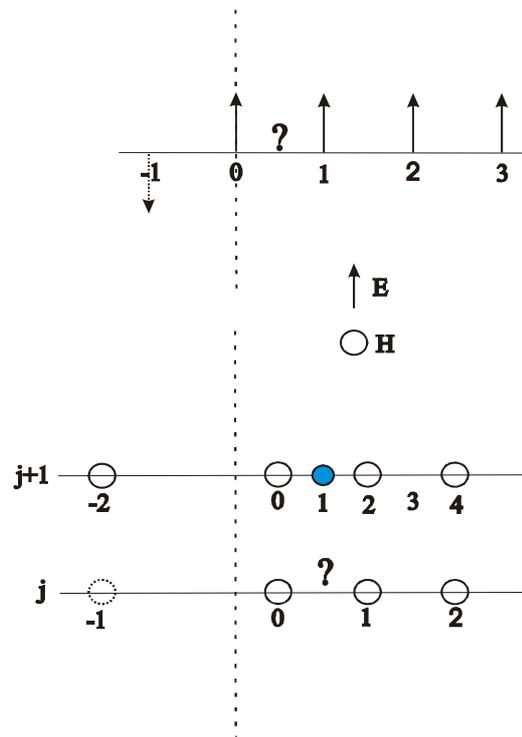


Figura 4-21 Interpolação na fronteira da componente do campo magnético.

Para fazermos a interpolação no ponto  $H(X_1^{j+1})$  temos que usar a seguinte equação:

$$H(X_1^{j+1}) \approx -\frac{1}{16}H(X_{-1}^j) + \frac{9}{16}H(X_0^j) + \frac{9}{16}H(X_1^j) - \frac{1}{16}H(X_2^j) \quad (4-68)$$

Mas como  $H(X_{-1}^j) = H(X_1^{j+1})$  a equação anterior transforma-se em

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{16}\right)H(X_1^{j+1}) &\approx \frac{9}{16}H(X_0^j) + \frac{9}{16}H(X_1^j) - \frac{1}{16}H(X_2^j) \\ H(X_1^{j+1}) &\approx \frac{16}{17} \left[ \frac{9}{16}H(X_0^j) + \frac{9}{16}H(X_1^j) - \frac{1}{16}H(X_2^j) \right] \end{aligned} \quad (4-69)$$

que é a equação que se deve usar na fronteira para a actualização do campo magnético.

## 4.9 Exemplos diversos de aplicação do algoritmo

Consideremos uma onda TEM a propagar-se, segundo o eixo dos  $xx$ , num meio homogéneo caracterizado por uma impedância característica  $Z_0$ . O campo eléctrico está orientado segundo o eixo dos  $zz$  e o campo magnético está orientado segundo o eixo

dos  $y$ . A aplicação das equações de Maxwell nesta situação conduz ao seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{4-70}$$

As distribuições iniciais que foram usadas são as seguintes:

$$E_0(x) = \exp(-150(x-0.5)^2) \quad ; \quad H_0(x) = 0\tag{4-71}$$

A solução da equação (4.70) é obtida numericamente com base nas wavelets interpolatórias sendo a malha inicial composta por  $N$  pontos quer de campo eléctrico quer de campo magnético. No instante inicial as distribuições são substituídas pela suas representações esparsas e conseqüentemente ficamos com uma representação com  $N_s$  pontos. Quando se usam malhas entrelaçadas as equações a aplicar, tal como referido em 4.5.1, são as seguintes:

$$\begin{aligned}Ez_j^{n+1} &= Ez_j^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \sum_k Hy_{k+1/2}^{n+1/2} \alpha(j-k-1) \\ Hy_{j+1/2}^{n+1/2} &= Hy_{j+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sum_k Ez_k^n \alpha(j-k)\end{aligned}\tag{4-72}$$

em que  $\alpha(k)$  são os coeficientes referidos em 4.5.3. A evolução temporal é feita em três etapas tal como indicado em 4.4.6. Para ilustrar a evolução temporal do algoritmo são apresentados gráficos correspondentes a instantes de tempo diferentes. Juntamente com os gráficos é apresentado a representação esparsa por níveis.

### 4.9.1 Propagação num meio homogéneo

Neste exemplo vamos considerar que o meio é homogéneo dieléctrico, sem perdas, caracterizado por uma permeabilidade magnética relativa  $\mu_r = 1$  e uma permitividade eléctrica relativa  $\varepsilon_r = 1$ . As condições fronteira usadas são do tipo PML. A Figura 4-23 representa a situação descrita anterior.

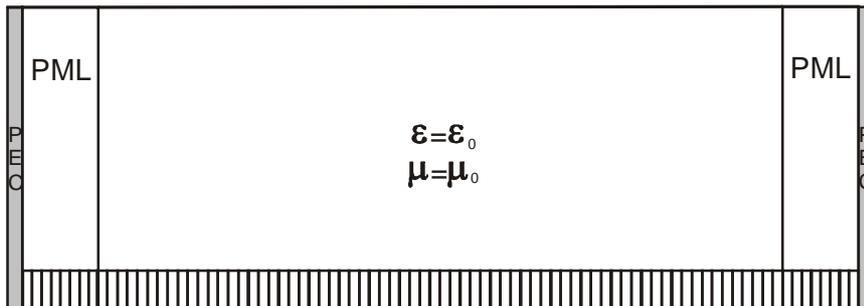
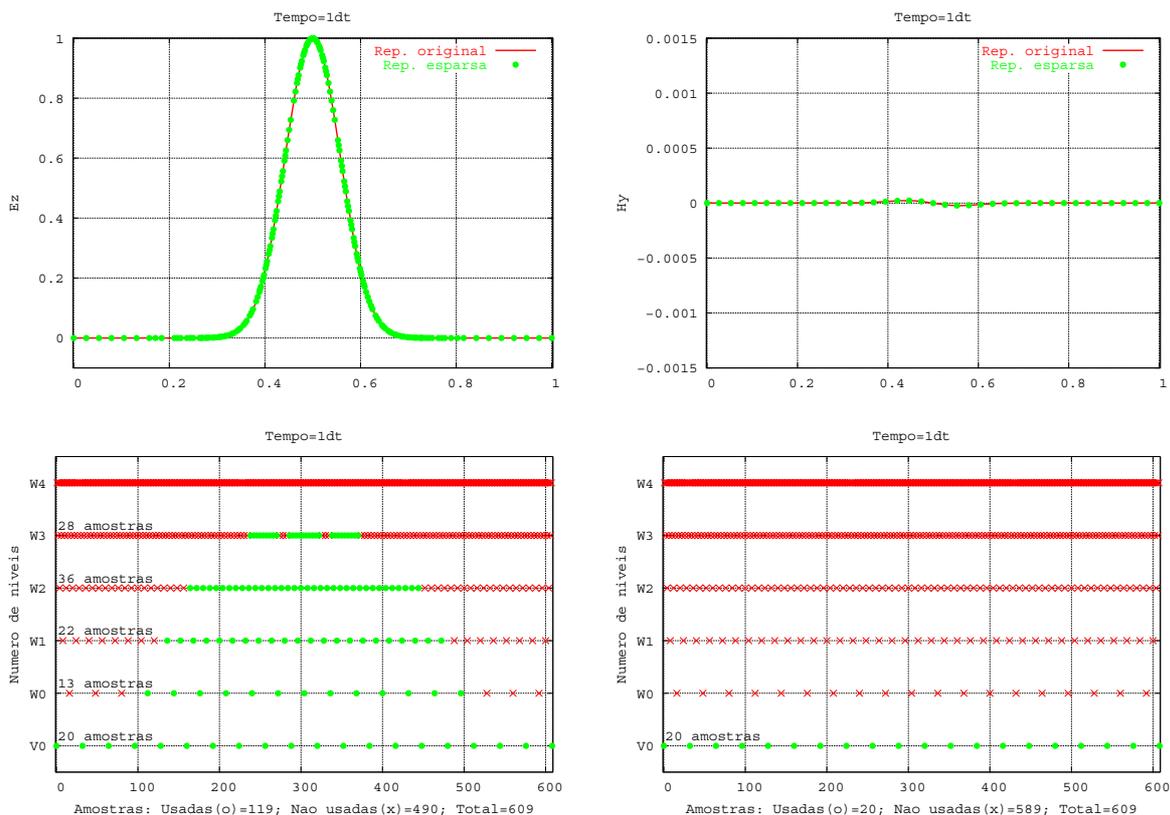


Figura 4-22 Propagação num meio homogéneo

A Figura 4-23 apresenta a evolução das componentes do campo electromagnético, juntamente com a representação por níveis das amostras usadas e não usadas em diferentes instantes de tempo. A parte esquerda da figura corresponde a  $E_z$  e a parte direita a  $H_y$ . Da figura conclui-se que a malha se vai adaptando com a evolução temporal do algoritmo.



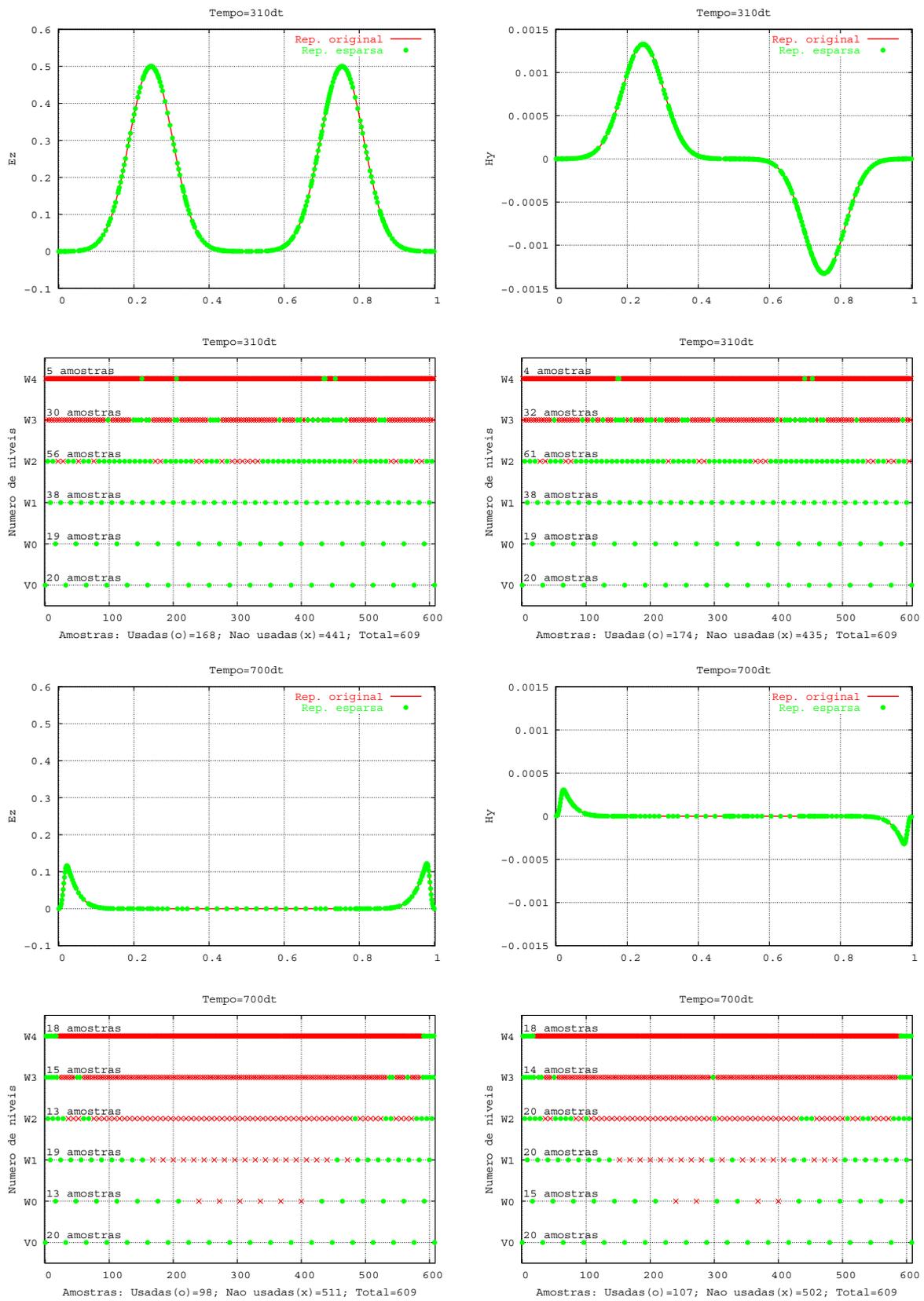


Figura 4-23 Evolução temporal das componentes do campo electromagnético

A Figura 4-24 apresenta um gráfico respeitante à percentagem de pontos usados durante a simulação onde é visível a adaptabilidade espacial. No gráfico da direita o espaço foi discretizado com 609 pontos, à esquerda foi discretizado com 4865 pontos. Verifica-se que o número de pontos usados nas duas situações anda próximo das duas centenas, no entanto na segunda situação a percentagem de pontos usada é muito baixa.

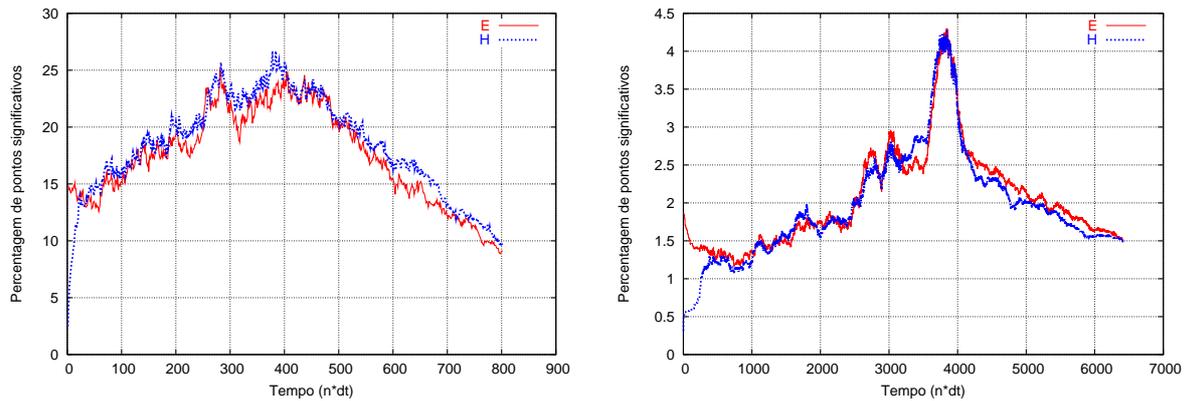


Figura 4-24 Percentagem de pontos significativos

A Figura 4-25 apresenta a evolução do erro com o tempo para a situação descrita anteriormente. Entende-se por erro, o valor máximo da diferença entre uma solução de referência obtida numa malha uniforme e muito fina, e a solução adaptativa nos pontos da malha adaptativa. Como se pode observar pela figura, o erro mantém-se aproximadamente constante não aumentando à medida que o tempo avança o que significa que o método é estável. O gráfico apresenta resultados para dois valores distintos do parâmetro de truncamento  $\varepsilon$ :  $1 \times 10^{-7}$  e  $1 \times 10^{-8}$ .

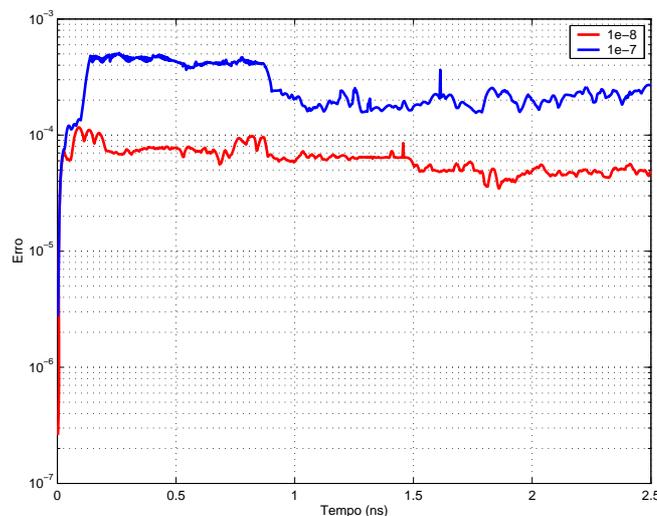


Figura 4-25 Evolução do erro com o tempo

Para avaliar o desempenho do método, usa-se como referência uma solução numérica obtida numa malha uniforme muito refinada e faz-se a comparação desta solução com a solução apresentada pelo método adaptativo em função do número de pontos usados.

A Figura 4-26 apresenta os resultados obtidos. A curva a azul representa o erro em função do número de pontos usados num esquema em malha uniforme no instante 1ns. Como se pode verificar, à medida que o número de pontos diminuí o erro aumenta. A curva a vermelho apresenta o erro em função da média de pontos utilizados no esquema adaptativo, no mesmo instante. A principal conclusão que se pode tirar destes resultados é que para um certo valor de erro o método adaptativo consegue apresentar uma solução com um menor número de pontos. A esta redução de pontos corresponde posteriormente uma redução em termos de memória e tempo de computação.

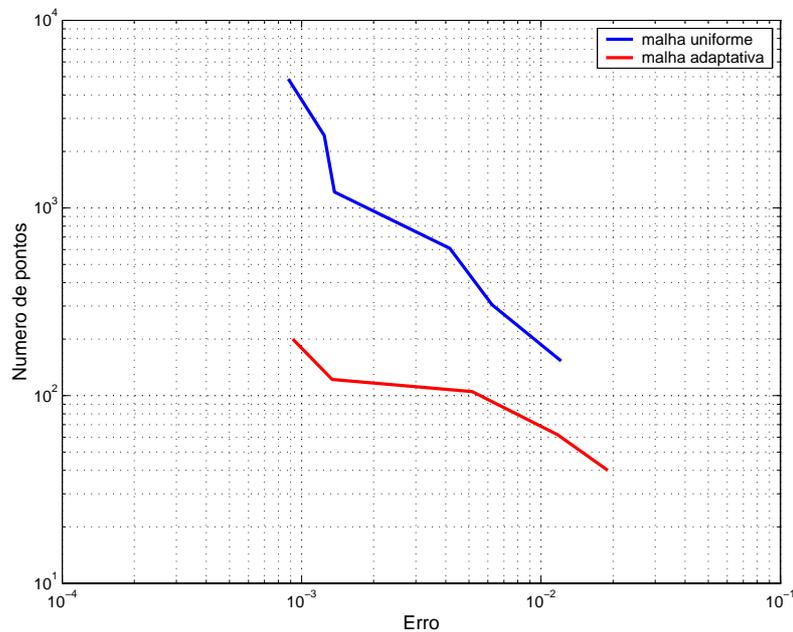


Figura 4-26 Comparação do desempenho do método adaptativo com o método standard

## 4.9.2 Propagação num meio homogêneo com uma descontinuidade

Neste exemplo vamos considerar que o meio é idêntico ao anterior mas com uma descontinuidade tal como se mostra na Figura 4-27.

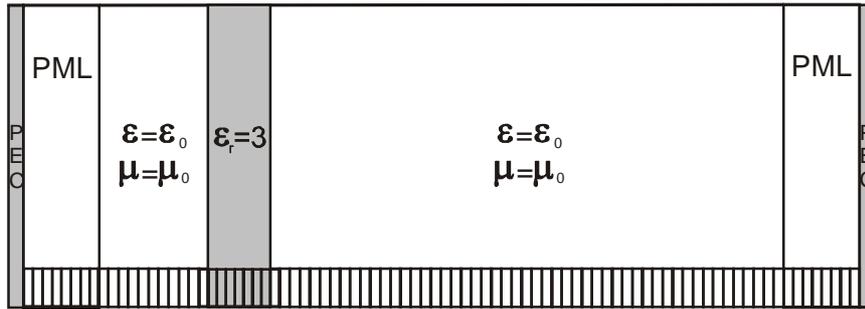
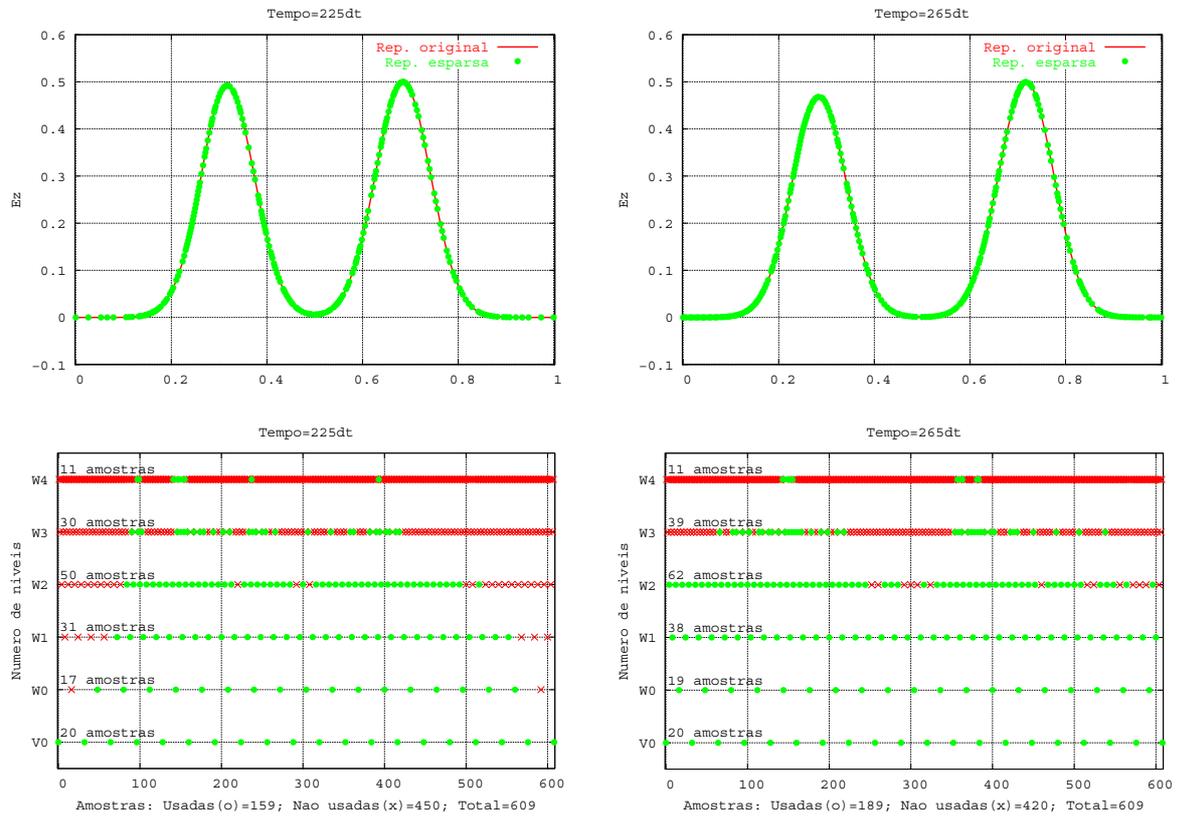


Figura 4-27 Propagação num meio homogéneo com uma descontinuidade

A Figura 4-28 apresenta a evolução do campo eléctrico ao longo do tempo em seis instantes diferentes. É também apresentado a decomposição por níveis referente a cada instante.



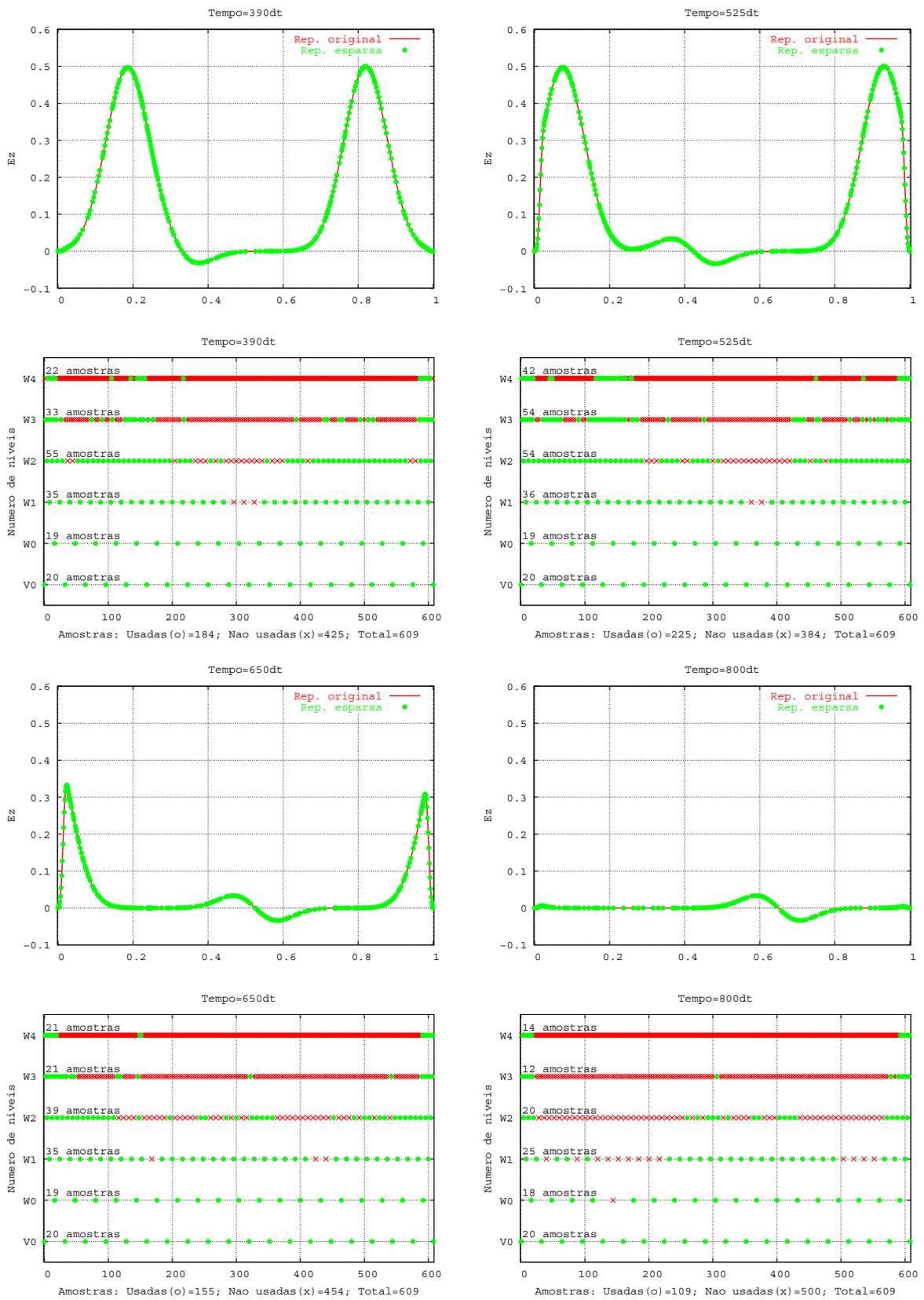


Figura 4-28 Evolução temporal do campo eléctrico na presença de uma descontinuidade

Tal como apresentado anteriormente a Figura 4-29 dá-nos a percentagem de pontos usados durante o tempo de simulação.

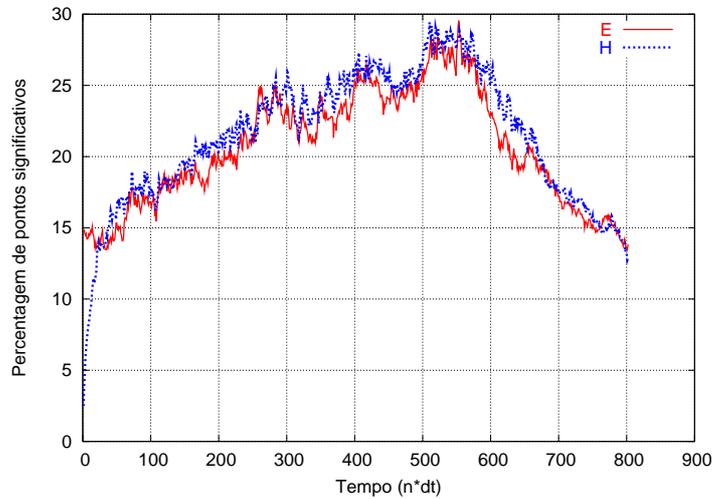


Figura 4-29 Percentagem de pontos significativos

### 4.9.3 Propagação num meio homogéneo com duas descontinuidade

Neste exemplo vamos considerar que o meio é idêntico ao anterior mas agora com duas descontinuidade tal como se mostra na Figura 4-30. O valor da permissividade eléctrica é diferente em cada uma das faixas.

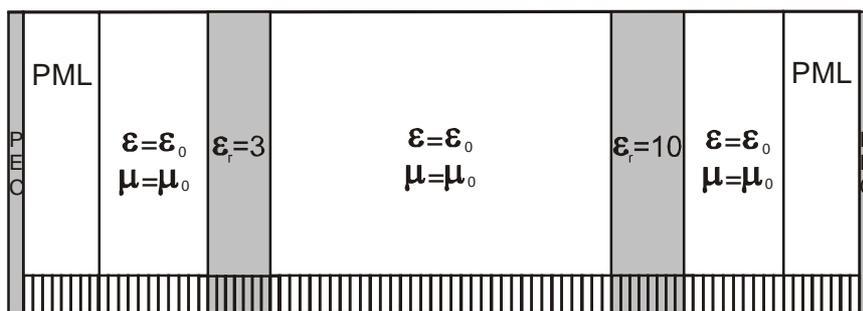
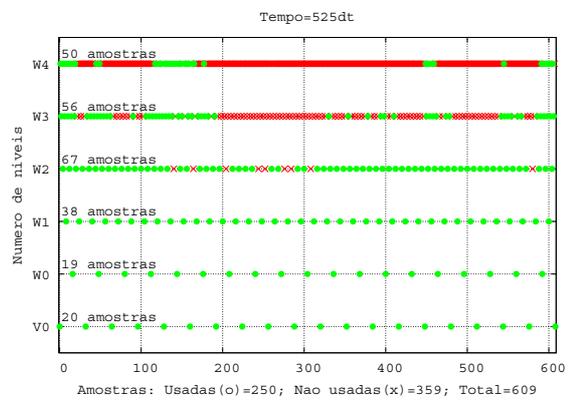
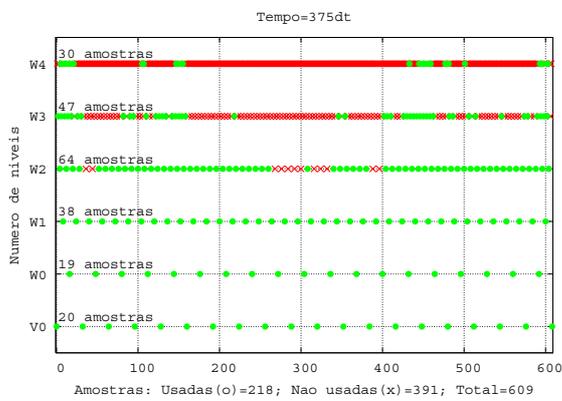
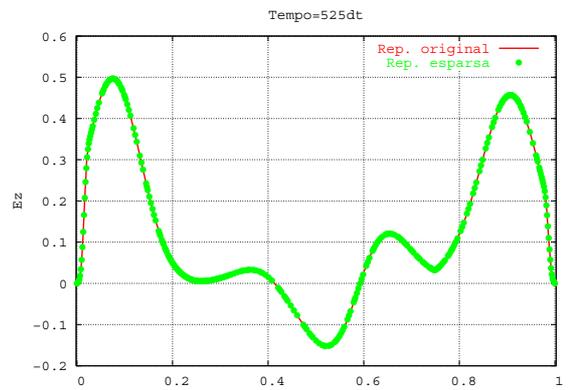
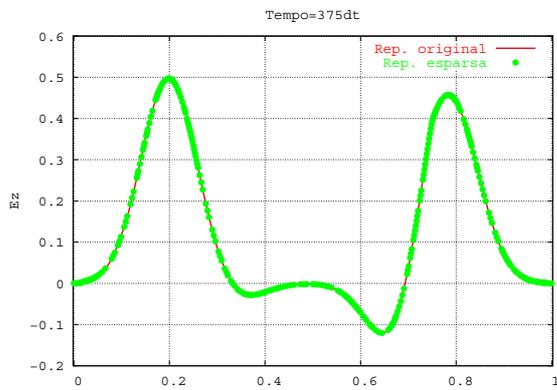
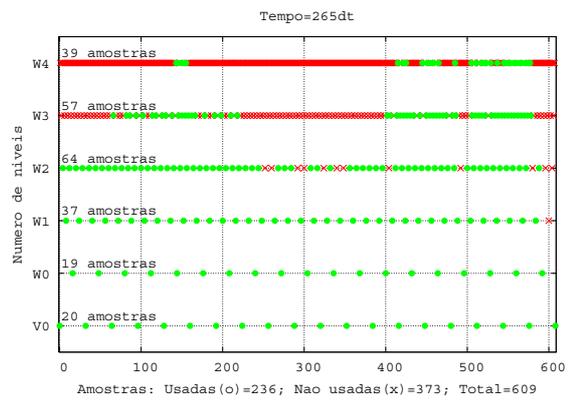
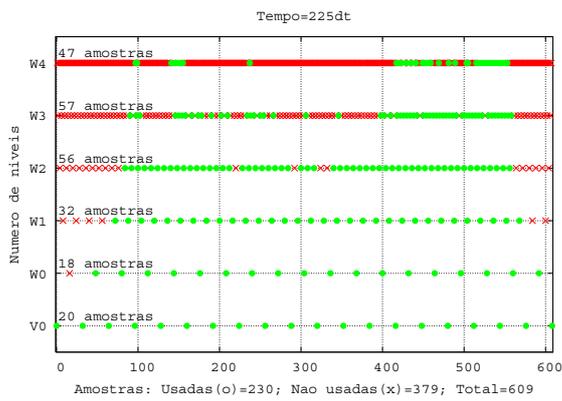
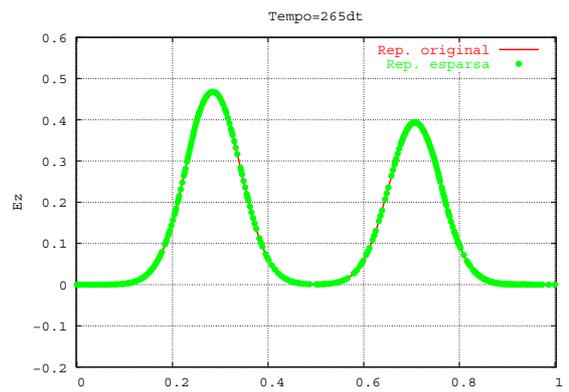
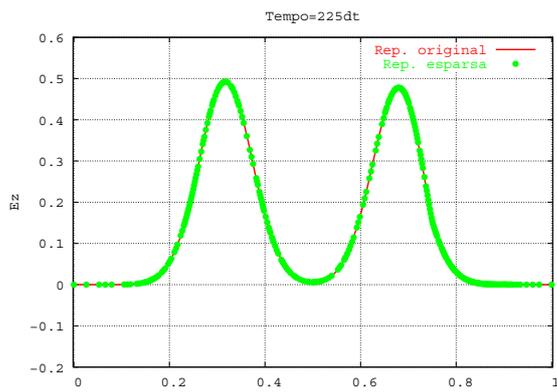


Figura 4-30 Propagação num meio homogéneo com duas descontinuidades

A Figura 4-31 mostra a correspondente evolução temporal do campo eléctrico da situação descrita anteriormente.



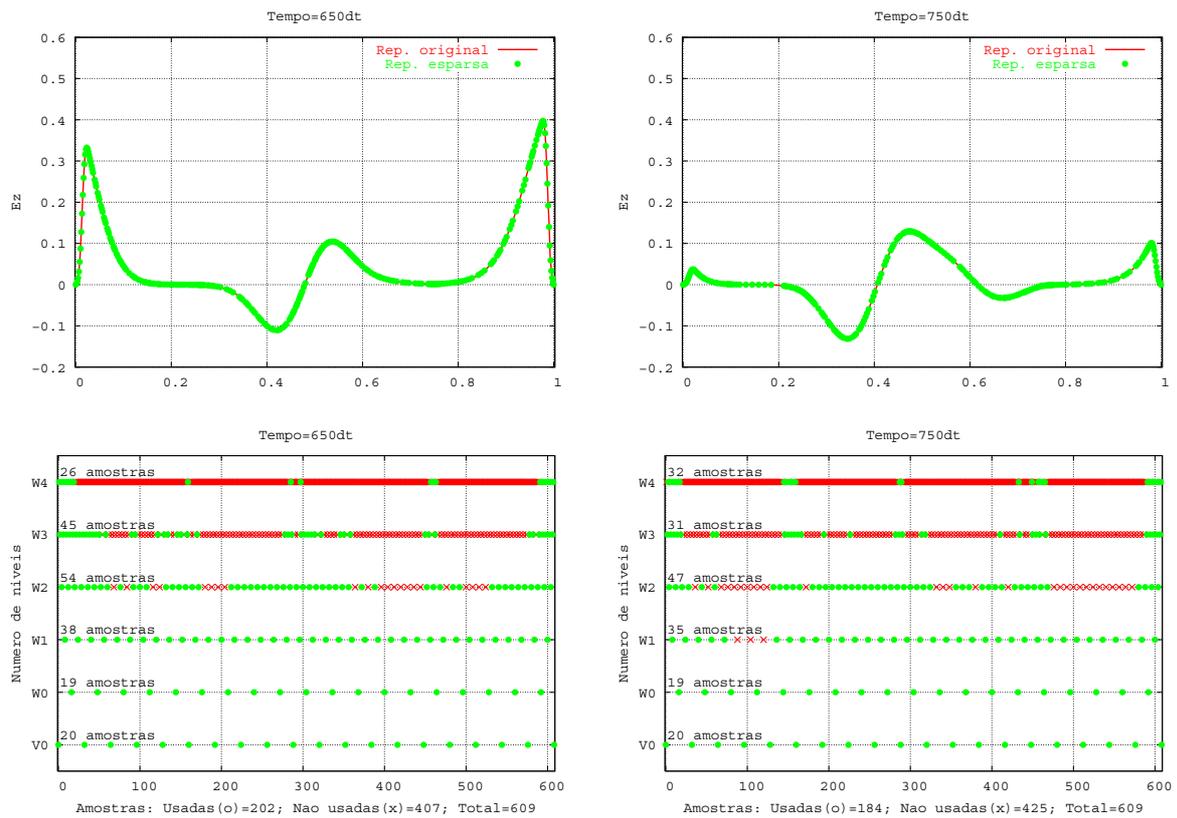


Figura 4-31 Evolução temporal do campo eléctrico na presença de duas descontinuidade

A semelhança do exemplo anterior a Figura 4-32 apresenta a percentagem de pontos usados durante a simulação.

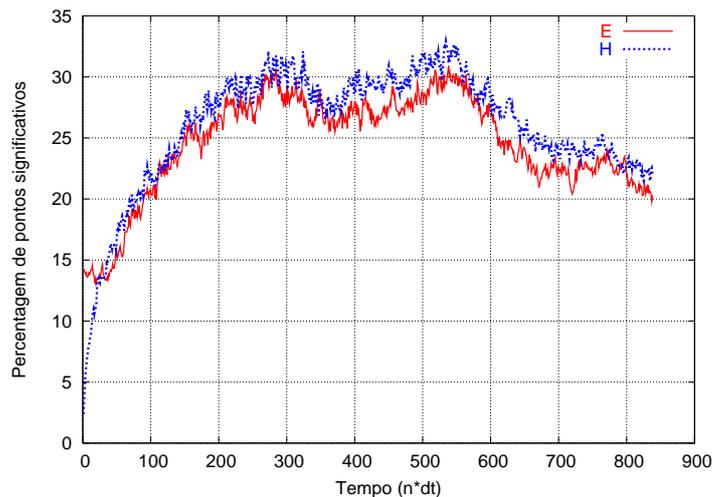


Figura 4-32 Percentagem de pontos significativos

### 4.9.4 Propagação na interface entre dois meios diferentes

Neste exemplo mostra-se um espaço constituído por dois meios dieléctricos de permitividades diferentes tal como se mostra na Figura 4-33.

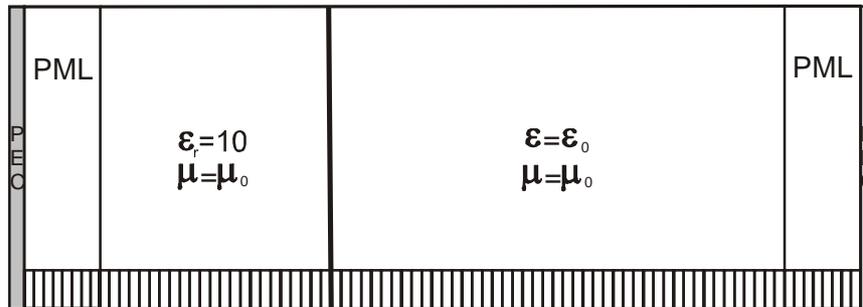
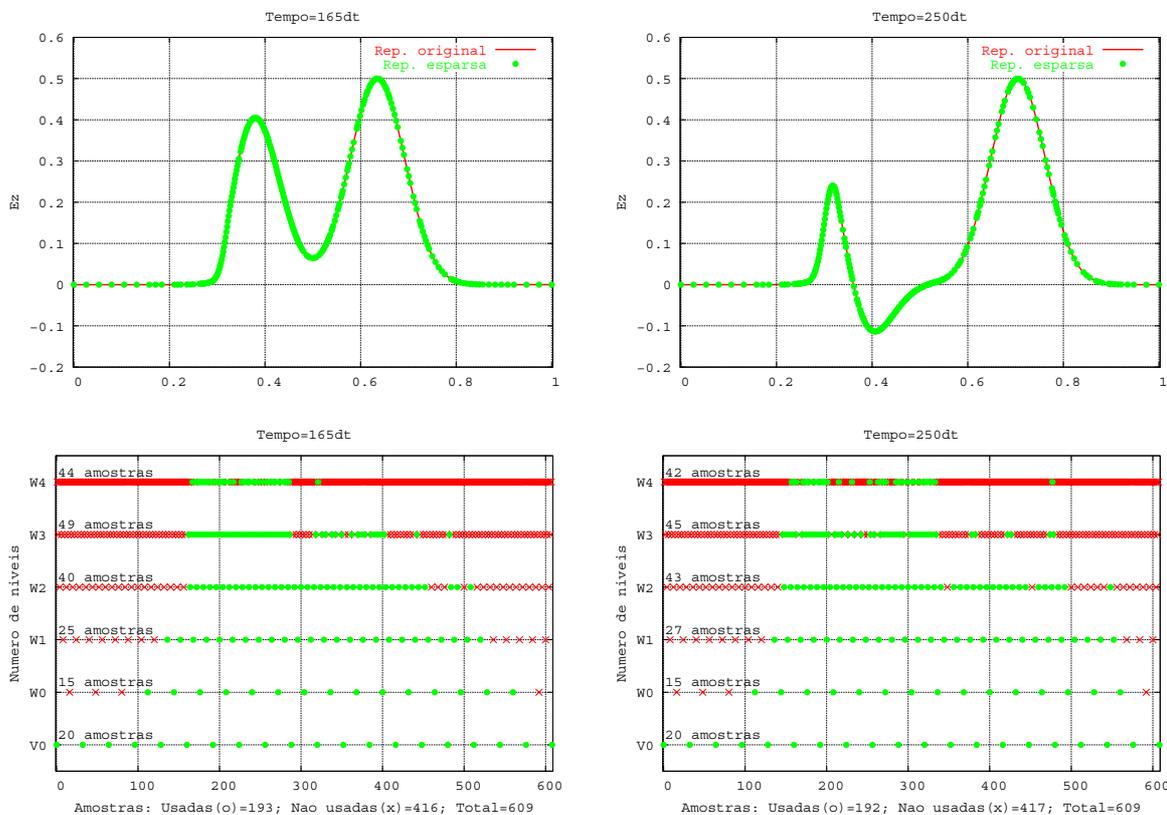


Figura 4-33 Propagação na interface entre dois meios

A Figura 4-34 apresenta a respectiva evolução temporal da componente do campo eléctrico ao longo do tempo em seis instantes diferentes. Nesta sequência é bem visível a adaptabilidade espacial junto a interface entre os dois meios.



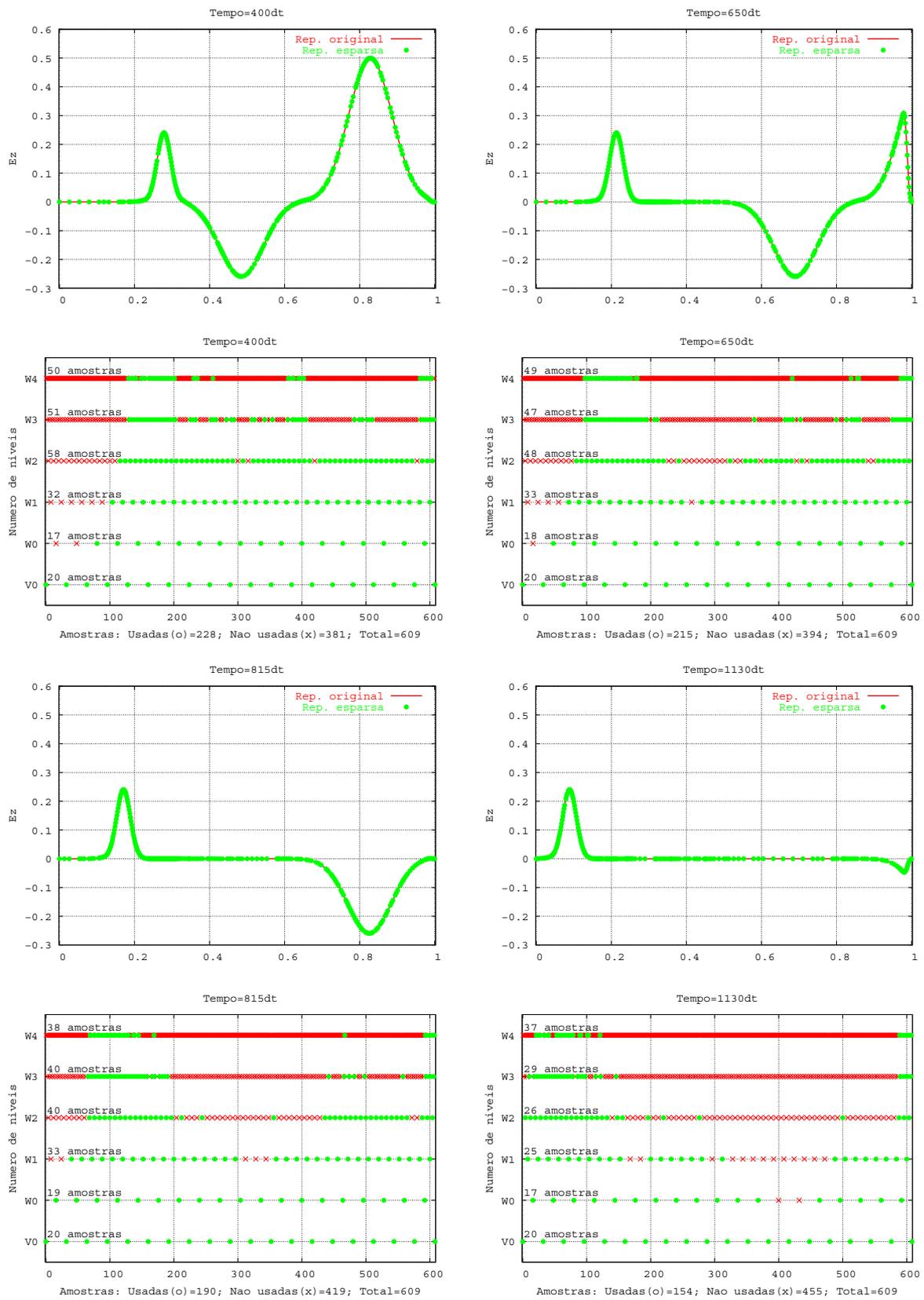


Figura 4-34 Propagação na interface entre dois meios

A Figura 4-35 apresenta a percentagem de pontos significativos usados nesta situação.

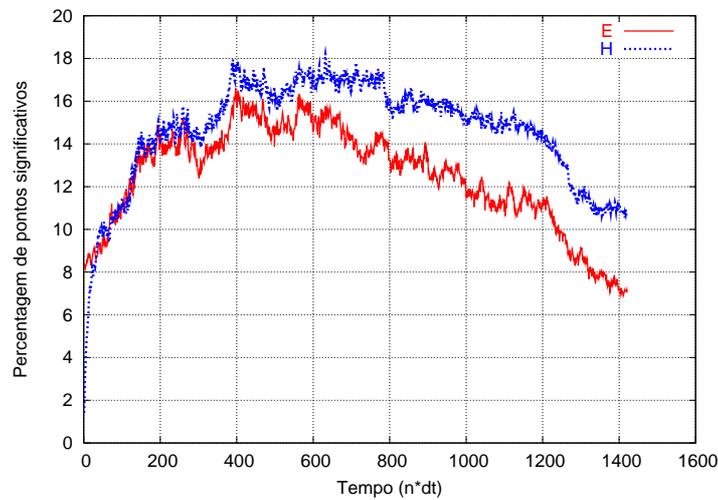


Figura 4-35 Percentagem de pontos significativos

#### 4.9.5 Propagação num meio terminado por um condutor eléctrico perfeito num dos extremos

Finalmente é apresentado um exemplo em que um dos extremos, neste caso o esquerdo é terminado por um condutor eléctrico perfeito. A Figura 4-36 apresenta a situação descrita.

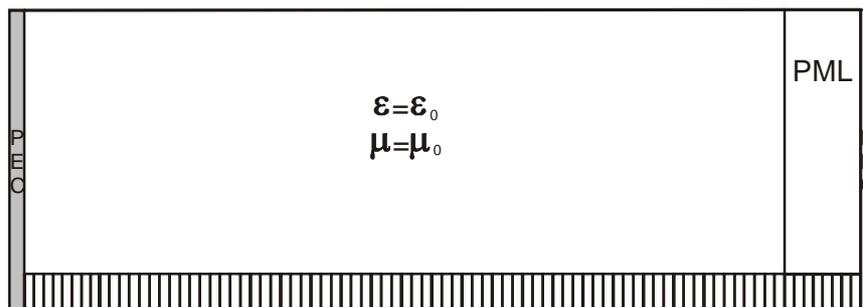
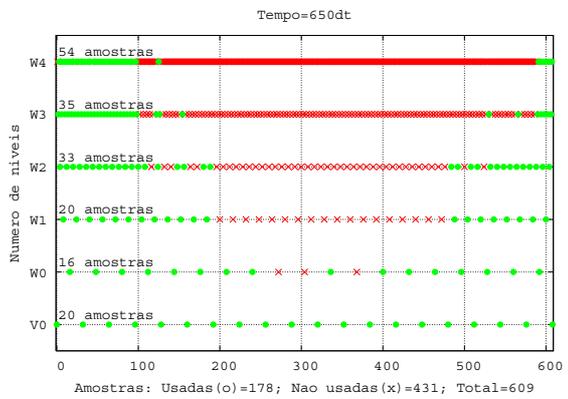
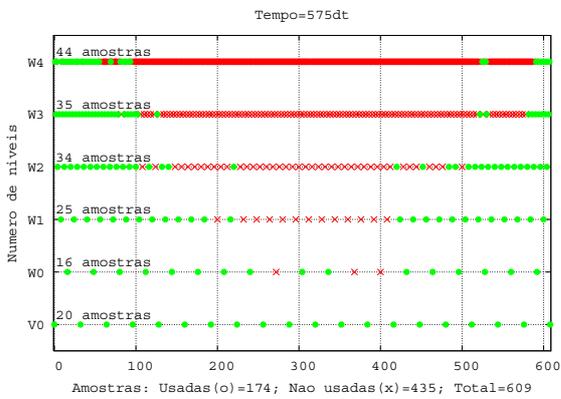
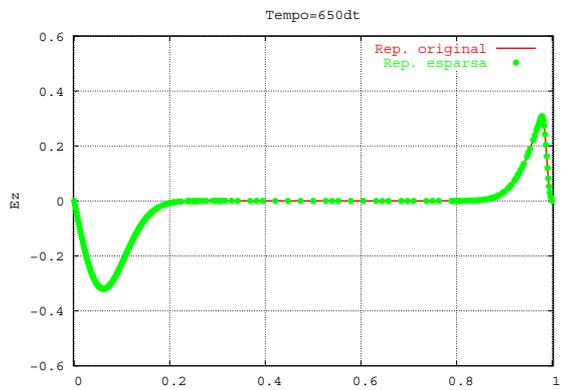
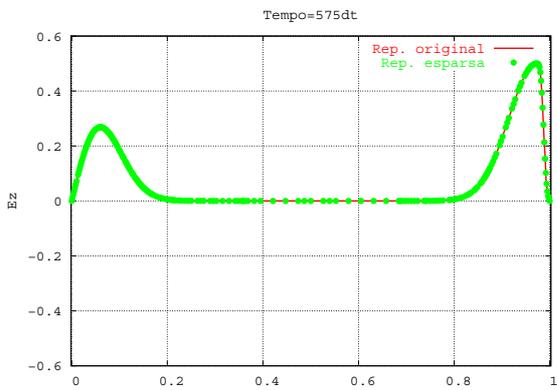
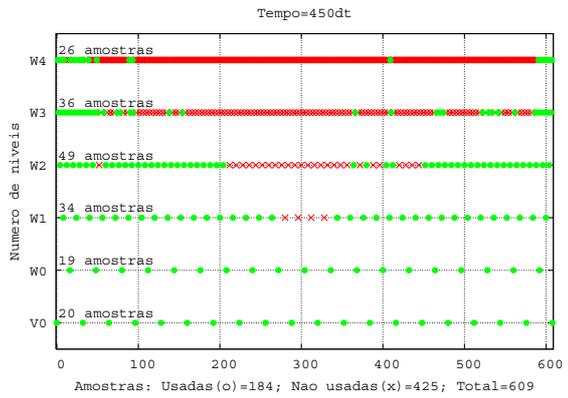
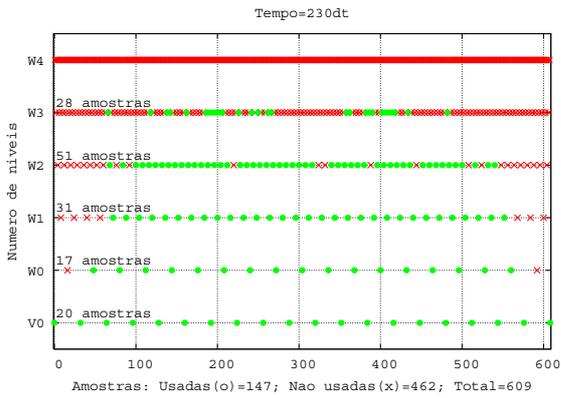
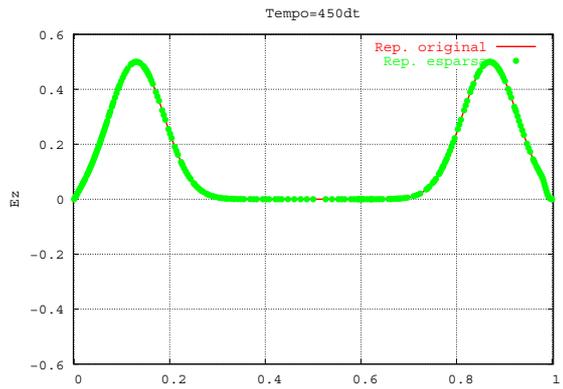
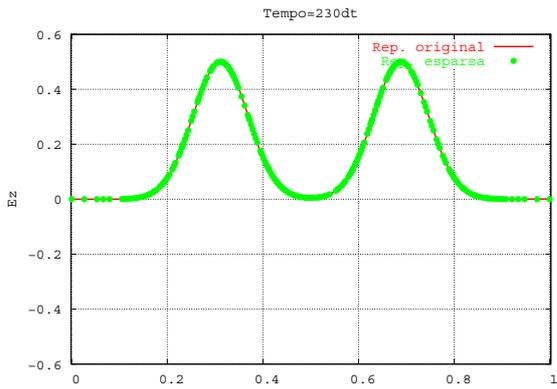


Figura 4-36 Propagação num meio terminado num dos extremos por um PEC

A Figura 4-37 apresenta a evolução temporal do algoritmo.



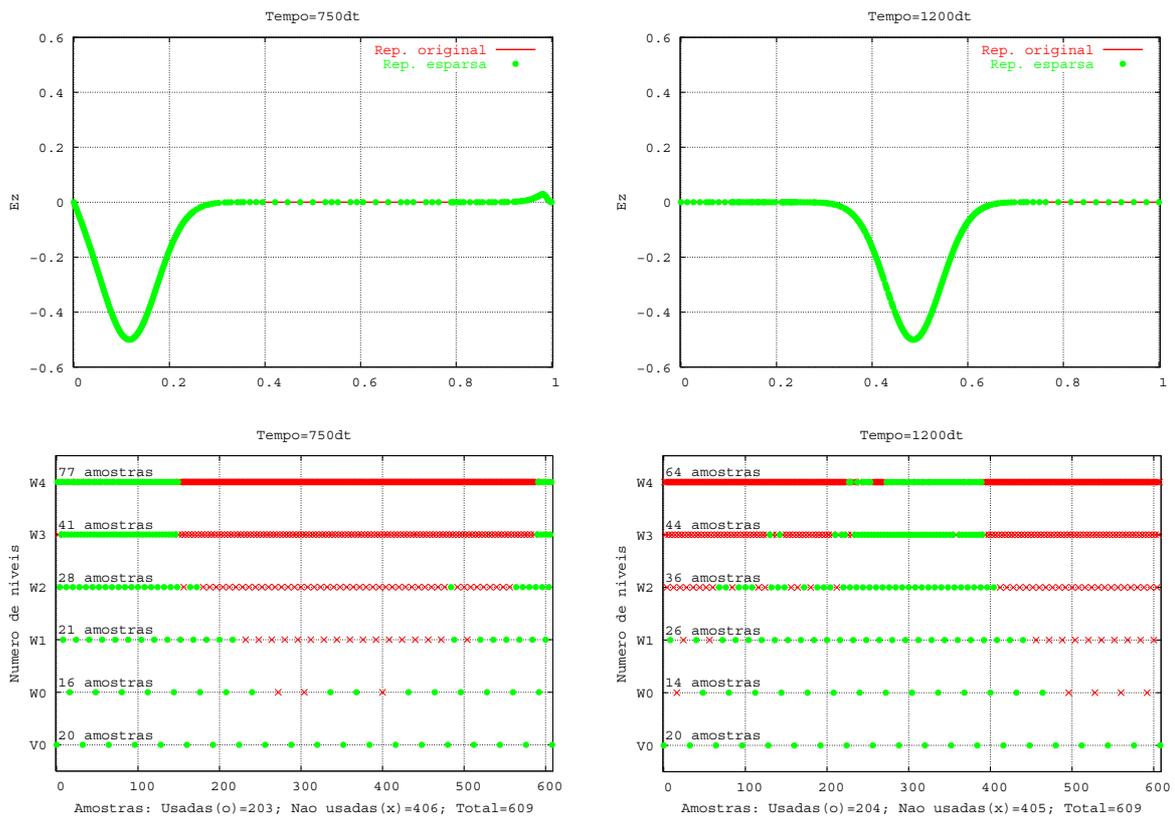


Figura 4-37 Propagação num meio terminado com um PEC num dos extremos

Apresenta-se na Figura 4-38 a percentagem de pontos usados nesta simulação.

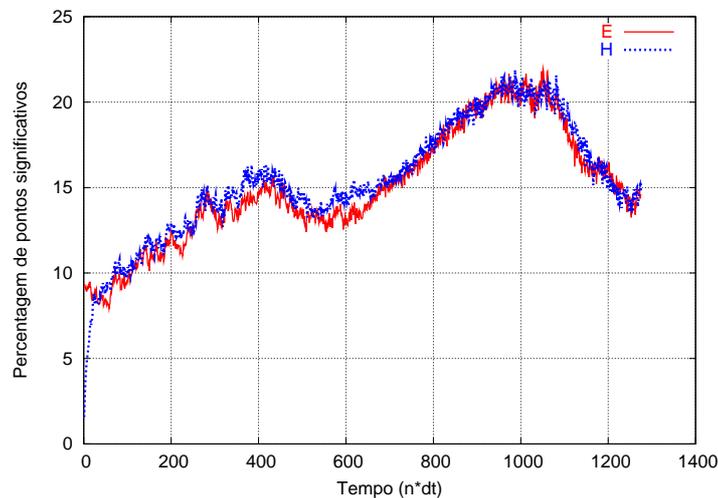


Figura 4-38 Percentagem de pontos significativos.

Esta sequência de exemplos mostra que o objectivo desta tese de se ter uma malha adaptativa com o tempo foi conseguido.

Para terminar esta secção, como forma de validação da técnica, apresenta-se na Figura 4-39 o gráfico da evolução temporal do algoritmo quando se usa o FDTD e quando se recorre a discretização das equações de Maxwell usando as wavelets interpolatórias, correspondente à situação descrita em 4.9.3 (meio com duas descontinuidades). A figura apresenta a evolução temporal da componente do campo eléctrico em seis instantes diferentes: 11ps, 480ps, 768ps, 1067ps, 1569ps e 2392ps.

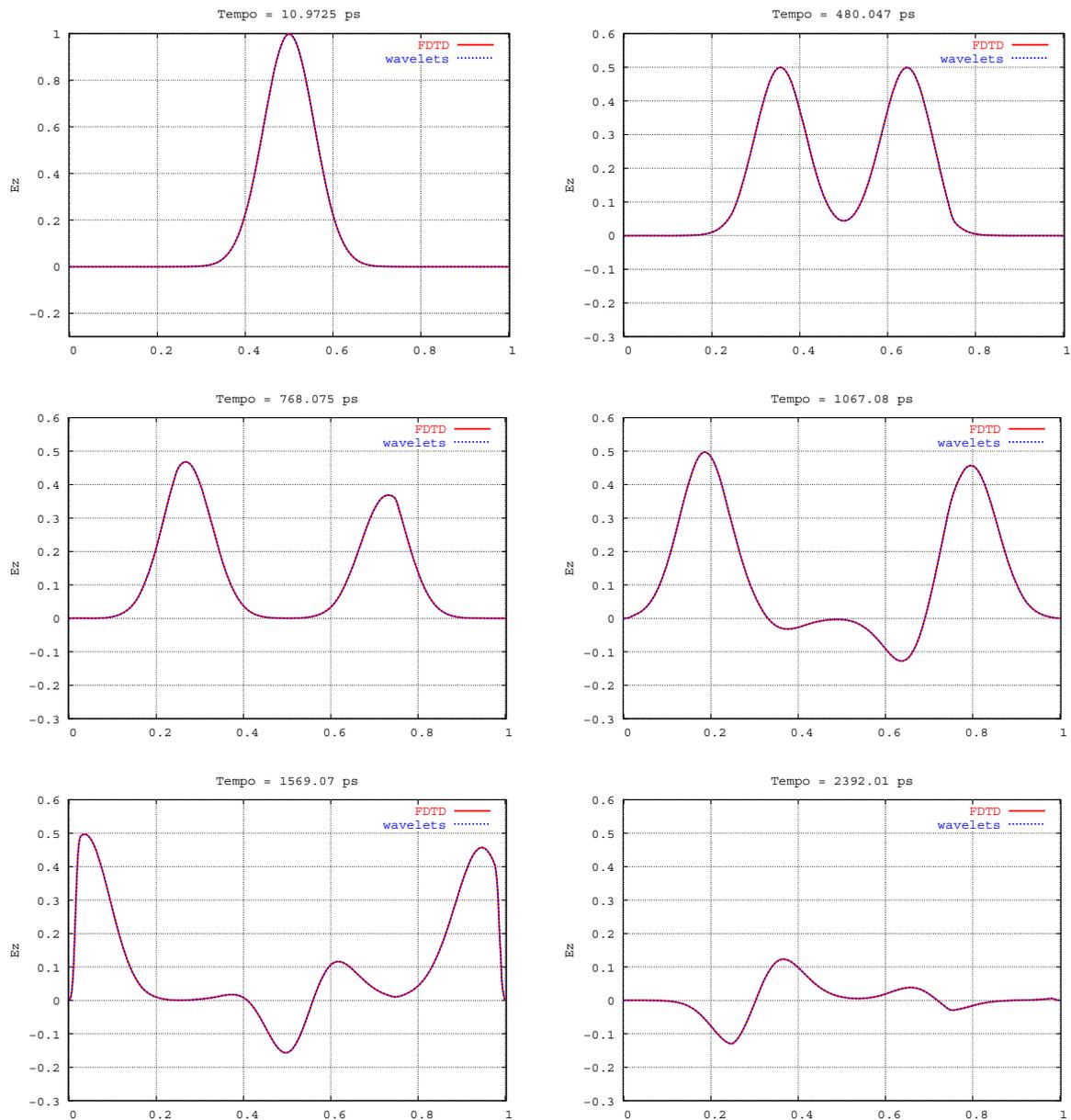


Figura 4-39 Comparação entre o FDTD e usando wavelets interpolatórias

Como se pode observar pela figura os resultados obtidos pelo método proposto coincidem com os resultados obtidos com o FDTD. Deve-se referir que em todas as simulações realizadas anteriormente o parâmetro de truncamento  $\varepsilon$  usado foi  $1 \times 10^{-6}$  e  $1 \times 10^{-9}$  respectivamente para o campo eléctrico e para o campo magnético. Contudo, pode afirmar-se que esta concordância não é total, dado haver uma pequena diferença entre os valores obtidos por cada um dos métodos. A Figura 4-40 apresenta a diferença entre os valores para quatro instantes diferentes.

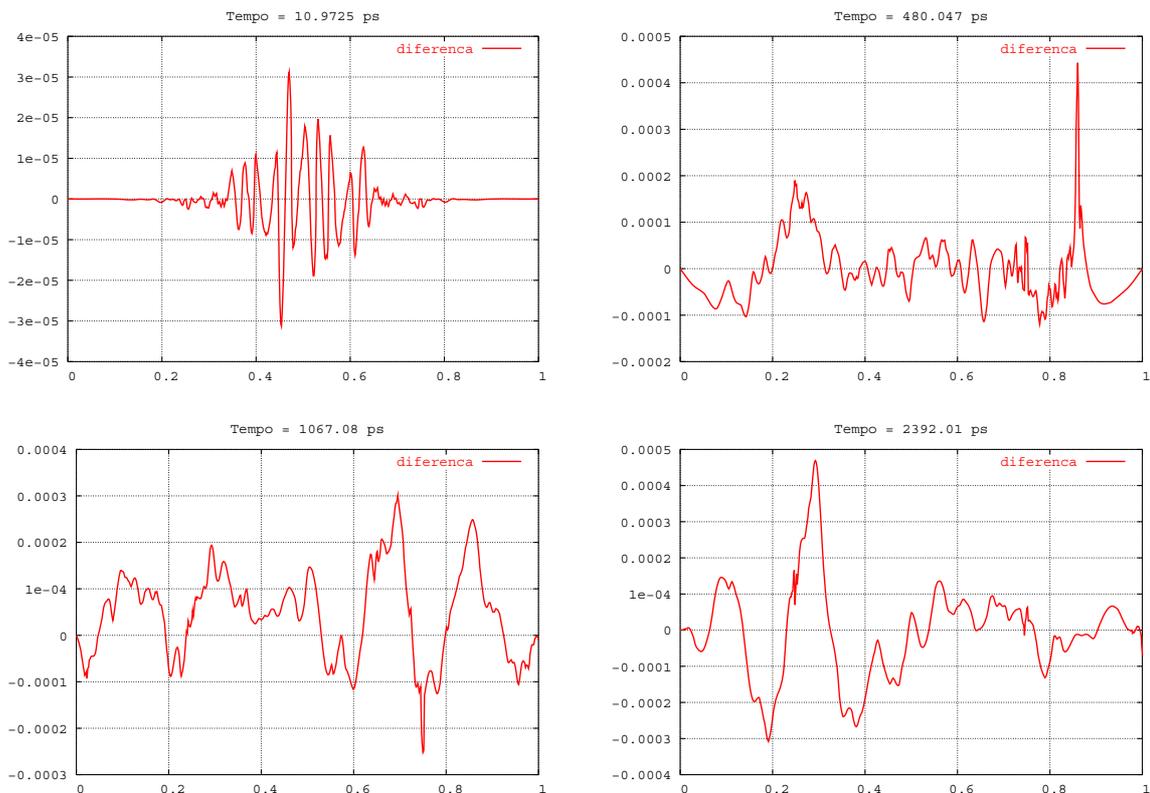


Figura 4-40 Diferença entre os dois métodos

Como se pode observar pela figura a diferença existente é muito pequena. Todavia, se usarmos para valor do parâmetro de truncamento  $1 \times 10^{-4}$  e  $1 \times 10^{-7}$  respectivamente para o campo eléctrico e campo magnético, já são visíveis algumas diferenças entre os dois gráficos. A Figura 4-41 apresenta a evolução temporal de ambos os métodos para quatro instantes diferentes.

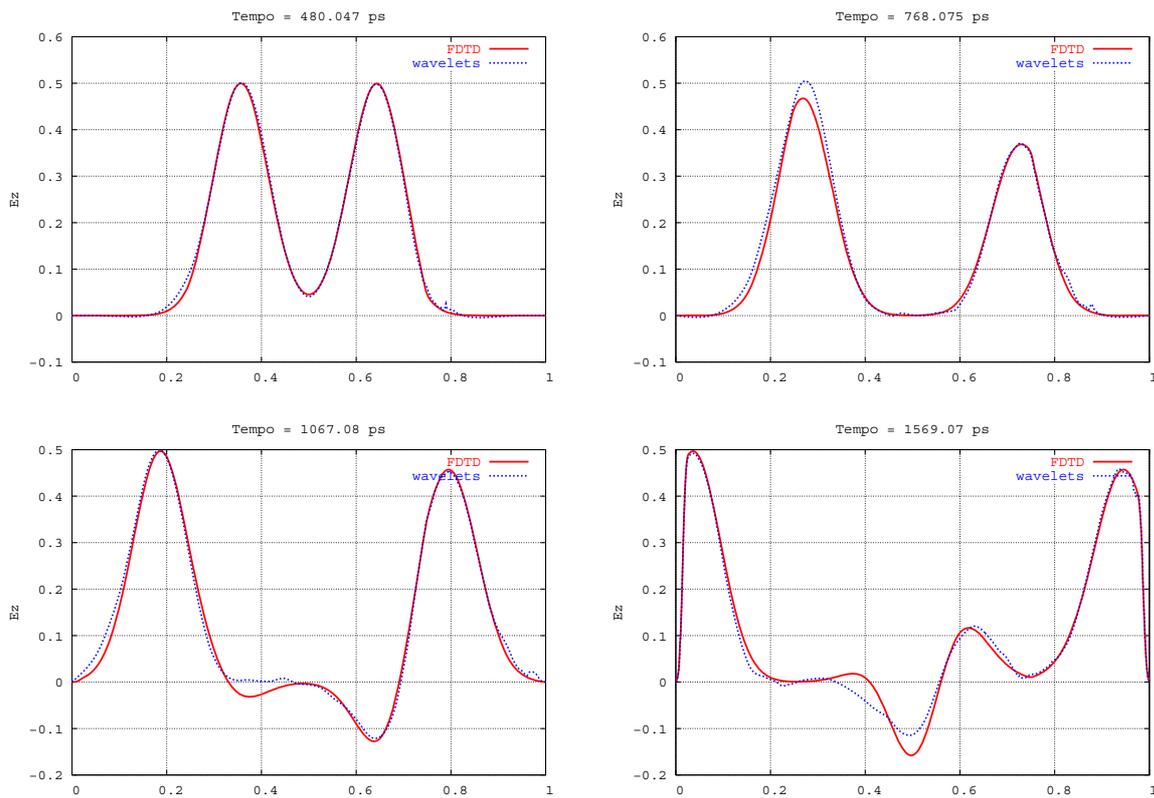


Figura 4-41 Comparação entre os dois métodos

Nesta situação as diferenças entre ambos os métodos é bem visível. No entanto, ao usarmos um valor para o parâmetro de truncamento maior a representação é feita com um número de pontos inferior. A Figura 4-42 apresenta a percentagem de pontos usados nesta situação. Se agora compararmos esta figura com a Figura 4-32, observa-se que a percentagem de pontos usados passou para metade.

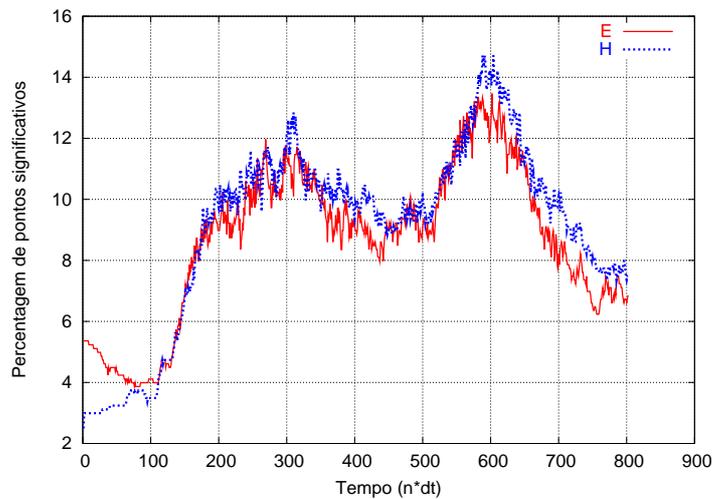


Figura 4-42 Percentagem de pontos significativos

## 4.10 Síntese do capítulo

Este capítulo foi dedicado à análise multiresolução interpolatória. Assim foram explicadas as vantagens que temos quando este tipo de wavelets é usado na discretização das equações de Maxwell quando comparadas com a família de wavelets de primeira geração para a obtenção de uma malha adaptativa. Foram propostas dois tipos de malhas e feito o estudo de dispersão e estabilidade de cada uma delas para que se pudesse fazer uma comparação e saber qual o tipo de malha mais conveniente. Optou-se por usar uma malha entrelaçada e simularam-se diversos exemplos para a validação do método sendo os resultados obtidos bastante promissores.

## 4.11 Referências

- [4-1] G. Strang e T. Nguyen. *Wavelets and filter banks*. Wellesley–Cambridge Press, Massachusetts, 1996.
- [4-2] I. Daubechies. *Ten Lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics SIAM. Philadelphia, 1992.
- [4-3] Y. Meyer. *Wavelets: algorithms and applications*. SIAM. Filadélfia, 1993.
- [4-4] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* 24(02) 909–996, 1988.
- [4-5] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 674–693, 1989
- [4-6] A. Cohen, I. Daubechies e J. C. Feauveau. Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* 45 485–560, 1992.
- [4-7] G Deslauriers e S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constr. Approx.* 5(01) 49-68, 1989.

[4-8] S. Dubuc. Interpolation through an iterative scheme. *J. Math. Anal. Applic.* 114 185–204, 1986.

[4-9] F. Plantevin. Wavelet on irregular meshes. *Adv. comp Math.* 4 293–329, 1995.

[4-10] M. Krumpholz e L. Katehi. MRTD: New time domain schemes based on multiresolution analysis. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 44(04) 555–571, Abr. 1996.

[4-11] G. Rubinacci, A. Tamburrino, S. Ventre e F. Villone. Interpolating wavelets for solution of Maxwell equations in the time domain. *IEEE Trans. on Magnetics.* 34(05) 2775–2778. Set. 1998.

[4-12] M. Holmstrom. Wavelet based methods for time dependent PDE's. PhD Thesis, University of Uppsala, 1997.

# Capítulo 5

## Conclusões e trabalho futuro

---

---

### 5.1 Conclusões

O objectivo desta tese foi a obtenção de uma malha adaptativa no espaço, que acompanhasse a evolução temporal do algoritmo. Quando se pensou em criar uma malha, que de alguma forma, se adaptaria ao espaço o objectivo era usar um conjunto de valores discretos  $N_s \ll N$ , em que  $N$  seria a discretização da função no seu nível de resolução mais elevado. O grande objectivo seria ter um algoritmo de alguma forma semelhante ao FDTD mas em que apenas se necessitaria de  $N_s$  pontos em vez dos  $N$  pontos iniciais por forma a melhorar o desempenho computacional do FDTD, quer em termos de velocidade de processamento, quer em termos de exigências de memória. Obviamente, para que este processo tivesse sucesso, era necessário termos um conjunto de ferramentas que permitissem passar de uma representação esparsa para a representação completa e vice versa, mas sem aumentar os tempos de computação e em que os tempos de computação associados à representação esparsa fosse proporcional de alguma forma ao número de pontos  $N_s$ .

Para se conseguir esse objectivo foram usadas wavelets. Quando se faz a decomposição de uma função usando funções de escala e funções wavelet (análise multiresolução), os coeficientes de wavelet são bons indicadores da regularidade de um função. Por outras palavras quando o coeficiente wavelet é elevado significa que a função varia rapidamente por outro lado se o coeficiente wavelet é pequeno significa que a função é mais suave. Usando estes valores como indicadores de regularidade, podem-se desprezar os coeficiente cujo valor seja inferior a um determinado patamar e deste modo conseguir obter a tal grelha adaptativa.

No entanto, quando se usam wavelets de primeira geração, apesar de termos a possibilidade de adaptabilidade, da relação de dispersão ser bem superior ao FDTD temos um conjunto de factores que tornam a sua aplicação um pouco limitativa. Por exemplo a aplicação das condições fronteira é por vezes bastante complicada devido por exemplo ao suporte infinito da função (wavelets de Battle-Lemarié) ou maior que a unidade (wavelets de Daubechies), pelo que as condições fronteira são satisfeitas apenas pela sobreposição de várias funções base. Para evitar os problemas de condições fronteira poderíamos usar as wavelets de Haar (suporte unitário), mas isso conduziria a uma muito reduzida capacidade de compressão  $N_s \approx N$ . Para além das condições fronteira temos também os problemas que surgem no cálculo da matriz derivativa, a qual está dependente dos níveis de resolução usados na análise do sinal e que têm de ser definidos à partida. Para além disso pode-se também referir que o cálculo de um produto com base numa representação wavelet não é uma tarefa trivial. Aqui surgem integrais com três funções ao contrário dos dois que surge quando se calculam derivadas. Também se poderia referir que o cálculo dos coeficientes de escala e wavelet são obtidos à custa de um produto interno.

Quando se usam wavelets de segunda geração (biortogonais e interpolatórias) além de permitir a adaptabilidade e uma relação de dispersão superior ao FDTD tal como referido anteriormente os problemas anteriores também são suprimidos. A grande vantagem que temos quando se usa este tipo de wavelet é que os coeficientes de escala coincidem com os valores amostrados não sendo necessário o cálculo de um produto interno. Os coeficientes wavelet também são facilmente obtidos. Como estamos a trabalhar com as amostras do sinal as condições fronteira são automáticas e fáceis de implementar. O mesmo se passa no cálculo de um produto e uma soma uma vez que os cálculos podem

ser efectuados como se estivéssemos em espaço físico. O operador derivada pode ser implementado eficientemente e sem os problemas encontrados anteriormente.

Foram então usadas as wavelets interpolatórias para se efectuar a discretização das equações de Maxwell. Para tal foram estudadas duas alternativas para a implementação das malhas, uma entrelaçada e outra não entrelaçada. Quando se usam malhas adaptativas é mais intuitivo usar-se uma malha não entrelaçada, no entanto quando se pensa em comparar com o FDTD faz mais sentido usar uma malha entrelaçada. Para se poder fazer a comparação entre estes dois tipos de malhas foi feito o estudo de dispersão e estabilidade de cada uma destas malhas. No que se refere à análise de dispersão, as malhas entrelaçadas têm um melhor comportamento, já no que se refere ao factor de estabilidade as malhas não entrelaçadas apresentam um factor menos limitativo e até superior ao FDTD. Perante estes resultados optou-se por usar um esquema com malhas entrelaçadas uma vez que este está mais próximo do FDTD com o qual pretendemos efectuar uma comparação em termos de desempenho computacional. No entanto deve referir-se que o esquema com malhas não entrelaçadas será um aspecto a explorar em trabalhos futuros.

Tendo-se então optado por uma malha entrelaçada foram efectuados diversos exemplos de aplicação do algoritmo para se poder avaliar o seu desempenho. Os resultados obtidos nas diversas simulações foram bastantes promissores, tendo-se conseguido obter uma malha adaptativa que evolui com o tempo e na qual é possível observar a evolução do algoritmo ao longo do tempo com um número de pontos  $N_s \ll N$ . Foram apresentados alguns gráficos com a percentagem de pontos que são usados ao longo das diversas simulações e onde se pode observar a reduzida percentagem de pontos usada.

Para um dos exemplos, a evolução temporal foi comparada com o FDTD, tendo-se obtido total concordância.

Perante estas conclusões pode-se dizer que o objectivo inicialmente traçado de se obter uma malha adaptativa foi conseguido.

## 5.2 Trabalho futuro

Para além dos múltiplos tópicos considerados no decurso da presente tese muitos outros poderão vir a ser investigados tendo em vista uma análise mais aprofundada desta problemática.

Sugere-se então como trabalho futuro a investigação do comportamento do algoritmo quando se usam malhas não entrelaçadas.

Um outro ponto a ser explorado é a implementação do algoritmo a duas e três dimensões. Neste caso os coeficientes wavelet também podem ser interpretados como erros de interpolação, no entanto, a topologia das malhas irregulares a estas dimensões podem aumentar a complexidade de armazenamento, de busca e de cálculos. No entanto esta implementação pressupõe um estudo adequado da melhor forma de implementação do algoritmo por forma a que os tempos de computação sejam aceitáveis.

Para além destes pontos, poder-se-ia também pensar em implementar os algoritmos anteriores de uma forma mais eficiente, considerando uma estrutura de dados que só contemple as posições de memória que efectivamente estão a ser usadas, uma vez que nesta implementação as posições de memória que não eram usadas eram marcadas como NAN (*Not a Number*).

# BIOGRAFIA



Pedro Renato Tavares de Pinho, nasceu a 10 de Fevereiro de 1974 na cidade de Vale de Cambra. Em 1992 concluiu o 12º ano na escola secundária Ferreira de Castro em Oliveira de Azeméis, na área científico tecnológica com a média de 18 valores. Em Setembro de 1997 concluiu a Licenciatura em Engenharia Electrónica e Telecomunicações na Universidade de Aveiro com a classificação final de 15 valores. Em Outubro de 1997 entrou para o Instituto de Telecomunicações – Polo de Aveiro, onde desenvolveu trabalho de investigação integrado no projecto ITCOM e no projecto ILENA. Como complemento à sua actividade de investigação, colabora desde Outubro de 1997 com o Departamento de Electrónica e Telecomunicações da Universidade de Aveiro tendo leccionado as seguintes cadeiras: Introdução à Informática, Programação Estrutura de Dados e Algoritmos, Introdução à Programação em C, Introdução as Tecnologias de Informação e Comunicação, Propagação de Ondas Electromagnéticas e Electrotecnia. Em Abril de 2000 concluiu o curso de Mestrado em Engenharia Electrónica e Telecomunicações na Universidade de Aveiro com a classificação de Aprovado. Na mesma data iniciou trabalhos com vista a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica tendo como orientadores científicos o Prof. Doutor José Fernando da Rocha Pereira e o Prof. Doutor Paulo Jorge dos Santos Gonçalves Ferreira. Os seus principais interesses de investigação são a propagação e radiação de ondas electromagnéticas, o processamento de sinal e métodos numéricos.

Actualmente é Presidente do Grupo Recreativo e Cultural de Cavião, membro da Assembleia de Freguesia de São Pedro de Castelões e da Assembleia Municipal de Vale de Cambra.

---

(Pedro Renato Tavares de Pinho)