METODE ESTIMASI *JACKKNIFED RIDGE REGRESSION* PADA MODEL REGRESI LINIER BERGANDA

SKRIPSI

Oleh:
HIKMAH MAGHFIRATUN NISA'
NIM. 09610092

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

METODE ESTIMASI *JACKKNIFED RIDGE REGRESSION* PADA MODEL REGRESI LINIER BERGANDA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
HIKMAH MAGHFIRATUN NISA'
NIM. 09610092

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

METODE ESTIMASI *JACKKNIFED RIDGE REGRESSION* PADA MODEL REGRESI LINIER BERGANDA

SKRIPSI

Oleh:
HIKMAH MAGHFIRATUN NISA'
09610092

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 27 Desember 2013

Pembimbing I	Pembimbing II
Fachrur Rozi, M.Si	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19800527 200801 1 012	NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

METODE ESTIMASI *JACKKNIFED RIDGE REGRESSION* PADA MODEL REGRESI LINIER BERGANDA

SKRIPSI

Oleh:
HIKMAH MAGHFIRATUN NISA'
NIM. 09610092

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 10 Januari 2014

Penguji Utama	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	________________
Ketua Penguji	: Dr. Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	________________
Sekretaris Penguji	:Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	________________
Anggota Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hikmah Maghfiratun Nisa'

NIM : 09610092

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Metode Estimasi *Jackknifed Ridge Regression* pada Model Regresi Linier Berganda

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Januari 2014
Yang membuat pernyataan,

Hikmah Maghfiratun Nisa'
NIM. 09610092

MOTTO

وَٱسۡتَعِينُواْ بِٱلصَّبۡرِ وَٱلصَّلَوٰةِۚ وَإِنَّهَا لَكَبِيرَةٌ إِلَّا عَلَى ٱلۡخَٰشِعِينَ ٤٥

"Jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, dan sesungguhnya yang demikian itu sungguh berat, kecuali bagi orang-orang yang khusyu'"

(Q.S Al-Baqarah:45)

HALAMAN PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيْمِ

Skripsi ini akan penulis persembahkan kepada

Almarhum Ayah Khozin yang selalu menjadi sumber inspirasi

dan Ibu Sulastra yang senantiasa memberikan cinta, kasih, dan do'a

Seluruh keluarga dan kerabat yang selalu memberi motivasi

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Alhamdulillahirobbil'alamiin, puji syukur kepada Allah SWT, atas rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan seiring do'a dan harapan kepada semua pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama penulisan skripsi ini.
5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing agama yang telah banyak memberikan arahan dan pengalaman yang berharga.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Almarhum Ayah Khozin dan Ibu Sulastra yang tidak pernah lelah mendo'akan, memberikan kasih sayang, semangat, dan motivasi kepada penulis.
8. Teman-teman matematika angkatan 2009, khususnya Alfi Syahri, Siti Masykhur, Luluk Nur Azizah, Dian Alfi, Musyarofah, dan Khisnil Inayah, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT, selalu melimpahkan rahmat dan karunia-Nya. Akhirnya, penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin Allah, mudah-mudahan skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amin ya Robbal 'alamiin...*

Wassalamu'alaikum *Wr. Wb.*

Malang, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI x
DAFTAR TABEL xii
DAFTAR LAMPIRAN xiii
ABSTRAK xiv
ABSTRACT xv
الملخص xvi

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Batasan Masalah 5
1.5 Manfaat Penelitian 6
1.6 Metode Penelitian 6
1.7 Sistematika Penulisan 7

BAB II KAJIAN PUSTAKA
2.1 Matriks 9
2.1.1 Jenis Matriks 9
2.1.2 Operasi Matriks 11
2.1.3 Transpos Matriks 12
2.1.4 Invers Matriks 12
2.2 Regresi Linier Berganda 13
2.3 Penaksiran Parameter 14
2.3.1 Sifat-sifat Penaksir 15
2.4 Metode *Ordinary Least Square* (OLS) 16
2.5 Multikolinieritas 18
2.6 Pemusatan dan Penskalaan Data dalam Bentuk Matriks Korelasi 21
2.6.1 Jenis Matriks. 25
2.7 Bentuk Kanonik Model Regresi 27
2.8 Regresi Ridge 28
2.9 Uji Regresi Linier Berganda 29
2.10 Kajian Agama 32

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Analisis Model Regresi linier Berganda dengan Multikolinieritas 35
3.2 Penaksiran Parameter Model Regresi Linier Berganda dengan Metode *Jackknifed Ridge Regression* (JRR) 37
3.2.1 Penaksiran Parameter *Generalized Ridge Regression* (GRR) ...37
3.2.2 Analisis Metode Penaksir JRR 39
3.3 Bentuk Bias GRR dan JRR..45
3.3.1 Bentuk Bias GRR..45
3.3.2 Bentuk Bias JRR...46
3.4 Aplikasi pada Data yang Memiliki Multikolinieritas 48
3.4.1 Aplikasi pada Data dengan Metode OLS 48
3.4.2 Uji Multikolinieritas 50
3.4.3 Pemusatan dan Penskalaan Data...52
3.4.4 Aplikasi pada Data dengan Metode JRR 54
3.5 Uji Signifikansi Model Regresi 57
3.6 Kajian Agama 59

BAB IV PENUTUP
4.1 Kesimpulan...63
4.2 Saran 64

DAFTAR PUSTAKA...65
LAMPIRAN..67

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Penaksir Parameter Regresi dengan Metode OLS 48
Tabel 3.2 Anova untuk Data Awal 50
Tabel 3.3 Nilai VIF Peubah Bebas..51
Tabel 3.4 Nilai Koefisien Korelasi..52
Tabel 3.5 Hasil Proses Pemusatan dan Penskalaan...53
Tabel 3.6 Proses Iterasi Parameter GRR 55
Tabel 3.7 Bias Parameter dengan Metode GRR dan JRR...57
Tabel 3.8 Nilai t_{hitung} Parameter Regresi 58
Tabel 3.9 Anova JRR 58

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Program MAPLE untuk Menyederhanakan $(A - x_i^* x_i^{*T})$ 67
Lampiran 2 Data Laporan Harian Produksi SHS selama 30 Hari PT. PG. Krebet Baru I Bululawang Malang 71
Lampiran 3 Program MATLAB untuk Estimasi Parameter Model Regresi Berganda dengan Metode GRR dan JRR..72

ABSTRAK

Nisa', Hikmah M. 2014. **Metode Estimasi *Jackknifed Ridge Regression* pada Model Regresi Linier Berganda**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Kata Kunci: *Jackknifed Ridge Regression*, Regresi Linier Berganda, Multikolinieritas

Analisis regresi merupakan sebuah alat untuk mempelajari hubungan antar variabel. Jika terdapat beberapa variabel bebas yang mempengaruhi variabel terikat maka hubungan tersebut disebut regresi linier berganda. Metode yang sering digunakan untuk menaksir parameter regresi adalah metode kuarat terkecil atau *Ordinary Least Square* (OLS). Metode OLS menjadi tidak efisien jika terjadi multikolinieritas. Multikolinieritas adalah masalah yang muncul apabila terjadi hubungan linier antara variabel-variabel bebas. Jika hal ini terjadi, maka det $(X^T X)$ akan mendekati nol sehingga matriks $(X^T X)$ hampir singular. Akibatnya variansi akan membesar sehingga menyebabkan hasil penaksiran dengan metode OLS menjadi tidak efisien. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, berkembanglah beberapa metode estimasi parameter seperti *Generalized Ridge Regression* (GRR). GRR merupakan metode yang dapat mengatasi multikolinieritas dan merupakan metode yang bias. Dalam penelitian ini, akan digunakan metode *Jackknifed Ridge Regression* (JRR) yang merupakan perkembangan dari metode GRR. Metode JRR ini akan digunakan untuk menaksir parameter model regresi linier berganda dimana metode ini memiliki variansi minimum dan menekankan pada pengurangan bias pada penaksir *ridge*.

Penaksiran parameter dengan metode JRR akan didapatkan dengan cara menganalisis penaksir parameter GRR menggunakan teknik *Jackknife*. Teknik *Jackknife* dilakukan dengan cara menghapus pengamatan ke-*i* pada penaksir GRR. Hasil taksiran JRR yang didapatkan akan digunakan untuk menentukan parameter regresi linier berganda. Sedangkan untuk mengetahui nilai bias dari penaksir JRR maupun GRR akan didapatkan dari selisih antara ekspektasi penaksir dengan yang ditaksir.

Dari hasil aplikasi metode JRR pada data produksi *Superior High Sugar* (SHS) didapatkan bahwa nilai bias dari metode JRR lebih kecil dibandingkan nilai bias dari metode GRR. Sedangkan model regresi yang didapatkan dari aplikasi metode JRR pada data SHS adalah:

$$Y = -147,90218 + 0,03404 X_1 + 0,13594 X_2$$

Berdasarkan uji signifikansi model regresi menggunakan uji F dan uji t didapatkan bahwa variabel-variabel bebas yaitu jumlah tebu giling (X_1) dan jumlah air imbibisi (X_2) memiliki hubungan yang signifikan dengan produksi SHS (Y) sebagai variabel terikat. Pada penelitian selanjutnya, dapat ditambahkan variabel-variabel bebas yang lebih signifikan dalam mempengaruhi produksi SHS. Selain itu, dapat juga digunakan metode lain dalam mengatasi multikolinearitas di antaranya *Modified Jackknifed Ridge*, *Second Order Jackknifed Ridge*, dan sebagainya.

ABSTRACT

Nisa', Hikmah M. 2014. **Estimation Method of Jackknifed Ridge Regression in Multiple Linear Regression Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Fachrur Rozi, M.Si (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Keywords : Jackknifed Ridge Regression, Multiple Linear Regression, Multicollinearity

Regression analysis is a tool to learn the relationship between variables. When the several independent variables affect the dependent variable the relationship is called multiple linear regression. The method that often used to estimate the regression parameters is the least squares method or Ordinary Least Squares (OLS). OLS method become inefficient when multicollinearity occurred. Multicollinearity is a problem that arises when the linear relationship between independent variables. If this is happen, then $\det(X^T X)$ would be close to zero, so $(X^T X)$ matrix nearly singular. As a result, the variance will be high, causing the OLS estimation results become inefficient. To overcome these problems, developed several methods of estimation of parameters such as the Generalized Ridge Regression (GRR). GRR is a method that can overcome the multicollinearity and a bias method. In this study, will be used Jackknifed Ridge Regression method (JRR) which is the development of GRR methods. JRR method will be used to estimate the parameters of a multiple linear regression model in which this method has minimum variance and emphasis the bias reduction on the ridge estimator.

The parameter estimation method of JRR will be obtained by analyzing the parameters of the GRR by using the Jackknife technique. Jackknife technique is done by removing the i-th observation on GRR estimators. The result of JRR estimates that obtained is used to determine the parameters of linear regression, whereas to know the value of the bias estimator of JRR and GRR will be obtained from the difference between the estimators expectations with the estimated.

The results of applying JRR method to Superior High Sugar (SHS) production data was found that the value of the bias of JRR method is smaller than the value of the bias of GRR method. While regression models were obtained from the application of the JRR method on SHS data are:

$$Y = -147,90218 + 0,03404 X_1 + 0,13594 X_2$$

Based on the significance test of regression models using the F test and t test showed that the independent variables are the amount of sugar cane milling (X_1) and the amount of water imbibition (X_2) has a significant relationship with the production of SHS (Y) as a dependent variable. In a subsequent study, can be added independent variables are more significant in influencing the production of SHS. In addition, other methods can also be used to overcome multicollinearity among Modified Jackknifed Ridge, Second Order Jackknifed Ridge, and etc.

الملخص

النساء، حكمه مغفرة. ٢٠١٤. **جكنف ريدج الانحدار طرق تقدير في نماذج الانحدار الخطي متعددة**. البحث العلمي.
قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرف: (١) فحرالرّازي، الماجستير (٢) الحاج وحي هينكي إروان، الماجستير

كلمات الرئيسية: جكنف ريدج الانحدار، الانحدار الخطي متعددة، الخطية المتعددة

تحليل الانحدار هو أداة لدراسة العلاقة بين المتغيرات. إذا كان هناك العديد من المتغيرات المستقلة التي تؤثر على المتغير التابع ثم يسمى علاقة الانحدار الخطي. وكثيرا ما يستخدم أسلوب لتقدير معلمات الانحدار هو طريقة المربعات الصغرى أو المربعات الصغرى (OLS). يصبح طريقة المربعات الصغرى العادية غير فعالة إذا كان هناك الخطية المتعددة. الخطية المتعددة هي المشكلة التي تنشأ في حالة وجود علاقة خطية بين المتغيرات المستقلة. إذا كان هذا الحال ، ثم أنه سيكون ديت $(X^T X)$ قريبا من الصفر مصفوفة $(X^T X)$ بحيث المفرد تقريبا.
ونتيجة لذلك، فإن الفرق يكون أكبر، مما تسبب في نتائج عملية شريان الحياة تصبح غير فعالة تقدير. للتغلب على هذه المشاكل، وضعت هناك عدة طرق لتقدير المعلمات مثل المعمم ريدج الانحدار (GRR). GRR هو الأسلوب الذي يمكن التغلب على الخطية المتعددة وطريقة متحيزة .في هذه الدراسة، سيتم استخدام أسلوب جكنف ريدج الانحدار (JRR) والذي هو تطوير أساليب GRR. وسوف تستخدم طريقة JRR لتقدير معلمات متعددة نموذج الانحدار الخطي في هذه الطريقة التي لديها الحد الأدنى من التباين والحد من التحيز في التركيز على مقدر التلال.
وسيتم الحصول على JRR طريقة تقدير المعلمة من خلال تحليل المعلمات من الانحدار المعمم ريدج باستخدام تقنية المطواة GRR. ويتم ذلك عن طريق إزالة تقنية الكباسة الملاحظة عشر على المعلمات GRR. وسوف تستخدم نتائج التقديرات JRR الحصول عليها لتحديد معالم الانحدار الخطي. كما ل معرفة قيمة التحيز المعلمة JRR و GRR سيتم الحصول عليها من الفرق بين مقدر مع التوقعات المقدرة.
من نتائج تطبيق الأسلوب بيانات الإنتاج JRR متفوقة عالية السكر (SHS) وجدت أن قيمة التحيز للأسلوب JRR أصغر من قيمة تحيز الأسلوب GRR. في حين تم الحصول على نماذج الانحدار JRR من تطبيق طريقة البيانات SHS هي:

$$Y = -147,90218 + 0,03404 X_1 + 0,13594 X_2$$

استنادا إلى اختبار أهمية نماذج الانحدار باستخدام أظهر اختبار F و اختبار t ان المتغير المستقل هو كمية قصب السكر (X_1) و طحن كمية تشرب الماء (X_2) له علاقة خطية مع إنتاج SHS (Y) كمتغير تابع. في دراسة لاحقة، يمكن إضافة المتغيرات المستقلة هي أكثر أهمية في التأثير على إنتاج SHS. بالإضافة إلى ذلك، أساليب أخرى يمكن أن تستخدم أيضا للتغلب على الخطية المتعددة بين جكنف التعديل ريدج، وثانيا طلب جكنف ريدج، وغيردلك.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak variabel yang saling berhubungan satu sama lain. Hubungan antar variabel tersebut dalam statistika lebih dikenal dengan analisis regresi. Menurut Algifari (2000:1), analisis regresi merupakan analisis yang mempelajari bagaimana membangun sebuah model fungsional dari data untuk dapat menjelaskan ataupun meramalkan suatu fenomena alami atas dasar fenomena yang lain. Ada juga yang menyatakan bahwa analisis regresi merupakan suatu analisis mengenai hubungan antara dua variabel atau lebih yang umumnya dinyatakan dalam model matematik.

Allah SWT berfirman dalam surat An-Naba' ayat 31-36 sebagai berikut:

إِنَّ لِلْمُتَّقِينَ مَفَازًا ﴿٣١﴾ حَدَآئِقَ وَأَعْنَٰبًا ﴿٣٢﴾ وَكَوَاعِبَ أَتْرَابًا ﴿٣٣﴾ وَكَأْسًا دِهَاقًا ﴿٣٤﴾
لَّا يَسْمَعُونَ فِيهَا لَغْوًا وَلَا كِذَّٰبًا ﴿٣٥﴾ جَزَآءً مِّن رَّبِّكَ عَطَآءً حِسَابًا ﴿٣٦﴾

Artinya:"Sesungguhnya orang-orang yang bertakwa mendapat kemenangan, (yaitu) kebun-kebun dan buah anggur, dan gadis-gadis remaja yang sebaya, dan gelas-gelas yang penuh (berisi minuman). Di dalamnya mereka tidak mendengar perkataan yang sia-sia dan tidak (pula) perkataan dusta. Sebagai pembalasan dari Tuhanmu dan pemberian yang cukup banyak.

Kata (مفازا) dalam ayat di atas menjelaskan bahwa kemenangan yang besar atau kebahagiaan di surga akan didapatkan kelak oleh orang-orang yang bertakwa. Mereka yang senantiasa melaksanakan perintah Allah dan menjauhi larangan-Nya akan memperoleh beberapa kenikmatan seperti yang telah disebutkan di atas. Hal ini menunjukkan bahwa ketakwaan seseorang akan berakibat pada ganjaran yang akan diterimanya di akhirat (Shihab, 2003:20-21).

Menurut penulis, hubungan antara ketakwaan dan kemenangan ini bisa diibaratkan dengan regresi. Misalnya, ketakwaan dikatakan sebagai variabel bebas X yang akan mempengaruhi kemenangan sebagai variabel terikat Y. Perubahan nilai X akan menyebabkan perubahan nilai Y. Setiawan (2010:93) menyatakan jika terdapat hubungan linier antara kedua variabel maka bentuk pola dalam diagram pencarnya akan membentuk garis lurus mengikuti garis regresi. Semakin mendekati garis regresi berarti *error* yang diperoleh juga semakin kecil. Untuk mengetahui seberapa besar pengaruh X terhadap naik turunnya nilai Y inilah diperlukan analisis regresi. Meski pada dasarnya tidak ada manusia yang bisa memprediksi kemenangan seperti apa yang akan diperolehnya kelak, namun Allah telah menjelaskan bahwa seseorang yang bertakwa akan mendapatkan pahala atas kebaikannya.

Analisis regresi bertujuan mempelajari hubungan antara dua variabel. Dua variabel ini dibedakan menjadi variabel bebas X dan variabel terikat Y. Jika terdapat lebih dari satu variabel bebas yang mempengaruhi variabel terikat maka model regresi tersebut disebut model regresi linier berganda.

Keberhasilan dalam menentukan model regresi yang sesuai sangat bergantung pada penaksiran parameter. Penaksiran dapat digunakan untuk meramalkan kejadian atau peristiwa yang akan datang, khususnya dalam bidang ekonomi. Oleh karena itu, pengetahuan tentang penaksiran parameter sangat penting dipelajari. Hasil penaksiran yang diperoleh harus dapat dipertanggungjawabkan. Metode yang digunakan untuk mendapatkan hasil yang sesuai adalah metode yang memiliki sifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*). BLUE mengandung arti bahwa estimasi parameter yang dihasilkan akan memiliki variansi yang minimum. Untuk mendapatkan estimasi yang bersifat BLUE disyaratkan sejumlah asumsi klasik, yaitu hubungan antara variabel bebas dan variabel terikatnya linier, variabel terikatnya adalah nonstokastik, tidak ada multikolinieritas, *error* memiliki nilai harapan nol, *error* memiliki variansi yang konstan untuk semua observasi (*homoscedasticity*) dan tidak terdapat ketergantungan antar *error* (autokorelasi).

Pada dasarnya metode kuadrat terkecil atau *Ordinary Least Square* (OLS) merupakan metode estimasi parameter terbaik, linear dan tidak bias (BLUE) jika asumsi klasik terpenuhi. Akan tetapi jika terdapat multikolinieritas dalam model regresi, metode OLS akan memiliki variansi dan kovariansi yang besar (Gujarati, 2010:416).

Multikolinieritas adalah masalah yang timbul pada regresi linier berganda apabila terdapat suatu hubungan atau ketergantungan linier di antara beberapa atau semua dari variabel-variabel bebas. Jika variabel-variabel tersebut berkorelasi sempurna atau mendekati sempurna, maka akan sangat sulit untuk memisahkan pengaruh masing-masing variabel bebas terhadap variabel terikat dan untuk mendapatkan penaksir yang baik bagi koefisien-koefisien regresi.

Menurut Setiawan (2010:84-85), apabila terjadi multikolinieritas sempurna di antara variabel bebas, maka det $(X^T X) = 0$ sehingga matriks $(X^T X)$ merupakan matriks singular. Estimasi dengan menggunakan metode OLS tidak akan diperoleh karena matriks $(X^T X)$ tidak memiliki invers. Sedangkan jika terjadi multikolinieritas mendekati sempurna, maka det $(X^T X)$ mendekati nol sehingga matriks $(X^T X)$ hampir singular. Akibatnya variansi dari koefisien regresi membesar sehingga *standard error* juga membesar. Hal ini menyebabkan hasil taksiran dengan metode OLS menjadi tidak efisien karena variansi yang tidak minimum.

Untuk mengatasi permasalahan tersebut, berkembanglah beberapa metode estimasi parameter seperti *Ordinary Ridge Regression* (ORR) yang diusulkan oleh Hoerl dan Kennard (1970) dan *Generalized Ridge Regression* (GRR) oleh Singh, dkk. (1986). Pada penelitian sebelumnya, El-Deneny dan Rashwan (2011) juga telah membuktikan bahwa kedua metode tersebut lebih baik jika dibandingkan dengan metode kuadrat terkecil meskipun keduanya masih merupakan penaksir yang bias. Khurana, dkk. (2012) kemudian menyempurnakan metode tersebut dengan nama *Jackknifed Ridge Regression* (JRR). Metode JRR merupakan metode yang lebih menekankan pengurangan bias pada penaksir *ridge*. Metode JRR akan menghasilkan variansi minimum dan hasil taksiran yang lebih stabil meskipun JRR merupakan penaksir yang bias.

Berdasarkan uraian di atas, maka tema yang diangkat dalam penelitian ini adalah ”Metode Estimasi *Jackknifed Ridge Regression* pada Model Regresi Linier Berganda”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana bentuk estimasi dan bias parameter model regresi linier berganda menggunakan metode JRR?
2. Bagaimana hasil estimasi parameter-parameter model regresi linier berganda pada data produksi *Superior High Sugar* (SHS) dengan metode JRR?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Menjelaskan bentuk estimasi dan bias parameter model regresi linier berganda menggunakan metode JRR.
2. Mengetahui hasil estimasi parameter-parameter model regresi linier berganda pada data produksi SHS dengan metode JRR.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan lebih terfokus dan jelas maka diperlukan adanya batasan masalah. Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Variabel bebas yang akan digunakan dalam penelitian ini terdiri dari 2 variabel.
2. Model regresi linier berganda yang dianalisis diasumsikan memiliki multikolinieritas.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

a. Bagi penulis

Mengetahui bentuk estimasi dan bias parameter model regresi linier berganda menggunakan metode JRR, serta dapat menjadi wacana pengembangan ilmu pengetahuan khususnya dalam pengembangan ilmu matematika yang dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari dan di berbagai disiplin ilmu.

b. Bagi lembaga

Sebagai sumbangan pemikiran dan upaya peningkatan kualitas keilmuan, khususnya dalam bidang statistik di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

c. Bagi pembaca

Memberikan gambaran tentang bentuk estimasi dan bias parameter model regresi linier berganda menggunakan metode JRR. Pembaca juga dapat menggunakan skripsi ini sebagai referensi atau tolak ukur jika ingin menggali lebih lanjut mengenai permasalahan regresi *ridge*.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan deskriptif kuantitatif yaitu pendekatan terhadap data yang akan dipergunakan sebagai acuan dalam menganalisis masalah. Serta pendekatan studi literatur dengan mengumpulkan bahan pustaka yang berkenaan dengan materi penelitian.

1.6.2 Tahap Penelitian

Pada tahapan penelitian ini digunakan langkah-langkah untuk mengetahui bentuk estimasi dan bias parameter model regresi linier berganda yang mengandung multikolinieritas menggunakan metode *Jackknifed Ridge Regression*, di antaranya:

1. Menganalisis model regresi berganda dengan asumsi terdapat multikolinieritas dalam model
   $Y = X\beta + \varepsilon$
2. Menaksir parameter model regresi linier berganda dengan metode JRR dengan cara:
   a. Menaksir parameter GRR.
   b. Menaksir parameter JRR dengan menganalisis parameter β GRR menggunakan teknik *Jackknife*.
3. Menentukan formula bias dari GRR dan JRR.
4. Aplikasi metode JRR pada data laporan harian produksi *Superior High Sugar* (SHS) yang memiliki multikolinieritas.
5. Menguji signifikansi model regresi linier berganda yang diperoleh dari aplikasi metode JRR pada data.
6. Menarik kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini dijelaskan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab ini akan dijelaskan teori yang melandasi penelitian ini yaitu tinjauan umum tentang matriks, regresi linier berganda, penaksiran parameter, metode *Ordinary Least Square* (OLS), multikolinieritas, pemusatan dan penskalaan data dalam bentuk matriks korelasi, bentuk kanonik model regresi, regresi ridge, uji regresi linier berganda, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Bab ini akan membahas secara rinci tentang penjelasan metode estimasi *Jackknifed Ridge Regression* pada model regresi linier berganda yang mengandung multikolinieritas, aplikasi pada data yang memiliki multikolinieritas, uji signifikansi model regresi, dan kajian agama.

Bab IV Penutup

Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya yang lebih baik.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Anton (2000:45-46) menyatakan bahwa matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota matriks tersebut. Bentuk umum matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Anggota pada baris i dan kolom j dari matriks A pada umumnya juga dinyatakan dalam simbol $(A)_{ij}$.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

Matriks pada contoh A di atas mempunyai 2 baris dan 3 kolom sehingga ukurannya adalah 2 kali 3 (ditulis 2×3). Angka pertama menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom.

2.1.1 Jenis Matriks

Menurut Ruminta (2009:5-9) jenis matriks dapat dibedakan berdasarkan susunan elemen matriks dan berdasarkan sifat dari operasi matriksnya. Berdasarkan susunan elemen matriks, ada beberapa jenis matriks, yaitu:

1. Matriks persegi/bujur sangkar (*square matrix*) adalah matriks di mana jumlah baris (m) sama dengan jumlah kolom (n) atau $m = n$.

   Contoh: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. Matriks diagonal (*diagonal matrix*) adalah matriks di mana semua elemen di luar diagonal utamanya adalah nol (0) dan minimal ada satu elemen pada diagonal utamanya bukan nol.

   Contoh: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. Matriks kesatuan/identitas (*unit matrix*, *identity matrix*) adalah matriks di mana semua elemen pada diagonal utamanya bernilai satu dan elemen di luar diagonal utama bernilai nol.

   Contoh: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Matriks skalar (*scalar matrix*) yaitu matriks diagonal di mana elemen pada diagonal utamanya bernilai sama tetapi bukan satu atau nol.

   Contoh: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. Matriks simetri (*symmetric matrix*) adalah matriks bujur sangkar di mana elemen ke a_{ij} sama dengan ke a_{ji} atau ($a_{ij} = a_{ji}$) untuk semua $i = j$.

   Contoh: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, berlaku sifat $A^T = A$

Sedangkan berdasarkan sifat operasi matriks, ada beberapa jenis matriks yaitu:

1. Matriks *singular/non invertabel* (*singular matrix*) adalah matriks yang determinannya bernilai nol.

   Contoh: $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. Matriks *non singular/invertabel* (*non singular matrix*) adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan nol.

   Contoh: $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. Matriks ortogonal (*orthogonal matrix*) adalah matriks bujur sangkar yang transposnya sama dengan inversnya atau $M^T = M^{-1}$ atau $M^T M = I$

   contoh: $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ atau $M^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

2.1.2 Operasi Matriks

Anton (2000:47-49) menyatakan beberapa operasi matriks sebagai berikut:

1. Jika *A* dan *B* adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah *A*+*B* adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota *B* dan anggota-anggota *A* yang berpadanan, dan selisih *A*-*B* adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota *A* dengan anggota-anggota *B* yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan.
2. Jika *A* adalah sebarang matriks dan *c* adalah sebarang *k*, maka hasil kali *cA* adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota *A* dengan *c*.

3. Jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$. Untuk mencari anggota dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan anggota-anggota yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya.

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ir}b_{rj} \qquad (2.1)$$

2.1.3 Transpos Matriks

Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpos A dinyatakan dengan A^T didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari A, yaitu kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A dan seterusnya (Anton, 2000:55).

2.1.4 Invers Matriks

Ruminta (2009:131) menyatakan bahwa jika A adalah matriks ukuran $n \times n$ dan jika ada matriks B ukuran $n \times n$ sedemikian rupa sehingga

$$AB = BA = I$$

di mana I adalah matriks identitas ukuran $n \times n$, maka matriks A disebut *non singular* atau *invertible* dan matriks A merupakan invers B atau B merupakan invers dari A.

Invers suatu matriks dapat ditentukan dengan beberapa metode. Metode yang cukup popular adalah matriks *adjoint*. Penentuan invers matriks A menggunakan metode matriks *adjoint* secara umum adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) \tag{2.2}$$

2.2 Regresi Linier Berganda

Analisis regresi adalah metode yang digunakan untuk menentukan pola hubungan suatu variabel terikat dengan satu atau lebih variabel bebas. Hubungan yang didapat akan dinyatakan dalam bentuk persamaan matematik yang menyatakan hubungan fungsional antara variabel-variabel (Sudjana, 2005:310).

Dalam memperkirakan nilai variabel *Y*, perlu diperhatikan variabel-variabel bebas *X* yang ikut mempengaruhi *Y*. Dengan demikian harus diketahui hubungan antara satu variabel yang terikat *Y* dengan beberapa variabel lain yang bebas $X_1, X_2, ..., X_k$. Untuk meramalkan *Y*, apabila semua nilai variabel bebas diketahui, maka dapat dipergunakan model persamaan regresi linier berganda. Hubungan *Y* dan $X_1, X_2, ..., X_k$ yang sebenarnya adalah sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ... + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \text{, dimana } i = 1, 2, ..., n \tag{2.3}$$

dengan

X_j : variabel bebas ke-*j*, $j = 1, 2, ..., k$

Y : variabel terikat

β : koefisien regresi ke-*j*, $j = 1, 2, ..., k$

ε : *error*

k : banyaknya variabel bebas

Apabila dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{n1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{n2} \\ 1 & X_{13} & X_{23} & X_{33} & \cdots & X_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{1k} & X_{2k} & X_{3k} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}_{\varepsilon} \tag{2.4}$$

dengan $k < n$ yang berarti observasi harus lebih banyak dari pada banyak variabel bebas, dapat dituliskan

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.5}$$

dimana Y dan ε adalah matriks berukuran $n \times 1$, sedangkan X adalah matriks berukuran $n \times (k+1)$ (Supranto, 2001:236-237).

2.3 Penaksiran Parameter

Parameter adalah nilai yang mengikuti acuan keterangan atau informasi yang dapat menjelaskan batas-batas atau bagian-bagian tertentu dari suatu sistem persamaan. Sedangkan penaksiran (estimasi) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Penaksiran merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan penaksiran ini, keadaan parameter populasi dapat dipenuhi. Secara umum, parameter diberi lambang β dan penaksir diberi lambang $\hat{\beta}$ (Hasan, 2002:111).

Penaksir adalah anggota variabel acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota variabel diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penaksir terhadap data dari suatu contoh disebut nilai taksiran (Yitnosumarto, 1990:212).

2.3.1 Sifat-sifat Penaksir

Penaksir parameter mempunyai sifat-sifat antara lain:

1. Tak Bias

   Menurut Yitnosumarto (1990:212), suatu hal yang menjadi tujuan dalam penaksiran adalah penaksir haruslah mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang ditaksir tersebut. Jika $\hat{\beta}$ merupakan penaksir tak bias dari parameter β, maka

   $$E(\hat{\beta}) = \beta \tag{2.6}$$

2. Efisien

   Suatu penaksir misalkan $\hat{\beta}$ dikatakan efisien bagi parameter β apabila penaksir tersebut mempunyai variansi yang terkecil (*minimum variance unbiased estimator*). Apabila terdapat lebih dari satu penaksir, maka penaksir yang baik adalah penaksir yang memiliki variansi terkecil.

3. Konsisten

   Suatu penaksir dikatakan konsisten jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

   a. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penaksir akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penaksir konsisten harus dapat memberi suatu penaksir titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi ($\hat{\beta}$) merupakan penaksir konsisten jika dan hanya jika

$$E\left(\hat{\beta}-E(\beta)\right)^{2} \rightarrow 0 \text{ jika } n \rightarrow \infty \tag{2.7}$$

b. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi *sampling* penaksir akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1 (Hasan, 2002:113-115).

2.4 Metode *Ordinary Least Square* (OLS)

Metode *Ordinary Least Square* (OLS) adalah salah satu metode yang paling populer dalam menaksir nilai rata-rata dari variabel random. Aplikasi pertama perataan kuadrat terkecil adalah dalam hitungan masalah astronomi oleh Carl F. Gauss. Keunggulan dari sisi praktis makin nyata setelah berkembangnya komputer elektronik, formulasi teknik hitungan dalam notasi matriks, dan hubungannya dengan konsep kuadrat terkecil itu ke statistik. Model fungsional umum tentang sistem yang akan diamati harus ditentukan terlebih dahulu sebelum merencanakan pengukuran. Model fungsional ini ditentukan menggunakan sejumlah variabel (parameter atau pengamatan) dan hubungan diantara mereka. Selalu ada jumlah minimum variabel bebas yang secara unik menentukan model tersebut. Suatu model fisis, dapat memiliki beberapa model fungsional yang berlainan, tergantung dari tujuan pengukuran atau informasi yang diinginkan. Jumlah minimum variabel dapat ditentukan setelah tujuan pengukuran berhasil ditetapkan, tidak terikat pada jenis pengukuran yang perlu dilakukan (Firdaus, 2004:30).

Berdasarkan model pada (2.3) didapatkan bentuk matriks pada (2.4) sehingga model tersebut dapat disederhanakan sebagai

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.8}$$

Misalkan sampel untuk Y diberikan. Maka aturan main yang memungkinkan pemakaian sampel tadi untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $\varepsilon = Y - X\beta$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini, diharapkan akan menghasilkan komponen sistematika yang lebih berperan dari komponen stokastiknya. Karena bila komponen stokastik yang lebih berperan artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang Y. Dengan kata lain, X tidak mampu menjelaskan Y.

Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter β sehingga

$$S = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - X\beta)(Y - X\beta) \tag{2.9}$$

sekecil mungkin (minimal).

Persamaan (2.9) adalah skalar, sehingga komponen-komponennya juga skalar. Dan akibatnya, transpos skalar tidak merubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} S &= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \\ &= Y^T Y - Y^T X\beta - (X\beta)^T Y + (X\beta)^T X\beta \\ &= Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\ &= Y^T Y - (Y^T X\beta)^T - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\ &= Y^T Y - \beta^T X^T Y - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\ &= Y^T Y - 2\beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \end{aligned}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial S terhadap β :

$$\frac{dS}{d\beta} = 0 - 2\beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta + (\beta^T X^T X)^T$$
$$= -2X^T Y + X^T X\beta + X^T X\beta$$
$$= -2X^T Y + 2X^T X\beta$$

dan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$X^T X\beta = X^T Y \qquad (2.10)$$

yang dinamakan sebagai persamaan normal, dan

$$\widehat{\beta}_{LS} = (X^T X)^{-1} X^T Y \qquad (2.11)$$

dinamakan sebagai penaksir parameter β secara kuadrat terkecil atau *Ordinary Least Square* (OLS) (Aziz, 2010:16-19).

2.5 Multikolinieritas

Istilah multikolinieritas pertama kali ditemukan oleh Ragnar Frisch pada tahun 1934 yang berarti adanya hubungan linier diantara beberapa atau semua variabel bebas dalam model regresi (Setiawan, 2010:82).

Kolinearitas (*collinearity*) sendiri berarti hubungan linier tunggal (*single linear relationship*), sedangkan kolinearitas ganda (*multicollinearity*) menunjukkan adanya lebih dari satu hubungan linier yang sempurna (Firdaus: 2004:111).

Apabila terjadi multikolinieritas sempurna diantara variabel bebas, maka $\det(X^T X) = 0$ sehingga matriks $(X^T X)$ merupakan matriks singular. Sedangkan jika terjadi multikolinieritas mendekati sempurna, maka $\det(X^T X)$ mendekati nol sehingga matriks $(X^T X)$ hampir singular (Setiawan, 2010:84-85). Hal yang sering dijumpai dalam masalah-masalah multikolinieritas bukanlah multikolinieritas ganda sempurna melainkan multikolinieritas yang mendekati sempurna.

Menurut Firdaus (2004:112), jika terjadi multikolinieritas sempurna maka koefisien regresi dari variabel X tidak dapat ditentukan (*indeterminate*) dan *standard error*-nya tak terhingga. Jika multikolinieritas kurang sempurna maka akan timbul akibat sebagai berikut:

1. Meskipun koefisien regresi dari variabel X dapat ditentukan (*determinate*), tetapi *standard error*-nya akan cenderung membesar nilainya.
2. Oleh karena nilai *standard error* dari koefisen regresi besar maka interval keyakinan untuk parameter dari populasi juga cenderung melebar.
3. Dengan tingginya tingkat kolinearitas, probabilitas untuk menerima hipotesis, padahal hipotesis itu salah menjadi membesar nilainya.
4. Bila multikolinieritas ganda tinggi, akan diperoleh nilai R^2 yang tinggi tetapi tidak ada atau sedikit sekali koefisien regresi yang signifikan secara statistik.

Beberapa teknik telah diperkenalkan untuk mendeteksi adanya multikolinieritas adalah sebagai berikut (Setiawan, 2010:93-96):

a. Plot Variabel Bebas

Diagram yang sering digunakan untuk memplot hubungan antara variabel-variabel penjelas adalah *scatter plot* atau diagram pencar, dengan menambahkan garis regresi. Jika hubungan antara kedua variabel mengikuti garis regresi atau membentuk pola garis lurus maka terdapat hubungan linear di antara kedua variabel tersebut.

b. Pemeriksaan Matriks Korelasi

Langkah yang paling sederhana untuk mengukur adanya multikolinieritas adalah dengan melakukan pemeriksaan terhadap elemen elemen di luar diagonal r_{ij} (i ≠ j) dalam matriks korelasi $Z^T Z$, yang mana kolom dari Z adalah hasil dari pemusatan dan penskalaan dari matriks *X*. Jika variabel bebas X_i dan Y_j mempunyai hubungan linier yang erat, maka $|r_{ij}|$ yang mengindikasikan korelasi berpasangan dari variabel-variabel bebas akan mendekati satu.

c. VIF *(Variance Inflation Factors)* dan *Tollerance*

Salah satu ukuran yang dapat digunakan untuk menguji adanya multikolinieritas pada regresi linear berganda adalah *Variance Inflation Factors* (VIF). Adanya multikolinieritas dinilai dari nilai VIF yang dihasilkan. Besarnya nilai VIF ini bergantung pada nilai koefisien determinasi (R^2) yang dihasilkan. Jika nilai VIF melebihi 10 maka koefisien determinasi bernilai lebih besar dari 0,9. Hal ini menunjukkan adanya pengaruh nilai R^2 terhadap nilai VIF yang dihasilkan, yaitu semakin besar nilai R^2 maka semakin besar pula nilai VIF yang dihasilkan.

$$VIF = (1 - R_j^{\,2})^{-1}$$

Pedoman suatu model regresi ganda yang bebas multikolinieritas adalah mempunyai nilai VIF di sekitar angka 1 dan mempunyai angka *Tollerance* mendekati satu.

$$Tollerance = \frac{1}{VIF} \qquad \text{atau} \qquad VIF = \frac{1}{Tollerance}$$

Jika nilai *Tollerance* kurang dari 0,1 sebaiknya diselidiki lebih lanjut karena hal ini menandakan adanya multikolinieritas.

d. Sistem Nilai Eigen dari $X^t X$

Nilai eigen dari vektor eigen dalam matriks korelasi $X^T X$ mempunyai peranan penting dalam kasus adanya multikolinieritas dalam kumpulan data dari analisis regresi yang dilakukan. Akar-akar karakteristik atau *eigenvalue* dari $X^T X$ adalah $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ yang dapat digunakan untuk mengukur adanya multikolinieritas. Sedangkan satu atau lebih *eigenvalue* yang kecil menandakan adanya hubungan linier di dalam kolom-kolom dari variabel bebas X. Jadi multikolinieritas akan terjadi jika ada satu atau lebih *eigenvalue* yang kecil.

Multikolinieritas dapat diukur dalam bentuk rasio dari nilai terbesar dan terkecil dari nilai eigen, yaitu $\varphi = \dfrac{\lambda maks}{\lambda \min}$ yang disebut nilai kondisi dari matriks korelasi. Nilai φ yang besar mengindikasikan multikolinieritas yang serius. Nilai kondisi yang terlalu besar menunjukkan ketidakstabilan koefisien regresi terhadap perubahan kecil dalam data variabel bebas.

2.6 Pemusatan dan Peskalaan Data dalam Bentuk Matriks Korelasi

Pemusatan dan penskalaan data merupakan bagian dari membakukan variabel. Modifikasi sederhana dari membakukan variabel ini adalah transformasi korelasi. Pemusatan merupakan perbedaan antara masing-masing pengamatan dan rata-rata dari semua pengamatan untuk variabel. Penskalaan merupakan gambaran pengamatan pada unit standar deviasi dari pengamatan untuk variabel (Kutner, dkk., 2005:272).

Misalkan yang akan dibakukan adalah model regresi linier dengan 2 variabel bebas sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i \tag{2.12}$$

Pada proses pembakuan variabel β_0 tidak digunakan sehingga dalam penelitian ini hanya akan digunanakan β_1 dan β_2. Model (2.12) jika dalam bentuk matriks dengan ukuran matriks Y adalah $n\times 1$, ukuran matriks X adalah $n\times 2$ dan ukuran matriks β adalah 2×1 menjadi

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \\ \vdots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks $X^T X$ dari matriks diatas adalah

$$X^T X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \\ \vdots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 \end{bmatrix}$$

Bentuk umum dari $X^T X$ adalah sebagai berikut:

$$X^T X = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^{\ 2} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^{\ 2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{ki} X_{2i} & \cdots & \sum_{i}^{n} X_{ki}^{\ 2} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Pemusatan merupakan perbedaan antara masing-masing pengamatan dan rata-rata dari semua pengamatan untuk variabel. Misal U adalah matrik X yang sudah dipusatkan maka:

$$U = \begin{bmatrix} X_{11}-\bar{X}_1 & X_{21}-\bar{X}_2 \\ X_{12}-\bar{X}_1 & X_{22}-\bar{X}_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_{1n}-\bar{X}_1 & X_{2n}-\bar{X}_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ji} \text{ di mana } j = 1,2 \qquad (2.14)$$

Bentuk $U^T U$ dari matriks U adalah

$$U^T U = \begin{bmatrix} X_{11}-\bar{X}_1 & X_{12}-\bar{X}_1 & \cdots & X_{1n}-\bar{X}_1 \\ X_{21}-\bar{X}_2 & X_{22}-\bar{X}_2 & \cdots & X_{2n}-\bar{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11}-\bar{X}_1 & X_{21}-\bar{X}_2 \\ X_{12}-\bar{X}_1 & X_{22}-\bar{X}_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_{1n}-\bar{X}_1 & X_{2n}-\bar{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)^2 & \sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right) \\ \sum_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right)\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right) & \sum_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right)^2 \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

Sedangkan penskalaan merupakan gambaran pengamatan pada unit standar deviasi dari pengamatan untuk variabel. Bentuk umum standar deviasi adalah akar dari variansi

$$S_{jj} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ji}-\bar{X}_j\right)^2$$

sehingga

$$S_{11} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)^2$$

dan

$$S_{22} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right)\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right)^2$$

Transformasi korelasi adalah fungsi sederhana dari membakukan variabel. Dengan mengikuti bentuk matriks X di atas maka bentuk Z sebagai matriks yang sudah dibakukan adalah

$$Z=\begin{bmatrix}\frac{(X_{11}-\bar{X}_1)}{\sqrt{S_{11}}} & \frac{(X_{21}-\bar{X}_1)}{\sqrt{S_{22}}}\\ \frac{(X_{12}-\bar{X}_2)}{\sqrt{S_{11}}} & \frac{(X_{22}-\bar{X}_2)}{\sqrt{S_{22}}}\\ \vdots & \vdots \\ \frac{(X_{1n}-\bar{X}_1)}{\sqrt{S_{11}}} & \frac{(X_{2n}-\bar{X}_2)}{\sqrt{S_{22}}}\end{bmatrix}$$

$$Z^TZ=\begin{bmatrix}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\bar{X}_1)}{\sqrt{S_{11}}}\right)^2 & \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\bar{X}_1)(X_{2i}-\bar{X}_2)}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}}\right)\\ \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{1i}-\bar{X}_1)}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{11}}}\right) & \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)}{\sqrt{S_{22}}}\right)^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \frac{S_{12}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}}\\ \frac{S_{21}}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{11}}} & 1\end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

Misal Y^* adalah Y yang sudah dibakukan maka:

$$Y^* = \begin{bmatrix} \frac{(Y_1 - \bar{Y})}{\sqrt{S_{yy}}} \\ \frac{(Y_2 - \bar{Y})}{\sqrt{S_{yy}}} \\ \vdots \\ \frac{(Y_n - \bar{Y})}{\sqrt{S_{yy}}} \end{bmatrix}, \text{ dengan } \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y \text{ dan } S_{yy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$$

Model regresi dengan tranformasi variabel Y^* dan Z yang didefinisikan dengan tranformasi korelasi di atas disebut model regresi baku. Model tersebut adalah sebagai berikut:

$$Y_i^* = \beta_1^* Z_{1i} + \beta_2^* Z_{2i} + \varepsilon_i$$

Kutner, dkk. (2005:273) menyatakan hubungan antara parameter β_1^* dan β_2^* pada model regresi baku dengan parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ pada model regresi awal sebagai berikut:

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{S_Y}}{\sqrt{S_{11}}}\beta_1^* \text{ dan } \beta_2 = \frac{\sqrt{S_Y}}{\sqrt{S_{22}}}\beta_2^* \tag{2.17}$$

sedangkan,

$$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}_1 - \beta_2 \bar{X}_2 \tag{2.18}$$

2.6.1 Matriks Korelasi

Misalkan model regresi yang akan diduga adalah:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon \tag{2.19}$$

Dengan memusatkan data, model tersebut dapat diubah ke dalam bentuk

$$\begin{aligned} Y-\bar{Y} &= \beta_1\left(X_1-\bar{X}\right)+\beta_2\left(X_2-\bar{X}\right)+\varepsilon \\ &= \beta_1\left(X_1-\bar{X}_1\right)+\beta_2\left(X_2-\bar{X}_2\right)+\varepsilon \end{aligned} \quad (2.20)$$

Jika modelnya dituliskan dalam bentuk di atas maka bentuk matriks U^TU -nya adalah

$$U^TU=\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)^2 & \sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right) \\ \sum_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right)\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right) & \sum_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-\bar{X}2\right)^2 \end{bmatrix}$$

sehingga bentuk dari U^TU adalah

$$U^TU=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

dimana

$$S_{11}=\sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)^2 \qquad S_{22}=\sum_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right)^2$$

$$S_{12}=\sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right) \qquad S_{21}=\sum_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right)\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)$$

Dari Y^* yaitu Y yang sudah dipusatkan diperoleh $Y^*\sqrt{S_{yy}}=\left(Y-\bar{Y}\right)$ sehingga model $Y-\bar{Y}=\beta_1\left(X_1-\bar{X}_1\right)+\beta_2\left(X_2-\bar{X}_2\right)+\varepsilon$ dapat diubah kedalam bentuk

$$\begin{aligned} Y^*\sqrt{S_{yy}} &= \beta_1 Z_1\sqrt{S_{11}}+\beta_2 Z_2\sqrt{S_{22}}+\varepsilon \\ Y^* &= \frac{\beta_1\sqrt{S_{11}}}{\sqrt{S_{yy}}}Z_1+\frac{\beta_2\sqrt{S_{22}}}{\sqrt{S_{yy}}}Z_2+\varepsilon \\ &= \alpha_1 Z_1+\alpha_2 Z_2+\varepsilon \\ &= \alpha Z+\varepsilon \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dalam hal ini $\alpha_1 = \frac{\beta_1\sqrt{S_{11}}}{\sqrt{S_{yy}}}$ dan $\alpha_2 = \frac{\beta_2\sqrt{S_{22}}}{\sqrt{S_{yy}}}$ adalah parameter-parameter baru dari data yang telah ditransformasikan. Hasil estimasi metode OLS menghasilkan $\widehat{\beta}_{LS} = (X^T X)^{-1} X^T Y,$ sehingga bentuk di atas dapat dituliskan menjadi

$$Z^T Z = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_{12}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}} \\ \frac{S_{21}}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{11}}} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha} &= \left(Z^T Z\right)^{-1} Z^T Y \\ &= \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{1y} \\ r_{2y} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.24}$$

dimana $r_{1y} = \frac{S_{1y}}{\sqrt{S_{11}.S_{yy}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{yy}}}$ dan $Z^T Z = 1 - r_{12}^2$.

2.7 Bentuk Kanonik Model Regresi

Proses bentuk kanonik dari model regresi $Y = X\beta + \varepsilon$ adalah

$$\begin{aligned} Y &= X^*\gamma + \varepsilon \\ &= XDD^T\beta + \varepsilon \\ &= X\beta + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.25}$$

dengan $X^* = XD$ dan $\gamma = D^T\beta$, maka

$$\begin{aligned} \gamma &= (X^{*T} X^*)^{-1} X^* Y \\ &= ((XD)^T (XD))^{-1} X^* Y \\ &= (D^T X^T XD)^{-1} X^* Y \\ &= (D^T CD)^{-1} X^* Y \end{aligned} \tag{2.26}$$

Bentuk kanonik dari persamaan regresi $Y = X\beta + \varepsilon$ adalah

$$\begin{aligned} Y &= X\beta + \varepsilon \\ &= XDD^T\beta + \varepsilon \\ &= XID\gamma + \varepsilon \\ &= XD\gamma + \varepsilon \\ &= X^*\gamma + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.27}$$

dengan $\gamma = D^T\beta$ maka $\beta = D\gamma$

$$\begin{aligned} Y &= X^*\gamma + \varepsilon \\ &= (XD)D^T\beta + \varepsilon \\ &= XI\beta + \varepsilon \\ &= X\beta + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.28}$$

Kemudian bentuk kanonik γ OLS dari persamaan (2.28) adalah

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{LS} &= (X^{*T}X^*)^{-1}X^{*T}Y \\ &= ((XD)^T XD)^{-1}X^{*T}Y \\ &= (D^T X^T XD)^{-1}X^{*T}Y \\ &= \Lambda^{-1}X^{*T}Y \end{aligned} \tag{2.29}$$

2.8 Regresi Ridge

Cara berurutan mencari model persamaan regresi yang sesuai tidak dapat dipakai bila semua variabel dalam percobaan diharuskan mempunyai peran serta dalam respon *Y*. Bila terdapat multikolinieritas yang besar antara variabel bebas maka matriks *A* dekat dengan keadaan singular, sehingga unsur-unsur sepanjang diagonal A^{-1} besar sekali, dengan kata lain metode kuadrat terkecil biasa (OLS) menghasilkan penaksir tak bias untuk koefisien regresi, tapi penaksir mungkin mempunyai variansi yang besar. Variansi yang besar ini menimbulkan dua kesulitan dalam praktik pada penaksir kuadrat terkecil jika terdapat multikolinieritas yang parah, yaitu penaksir mungkin sekali amat stabil, maksudnya, peka terhadap perubahan kecil pada data yang kelihatannya tidak penting dan penaksir cenderung menghasilkan koefisien yang terlalu besar, positif maupun negatif (Walpole dan Myers, 1995:510-511).

Suatu cara menghadapi masalah ini ialah meninggalkan metode kuadrat terkecil biasa dan menggunakan cara estimasi yang bias. Penaksir yang bias untuk koefisien regresi dalam model disebut regresi *ridge* (Walpole dan Myers, 1995:511-512).

Regresi *ridge* merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mengatasi multikolinieritas melalui modifikasi terhadap metode kuadrat terkecil. Modifikasi tersebut dilaksanakan dengan cara menambah tetapan bias k yang relatif kecil pada diagonal utama matriks $X^T X$, sehingga koefisien estimator ridge dipenuhi dengan besarnya tetapan bias k (Hoerl dan Kennard, 1970:235).

Dalam bentuknya yang paling sederhana, prosedur regresi ridge adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_{RR} = (X^T X + kI)^{-1} X^T Y \quad (2.30)$$

Bentuk persamaan di atas dinamakan *Ordinary Ridge regression* (ORR).

2.9 Uji Regresi Linier Berganda

Untuk menguji keberartian model regresi regresi linier berganda dapat dilakukan melalui uji t dan uji F. Uji t digunakan untuk mengetahui pengaruh masing-masing variabel bebas secara individu terhadap model regresi yang dihasilkan, sedangkan uji F digunakan untuk mengetahui pengaruh pengaruh variabel bebas secara simultan (bersama-sama) terhadap model.

Turmudi dan Harini (2008:250) menyatakan prosedur pengujian hipotesis untuk uji model regresi adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan hipotesis nol (H_0) dan hipotesis alternatif (H_1).
2. Rumusan H_0 dan H_1 selanjutnya diterjemahkan ke dalam rumusan statistik.
3. Memilih nilai α (tingkat kesalahan yang dikehendaki dalam penelitian).
4. Menggunakan statistik uji yang sesuai.
5. Menentukan daerah kritis yang ditentukan oleh bentuk distribusi statistik uji oleh nilai α.
6. Menghitung statistik uji dari data yang dimiliki.
7. Memeriksa hasil statistik uji jatuh pada daerah kritis atau tidak. Jika ya, maka H_0 ditolak, jika tidak maka H_0 diterima.

Uji signifikansi masing-masing parameter regresi dapat dilakukan uji t dengan hipotesis berikut:

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$H_1 = \beta_i \neq 0 \text{ dengan } i = 1, 2$$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$t_{hitung} = \frac{b_i}{S_{b_i}} \text{ di mana } i = 1, 2 \tag{2.31}$$

dengan b_i : parameter regresi variabel ke-*i*

S_{b_i} : standar *error* variabel ke-*i*

Kriteria uji yang digunakan adalah H_0 diterima jika $|t_{hitung}| < t_{(a/2,n-k-1)}$ dan H_0 ditolak jika $|t_{hitung}| > t_{(a/2,n-k-1)}$. Jika H_0 ditolak, artinya parameter regresi tersebut berpengaruh terhadap model.

Apabila uji statistik yang digunakan adalah uji F, maka hipotesis yang digunakan adalah:

1. Jika $F_{hitung} \geq F_{tabel}$ maka H_0 ditolak dan H_1 diterima yang berarti terdapat hubungan linier antara variabel-variabel bebas dengan variabel terikat.
2. Jika $F_{hitung} \leq F_{tabel}$ maka H_0 diterima dan H_1 ditolak yang berarti tidak terdapat hubungan linier antara variabel-variabel bebas dengan variabel terikat.

Untuk melakukan uji F diperlukan beberapa rumus untuk jumlah kuadrat sebagai berikut (Sudjana, 2001:92):

$$\begin{aligned} JKR &= \hat{\beta}^T (X^T Y) - n\bar{Y}^2 \\ JKT &= Y^T Y - n\bar{Y}^2 \\ JKS &= JKT - JKR = Y^T Y - \hat{\beta}^T (X^T Y) \end{aligned} \tag{2.32}$$

dengan

JKR = Jumlah Kuadrat Regresi

JKT = Jumlah Kuadrat Total

JKS = Jumlah Kuadrat Sisa

$\hat{\beta}$ = penaksir parameter β

X = matriks variabel bebas $(n \times k)$

Y = matriks variabel terikat $(n \times 1)$

$\bar{Y}$ = rata-rata variabel terikat

sehingga *F* statistik dapat diperoleh dengan

$$F_{hitung} = \frac{JKR / k}{JKS / (n - k - 1)} \tag{2.33}$$

2.10 Kajian Agama

Dalam kehidupan di dunia ini, sudah merupakan kewajiban bagi setiap manusia untuk terus melakukan perbuatan terpuji (amal saleh) selama hidupnya. Amal shaleh yang dikerjakannya akan membuahkan kebaikan di dunia dan mendapatkan balasan dari Allah di akhirat kelak. Allah menjelaskan hal ini dalam Al-Qur'an surat An-Nahl ayat 97 yang berbunyi:

مَنْ عَمِلَ صَٰلِحًا مِّن ذَكَرٍ أَوْ أُنثَىٰ وَهُوَ مُؤْمِنٌ فَلَنُحْيِيَنَّهُۥ حَيَوٰةً طَيِّبَةً ۖ وَلَنَجْزِيَنَّهُمْ أَجْرَهُم بِأَحْسَنِ مَا كَانُوا۟ يَعْمَلُونَ ﴿٩٧﴾

Artinya: *"Barangsiapa yang mengerjakan amal saleh, baik laki-laki maupun perempuan dalam Keadaan beriman, maka sesungguhnya akan Kami berikan kepadanya kehidupan yang baik dan sesungguhnya akan Kami beri balasan kepada mereka dengan pahala yang lebih baik dari apa yang telah mereka kerjakan".*

Dalam tafsir Al-Qurthubi (2008) dijelaskan bahwa kehidupan yang baik di dunia bisa berarti rezeki yang halal, kecukupan (qana'ah), taufik yang akan membawanya pada ridha Allah, kebahagiaan dan manisnya ketaatan. Sedangkan di akhirat kelak, Allah akan memberikan balasan dengan pahala yang lebih baik dari amal yang telah mereka kerjakan.

Ini merupakan janji Allah untuk memberikan balasan bagi setiap pekerjaan yang dilakukan manusia di dunia. Pada hari pembalasan nanti, manusia akan dikumpulkan di padang mahsyar dan harus melewati jembatan sebelum akhirnya menuju surga. Manusia yang tidak selamat akan langsung jatuh ke neraka.

Allah berfirman dalam QS. An-Naba' ayat 21:

إِنَّ جَهَنَّمَ كَانَتْ مِرْصَادًا ﴿٢١﴾

Artinya: "*Sesungguhnya neraka Jahannam itu (padanya) ada tempat pengintai*".

Dalam tafsir Al Mishbah (2003) dijelaskan bahwa kata (مرصا دا) dapat diartikan dengan jalan. Dalam sebuah riwayat disebutkan bahwa ada jembatan di neraka di mana ada penjaga yang menanyakan setiap orang yang melewatinya, tentang syahadatnya, shalatnya, zakatnya, puasanya, haji, dan umrahnya serta penganiayaan yang pernah dilakukannya. Jika memenuhi syarat, dia bisa melanjutkan perjalanannya ke surga. Jika tidak lolos, ia akan jatuh ke neraka.

Kecepatan manusia melalui jalan/jembatan tersebut tentunya berbeda-beda. Ada yang melewatinya seperti kilat, seperti angin kencang bahkan ada pula yang melewatinya sambil merayap. Semua tergantung pada amal perbuatannya di dunia. Hal ini menunjukkan adanya hubungan linier antara amal-amal perbuatan manusia di dunia dengan balasan yang akan diterimanya di hari pembalasan.

Penulis menginterpretasikan amal-amal shaleh seperti syahadat, shalat, zakat dan lain-lain bisa diinterpretasikan sebagai variabel bebas X yang akan mempengaruhi perjalanannya di akhirat. Adanya variabel bebas X yang mempengaruhi variabel terikat Y menunjukkan adanya model regresi linier pada peristiwa ini.

Untuk mengetahui seberapa besar nilai Y, diperlukan adanya penaksiran yang dalam matematika juga dikenal dengan istilah pendugaan.

Firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Al-Kahfi ayat 19:

... قَالُواْ لَبِثۡنَا يَوۡمًا أَوۡ بَعۡضَ يَوۡمٖۚ ... ﴿١٩﴾

Artinya: *"...mereka menjawab:"Kita berada (disini) sehari atau setengah hari...".*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa ketika salah seorang dari ashabul kahfi bertanya tentang berapa lama mereka tertidur. Mereka hanya bisa memperkirakan berapa lama mereka tertidur dengan menjawab sehari atau setengah hari. Kebanyakan ahli tafsir berpendapat bahwa mereka masuk ke dalam gua pada pagi hari dan bangun pada sore hari. Tidak ada yang benar-benar tahu berapa lama mereka tertidur kecuali Allah SWT.

Penaksiran yang disebutkan dalam ayat di atas disebut penaksiran pengukuran. Penaksiran pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran bisa berupa waktu, panjang, luas, usia, dan volume (Abdussakir, 2007:91).

Menurut penulis, penaksiran atau pendugaan merupakan suatu hal yang bisa dilakukan tidak hanya oleh orang matematika saja. Dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali orang yang melakukan penaksiran seperti berapa lama waktu yang ia butuhkan menuju suatu tempat, menaksir tinggi badan seseorang, dan sebagainya. Namun demikian, hal ini kembali mengingatkan bahwa kemampuan manusia hanya terbatas sampai penaksiran saja. Sebab hanya Allah SWT yang benar-benar mengetahui segala sesuatu.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Model Regresi Linier Berganda dengan Multikolinieritas

Model regresi linier berganda secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{3.1}$$

Apabila dinyatakan dalam bentuk matriks dengan 2 variabel bebas yaitu

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \\ X_{13} & X_{23} \\ \vdots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

dengan asumsi terdapat multikolinieritas pada model tersebut. Selanjutnya menggunakan metode OLS, parameter β dapat ditaksir dengan persamaan

$$\hat{\beta}_{LS} = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{3.3}$$

Hubungan linier yang erat antara variabel bebas X akan mengakibatkan determinan matriks $X^T X$ mendekati nol sehingga menjadi singular. Drapper dan Smith (1992:252) menyatakan hal ini dapat diketahui dari matriks korelasi hasil pemusatan dan penskalaan matriks X sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{LS} &= \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \\ &= \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{1y} \\ r_{2y} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

dimana r_{12} adalah koefisien korelasi antara X_1 dan X_2 .

Nilai r_{12} yang membesar akan menyebabkan determinan matriks $X^T X$ mendekati nol (multikolinieritas mendekati sempurna) atau sama dengan nol (multikolinieritas sempurna) sehingga mengakibatkan matriks menjadi singular (tidak memiliki invers) karena

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{\det(X^T X)} Adj(X^T X) = \frac{1}{1-r_{12}^2} Adj(X^T X)$$

Selain melihat hubungan linier antara variabel bebas, menurut Setiawan (2010:93), salah satu ukuran untuk menguji adanya multikolinieritas adalah *Variance Inflation Factors* (VIF). *Variance Inflation Factors* (VIF) merupakan elemen diagonal dari matriks $X^T X$.

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-r_{12}^2} & \frac{-r_{12}}{1-r_{12}^2} \\ \frac{-r_{12}}{1-r_{12}^2} & \frac{1}{1-r_{12}^2} \end{bmatrix}$$

$$VIF = diag(X^T X) = \frac{1}{1-R^2} \tag{3.5}$$

Besarnya nilai VIF tergantung pada nilai koefisien determinasi (R^2) yang dihasilkan. Semakin besar nilai koefisien determinasi semakin besar pula nilai VIF yang dihasilkan. Persamaan umum untuk mencari nilai VIF dapat ditulis sebagai berikut:

$$VIF = \frac{1}{1-R_j^2} \text{, dimana } j = 1,2 \tag{3.6}$$

dengan R_j^2 merupakan koefisien determinasi dari korelasi X_1 dan X_2.

Variansi yang membesar akan menyebabkan *standard error* juga membesar. Jika terjadi multikolinieritas sempurna, penaksiran dengan metode OLS tidak dapat dilakukan karena *standard error*-nya tak tehingga. Sedangkan jika terjadi multikolinieritas mendekati sempurna, hasil taksiran dengan metode kuadrat terkecil tidak efisien karena variansinya membesar. Dengan demikian dapat diketahui bahwa metode OLS tidak efisien jika digunakan untuk menaksir parameter regresi linier berganda yang mengandung multikolinieritas.

3.2 Penaksiran Parameter Model Regresi Linier Berganda dengan Metode *Jackknifed Ridge Regression* (JRR)

Untuk menaksir parameter model regresi linier berganda dengan metode JRR, penulis akan terlebih dahulu membahas tentang penaksiran *Generalized Ridge Regression* (GRR). Metode JRR akan didapatkan dengan cara menganalisis parameter β GRR menggunakan teknik *Jackknife*.

3.2.1 Penaksiran Parameter *Generalized Ridge Regression* (GRR)

Metode GRR merupakan pengembangan dari metode *Ordinary Ridge Regression* (ORR) dengan menambahkan konstanta bias berbeda untuk setiap variabel bebas. Pembahasan mengenai GRR ini akan lebih sederhana jika model regresi berganda dituliskan dalam bentuk kanonik. Misalkan terdapat suatu matriks ortogonal D dimana $D^T = D^{-1}$ sedemikian sehingga $D^T D = I$ dan $D^T CD = \Lambda$, dimana $C = X^T X$ dan Λ merupakan matriks 2×2 dimana anggota diagonal utamanya merupakan nilai eigen (λ_1, λ_2) dari matriks $X^T X$.

Bentuk kanonik dari persamaan (3.1) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} Y &= X\beta + \varepsilon \\ &= XDD^T\beta + \varepsilon \\ &= XD\gamma + \varepsilon \\ &= X^*\gamma + \varepsilon \end{aligned}$$

dengan $X^* = XD$ dan $\gamma = D^T\beta$ sehingga penaksir OLS menjadi

$$\hat{\gamma}_{LS} = (X^{*T}X^*)^{-1}X^*Y \tag{3.7}$$

Dengan asumsi $\Lambda = D^T X^T XD$ maka persamaan (3.7) menjadi

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{LS} &= (X^{*T}X^*)^{-1}X^{*T}Y \\ &= ((XD)^T XD)^{-1}X^{*T}Y \\ &= (D^T X^T XD)^{-1}X^{*T}Y \\ &= \Lambda^{-1}X^{*T}Y \end{aligned} \tag{3.8}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan parameter GRR dengan menambahkan konstanta bias K dimana K merupakan matriks diagonal dengan anggota (k_1, k_2).

$$\hat{\gamma}_{GR} = (\Lambda + K)^{-1}X^{*T}Y \tag{3.9}$$

dengan $A = \Lambda + K$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{GR} &= A^{-1}X^{*T}Y \\ &= A^{-1}(XD)^T X^*\hat{\gamma}_{LS} \\ &= A^{-1}D^T X^T XD\hat{\gamma}_{LS} \\ &= A^{-1}\Lambda\hat{\gamma}_{LS} \\ &= A^{-1}\Lambda\hat{\gamma}_{LS} \\ &= A^{-1}(A-K)\hat{\gamma}_{LS} \\ &= (A^{-1}A - A^{-1}K)\hat{\gamma}_{LS} \\ &= (I - A^{-1}K)\hat{\gamma}_{LS} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Berdasarkan bentuk kanonik dimana $\gamma = D^T\beta$ maka $\beta = D\gamma$. Sehingga parameter β GRR untuk model awal adalah

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{GR} &= D\gamma_{GR} \\
&= D(A^{-1}\Lambda\hat{\gamma}_{LS}) \\
&= D((\Lambda+K)^{-1}\Lambda(\Lambda^{-1}X^{*T}Y) \\
&= D((D^T X^T XD+K)^{-1}D^T X^T Y) \\
&= D((D^T X^T XD+D^T DKD^T D)^{-1}D^T X^T Y) \\
&= D((D^T(X^T X+DKD^T)D)^{-1}D^T X^T Y) \\
&= DD^{-1}\left(X^T X+DKD^T\right)^{-1}\left(D^T\right)^{-1}D^T X^T Y \\
&= I\left(X^T X+DKD^T\right)^{-1}\left(D^T\right)^{-1}D^T X^T Y \\
&= \left(X^T X+DKD^T\right)^{-1} IX^T Y
\end{aligned}$$

dengan $A_* = X^T X + K_*$ dan $K_* = DKD^T$ diperoleh

$$\hat{\beta}_{GR} = A_*^{-1}X^T Y \tag{3.11}$$

3.2.2 Analisis Metode Penaksir JRR

Metode penaksiran JRR merupakan salah satu metode penaksiran parameter model regresi dengan mengoreksi kemungkinan bias menggunakan prosedur *Jackknife*. Prosedur ini diperkenalkan oleh Quenouille (1956) dalam Khurana, dkk. (2012:3) dengan cara mengambil sampel baru secara berulang dari data asal berukuran *n* dengan cara menghilangkan data ke-*i*, $i = 1, 2, ..., n$.

Singh, dkk. (1986:344) mengusulkan suatu parameter *Jackknife* yang berasal dari $\hat{\gamma}_{GR}$. Misalkan Y_{-i} merupakan vektor Y dengan menghapus komponen ke-*i* dan matriks X_{-i}^* merupakan matrik X^* dengan menghapus pengamatan ke-*i* maka $\hat{\gamma}_{GR(-i)}$ merupakan parameter GRR yang telah menghapus pengamatan ke-*i*. Berdasarkan pada persamaan (3.9) $\hat{\gamma}_{GR(-i)}$ dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\gamma_{(GR)-i} = \left(X_{-i}^{*T} X_{-i}^{*} + K\right)^{-1} X_{-i}^{*T} Y_{-i} \tag{3.12}$$

Karena penelitian ini hanya menggunakan dua variabel bebas maka X^* adalah matriks berordo $n \times 2$ yang jika dituliskan dalam bentuk matriks $X^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* \end{pmatrix}$.

Misalkan $X^* = \begin{pmatrix} x_1^{*T} \\ x_2^{*T} \\ \vdots \\ x_n^{*T} \end{pmatrix}$ dimana $x_1^{*T} = (x_{11}^*, x_{12}^*), x_2^{*T} = (x_{21}^*, x_{22}^*), \ldots, x_n^{*T} = (x_{n1}^*, x_{n1}^*)$

dan $X^{*T} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ dimana $x_1^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* \\ x_{21}^* \end{pmatrix}, x_2^* = \begin{pmatrix} x_{12}^* \\ x_{22}^* \end{pmatrix}, \ldots, x_n^* = \begin{pmatrix} x_{1n}^* \\ x_{2n}^* \end{pmatrix}$ maka untuk menghilangkan pengamatan ke-*i* dari bentuk $X^{*T} X^*$ adalah $x_i^* x_i^{*T}$.

Adapun bentuk matriks dari X_{-i}^* dengan menghapus pengamatan ke-*i* adalah

$$X_{-i}^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{21}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* \\ \vdots & \vdots \\ x_{(i+1)1}^* & x_{(i-1)2}^* \\ x_{(i+1)1}^* & x_{(i+1)2}^* \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* \end{bmatrix}$$

sedangkan bentuk transpos matriks dari X_{-i}^{*} adalah

$$X_{-i}^{*T} = \begin{bmatrix} x_{11}^{*} & x_{12}^{*} & \cdots & x_{1(i-1)}^{*} & x_{1(i+1)}^{*} & \cdots & x_{1n}^{*} \\ x_{21}^{*} & x_{22}^{*} & \cdots & x_{2(i-1)}^{*} & x_{2(i-1)}^{*} & \cdots & x_{2n} \end{bmatrix}$$

Dengan x_i^{*} adalah vektor kolom dari X^{*T} dan x_i^{*T} adalah vektor baris dari X^{*} sedangkan y_i adalah koordinat dari Y maka untuk menentukan $\hat{\gamma}_{GR(-i)}$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$\gamma_{GR-i} = \left(X^{*T}X^{*} - x_i^{*}x_i^{*T} + K\right)^{-1}\left(X^{*T}Y - x_i^{*}y_i\right) \qquad (3.13)$$

Jika dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{GR-i} &= \left(X^{*T}X^{*} - x_i^{*}x_i^{*T} + K\right)^{-1}\left(X^{*T}Y - x_i^{*}y_i\right) \\ &= \left[\left(X^{*T}X^{*} + K - x_i^{*}x_i^{*T}\right)^{-1}\left(X^{*T}Y - x_i^{*}y_i\right)\right] \\ &= \left[\left((XD)^{T}(XD) + K - x_i^{*}x_i^{*T}\right)^{-1}\left(X^{*T}Y - x_i^{*}y_i\right)\right] \\ &= \left[\left(D^{T}X^{T}XD + K - x_i^{*}x_i^{*T}\right)^{-1}\left(X^{*T}Y - x_i^{*}y_i\right)\right] \\ &= \left[\left(D^{T}CD + K - x_i^{*}x_i^{*T}\right)^{-1}\left(X^{*T}Y - x_i^{*}y_i\right)\right] \\ &= \left[\left(\Lambda + K - x_i^{*}x_i^{*T}\right)^{-1}\left(X^{*T}Y - x_i^{*}y_i\right)\right] \\ &= \left[\left(A - x_i^{*}x_i^{*T}\right)^{-1}\left(X^{*T}Y - x_i^{*}y_i\right)\right] \end{aligned}$$

Khurana, dkk. (2012:5) menyatakan bahwa $\left(A - x_i^{*}x_i^{*T}\right)^{-1} = \left(A^{-1} + \dfrac{\left(A^{-1}x_i^{*}x_i^{*T}A^{-1}\right)}{1 - x_i^{*T}A^{-1}x_i^{*}}\right)$.

Proses untuk mendapatkan kesamaan dari kedua bentuk tersebut dapat diperoleh dengan bantuan MAPLE 12. Proses penyelesaian menggunakan program MAPLE dapat dilihat di lampiran 1.

$$\hat{\gamma}_{(GR)-i} = \left(A^{-1} + \frac{\left(A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1}\right)}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} \right)\left(X^{*T}Y - x_i^* y_i \right)$$

$$= A^{-1}X^{*T}Y - A^{-1}x_i^* y_i + \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1}}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*}\left(X^{*T}Y\right) - \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1}}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*}\left(x_i^* y_i\right)$$

$$= \hat{\gamma}_{GR} - \frac{A^{-1}x_i^* y_i\left(1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*\right)}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} + \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1}\left(X^{*T}Y\right)}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} - \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1}\left(x_i^* y_i\right)}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*}$$

$$= \hat{\gamma}_{GR} - \left(\frac{A^{-1}x_i^* y_i - A^{-1}x_i^* y_i x_i^{*T} A^{-1} x_i^*}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} \right) + \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1}\left(X^{*T}Y\right)}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} - \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1}\left(x_i^* y_i\right)}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*}$$

$$= \hat{\gamma}_{GR} - \frac{A^{-1}x_i^* y_i}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} + \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1} x_i^* y_i}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} + \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1}\left(X^{*T}Y\right)}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} - \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1} x_i^* y_i}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*}$$

$$= \hat{\gamma}_{GR} - \frac{A^{-1}x_i^* y_i}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} + \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1} X^{*T} Y}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*}$$

$$= \hat{\gamma}_{GR} - \frac{A^{-1}x_i^* y_i}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} + \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1} \hat{\gamma}_{GR}}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*}$$

$$= \hat{\gamma}_{GR} - \left(\frac{A^{-1}x_i^* y_i}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} - \frac{A^{-1}x_i^* x_i^{*T} A^{-1} \hat{\gamma}_{GR}}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} \right)$$

$$= \hat{\gamma}_{GR} - \left(\frac{A^{-1}x_i^*\left(y_i - x_i^{*T} A^{-1} \hat{\gamma}_{GR}\right)}{1 - x_i^{*T} A^{-1} x_i^*} \right)$$

dengan $w_i = x_{-i}^{*T} A^{-1} x_i^{*T}$, uraian di atas dapat disederhanakan sebagai berikut

$$\hat{\gamma}_{GR(-i)} = \hat{\gamma}_{GR} - \left(\frac{A^{-1}x_i^*\left(y_i - x_i^{*T} A^{-1} \hat{\gamma}_{GR}\right)}{1 - w_i} \right) \tag{3.14}$$

Untuk melanjutkan ke langkah berikutnya, diperlukan *pseudo values*. Singh, dkk. (1986:344) mendefinisikan *pseudo values* sebagai berikut:

$$Q_i = \hat{\gamma} + n(1 - w_i)(\gamma - \gamma_{-i}) \tag{3.15}$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
Q_i &= \hat{\gamma}_{GR} + n(1-w_i)(\hat{\gamma}_{GR} - \hat{\gamma}_{GR(i)}) \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + n(1-w_i)\left(\hat{\gamma}_{GR} - \left(\hat{\gamma}_{GR} - \left(\frac{A^{-1}x_i^*\left(y_i - x_i^{*T}\hat{\gamma}_{GR}\right)}{1-w_i}\right)\right)\right) \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + n(1-w_i)\left(\frac{A^{-1}x_i^*\left(y_i - x_i^{*T}\hat{\gamma}_{GR}\right)}{1-w_i}\right) \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + nA^{-1}x_i^*\left(y_i - x_i^{*T}\hat{\gamma}_{GR}\right)
\end{aligned}
$$

Pseudo values tersebut kemudian digunakan pada penaksir JRR sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{JR} &= \bar{Q} = \frac{1}{n}\sum Q_i \\
&= \frac{1}{n}\sum\left(\hat{\gamma}_{GR} + nA^{-1}x_i^*\left(y_i - x_i^{*T}\hat{\gamma}_{GR}\right)\right) \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + A^{-1}\Sigma\left(x_i^*\left(y_i - x_i^{*T}\hat{\gamma}_{GR}\right)\right)
\end{aligned}
$$

dengan $u_i = y_i - x_i^{*T}\hat{\gamma}_{GR}$ maka

$$
\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{JR} &= \hat{\gamma}_{GR} + A^{-1}\Sigma x_i^* u_i \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + A^{-1}\Sigma x_i^* y_i - \Sigma x_i^* x_i^{*T}\hat{\gamma}_{GR} \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + A^{-1}X^{*T}Y - X^{*T}X^*\hat{\gamma}_{GR} \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + A^{-1}X^{*T}(Y - X^*\hat{\gamma}_{GR})
\end{aligned}
$$

Sehingga bentuk $\hat{\gamma}_{JR}$ adalah

$$
\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{JR} &= \hat{\gamma}_{GR} + A^{-1}X^{*T}(Y - X^*\hat{\gamma}_{GR}) \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + A^{-1}X^{*T}Y - A^{-1}X^{*T}X^*\hat{\gamma}_{GR} \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + \hat{\gamma}_{GR} - A^{-1}X^{*T}X^*\hat{\gamma}_{GR} \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + (I - A^{-1}X^{*T}X^*)\hat{\gamma}_{GR} \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + (I - A^{-1}D^T X^T XD)\hat{\gamma}_{GR} \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + (I - A^{-1}(\Lambda))\hat{\gamma}_{GR} \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + (I - (A^{-1}(A-K)))\hat{\gamma}_{GR} \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + (I - (A^{-1}A - A^{-1}K))\hat{\gamma}_{GR}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{JR} &= \hat{\gamma}_{GR} + (I - (I - A^{-1}K))\hat{\gamma}_{GR} \\
&= \hat{\gamma}_{GR} + (I - I + A^{-1}K)\hat{\gamma}_{GR} \\
&= (\hat{\gamma}_{GR} + A^{-1}K)\hat{\gamma}_{GR} \\
&= (I + A^{-1}K)\hat{\gamma}_{GR} \\
&= (I + A^{-1}K)\hat{\gamma}_{GR} \\
&= (I + A^{-1}K)(I - A^{-1}K)\hat{\gamma}_{LS} \\
&= (I^2 - (A^{-1}K)^2)\hat{\gamma}_{LS} \\
&= I - (A^{-1}K)^2\hat{\gamma}_{LS}
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Berdasarkan $\gamma = D^T\beta$ dan $\beta = D\gamma$ maka bentuk β dari JRR adalah

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{JR} &= D\hat{\gamma}_{JR} \\
&= D(I + A^{-1}K)\gamma_{GR} \\
&= D(I + A^{-1}K)(I - A^{-1}K)\gamma_{LS} \\
&= D(I + A^{-1}K)(A^{-1}A - A^{-1}K)\Lambda^{-1}X^{*T}Y \\
&= D(I + A^{-1}K)(A^{-1}(A - K))\Lambda^{-1}X^{*T}Y \\
&= D(I + A^{-1}K)A^{-1}\Lambda\Lambda^{-1}X^{*T}Y \\
&= D(I + A^{-1}K)A^{-1}ID^T X^T Y \\
&= (D + DA^{-1}K)(A^{-1}D^T)X^T Y \\
&= DA^{-1}D^T X^T Y + DA^{-1}KA^{-1}D^T X^T Y \\
&= (DA^{-1}D^T + DA^{-1}KA^{-1}D^T)X^T Y
\end{aligned}
$$

dengan $A = (D^T(X^T X + DKD^T)D)$ maka

$$
\begin{aligned}
\beta_{JR} &= \left(D(D^T(X^T X + DKD^T)D)^{-1}D^T + D(D^T(X^T X + DKD^T)D)^{-1}D^T DKD^T D(D^T(X^T X + DKD^T)D)^{-1}D^T\right)X^T Y \\
&= \left(DD^{-1}\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}(D^T)^{-1}D^T + DD^{-1}\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}(D^T)^{-1}D^T DKD^T DD^{-1}\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}(D^T)^{-1}D^T\right)X^T Y \\
&= \left(DD^T\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}(D^T)^{-1}D^T + DD^T\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}(D^T)^{-1}D^T DKD^T DD^T\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}(D^T)^{-1}D^T\right)X^T Y \\
&= \left(I\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}I + I\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}IDKD^T I\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}I\right)X^T Y
\end{aligned}
$$

dengan $A_* = X^T X + K_*$ dan $K_* = DKD^T$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{JR} &= \left(\left(X^T X + DKD^T\right)^{-1} + \left(X^T X + DKD^T\right)^{-1} DKD^T \left(X^T X + DKD^T\right)^{-1}\right) X^T Y \\
&= (A_*^{-1} + A_*^{-1} K_* A_*^{-1}) X^T Y \\
&= A_*^{-1} X^T Y + A_*^{-1} K_* A_*^{-1} X^T Y \\
&= (I + A_*^{-1} K_*) A_*^{-1} X^T Y \\
&= (I + A_*^{-1} K_*) A_*^{-1} X^T (X\beta) \\
&= (I + A_*^{-1} K_*) A_*^{-1} (X^T X)\beta \\
&= (I + A_*^{-1} K_*) A_*^{-1} (X^T X + K_* - K_*)\beta \\
&= (I + A_*^{-1} K_*) A_*^{-1} (A_*^{-1} - K_*)\beta \\
&= (I + A_*^{-1} K_*)(A_*^{-1} A_*^{-1} - A_*^{-1} K_*)\beta
\end{aligned}
$$

sehingga penaksir $\hat{\beta}_{JR}$ adalah

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{JR} &= (I + A_*^{-1} K_*)(I - A_*^{-1} K_*)\beta \\
&= (I - (A_*^{-1} K_*)^2)\beta
\end{aligned}
\qquad (3.17)
$$

3.3 Bentuk Bias GRR dan JRR

3.3.1 Bentuk Bias GRR

Suatu penaksir dikatakan tak bias jika ekspektasi penaksir sama dengan nilai parameter yang ditaksir. Jika penaksir OLS merupakan penaksir tak bias, maka penaksir GRR dan JRR merupakan penaksir bias. Penaksir GRR dan JRR merupakan penaksir bias karena terdapat selisih antara nilai ekspektasi penaksir dengan yang ditaksir. Bentuk bias $\hat{\gamma}_{GR}$ ini didapatkan dari $E(\hat{\gamma}_{GR}) - \gamma$ dan untuk bias β_{GR} didapatkan dari $E(\beta_{GR}) - \beta$. Untuk mendapatkan bias β_{GR} , langkah yang harus dilakukan terlebih dahulu adalah mendapatkan bentuk bias $\hat{\gamma}_{GR}$.

Dari persamaan (3.10) didapatkan bentuk ekspektasi dari $\hat{\gamma}_{GR}$ adalah

$$\begin{aligned}E(\hat{\gamma}_{GR}) &= E[(I - A^{-1}K)\hat{\gamma}_{LS}] \\ &= E(I\hat{\gamma}_{LS}) - E[(A^{-1}K)\hat{\gamma}_{LS}] \\ &= E(\hat{\gamma}_{LS}) - (A^{-1}K)E(\hat{\gamma}_{LS}) \\ &= \gamma - (A^{-1}K)\gamma\end{aligned}$$

sehingga bias dari $\hat{\gamma}_{GR}$ adalah

$$\begin{aligned}Bias(\hat{\gamma}_{GR}) &= E(\hat{\gamma}_{GR}) - \gamma \\ &= \gamma - A^{-1}K\gamma - \gamma \\ &= -A^{-1}K\gamma\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk bentuk bias dari $\hat{\beta}_{GR}$ didapatkan dari

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}_{GR}) &= E(D\hat{\gamma}_{GR}) \\ &= E[D(I - A^{-1}K)\hat{\gamma}_{LS}] \\ &= E[DI\hat{\gamma}_{LS}] - E[DA^{-1}K]\hat{\gamma}_{LS} \\ &= E[D\hat{\gamma}_{LS}] - E[DA^{-1}K\hat{\gamma}_{LS}] \\ &= D\gamma - (DA^{-1}K)E(\hat{\gamma}_{LS}) \\ &= D\gamma - (DA^{-1}K)\gamma\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}Bias(\hat{\beta}_{GR}) &= E[\hat{\beta}_{GR}] - \beta \\ &= D\gamma - (DA^{-1}K)\gamma - D\gamma \\ &= -(DA^{-1}K)\gamma \\ &= -DA^{-1}KD^{T}\beta\end{aligned} \qquad (3.18)$$

3.3.2 Bentuk Bias JRR

Penaksir JRR juga merupakan penaksir bias. Bentuk bias $\hat{\gamma}_{JR}$ didapatkan dari selisih nilai ekspektasi penaksir dengan nilai parameter yang ditaksir yaitu $E(\hat{\gamma}_{JR}) - \gamma$ sedangkan untuk bias $\hat{\beta}_{JR}$ didapatkan dari $E(\hat{\beta}_{JR}) - \beta$.

Berdasarkan persamaan (3.16) didapatkan penaksir $\hat{\gamma}_{JR}$ sehingga bentuk ekspektasi dari $\hat{\gamma}_{JR}$ adalah

$$\begin{aligned}
E(\hat{\gamma}_{JR}) &= E(I-(A^{-1}K)^2\hat{\gamma}_{LS}) \\
&= E(I\hat{\gamma}_{LS})-E((A^{-1}K)^2\hat{\gamma}_{LS}) \\
&= E\hat{\gamma}_{LS}-(A^{-1}K)^2 E\hat{\gamma}_{LS} \\
&= \gamma-(A^{-1}K)^2\gamma
\end{aligned}$$

sehingga bias dari $\hat{\gamma}_{JR}$ adalah

$$\begin{aligned}
Bias(\hat{\gamma}_{JR}) &= E(\hat{\gamma}_{JR})-\gamma \\
&= (\gamma-(A^{-1}K)^2\gamma)-\gamma \\
&= -(A^{-1}K)^2\gamma
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk bentuk bias dari $\hat{\beta}_{JR}$ didapatkan dari persamaan (3.17) sehingga bentuk ekspektasi dari $\hat{\beta}_{JR}$ adalah

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}_{JR}) &= E(D\hat{\gamma}_{JR}) \\
&= E[D(I-(A^{-1}K)^2\hat{\gamma}_{LS}] \\
&= E[DI\hat{\gamma}_{LS}]-E[D(A^{-1}K)^2\hat{\gamma}_{LS}] \\
&= D\gamma-(D(A^{-1}K)^2)E(\hat{\gamma}_{LS}) \\
&= D\gamma-(D(A^{-1}K)^2)\gamma
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
Bias(\hat{\beta}_{JR}) &= E[\hat{\beta}_{JR}]-\beta \\
&= D\gamma-(D(A^{-1}K)^2)\gamma-D\gamma \\
&= -(D(A^{-1}K)^2)\gamma \\
&= -D(A^{-1}K)^2 D^T\beta \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

3.4 Aplikasi pada Data yang Memiliki Multikolinieritas

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data laporan harian produksi SHS PT. PG. Krebet Baru I Bululawang Malang yang memuat jumlah produksi SHS, jumlah tebu giling dan jumlah air imbisisi selama 30 hari pada bulan Juli 2013. Data ini diambil dari laporan praktik kerja lapangan Siti Muyassaroh yang berjudul Penerapan Analisis Regresi Berganda untuk Mengetahui Pengaruh Jumlah Tebu Giling dan Air Imbibisi terhadap Produksi *Superior High Sugar* (SHS). Data ini dapat dilihat di lampiran 2.

Pada penelitian ini variabel yang akan diteliti yaitu produksi SHS sebagai variabel terikat (Y) sedangkan jumlah tebu giling (X_1) dan air imbisisi (X_2) sebagai variabel bebasnya.

3.4.1 Aplikasi pada Data dengan Metode OLS

Analisis regresi linier berganda terhadap data menggunakan metode OLS dengan bantuan program SPSS 16 menghasilkan hasil sebagai berikut:

Tabel 3.1: Penaksir Parameter Regresi dengan Metode OLS

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
Model	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 (Constant)	-181.004	183.607		-.986	.333
X1	.055	.033	.786	1.673	.106
X2	.052	.131	.186	.396	.695

Dari tabel di atas diperoleh persamaan regresi linier berganda sebagai berikut:

$$Y = -181,004 + 0,055X_1 + 0,052X_2$$

Untuk menguji keberartian model yang diperoleh, dapat dilakukan secara individu dengan uji t maupun serentak (simultan) dengan uji F. Prosedur uji model secara individu dengan uji t dapat dilakukan dengan membandingkan nilai t_{hitung} (berdasarkan tabel 3.1) dari masing-masing parameter regresi dengan nilai t_{tabel}.

Hipotesis: $H_0 : \beta_j = 0$ untuk $j = 1, 2$ (parameter regresi ke-*j* tidak signifikan)

$H_1 = \beta_j \neq 0$ untuk $j = 1, 2$ (parameter regresi ke-*j* signifikan)

dengan kriteria uji

H_0 diterima jika $|t_{hitung}| < t_{(\alpha/2, n-k-1)}$

H_0 ditolak jika $|t_{hitung}| > t_{(\alpha/2, n-k-1)}$

dan taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$, maka diperoleh $t_{(0{,}025, 27)} = 2{,}052$. Berdasarkan kriteria uji di atas menunjukkan bahwa semua nilai t_{hitung} lebih kecil daripada t_{tabel} sehingga dapat dinyatakan bahwa H_0 diterima yang berarti bahwa masing-masing parameter regresi tidak berpengaruh signifikan terhadap model.

Apabila uji keberartian model dilakukan secara simultan atau bersama-sama untuk semua parameter regresi, maka dilakukan uji F dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ (variabel X_1, X_2 secara simultan tidak berpengaruh signifikan terhadap nilai taksiran *Y*)

$H_1 : \beta_j \neq 0$ untuk $j = 1, 2$ (variabel X_1, X_2 secara simultan berpengaruh signifikan terhadap nilai taksiran *Y*)

Berdasarkan hasil taksiran parameter menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh tabel Anova sebagai berikut:

Tabel 3.2: Anova untuk Data Awal

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2.420E7	2	1.210E7	227.552	.000[a]
	Residual	1435663.320	27	53172.716		
	Total	2.563E7	29			

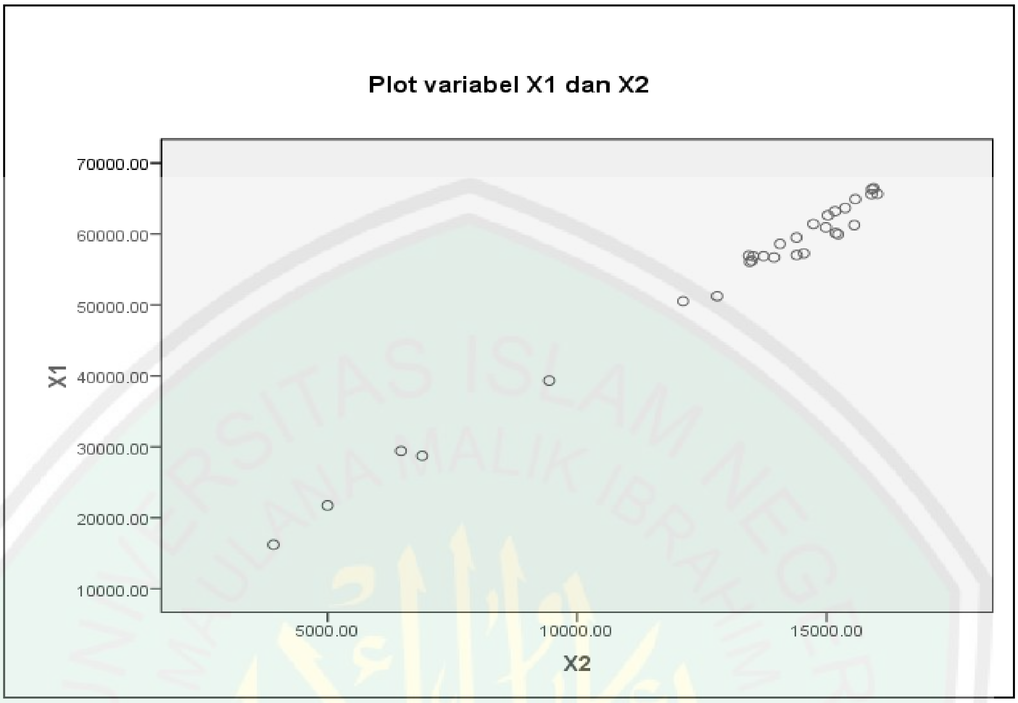
dengan kriteria uji: H_0 diterima jika $F_{hitung} < F_{(a/2,k,n-k-1)}$

$$H_0 \text{ ditolak jika } F_{hitung} > F_{(a/2,k,n-k-1)}$$

dan taraf signifikansi $\alpha = 0,05,$ maka diperoleh $F_{(0,025,2,27)} = 3,35.$ Berdasarkan kriteria uji di atas dapat dinyatakan bahwa H_0 ditolak yang berarti bahwa seluruh variabel bebas (X_1, X_2) secara simultan berpengaruh secara signifikan terhadap nilai taksiran Y.

3.4.2 Uji Multikolinieritas

Tahapan yang harus dilakukan sebelum penaksiran parameter menggunakan metode JRR dalam penelitian ini adalah memastikan ada tidaknya multikolinieritas pada data. Beberapa cara telah diperkenalkan untuk mendeteksi adanya multikolinieritas diantaranya plot variabel bebas, pemeriksaan determinan matriks korelasi, VIF, dan sistem nilai eigen. Adapun hasil uji multikolinieritas dengan plot variabel bebas dan nilai VIF sebagai berikut.



Gambar 3.1. Plot Variabel Bebas X_1 dan X_2

Gambar 3.1 di atas terlihat bahwa hubungan antara jumlah tebu giling (X_1) dan air imbisisi (X_2) membentuk pola garis lurus maka terdapat hubungan linear pada kedua variabel tersebut. Hal ini juga dapat dilihat dari hasil nilai koefisien korelasi dan nilai VIF berikut:

Tabel 3.3 Nilai VIF Peubah Bebas

Model		Collinearity Statistics	
		Tolerance	VIF
1	(Constant)		
	X1	.009	106.451
	X2	.009	106.451

Untuk mengetahui adanya multikolinieritas dapat dilihat dari nilai VIF (*Variance Inflation Factors*). Multikolinieritas dapat terjadi jika nilai VIF lebih besar dari 10. Tabel 3.3 menunjukkan bahwa nilai VIF = 106,451. Besarnya nilai

VIF ini bergantung pada nilai koefisien determinasi (R^2) yang dihasilkan. Jika nilai VIF lebih besar dari 10 maka koefisien determinasi bernilai lebih besar dari 0,9. Koefisien determinasi merupakan nilai kuadrat dari koefisien korelasi. Berikut ini merupakan nilai koefisien korelasi antar variabel.

Tabel 3.4 Nilai Koefisien Korelasi

		Y	X1	X2
Y	Pearson Correlation	1	.971**	.969**
	Sig. (2-tailed)		.000	.000
	N	30	30	30
X1	Pearson Correlation	.971**	1	.995**
	Sig. (2-tailed)	.000		.000
	N	30	30	30
X2	Pearson Correlation	.969**	.995**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	
	N	30	30	30

Berdasarkan tabel 3.4 dapat dilihat bahwa korelasi antara dua variabel bebas cukup tinggi yaitu 0,995 yang berarti terdapat multikolinieritas antar variabel bebas. Hal ini menyebabkan nilai koefisien determinasi yang dihasilkan lebih besar dari 0,9 sehingga mengakibatkan nilai VIF lebih besar dari 10. Dari plot variabel bebas dan hasil kedua tabel di atas dapat diketahui bahwa terdapat multikolinieritas antara variabel bebas pada data laporan harian produksi SHS.

3.4.3 Pemusatan dan Penskalaan Data

Untuk memudahkan proses penanganan multikolinieritas maka dilakukan proses pemusatan dan penskalaan terhadap data. Hal ini dilakukan untuk meminimumkan kesalahan pembulatan dalam perhitungan dan menjadikan satuan koefisien regresi dapat dibandingkan. Berikut ini merupakan hasil proses pemusatan dan penskalaan menggunakan program SPSS 16.

Tabel 3.5 Hasil Proses Pemusatan dan Penskalaan

No	Y^*	Z_1	Z_2
1	-2,8326504	-1,9096155	-1,879516
2	-0,0683191	-0,2340766	-0,119925
3	0,5166683	0,3154525	0,2550262
4	0,6815284	0,4875107	0,5288
5	0,3943528	0,1862041	0,1565272
6	-0,0683191	-0,2867141	-0,322874
7	0,3198998	0,1731005	0,2196142
8	0,2879914	0,1396717	0,0862982
9	-0,8766653	-1,1196069	-1,121877
10	-2,1689556	-2,430555	-2,443728
11	0,1497217	0,1849384	0,0958208
12	0,3571263	0,2150914	0,3972695
13	0,2241746	0,1979675	0,354418
14	-1,7062838	-1,8586159	-2,00569
15	-2,5837649	-2,8417526	-2,766305
16	0,3571263	0,4146968	0,6017071
17	0,3252179	0,3812679	0,3535252
18	0,2454469	0,1913413	0,0681459
19	0,6815284	0,6910621	0,6436659
20	0,5804851	0,6572609	0,5829595
21	0,7453452	0,8391468	0,8356051
22	0,7985259	0,8975915	0,8132866
23	0,5432586	0,6136321	0,5410007
24	0,4581696	0,5225775	0,4538098
25	-0,2608331	0,1264937	0,0737999
26	0,4581696	0,5114842	0,6981231
27	0,4262612	0,4283959	0,5880184
28	0,6942918	0,7838291	0,7043723
29	0,5432586	0,8873171	0,8034665
30	0,7772536	0,835722	0,8007882

3.4.4 Aplikasi pada Data dengan Metode JRR

Terjadinya kasus multikolinieritas pada data Produksi SHS di PT. PG. Krebet Baru I Bululawang Malang membuat metode kuadrat terkecil tidak efisien jika digunakan dalam menaksir parameter regresi. Oleh karena itu, dilakukan metode penaksiran lain yaitu Metode JRR. Sebelum melakukan penaksiran dengan metode JRR terlebih dahulu dilakukan penaksiran menggunakan metode GRR. Seluruh perhitungan dalam proses penaksiran ini akan menggunakan bantuan program MATLAB 7.6.0. Program ini dapat dilihat di lampiran 3.

Langkah pertama yang dilakukan untuk penaksiran metode GRR adalah menentukan konstanta bias *K*. Perhitungan nilai awal untuk konstanta bias *k* adalah

$$k_j = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\gamma}_{LS_j}^2} \text{ dengan } j = 1,2 \tag{3.20}$$

dimana $\hat{\sigma}^2$ merupakan *Mean Square Error* (MSE) dari $\hat{\gamma}_{LS}$ dan $\hat{\gamma}_{LS}$ adalah parameter regresi dari bentuk kanonik penaksir OLS pada persamaan (3.7). Sedangkan untuk menghitung MSE digunakan persamaan berikut:

$$MSE\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{JKS}{n-k-1} \tag{3.21}$$

Nilai parameter $\hat{\gamma}_{LS}$ berdasarkan hasil perhitungan program adalah

$$\hat{\gamma}_{LS} = \begin{bmatrix} 0,4242 \\ 0,6875 \end{bmatrix}$$

sedangkan MSE yang diperoleh dari $\hat{\gamma}_{LS}$ adalah $\hat{\sigma}^2 = 0,0602$, maka nilai konstanta bias awal adalah

$$k_1^0 = \frac{0,0602}{(0,4242)^2} = 0,3343$$

$$k_2^0 = \frac{0,0602}{(-0,6875)^2} = 0,1273$$

Setelah mendapatkan nilai konstanta bias awal $K^0 = diag(k_1^0, k_2^0)$, langkah selanjutnya adalah melakukan penentuan parameter $\hat{\gamma}_{GR}$ melalui proses iterasi. Proses iterasi dimulai dengan menghitung parameter awal $\hat{\gamma}_{GR}^0$ menggunakan K^0. $\hat{\gamma}_{GR}^0$ diperoleh dari $\hat{\gamma}_{GR}^0 = (\Lambda + K^0)^{-1} X^{*T} Y$. Parameter awal $\hat{\gamma}_{GR}^0$ akan digunakan untuk menghitung $k_j^1 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\gamma}_{GR_j}^{0\ 2}}$. MSE $\left(\hat{\sigma}^2\right)$ yang digunakan dalam menghitung k_j^1 merupakan MSE dari GRR. Perhitungan dapat dilakukan menggunakan persamaan (3.21) dengan jumlah kuadrat sisa GRR.

Selanjutnya, K^1 akan digunakan untuk menghitung $\hat{\gamma}_{GR}^1$ begitu seterusnya hingga proses iterasi berhenti ketika $\left|\left(\hat{\gamma}_{GR}^T \hat{\gamma}_{GR}\right)^i - \left(\hat{\gamma}_{GR}^T \hat{\gamma}_{GR}\right)^{i-1}\right| \le 0,001$. Kemudian akan diperoleh parameter $\hat{\gamma}_{GR}$ yang akan digunakan untuk mendapatkan $\hat{\beta}_{GR}$ (Utami, dkk., 2013:56). Adapun hasil proses iterasi menggunakan program MATLAB sebagai berikut:

Tabel 3.6 Proses Iterasi Parameter GRR

Iterasi	Nilai K	$\hat{\gamma}_{GR}$	$\hat{\beta}_{GR}$	VIF
i = 0	0,3343	0,123	0,572	4,4531
	0,1273	-0,686	0,3981	
i = 1	4,166	0,0135	0,4945	0,1390
	0,1339	-0,6859	0,4755	
i = 2	349,8854	0,0002	0,4851	0,1100
	0,1347	-0,6859	0,4849	

Berdasarkan tabel di atas dapat dilihat bahwa nilai VIF yang didapatkan dari penaksiran metode GRR lebih kecil dari 10 yang berarti bahwa metode GRR dapat mengatasi multikolinieritas dengan baik. Nilai VIF ini dapat diperoleh dari persamaan berikut:

$$VIF = \left(\frac{1}{n-1}(X^T X) + DKD^T\right)^{-1}\left(\frac{1}{n-1}(X^T X)\right)\left(\frac{1}{n-1}(X^T X) + DKD^T\right)^{-1}$$

Untuk menaksir parameter GRR digunakan nilai parameter $\hat{\gamma}_{GR}$ pada iterasi terakhir yaitu

$$\hat{\gamma}_{GR} = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ -0.6859 \end{bmatrix}$$

dengan $\hat{\beta}_{GR} = D\hat{\gamma}_{GR}$ diperoleh

$$\hat{\beta}_{GR} = \begin{bmatrix} 0,4851 \\ 0,4849 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah menaksir parameter JRR. Untuk memperoleh parameter $\hat{\beta}_{JR}$ terlebih dahulu akan dihitung parameter $\hat{\gamma}_{JR}$. Parameter $\hat{\gamma}_{JR}$ dihitung menggunakan persamaan (3.16) sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\hat{\gamma}_{JR} = \begin{bmatrix} 0.0003 \\ -0.6859 \end{bmatrix}$$

Sedangkan nilai $\hat{\beta}_{JR}$ diperoleh dari $\hat{\beta}_{JR} = D\hat{\gamma}_{JR}$ atau persamaan (3.17) sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_{GR} = \begin{bmatrix} 0,4864 \\ 0,4859 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan nilai-nilai di atas, dapat diperoleh model regresi JRR adalah

$$Y^* = 0,4864Z_1 + 0,4859Z_2$$

Selanjutnya akan ditampilkan nilai bias β metode GRR dan metode JRR. Nilai bias ini dapat diperoleh dari persamaan (3.18) dan persamaan (3.19).

Tabel 3.7 Bias Parameter dengan Metode GRR dan JRR

Parameter	GRR	JRR
β_1	-0,3009	-0,2997
β_2	-0,2987	0,2997

Metode JRR merupakan metode yang menekankan pengurangan bias pada penaksir ridge. Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa nilai bias dari metode JRR lebih kecil dibandingkan dengan nilai bias metode GRR. Jadi, untuk kasus data yang mengandung multikolinieritas penggunaan metode JRR lebih baik dibandingkan dengan metode GRR.

3.5 Uji Signifikansi Model Regresi

Setelah mendapatkan model regresi, akan dilakukan uji signifikansi untuk mencari parameter yang signifikan terhadap model dengan uji t dan uji F. Uji signifikansi yang akan dilakukan terlebih dahulu adalah uji t. Uji t dilakukan untuk mengetahui signifikansi masing-masing parameter regresi yang diperoleh terhadap model. Berdasarkan persamaan (2.31) diperoleh nilai t_{hitung} sebagai berikut:

Tabel 3.8 Nilai t_{hitung} Parameter Regresi

No	b_i	S_{b_i}	t_{hitung}	t_{tabel}
1	0,4864	0,16512	2,945	2,052
2	0,4859	0,16517	2,941	2,052

Hipotesis: $H_0 : \beta_j = 0$ untuk $j = 1, 2$ (parameter regresi ke-*j* tidak signifikan)

$H_1 = \beta_j \neq 0$ untuk $j = 1, 2$ (parameter regresi ke-*j* signifikan)

dengan kriteria uji: H_0 diterima jika $|t_{hitung}| < t_{(a/2,n-k-1)}$

H_0 ditolak jika $|t_{hitung}| > t_{(a/2,n-k-1)}$

Berdasarkan kriteria uji di atas menunjukkan bahwa semua nilai t_{hitung} lebih besar daripada t_{tabel} sehingga dapat dinyatakan bahwa H_0 ditolak artinya masing-masing parameter regresi berpengaruh signifikan terhadap model.

Selanjutnya, akan dilakukan uji signifikansi secara simultan dengan uji F. Perolehan nilai F_{hitung} didapatkan dari persamaan (2.32) dan (2.33). Nilai F_{hitung} akan ditampilkan dalam tabel ANOVA sebagai berikut:

Tabel 3.9 Anova *Jackknife Ridge Regression*

Sumber Variansi	JK	dk	KT	F_{hitung}
Regresi	27,3512	2	13,6756	223,9425
Sisa	1,6488	27	0,0611	
Total	29.000	29		

Uji signifikansi dengan uji F dilakukan dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ (variabel X_1, X_2 secara simultan tidak berpengaruh signifikan terhadap nilai taksiran *Y*)

$H_1 : \beta_j \neq 0$ untuk $j = 1, 2$ (variabel X_1, X_2 secara simultan berpengaruh signifikan terhadap nilai taksiran *Y*) .n

dengan kriteria uji: H_0 diterima jika $F_{hitung} < F_{(a/2,k,n-k-1)}$

H_0 ditolak jika $F_{hitung} > F_{(a/2,k,n-k-1)}$

dan taraf signifikansi $\alpha = 0,05$, maka akan diperoleh $F_{tabel} = F_{(0,025,2,2,27)} = 3,35$ sehingga $F_{hitung} > F_{tabel}$, maka H_0 ditolak berarti dapat dinyatakan bahwa semua variabel bebas (X_1, X_2) secara simultan berpengaruh secara signifikan terhadap nilai taksiran *Y*.

Selanjutnya dilakukan proses pengembalian variabel-variabel yang telah dibakukan ke variabel-variabel asal dengan $\bar{Y} = 3499,233$, $\bar{X}_1 = 54375$, $\bar{X}_2 = 13210$, $S_Y = 940,1912$, $S_{X_1} = 13431,50091$, $S_{X_2} = 3360,438802$. Dengan menggunakan persamaan (2.17) dan (2.18), maka model regresi yang diperoleh adalah:

$$Y = -147,90218 + 0,03404X_1 + 0,13594X_2$$

Berdasarkan uji signifikansi di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa variabel-variabel bebas pada data penelitian ini yaitu jumlah tebu giling dan air imbibisi memiliki hubungan linier yang signifikan dengan produksi SHS.

3.6 Kajian Keagamaan

Pada pembahasan di bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa amal-amal shaleh seperti shalat, zakat, puasa, dan lain-lain akan sangat mempengaruhi perjalanan manusia menuju surga di akhirat kelak. Balasan yang akan diterima setiap manusia merupakan hasil dari seluruh amal perbuatannya di dunia. Sesungguhnya Allah Maha Adil, setiap balasan yang diberikan kepada penghuni neraka sesuai dengan dosa yang mereka lakukan. Namun tidak demikian dengan penghuni surga, pahala yang diterima penghuni surga jauh lebih besar dari amal-amal kebaikan yang telah mereka lakukan.

Sebagai makhluk yang memang diciptakan untuk beribadah kepada Allah, sudah seharusnya manusia tidak mensia-siakan waktu dalam hidupnya. Kehidupan yang singkat di dunia adalah sebuah ladang tempat manusia menanam amal-amal kebaikan yang akan dipetik hasilnya di akhirat nanti. Allah telah memerintahkan manusia untuk berbuat kebaikan sebelum kematian datang. Sebab ketika ajal menjemput, tidak akan ada kesempatan lagi bagi manusia untuk memperbaiki kesalahan dan memperbanyak amal. Kematian merupakan suatu hal yang pasti dan tidak ada yang bisa menunda kedatangannya.

Allah memerintahkan kaum beriman untuk berinfak sebelum datangnya kematian dalam firman-Nya surat Al-Munafiqun ayat 10 yang berbunyi:

وَأَنفِقُوا۟ مِن مَّا رَزَقْنَٰكُم مِّن قَبْلِ أَن يَأْتِىَ أَحَدَكُمُ ٱلْمَوْتُ فَيَقُولَ رَبِّ لَوْلَآ أَخَّرْتَنِىٓ إِلَىٰٓ أَجَلٍ قَرِيبٍ فَأَصَّدَّقَ وَأَكُن مِّنَ ٱلصَّٰلِحِينَ ﴿١٠﴾

Artinya: *"Dan belanjakanlah sebagian dari apa yang telah Kami berikan kepadamu sebelum datang kematian kepada salah seorang di antara kamu; lalu ia berkata: "Ya Rabb-ku, mengapa Engkau tidak menangguhkan (kematian)ku sampai waktu yang dekat, yang menyebabkan aku dapat bersedekah dan aku Termasuk orang-orang yang saleh?".*

Ayat tersebut menjelaskan perintah untuk menafkahkan sebagian dari rezeki yang telah diberikan Allah. Rezeki tersebut dapat berupa harta, ilmu pengetahuan, kekuatan, dan sebagainya. Sebelum kematian datang, manusia dapat memberikan sebagian dari apa yang telah Allah berikan dan menggunakan sebagian yang lainnya (Shihab, 2003:254-255). Kematian merupakan ketetapan dan Allah tidak akan mengabulkan permohonan siapapun yang meminta ditangguhkan kematiannya.

Seperti yang telah disebutkan pada penjelasan sebelumnya bahwa manusia tidak dapat lagi memperbanyak kebaikan sebab semua amalnya telah putus seiring dengan kematiannya. Akan tetapi, dalam sebuah riwayat dijelaskan bahwa ada beberapa perkara yang tidak akan putus amalnya bahkan ketika ia meninggal. Sebagaimana Rasulullah SAW bersabda, "*Apabila anak Adam wafat putuslah amalnya kecuali tiga hal yaitu sodaqoh jariyah, pengajaran dan penyebaran ilmu yang dimanfaatkannya untuk orang lain, dan anak (baik laki-laki maupun perempuan) yang mendoakannya*" (HR. Muslim).

Berdasarkan hadits tersebut, penulis menginterpretasikan bahwasanya tiga hal di atas merupakan hal yang akan sangat mempengaruhi kehidupan seorang manusia setelah kematian. Seperti halnya regresi linier berganda dimana variabel terikat dipengaruhi oleh beberapa variabel bebas. Dalam hal ini, sodaqoh jariyah, ilmu yang bermanfaat, dan anak yang saleh sebagai variabel-variabel bebas (X_1, X_2, X_3) yang akan mempengaruhi amal manusia setelah mati sebagai variabel terikat (Y).

Selain sodaqoh jariyah, ilmu yang bermanfaat juga menjadi hal yang dapat bermanfaat untuk kehidupan setelah. Pentingnya menuntut ilmu dan mengajarkannya juga dapat memberikan manfaat untuk kehidupan manusia selama di dunia. Keutamaan orang yang berilmu juga telah disebutkan dalam firman Allah surat Al-Mujadalah ayat 11 yang berbunyi:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِى ٱلۡمَجَـٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَـٰتٍۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٌ ١١

Artinya: *“Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan*”.

Dalam tafsir Al Mishbah (2003) dijelaskan bahwa ayat di atas membagi kaum beriman dalam dua kelompok besar, pertama sekadar beriman dan beramal saleh, dan kedua beriman dan beramal saleh serta memiliki pengetahuan. Derajat kelompok kedua ini menjadi lebih tinggi bukan saja karena ilmu yang dimilikinya, tetapi juga amal dan pengajarannya baik secara lisan, tulisan maupun keteladanan. Ilmu yang dimaksudkan di atas bukan saja ilmu agama, tetapi ilmu apapun yang bermanfaat.

Menurut penulis, pengamalan ilmu juga dapat dilaksanakan dalam bentuk usaha untuk melakukan penaksiran parameter dalam skripsi ini. Proses dalam melakukan penaksiran dan hasil yang diperoleh diharapkan dapat memberikan manfaat dan kontribusi untuk penelitian-penelitian selanjutnya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pada pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk estimasi model regresi linier berganda menggunakan metode JRR adalah

$$\hat{\beta}_{JR} = (I - (A_*^{-1}K_*)^2)\beta$$

dan bentuk bias parameter $\hat{\beta}_{JR}$ adalah

$$Bias(\hat{\beta}_{JR}) = -D(A^{-1}K)^2 D^T \beta$$

2. Hasil estimasi parameter β model regresi linier berganda menggunakan metode JRR yaitu: $\beta_0 = -147,90218$, $\beta_1 = 0,03404$ dan $\beta_2 = 0,13594$ sehingga model regresi linier berganda untuk hubungan produksi SHS (Y) dengan jumlah tebu giling (X_1) dan jumlah air imbibisi (X_2) adalah

$$Y = -147,90218 + 0,03404X_1 + 0,13594X_2$$

Berdasarkan uji signifikansi model regresi menggunakan uji F didapatkan bahwa variabel-variabel bebas memiliki hubungan linier yang signifikan dengan variabel terikat. Hal ini ditangguhkan oleh $F_{tabel} = F_{(2,27,0,025)} = 3,35$ sedangkan F_{hitung} = 223,9425 sehingga $F_{hitung} > F_{tabel}$, dengan taraf signifikansi $\alpha = 0,05$.

4.2 Saran

Dari penelitian yang telah dilakukan terdapat beberapa saran yang dapat dilakukan untuk penelitian-penelitian selanjutnya, yaitu:

1. Untuk penelitian selanjutnya, dapat ditambahkan variabel-variabel bebas yang lebih signifikan dalam mempengaruhi produksi SHS.
2. Dapat menggunakan metode lain dalam mengatasi multikolinearitas di antaranya *Modified Jackknifed Ridge*, *Second Order Jackknifed Ridge*, dan sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Al Qurthubi. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Algifari. 2000. *Analisis Regresi* (*Teori, Kasus, dan Solusi*). Yogyakarta: BPFE.

Anton, H.. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linier*. Batam: Interaksa.

Aziz, A.. 2010. *Ekonometrika*. Malang: UIN Maliki Press.

Deneny, E.M. dan Rashwan, N.I.. 2011. Solving Multicollinearity Problem Using Ridge Regression Model. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 6, 585-600.

Draper, N. dan Harry, S.. 1992. *Analisis Regresi Terapan*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Umum.

Firdaus, M.. 2004. *Ekonometri Suatu Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: Bumi Aksara.

Gujarati, D.N.. 2006. *Dasar-dasar Ekonometrika*. Jakarta: Erlangga.

Hasan, M.I.. 2002. *Pokok-pokok Materi Statistik 2*. Jakarta: Bumi Aksara.

Hoerl, A.E. dan Kennard, R.W.. 1970. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. *Technometrics*, 12, 55-67.

Khurana, M., Chaubey, Y.P., dan Chandra, S.. 2012. Jackknifing The Ridge Regression Estimator: A Revisit. *Technical Report*, 01-17.

Kutner, M.H., Nachtsheim, C.J., Netter, J., dan Li, W.. 2005. *Applied Linear Statistical Model*. New York: Mc Graw Hill.

Muyassaroh, S.. 2013. Penerapan Analisis Regresi Berganda untuk Mengetahui Pengaruh Jumlah Tebu Giling dan Air Imbibisi terhadap Produksi Superior High Sugar (SHS). *Laporan Praktik Kerja Lapangan* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Bandung: Rekayasa Sains.

Setiawan dan Kusrini, D.E.. 2010. *Ekonometrika*. Yogyakarta: Andi.

Shihab, M.Q.. 2003. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Singh, B., Chaubey Y.P., dan Dwivedi, T.D.. 1986. An Almost Unbiased Ridge Estimator. *Sankhya*, B 48, 342-346.

Sudjana. 2005. *Metode Statistika*. Bandung: Tarsito.

Sudjana. 2001. *Teknik Analisis Regresi dan Korelasi*. Bandung: Tarsito.

Supranto. J.. 2001. *Statistik: Teori dan Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

Turmudi dan Harini, S.. 2008. *Metode Statistika Pendekatan Teoritis dan Aplikatif*. Malang: UIN-Malang Press

Utami, N.K.T., Sukarsa, I.K.G., dan Kencana, I.P.E.N.. 2013. Penerapan Metode Generalized Ridge Regression dalam Mengatasi Masalah Multikolinearitas. *e-Jurnal Matematika*, 2, 54-59.

Walpole, R.E. dan Myers R.H.. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung: ITB.

Yitnosumarto, S.. 1990. *Dasar-dasar Statistika*. Jakarta: Rajawali.

Lampiran 1 Program MAPLE untuk Menyederhanakan $(A - x_i^* x_i^{*T})$

```
> start:with(LinearAlgebra):
> A:=<<a[1,1] | a[1,2]>,<a[1,2] | a[2,2]>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

```
> X:=<<x[1,1]>,<x[1,2]>>;
```

$$X := \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix}$$

```
> Transpose(X);
```

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \end{bmatrix}$$

```
> F:=A-X.Transpose(X);
```

$$F := \begin{bmatrix} a_{1,1} - x_{1,1}^2 & a_{1,2} - x_{1,1} x_{1,2} \\ a_{1,2} - x_{1,1} x_{1,2} & a_{2,2} - x_{1,2}^2 \end{bmatrix}$$

```
> F2:=MatrixInverse(F);
```

$$F2 := \begin{bmatrix} \dfrac{a_{2,2} - x_{1,2}^2}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}} & -\dfrac{a_{1,2} - x_{1,1} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}} \\ -\dfrac{a_{1,2} - x_{1,1} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}} & \dfrac{a_{1,1} - x_{1,1}^2}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}} \end{bmatrix}$$

```
> 
FA:=(MatrixInverse(A).X.Transpose(X).MatrixInverse(A));
```

$$FA := \left[\left[\frac{\left(\frac{a_{2,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}-\frac{a_{1,2}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,1}\,a_{2,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}-\frac{\left(\frac{a_{2,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}-\frac{a_{1,2}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,2}\,a_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2},\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{a_{2,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}-\frac{a_{1,2}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,1}\,a_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}+\frac{\left(\frac{a_{2,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}-\frac{a_{1,2}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,2}\,a_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right],$$

$$\left[\frac{\left(-\frac{a_{1,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}+\frac{a_{1,1}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,1}\,a_{2,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}-\frac{\left(-\frac{a_{1,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}+\frac{a_{1,1}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,2}\,a_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2},\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\left(-\frac{a_{1,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}+\frac{a_{1,1}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,1}\,a_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}+\frac{\left(-\frac{a_{1,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}+\frac{a_{1,1}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,2}\,a_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right]\right]$$

```
> FB:=simplify((1-Transpose(X).MatrixInverse(A).X));
```

$$FB := \left[\frac{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,1}\,x_{1,2}^2-x_{1,1}^2\,a_{2,2}-a_{1,2}^2+2\,a_{1,2}\,x_{1,1}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right]$$

```
> FC11:=FA[1,1]/FB;
```

$$FC11 := \left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{a_{2,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}-\frac{a_{1,2}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,1}\,a_{2,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}-\frac{\left(\frac{a_{2,2}\,x_{1,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}-\frac{a_{1,2}\,x_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)x_{1,2}\,a_{1,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2}\right)\left(a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^2\right)}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,1}\,x_{1,2}^2-x_{1,1}^2\,a_{2,2}-a_{1,2}^2+2\,a_{1,2}\,x_{1,1}\,x_{1,2}}\right]$$

```
> FC12:=FA[1,2]/FB;
```

$$FC12 := \left[\frac{\left(-\frac{\left(\frac{a_{2,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} - \frac{a_{1,2} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,1} a_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} + \frac{\left(\frac{a_{2,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} - \frac{a_{1,2} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,2} a_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) \left(a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 \right)}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}} \right]$$

```
> FC22:=FA[2,2]/FB;
```

$$FC22 := \left[\frac{\left(-\frac{\left(-\frac{a_{1,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} + \frac{a_{1,1} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,1} a_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} + \frac{\left(-\frac{a_{1,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} + \frac{a_{1,1} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,2} a_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) \left(a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 \right)}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}} \right]$$

```
> FC:=<<FC11|FC12>,<FC12|FC22>>;
```

$$FC := \left[\left[\left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{a_{2,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} - \frac{a_{1,2} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,1} a_{2,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} - \frac{\left(\frac{a_{2,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} - \frac{a_{1,2} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,2} a_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) \left(a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 \right)}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}} \right], \right.$$

$$\left[\frac{\left(-\frac{\left(\frac{a_{2,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} - \frac{a_{1,2} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,1} a_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} + \frac{\left(\frac{a_{2,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} - \frac{a_{1,2} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,2} a_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) \left(a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 \right)}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}} \right],$$

$$\left[\frac{\left(-\frac{\left(\frac{a_{2,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} - \frac{a_{1,2} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,1} a_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} + \frac{\left(\frac{a_{2,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} - \frac{a_{1,2} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,2} a_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) \left(a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 \right)}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}}, \right.$$

$$\left. \left. \frac{\left(-\frac{\left(-\frac{a_{1,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} + \frac{a_{1,1} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,1} a_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} + \frac{\left(-\frac{a_{1,2} x_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} + \frac{a_{1,1} x_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) x_{1,2} a_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2} \right) \left(a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 \right)}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,1} x_{1,2}^2 - x_{1,1}^2 a_{2,2} - a_{1,2}^2 + 2 a_{1,2} x_{1,1} x_{1,2}} \right] \right]$$

```
> FD:=simplify(MatrixInverse(A)+FC);
```

$$FD := \begin{bmatrix} \frac{a_{2,2}-x_{1,2}^2}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,1}x_{1,2}^2-x_{1,1}^2a_{2,2}-a_{1,2}^2+2a_{1,2}x_{1,1}x_{1,2}} & -\frac{a_{1,2}-x_{1,1}x_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,1}x_{1,2}^2-x_{1,1}^2a_{2,2}-a_{1,2}^2+2a_{1,2}x_{1,1}x_{1,2}} \\ -\frac{a_{1,2}-x_{1,1}x_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,1}x_{1,2}^2-x_{1,1}^2a_{2,2}-a_{1,2}^2+2a_{1,2}x_{1,1}x_{1,2}} & \frac{a_{1,1}-x_{1,1}^2}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,1}x_{1,2}^2-x_{1,1}^2a_{2,2}-a_{1,2}^2+2a_{1,2}x_{1,1}x_{1,2}} \end{bmatrix}$$

```
> F2;
```

$$F2 := \begin{bmatrix} \frac{a_{2,2}-x_{1,2}^2}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,1}x_{1,2}^2-x_{1,1}^2a_{2,2}-a_{1,2}^2+2a_{1,2}x_{1,1}x_{1,2}} & -\frac{a_{1,2}-x_{1,1}x_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,1}x_{1,2}^2-x_{1,1}^2a_{2,2}-a_{1,2}^2+2a_{1,2}x_{1,1}x_{1,2}} \\ -\frac{a_{1,2}-x_{1,1}x_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,1}x_{1,2}^2-x_{1,1}^2a_{2,2}-a_{1,2}^2+2a_{1,2}x_{1,1}x_{1,2}} & \frac{a_{1,1}-x_{1,1}^2}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,1}x_{1,2}^2-x_{1,1}^2a_{2,2}-a_{1,2}^2+2a_{1,2}x_{1,1}x_{1,2}} \end{bmatrix}$$

```
> F2-FD;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lampiran 2 Data Laporan Harian Produksi SHS selama 30 Hari PT. PG. Krebet Baru I Bululawang Malang

Hari	Produksi SHS	Jumlah Tebu Giling	Jumlah Air Imbibisi
1	836	28.726	6.894
2	3.435	51.231	12.807
3	3.985	58.612	14.067
4	4.140	60.923	14.987
5	3.870	56.876	13.736
6	3.435	50.524	12.125
7	3.800	56.700	13.948
8	3.770	56.251	13.500
9	2.675	39.337	9.440
10	1.460	21.729	4.998
11	3.640	56.859	13.532
12	3.835	57.264	14.545
13	3.710	57.034	14.401
14	1.895	29.411	6.470
15	1.070	16.206	3.914
16	3.835	59.945	15.232
17	3.805	59.496	14.398
18	3.730	56.945	13.439
19	4.140	63.657	15.373
20	4.045	63.203	15.169
21	4.200	65.646	16.018
22	4.250	66.431	15.943
23	4.010	62.617	15.028
24	3.930	61.394	14.735
25	3.254	56.074	13.458
26	3.930	61.245	15.556
27	3.900	60.129	15.186
28	4.152	64.903	15.577
29	4.010	66.293	15.910
30	4.230	65.600	15.901

Lampiran 3 Program MATLAB untuk Estimasi Parameter Model Regresi Linier Berganda dengan Metode GRR dan JRR

```
clc,clear
X=[
-1.90961545620370,  -1.87951633700240;
-0.234076610951867, -0.119924807443313;
0.315452481107844,  0.255026203421636;
0.487510702453188,  0.528799957386520;
0.186204072516100,  0.156527168027749;
-0.286714067676730, -0.322874481578151;
0.173100547221085,  0.219614163506613;
0.139671667349142,  0.0862982485324090;
-1.11960689424115,  -1.12187723092132;
-2.43055503852883,  -2.44372833430394;
0.184938391095559,  0.0958208138877093;
0.215091389643748,  0.397269523416435;
0.197967464542307,  0.354417979317583;
-1.85861594014071,  -2.00569032796013;
-2.84175259650821,  -2.76630523571474;
0.414696794847932,  0.601707098388038;
0.381267914975989,  0.353525238815524;
0.191341250046532,  0.0681458583238678;
0.691062055615531,  0.643665901984830;
0.657260916502252,  0.582959547844791;
0.839146781818859,  0.835605109927602;
0.897591482708558,  0.813286597376117;
0.613632133417712,  0.541000744247999;
0.522577522987008,  0.453809755213530;
0.126493690205859,  0.0737998815035774;
0.511484197595205,  0.698123072610454;
0.428395934929085,  0.588018410689794;
0.783829058556379,  0.704372256124869;
0.887317127647694,  0.803466451853463;
0.835721996798571,  0.800788230347285;
];
C=X'*X;
[D E]=eig(C);
lambda=D'*C*D;
Z=X*D;
lambda=Z'*Z;
VIFLS=inv((1/29)*C)

Y=[-2.83265042259489;
   -0.0683190823313388;
    0.516668311722126;
    0.681528395500830;
    0.394352765692765;
    -0.0683190823313388;
    0.319899824631415;
    0.287991421319408;
    -0.876665299568854;
    -2.16895563370514;
    0.149721673634044;
```

```
    0.357126295162090;
    0.224174614695394;
    -1.70628378568104;
    -2.58376487676124;
    0.357126295162090;
    0.325217891850083;
    0.245446883570065;
    0.681528395500830;
    0.580485118346141;
    0.745345202124844;
    0.798525874311523;
    0.543258647815465;
    0.458169572316780;
    -0.260833115647115;
    0.458169572316780;
    0.426261169004772;
    0.694291756825633;
    0.543258647815465;
    0.777253605436851;
];
gamaOLS=inv(lambda)*Z'*Y
BetaOLS=D*gamaOLS
JKS=Y'*Y-gamaOLS'*(Z'*Y);
JKR=gamaOLS'*(Z'*Y)-30*mean(Y)^2;
JKT=Y'*Y-30*mean(Y)^2;
MSE=JKS/27
K=[MSE/gamaOLS(1)^2,0;0,  MSE/gamaOLS(2)^2]
FhitLS=(JKR/2)/(JKS/27)
I=[1,0;0,1];
G=D*K*D';
F=X'*X+G;
A=Z'*Z+K;
i=0
gamaGR=inv(lambda+K)*Z'*Y
BetaGR=D*gamaGR
JKSGR=Y'*Y-gamaGR'*(Z'*Y);
JKTGR=Y'*Y-30*mean(Y)^2;
JKRGR=gamaGR'*(Z'*Y)-30*mean(Y)^2;
MSEGR=JKSGR/27
FhitGR2=(JKRGR/2)/(JKSGR/27)
VIFGR=inv((1/29)*C+D*K*D')*(1/29).*C*inv((1/29)*C+D*K*D')
gamaGRa=gamaOLS;
gamaGRb=gamaGR;
err=abs((gamaGRb'*gamaGRb)-(gamaGRa'*gamaGRa))
while(err>=0.001)
    i=i+1
    gamaGRa=gamaGRb;
    K=[MSEGR/gamaGRb(1)^2,0;0,  MSEGR/gamaGRb(2)^2]
    gamaGRb=inv(lambda+K)*Z'*Y
    JKSGR=Y'*Y-gamaGRb'*(Z'*Y);
    JKTGR=Y'*Y-30*mean(Y)^2;
    JKRGR=gamaGRb'*(Z'*Y)-30*mean(Y)^2;
    MSEGR=JKSGR/27
    koefdetGR=JKRGR/JKTGR
    FhitGR2=(JKRGR/2)/(JKSGR/27)
    err=abs((gamaGRb'*gamaGRb)-(gamaGRa'*gamaGRa))
```

```
    VIFGR=inv((1/29)*C+D*K*D')*(1/29).*C*inv((1/29)*C+D*K*D')
end
gamaGR=gamaGRb
BetaGR=D*gamaGR
I=[1,0;0,1];
G=D*K*D';
F=X'*X+G;
A=Z'*Z+K;
gamaJR=(I-(inv(A)*K)^2)*gamaOLS
BetaJR1=D*gamaJR
BetaJR2=(I-(inv(F)*G)^2)*BetaOLS
JKSJR=Y'*Y-gamaJR'*(Z'*Y)
JKTJR=Y'*Y-30*mean(Y)^2
JKRJR=gamaJR'*(Z'*Y)-30*mean(Y)^2
MSEJR=JKSJR/27
koefdetJR=JKRJR/JKTJR
FhitJR=(JKRJR/2)/(JKSJR/27)
biasbetaGR=-D*(inv(A))*K*D'*BetaOLS
biasbetaJR=-D*((inv(A))*K)^2*D'*BetaOLS
VIFJR=inv((1/29)*C+D*K*D')*(1/29).*C*inv((1/29)*C+D*K*D')
```