

## 21E GLE de Educación Estocástica

# EL CONCEPTO DE LACUNARIDAD COMO INCENTIVO EN LA VINCULACIÓN DE LA ESTADÍSTICA Y LA INFORMÁTICA CON LA INGENIERÍA

*Azor Montoya, Jesús Rubén*  
jesus.azor@um.edu.ar  
Universidad de Mendoza (Argentina)

## RESUMEN

*En este trabajo se propone desarrollar en forma didáctica, un algoritmo que permita el cálculo de la Lacunaridad, un concepto que se introduce para caracterizar diferentes apariencias de textura. Con ello lograr una implementación computacional que permita internalizar los conceptos de este recurso de alto valor operacional en la ingeniería moderna, en aplicaciones del Procesamiento de Imágenes. Para esto, se recurre a conceptos básicos de la Estadística, como los histogramas y los momentos de primer y segundo orden de distribuciones, que llevan a resolver un problema real de la Ingeniería. Por otro lado, promueve el conocimiento de técnicas modernas incluidas en el extenso horizonte que presenta en nuestros días el uso de la Geometría Fractal. De este modo se enfatiza el alto impacto que tiene la Estadística como herramienta esencial de apoyo en la formación de otros profesionales.*

## PALABRAS CLAVE

Dimensión fractal, Lacunaridad, Algoritmo *gliding box*, Análisis de textura.

## INTRODUCCIÓN

Es común el hecho de que la Estadística no despierte mucho interés en las carreras de Ingeniería. Aserto sustentado en su fuerte contenido matemático, basado en abstracciones y reglas difíciles de asimilar, lo que hace que el alumno no internalice en forma inmediata la importancia de esta herramienta en su vida profesional. Es por ello que desde el sitio del profesor, se busca expresar a través de aplicaciones concretas la utilización de los conceptos esenciales de esta disciplina.

En este trabajo se presenta como “excusa” para la citada internalización la determinación de la medida llamada *Lacunaridad*, donde se ponen en juego los conceptos de histograma y momentos de distribuciones estadísticas que desembocan en un algoritmo computacional que permite poner en evidencia el comportamiento de las distintas variables involucradas. Asimismo, propone un desafío a los formadores de profesores de Estadística a encontrar aplicaciones concretas en el campo disciplinar en que les toca actuar, para transferir las herramientas medulares a los futuros profesionales.



### MARCO DE REFERENCIA

#### EL CONCEPTO DE LACUNARIDAD

La Lacunaridad, una medida que fue introducida por primera vez por Mandelbrot (1983) y posteriormente descrita por otros autores, se utilizó inicialmente para caracterizar una propiedad de los fractales. Sin embargo, también se puede aplicar el análisis de lacunaridad a objetos no-fractales (no auto-similares).

Varios investigadores han aprovechado sus propiedades no restrictivas para la aplicación del análisis de Lacunaridad a imágenes en un número de campos diversos, incluyendo la geología (Plotnick, Gardner, Hargrove, Prestegard & Perlmutter, 1996), la ecología (Weishampel, Sloan, Boutet & Godin, 1998), la radiología (Dougherty & Henebry, 2002) y la dermatología (Gilmore, Hofmann-Wellenhof, Muir & Soyer, 2009).

La comprensión del concepto de fractal se necesita para entender el de lacunaridad. Las dimensiones fractales pueden ser vistas como una medida de la complejidad o heterogeneidad de arreglos espaciales y procesos físicos en muchos campos de estudio. Ha habido un creciente interés en la aplicación de la geometría fractal para caracterizar la complejidad espacial de los fenómenos geográficos en múltiples escalas.

El estudio de la relación entre procesos físicos y los efectos de escala toman cada vez más relevancia en las ciencias de la información geográfica. Mandelbrot (1983) define el término fractal como "un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica" (pág. 57).

Los Fractales ejemplifican la idea de la auto-similitud, en que el comportamiento espacial de un sistema, un objeto o un grupo de características es independiente de la escala. Una curva o superficie fractal ideal tiene un valor de dimensión constante en todas las escalas. La variabilidad de muchos fenómenos naturales es a menudo irregular y a veces se puede aproximar mediante el movimiento browniano fraccional.

Detalles sobre la descripción de las técnicas de medición de la dimensión fractal se pueden consultar en una gran cantidad de textos de autores como por ejemplo, Jaggi, Quattrochi y Lam (1993).

Como paso inicial hacia la cuantificación de textura o arreglos espaciales de características, Mandelbrot (1983) introdujo el término Lacunaridad (lacunar en latín significa hueco) para caracterizar diferentes apariencias de texturas, que pueden tener el mismo valor de dimensión fractal.

La Lacunaridad ( $\lambda$ ) está relacionada con la distribución del tamaño de los agujeros. Si un fractal tiene grandes huecos o agujeros, tiene un valor alto de  $\lambda$ . En el otro extremo, si un fractal es casi invariante a la traslación, el mismo tiene bajo  $\lambda$ .



La Lacunaridad mide la distribución de tamaños de *gap* (huecos). Los objetos geométricos de baja Lacunaridad son homogéneos porque todos los tamaños de *gap* son iguales, mientras que objetos de alta Lacunaridad son heterogéneos. Esta medida suplementa a las dimensiones fractales en la caracterización de los patrones extraídos de imágenes digitales.

### CÁLCULO DE LA LACUNARIDAD

Los métodos para calcular Lacunaridad se introdujeron por primera vez en forma general por Mandelbrot y se han desarrollado varios otros algoritmos para aplicaciones computacionales, debido por ejemplo a Allain y Cloitre (1991) y Dong (2000).

El algoritmo desarrollado por Allain y Cloitre (1991) es computacionalmente sencillo y recibe el nombre de *gliding box* o caja deslizante. El mismo se utiliza para el cálculo del valor de Lacunaridad de imágenes binarias, así como de imágenes en escala de grises.

En este trabajo el algoritmo se aplica a una imagen binaria (en la que cada píxel es 1 ó 0). Una caja  $r \times r$  se coloca sobre la esquina superior izquierda de la imagen binaria. Luego, se calcula el *box mass* o el número de píxeles ocupados (1's).

La caja se mueve posteriormente una columna a la derecha y de nuevo, se calcula la *box mass*. Este proceso se repite durante toda la imagen binaria completa lográndose una distribución de frecuencias de *box mass* de la imagen.

El número de cajas de tamaño  $r$  que contienen  $S$  píxeles ocupados es designado por  $n(S,r)$  y el número total de cajas de tamaño  $r$  por  $N(r)$ .

Si el mapa (imagen binaria) es de tamaño  $M$ , entonces

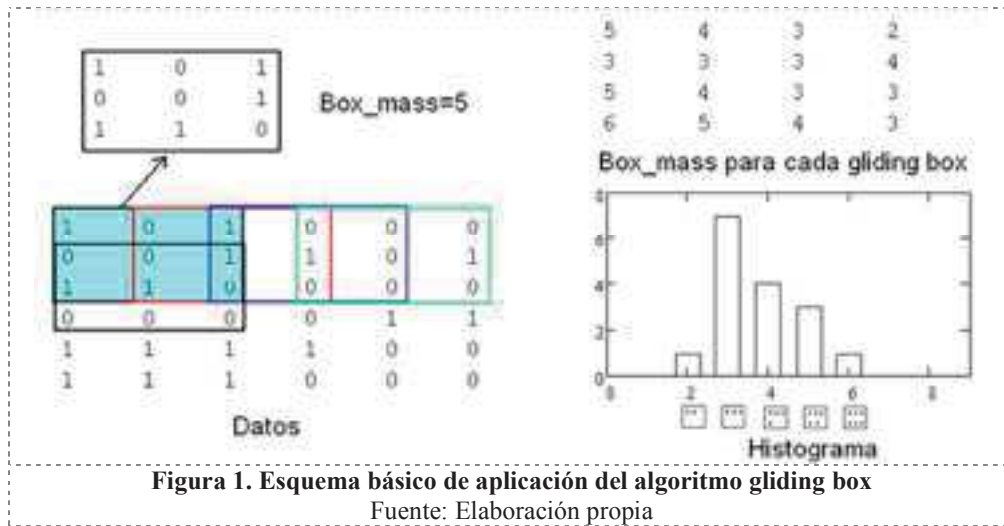
$$N(r) = (M - r + 1)^2 \quad (1)$$

Para ejemplificar el proceso, se recurre a un ejemplo numérico para ilustrar todos los pasos y su interpretación estadística.

Como se puede apreciar en la Figura 1, la imagen binaria está representada por una matriz  $6 \times 6$  ( $M=6$ ) donde los 0's representan negro y los 1's blanco. El *gliding box* es de tamaño  $r=3$ .

Para la primera posición de la caja deslizante, la variable *box\_mass* (suma de 1's) es de 5 como se aprecia en forma separada en la parte superior. Para la segunda es 4, para la tercera 3 y así siguiendo. Esto se puede observar en el arreglo superior derecho.

En la parte inferior derecha se observa el histograma con las frecuencias absolutas de *box\_mass* para todas las posiciones ( $N(r) = (6-3+1)^2 = 16$ )



Esta distribución de frecuencias se convierte en una distribución de probabilidad  $Q(S,r)$  dividiéndola por el número total de cajas.

Por lo tanto,  $Q(S,r)$  está dada por

$$Q(S,r) = n(S,r)/N(r) \quad (2)$$

El primer y segundo momentos de esta distribución son:

$$E(S) = \sum S \cdot Q(S,r) \quad (3)$$

$$E(S^2) = \sum S^2 \cdot Q(S,r) \quad (4)$$

La Lacunaridad para este tamaño de la caja  $r$  se define como:

$$\Lambda(r) = E(S^2) / E^2(S) \quad (5)$$

Conforme al ejemplo numérico de la Fig. 1, los valores para calcular el momento de primer orden  $E(S)$  son:

$$E(S) = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 9) / 16 = 3.75$$

Para el momento de segundo orden

$$E(S^2) = (0 \cdot 0^2 + 0 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 7 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 6^2 + 0 \cdot 7^2 + 0 \cdot 8^2 + 0 \cdot 9^2) / 16 = 15.1250$$

Luego la lacunaridad para el tamaño de caja  $r=3$ , es:

$$\Lambda(r) = 15.1250 / 3.75^2 = 1.0756$$





Otra expresión para la lacunaridad en base a la definición del momento de segundo orden y su relación con la varianza, es:

$$E(S^2) = \text{var}(S) + [E(s)]^2 \quad (6)$$

Dando lugar a una nueva expresión para la misma como:

$$\Lambda(r) = \text{var}(S) / [E(s)]^2 + 1 \quad (7)$$

Donde  $E(S)$  es la media y  $\text{var}(S)$  la varianza de la cantidad de píxeles ocupados por caja.

### COMPORTAMIENTO DE LA LACUNARIDAD Y SU PENDIENTE CON EL TAMAÑO DE CAJA

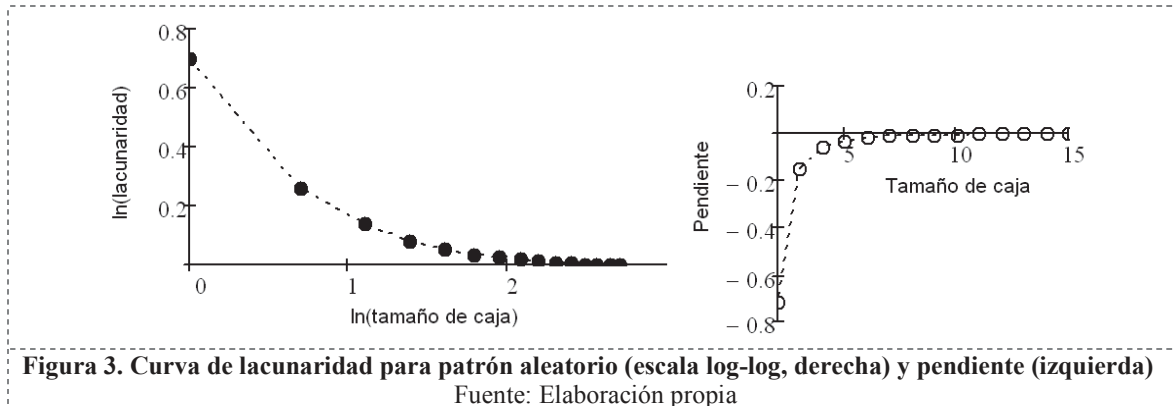
Se analizará la forma relativa de la Curva de Lacunaridad que refleja el patrón espacial inherente y las fluctuaciones del patrón versus el rango de tamaños de caja deslizante.

La Curva de Lacunaridad es una representación gráfica de la no-estacionariedad espacial escala-dependiente en un conjunto de datos.

Para ilustrar el comportamiento del análisis de Lacunaridad y sus propiedades, se va recurrir al examen de un patrón aleatorio representado por una imagen binaria de tamaño 20 x 20 píxeles que se observa en la Figura 2.



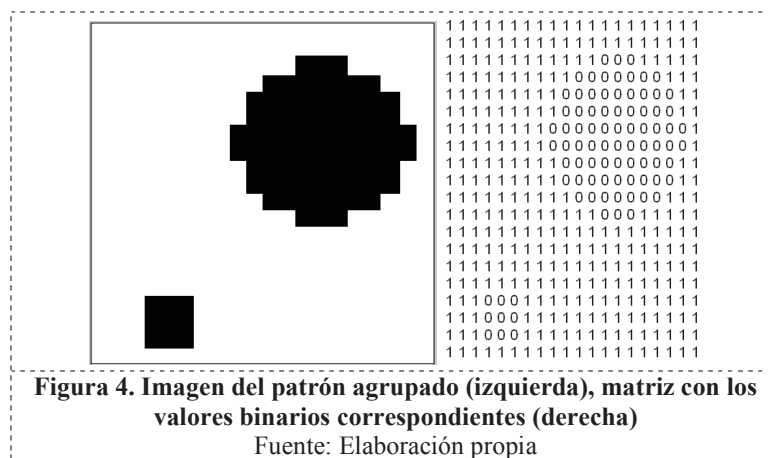
En la Figura 3 se puede observar el comportamiento de la Lacunaridad en función del tamaño de caja empleada en el *gliding box* (curva de lacunaridad en escala log-log) y la pendiente de la misma, hallada como diferencia entre puntos adyacentes.



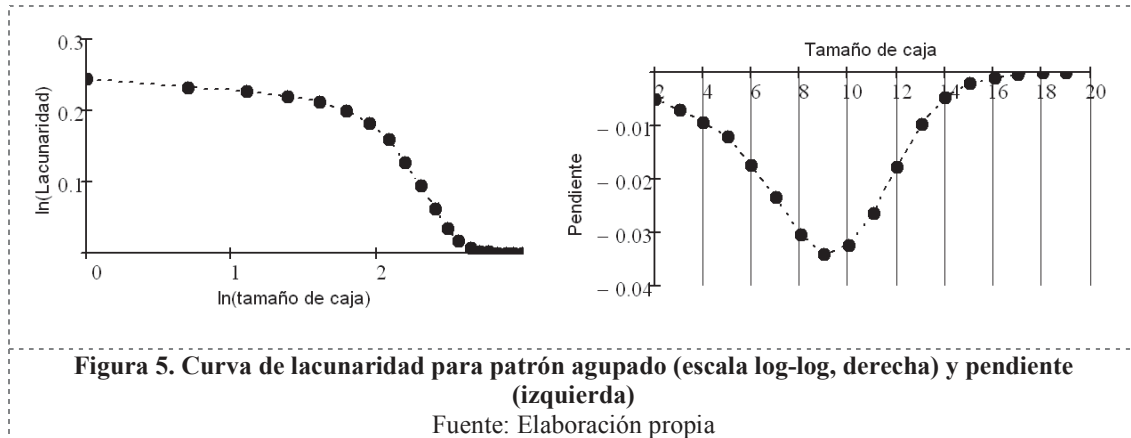
A continuación se plantea el caso del patrón agrupado que se indica en la Figura 4.

La Lacunaridad de un patrón aleatorio (Figura 2) muestra un decaimiento rápido con el aumento de tamaño de la caja (Figura3, izquierda), mientras que la de un patrón agrupado, como el de la Figura 4, produce una función de Lacunaridad que disminuye más gradualmente hacia un punto de inflexión, el cual se aproxima al patrón promedio o escala del objeto en los datos.

Otro factor importante a considerar es la pendiente de la curva de Lacunaridad, la cual se puede calcular en forma burda por medio de la diferencia entre valores adyacentes de Lacunaridad. Conforme a ello, se obtienen para cada uno de los patrones analizados, como se ve en las curvas de la Figura 3 (derecha) y Figura 5 (derecha).



Cuando se produce un cambio en la concavidad en la curva de lacunaridad (punto de inflexión o *breakpoint*) se produce un mínimo (o máximo) en la curva de pendientes. Este punto de inflexión es indicativo del tamaño promedio del objeto en la imagen.



**Figura 5. Curva de lacunaridad para patrón agupado (escala log-log, derecha) y pendiente (izquierda)**

Fuente: Elaboración propia

Después del punto de inflexión, la función muestra una decadencia rápida caracterizada por un patrón más homogéneo en tamaños de cajas más grandes. Ambos modelos, al azar y agrupado, alcanzan una Lacunaridad de 1.0 ( $\ln \lambda=0.0$ ) en grandes tamaños de cajas a medida que se hacen más homogéneos con respecto a la escala de observación.

El ancho de canal exhibido por la curva de pendientes indica la tasa de cambio en los tamaños del objeto en el rango de los tamaños de cajas medidos. Un canal estrecho indica *breakpoints* discretos en el patrón, mientras que un canal más amplio revela un cambio más continuo de los tamaños de los objetos. En este caso, el objeto en el modelo de patrón agrupado es irregular en la forma y la desviación alrededor del *breakpoint* representa un cambio más gradual de los tamaños de los objetos.

En tales *breakpoints* en la curva de pendientes, son capturados la distribución espacial y el tamaño de los objetos (el patrón) en un sensado remoto.

#### ALGORITMO PARA HALLAR LA LACUNARIDAD

Conforme a lo desarrollado hasta este punto, la idea es plasmar en una forma de procesamiento concreto, en un medio informático, el cálculo y algunas posibles aplicaciones de los conceptos de Lacunaridad.

En primer lugar, las imágenes en general se tienen en algún formato estándar como puede ser *bmp*, *jpg*, *png*, etc. que no pueden ser introducidas al algoritmo propuesto, ya que las mismas deben estar en un formato binario (matriz de unos y ceros donde los 0's representan negro y los 1's blanco).

Para lograr este aprestamiento se puede recurrir a herramientas de Matlab (*MathWork<sup>TM</sup>*) como *graythresh* e *im2bw*. La primera, *graythresh*, calcula el umbral de la imagen global usando el método de Otsu (Fang, GuangXue & QingCang, 2009); mientras que la segunda, *im2bw*, convierte la imagen a binaria por umbralamiento con el valor obtenido con la función anterior.



Para encontrar la lacunaridad para un tamaño de caja  $r$ , se aplican los siguientes pasos:

1. Se desliza la caja de tamaño  $r$  a través de la imagen binaria (en forma de matriz de tamaño  $N \times N$  compuesta de 1's y 0's) como se indica en la Figura 1, evaluando en cada posición la cantidad de 1's.
2. En el paso anterior se obtiene una matriz de tamaño  $(N-r+1) \times (N-r+1)$  que contiene el cómputo de 1's de cada caja. Con este insumo se construye un histograma (que recoge la frecuencia de cajas con 0, 1,...  $r^2$  1's en su interior, en forma de vector. Este último se normaliza dividiendo a cada elemento por el número total de cajas involucradas en el proceso.
3. Se hallan los momentos de primer y segundo orden tal como lo indican las ecuaciones (3) y (4). Esto es, multiplicando su valor de probabilidad por los valores respectivos 0, 1,...  $r^2$  para hallar la media y por 0, 1, 4,...  $r^4$  para hallar la varianza.
4. Finalmente, la lacunaridad  $\square$  se calcula dividiendo la varianza por el cuadrado de la media, halladas en el paso anterior.

Para hallar las curvas de las Figuras 3 y 5, se repite el proceso anterior para un rango de tamaños de caja.

## CONCLUSIONES

Conforme a lo desarrollado, se muestra la relevancia de la Lacunaridad en el análisis de texturas en imágenes y la simpleza de su cálculo poniendo en juego conceptos básicos de la Estadística y su vinculación con un problema real de la Ingeniería.

Por otro lado, promueve al conocimiento de técnicas modernas de abordaje de problemas a través del extenso horizonte que presenta en nuestros días el uso de la Geometría Fractal.

Si bien el trabajo apunta a una aplicación relacionada con la Ingeniería, lo que se propone es un desafío a los formadores de profesores de Estadística en la búsqueda de caminos que conduzcan a establecer vínculos que le den “vitalidad” a la asignatura a través de aplicaciones tangibles y verificables.

## REFERENCIAS

- Allain C., Cloitre M. (1991). *Characterizing the lacunarity of random and deterministic fractal sets*. Phys. Rev. A 44, 3552.
- Dong, P. (2000). *Lacunarity for Spatial Heterogeneity Measurement in GIS*. Geographic Information Sciences Vol. 6, Iss. 1.
- Dougherty, G. & Henebry, G. (2002). *Lacunarity analysis of spatial pattern in CT images of vertebral trabecular bone for assessing osteoporosis*. Med Eng Phys 24, 129–138.
- Fang, M., GuangXue, Y. & QingCang Y. (2009). *The Study on an Application of Otsu Method in Canny Operator*. Proceedings of the 2009 International Symposium on Information Processing (ISIP'09) pp. 109-112.





- Gilmore, S., Hofmann-Wellenhof, R., Muir, J. & Soyer, H. (2009). *Lacunarity Analysis: A Promising Method for the Automated Assessment of Melanocytic Naevi and Melanoma*. PLoS ONE 4(10): e7449. doi:10.1371/journal.pone.0007449.
- Jaggi, S., Quattrochi, D., Lam, N. (1993). Implementation and operation of three fractal measurement algorithms for analysis of remote-sensing data. *Journal Computers & Geosciences*, Volume 19, Issue 6, p. 745-767.
- Mandelbrot, B. (1983). *The fractal geometry of nature*. New York.
- Plotnick, R., Gardner, R., Hargrove, W., Prestegard, K. & Perlmutter, M. (1996). Lacunarity analysis: A general technique for the analysis of spatial patterns. *Phys Rev E* 53, 5461–5468.
- Weishampel, J., Sloan, J., Boutet, J. & Godin, J. (1998). *Mesoscale changes in textural pattern of 'intact' Peruvian rainforests (1970's–1980's)*. *Int J Remote Sensing* 19: 1007–1014.