AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática. - 2016, Nº 9, 11 - 19

Miradas Matemáticas y Pensamiento Numérico

Abraham Arcavi, Instituto Weizmann de Ciencias (Israel)

Recibido el 5 de enero de 2016; aceptado el 16 de enero de 2016

Miradas Matemáticas y Pensamiento Numérico

Resumen

Este artículo propone incluir dentro del pensamiento numérico el desarrollo de la "mirada matemática", es decir cultivar la sensibilidad a toda información numérica que encontramos en el mundo que nos rodea y que en general se da por sobreentendida y no se le presta demasiada atención. Presentamos y analizamos ejemplos de situaciones numéricas que sirven de base para plantear diversos tipos de interrogantes y/o mini-investigaciones que revelan información implícita y en general desconocida, y que puede enriquecer nuestro entendimiento de los usos, a veces sofisticados, de los números. Exhortamos a incluir este tipo de actividades en el currículo y en el análisis didáctico de los contenidos a enseñar.

Palabras clave. Pensamiento numérico; mirada matemática; análisis didáctico; competencias matemáticas.

Olhares Matemáticos e Pensamento Numérico

Resumo

Este artigo propõe que se inclua dentro do pensamento numérico o desenvolvimento do "Olhar matemático", isto é, que se cultive a sensibilidade a toda a informação numérica que encontremos no mundo que nos rodeia e que, em geral, se dá por sobre-entendida sem que se preste demasiada atenção. Apresentamos e analisamos exemplos de situações numéricas que servem de base de proposta a diversos tipos de interrogações e/ou mini-investigações que revelam informação implícita e em geral desconhecida, mas que pode enriquecer a nossa compreensão dos usos, por vezes sofisticados, dos números. Exortamos a inclusão deste tipo de atividades nos currículos e na análise didática dos conteúdos a ensinar.

Palavras chave. Pensamento numérico; olhar matemático; análise didática; competências matemáticas.

Mathematical Gazes and Numerical Reasoning

Abstract

This article proposes to include under numerical reasoning the development of a "mathematical gaze", namely the nurturing of the sensitivity towards any numerical information that we meet in the world around us and which is usually taken for granted and to which we seldom pay attention. We

Para citar: Arcavi, A. (2016). Miradas Matemáticas y Pensamiento Numérico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 11 - 19.

present and analyze examples of numerical situations which are the basis to pose several types of questions and/or mini-inquires which reveal implicit hidden information and which has the potential to enrich our understanding of the uses, at times sophisticated, of numbers. We call for the inclusion of these types of activities in the curriculum and in the didactical analysis of the contents to be taught.

Key words. Numerical reasoning; mathematical gaze; didactical analysis; mathematical competencies.

Regards mathématiques et raisonnement numérique

Résumé

Cet article propose d'inclure dans le raisonnement numérique le développement d'un «regard mathématique», à savoir nourrir la sensibilité envers toute information numérique que nous rencontrons dans le monde qui nous entoure et qui est généralement pris pour acquise et à laquelle nous prêtons rarement attention. Nous présentons et analysons des exemples de situations numériques qui sont à la base de poser plusieurs types de questions et / ou des mini-enquêtes qui révèlent des informations cachées implicites et qui ont le potentiel d'enrichir notre compréhension des usages, parfois sophistiqués, des nombres. Nous appelons à l'inclusion de ces types d'activités dans le curriculum et dans l'analyse didactique des contenus à enseigner.

Paroles clés. Raisonnement numérique; regard mathématique; analyse didactique; compétences mathématiques.

1. A modo de introducción

Me permito iniciar este escrito de una manera un tanto inusual en la práctica académica. Comienzo con una breve alusión a la gestación de las ideas y prosigo con una dedicatoria y con la relación entre ambas. Colecto aquí ideas desarrolladas durante varios años, presentadas a maestros de matemáticas y a colegas y probadas con alumnos pero hasta ahora no documentadas por escrito. Al recibir la cordial invitación de contribuir a una colección en honor al colega y amigo Luis Rico Romero, recordé los tres pilares de su carrera más conocidos por mí: Pensamiento Numérico, Análisis Didáctico y Competencias Matemáticas. Estos tres focos temáticos de una larga e influyente trayectoria me ofrecieron la oportunidad y la inspiración para enlazar lo que aquí presento. Me place y me honra dedicar a Luis este modesto artículo, con mis mejores deseos de que continúe desarrollando ideas productivas y siga ofreciéndonos su firme liderazgo.

2. Miradas matemáticas al mundo que nos rodea

Si nos disponemos a mirar el mundo que nos rodea a través de “lentes” matemáticas (Arcavi, 2007), podríamos observar, por ejemplo, imágenes como éstas:

Figura 1. ¿Qué indican estos números?

Figura 2. ¿Y estos números?

Figura 3. "¿Si lo caminas tardarás 10 minutos y si corres, sólo 7?"

Figura 4. ¿Qué indican los números en las cabeceras de las pistas de aterrizaje y despegue en todos los aeropuertos del mundo?

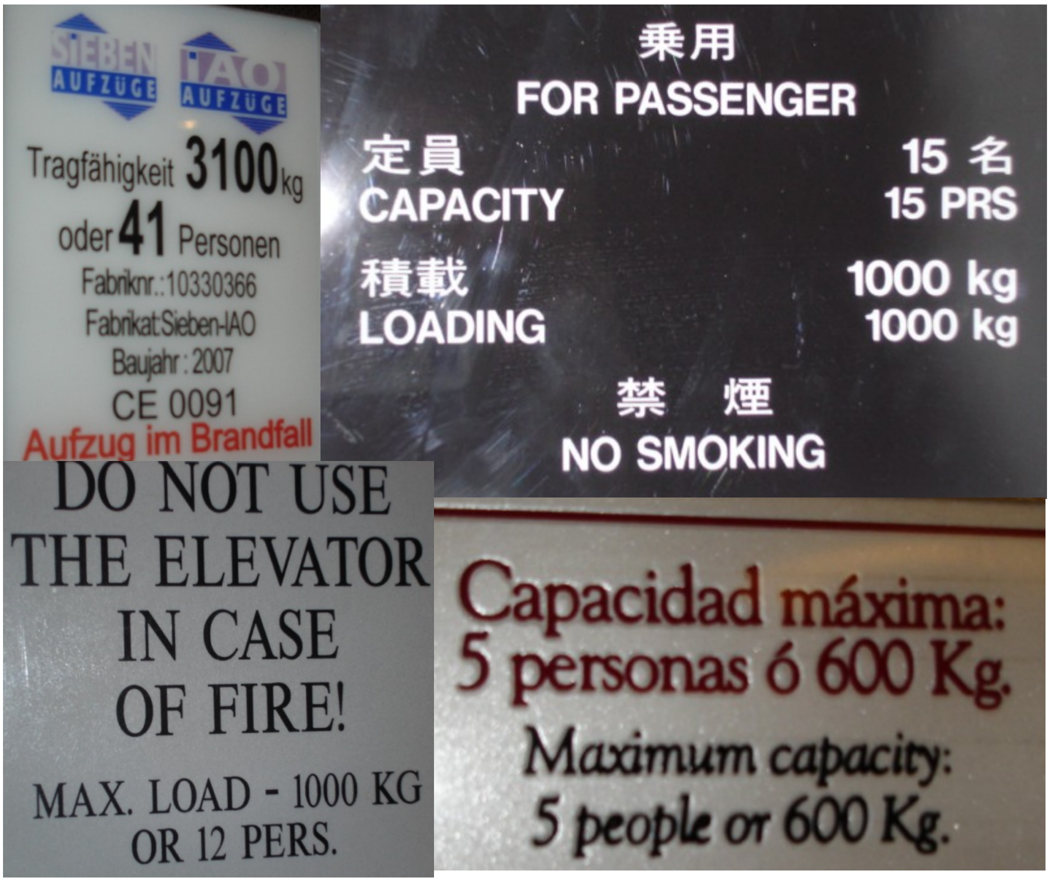

Figura 5. ¿ Qué supuesto está implícito en estos letreros?

Esta pequeña muestra de fotografías refleja la ubicuidad de los números y sus muy diversos usos en la vida real. Raramente nos detenemos a pensar en ellos, y los tomamos por sobreentendidos sin más. Revisemos un poco más detenidamente cada una de las imágenes anteriores en referencia a la pregunta expuesta al pie de cada una de ellas.

- El rol del número de la matrícula de un coche, o el rol del número que indica una cierta dirección es el de proveer una identificación inequívoca. Sin embargo, esto es sólo parte de lo que podemos decir con respecto a ese rol en cada caso. La matrícula del camión contiene solamente cifras, y quizá cada una de las tres componentes separadas de ese número represente algún tipo de información cifrada (por ejemplo, las dos últimas cifras podrían indicar el tipo de vehículo). Pero eso no lo podemos saber a ciencia cierta. Lo que sí podemos deducir es lo siguiente: recordemos que la función principal de los números no es identificar sino es precisamente enumerar y contar. En el lugar donde se tomó esta imagen, las matrículas tienen siete cifras, por lo tanto se puede inferir que el número máximo de vehículos que reciben este tipo de matrícula es de diez millones. Este tipo de información es tácita y requiere un cambio de perspectiva respecto a la función del número: de identificador a enumerador. Este cambio nos permite acceder a una información implícita que de otra manera nos hubiera pasado desapercibida – la capacidad máxima de vehículos identificables con este sistema. Observemos con esta nueva perspectiva la otra matrícula donde se combinan letras con números. Cabe preguntarnos ¿por qué se prefirió combinar letras con números? Esto nos lleva a notar que si bien tenemos a nuestra disposición sólo 10 cifras, podemos usar, en cambio, 27 letras en cada posición, lo que permite usar una cantidad menor de caracteres para identificar una cantidad mayor de vehículos. También en este caso podremos deducir el número máximo de vehículos al que se les puede asignar este tipo de matrícula pero el conteo será un poco más laborioso (o menos directo: 27×27×27×10×10×10) que en el caso anterior.

- Cuando los números identifican direcciones, podríamos preguntarnos ¿por qué en algunos lugares se usan números muy grandes y en otros no? Resulta que en muchas de las ciudades donde las calles se distribuyen en cuadriculas regulares (calles paralelas y perpendiculares), cada "cuadra" (lado de una "manzana cuadrada") es de aproximadamente 100 metros. En esos casos, las últimas dos cifras del número identificador de la dirección indican la distancia al comienzo de la cuadra, mientras que las cifras a su izquierda indican el número de la manzana. De esta manera el número 1363 de la fotografía, indica la manzana decimotercera (desde el comienzo de la calle) y una distancia de 63 metros desde el comienzo de la cuadra. Esto implica que en el mismo lado de una cuadra raramente se encontrarán números que difieran en 2 (ya que entre dos domicilios seguramente habrá una distancia mayor que dos metros), mientras que en otras ciudades (en general con otra disposición urbana) se usarán números consecutivos (sin tener en cuenta la distancia entre los edificios que identifican). En el primer caso, al peatón tratando de localizar una dirección quizá le sea más fácil estimar la distancia a caminar hasta ubicarla.

Podemos notar que el cambio de perspectiva del número como identificador al número como enumerador es diferente en cada uno de los dos casos anteriores. Mientras que en el caso de los vehículos, recurrimos al pensamiento numérico puro, en el caso de las direcciones debimos indagar acerca de ciertas convenciones urbanísticas y la manera en que en diferentes contextos se hace uso de los números.

- Si una distancia la caminamos en 10 minutos y corriendo la cubrimos en 7 minutos, ¿qué relación existe entre la velocidad en que caminamos y la velocidad en que corremos?

- Los números en la cabecera de las pistas de despegue y aterrizaje nos son arbitrarios y se establecen mediante la siguiente convención internacional: cada pista es denominada con un número de dos dígitos que indican las cifras de las centenas y las decenas del ángulo (entre 000º y 360º) que la dirección de la pista forma con el norte (en el sentido de las agujas del reloj). Por ejemplo, una pista orientada este-oeste, formará ángulos de 90º y 270º con el norte respectivamente y por lo tanto tendrá dos denominaciones, cada una en su respectiva cabecera dependiendo de la dirección que tome el avión para el despegue o aterrizaje (véase Figura 6).

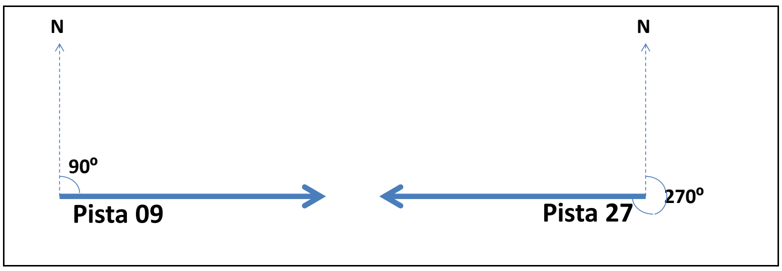

Figura 6. Denominaciones de una pista de despegue y aterrizaje en sus dos cabeceras

En este caso, se ha empleado la noción de ángulo y sus mediciones (en grados) para identificar eficientemente posiciones geográficas mediante números de manera que su uso sea universal e inequívoco. Nuevamente aquí debimos recurrir a indagar la naturaleza del uso los números observados en este contexto y adoptar una postura inquisidora que nos llevó a entenderlo.

- En casi todos los ascensores del mundo se indica su capacidad máxima en unidades de peso y en cantidad de personas. Muchas veces hemos observado estos letreros sin prestarles demasiada atención. Sin embargo, es interesante relacionar entre ambos números (el peso máximo indicado y la capacidad máxima de personas) para deducir, por ejemplo, que en cada caso hay un supuesto peso promedio de las personas.

3. Miradas matemáticas en el aula

Hemos visto que una re-observación detenida de nuestro entorno, nos hará conscientes de la omnipresencia de los números en muchos contextos como los que comentamos u otros (e.g., tablas numéricas en los envases de comestibles, avisos de ofertas y rebajas, medidas). La observación conlleva además una invitación indirecta a indagar y a deducir información implícita (sea ésta intrínsecamente matemática o relacionada con convenciones que hacen uso de las matemáticas), develar una cierta lógica del uso de los números, y en algunos casos hasta podemos detectar errores u omisiones.

En el aula, podemos tomar los ejemplos anteriores y convertirlos en actividades y problemas. Por ejemplo:

- El número de teléfono de Mario es 555-1617. Un día le llegó un aviso de la compañía telefónica que a su número se le deberá anteponer la cifra 2, o sea será 2555-1617. ¿Cuál te parece que sea la razón del cambio? O ¿En qué se beneficia la compañía y/o los usuarios al implementar este cambio?
- En la ciudad de Buenos Aires la calle Lavalle está en una zona de cuadriculas con manzanas de 100×100 metros. ¿Qué distancia recorreremos desde Lavalle 2116 hasta Lavalle 1478?
- Camina una distancia durante diez minutos. Luego corre la misma distancia, ¿te llevó el mismo tiempo que el indicado en el letrero? Explica las discrepancias si las hubiese.
- La diferencia entre los dos números que identifican las dos direcciones de una misma pista de despegue y aterrizaje es siempre 18. ¿Por qué?

Este tipo de actividades, y muchas otras que podríamos plantear, se alinean con las competencias matemáticas propuestas por PISA, tal como las describe Rico (2005) bajo el nombre de *matematización horizontal*. Esto implica llevar "problemas extraídos de un contexto del mundo real al mundo matemático:

- identificar matemáticas relevantes en un contexto general
- plantear interrogantes
- enunciar problemas
- representar el problema de un modo diferente
- comprender la relación entre lenguaje natural, lenguaje simbólico y formal
- encontrar regularidades, relaciones y patrones
- reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos
- traducir el problema a un modelo matemático
- utilizar herramientas y recursos adecuados."

Los ejemplos que presentamos se encuadran dentro de estas competencias, y principalmente se centran en reconocer situaciones matemáticas de nuestro entorno cotidiano, y nos invitan a explicitarlas, a plantear interrogantes relevantes acerca de ellas y a tratar de responder mediante pensamiento puramente matemático o recurriendo a información adicional (requerida para comprender el uso de las matemáticas en ciertos casos). El monumental proyecto holandés denominado “Matemática Realista” ha adoptado estos principios como base fundamental de su desarrollo curricular y además también como antesala de la *matematización vertical*, es decir para simbolizar, generalizar y generar nuevas ideas matemáticas y sus posibles aplicaciones.

4. Miradas matemáticas - Un análisis didáctico parcial

Si adoptamos el principio de que toda educación matemática debe aspirar a desarrollar las competencias necesarias para el desempeño ciudadano en el siglo XXI, es claro que deberíamos incluir en el currículo situaciones del mundo real como punto de partida y como destino de la matematización. Esto implica embarcarnos en un serio análisis didáctico mediante el cual “no sólo se analizan textos, también se contribuye a su elaboración” y cuyo “fin primordial” es “estudiar … tareas o relatos” (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013, p. 17, 20) apropiados para ser incorporados al currículo. Bajo ‘relatos’ incluimos a aquellas situaciones, imágenes (como las que presentamos previamente) y experiencias cotidianas en las que la matemática está explícita (como por ejemplo en la prensa, e.g., Fernández Cano y Rico, 1992) o alternativamente subyace y se la toma como sobreentendida sin explicitarla o cuestionarla. Una de las cuatro categorías “consideradas para analizar el contenido matemático escolar” descrita por Rico, Lupiáñez y Molina (2013, p. 11) es la “fenomenológica: que aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan y **aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican**, que dotan de sentido a los contenidos en estudio” (énfasis agregado, ibid., p.12).

Inspirándose en Freudenthal, Puig (1997) discierne cuatro tipos de fenomenología, y uno de ellas es la fenomenología didáctica, en la que “intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos” (p. 64), y que nos lleva a “indagar, analizando los conceptos matemáticos, cuáles son los fenómenos que organizan” (p. 65), sean éstos materiales o convenciones culturales matemáticamente sofisticadas.

La tarea pedagógica consistiría pues en incorporar la idea de “miradas matemáticas” para tratar esos fenómenos. Esto consistiría en fomentar, predisponer y sensibilizar a los alumnos (y también a nosotros mismos, los educadores) hacia la observación (o re-observación minuciosa) de lo que nos rodea, desarrollando la habilidad y la confianza en la utilidad de desentrañar la matemática no evidente detrás de las diversas situaciones cotidianas. Esto incluiría plantear y crear preguntas y problemas para los cuales los conceptos y las estrategias matemáticas constituyen una herramienta primordial (Arcavi, 2004).

Nos referimos a un proceso diferente de la modelización, que es asimismo un proceso fundamental relacionado con los fenómenos cotidianos. En cierto sentido, proponemos lo ‘inverso’ a modelar, ya que en lugar de tratarse de imponer símbolos, procesos y operaciones a las situaciones para entenderlas mejor, se trata en cambio de develar la manera que la matemática, y en particular los números, está siendo usada por otros. Esto sería una especie de precursor del aprender a leer, descifrar y conversar con un texto matemático – destreza que tampoco ocupa un lugar central en el currículo.

Nuestra propuesta va más allá de que los estudiantes encuentren este tipo de actividades en sus textos o en el aula y que sus maestros las discutan con ellos. La educación matemática debe apuntar a preparar a los estudiantes a que ellos mismos y por propia iniciativa desplieguen miradas matemáticas, invocando el potencial matemático que casi todas las experiencias y situaciones que el mundo les proporcione, sean esta numéricas, geométricas, probabilísticas o lógicas.

Incorporar la idea de miradas matemáticas en el currículo, en el aula y en la vida cotidiana de nuestros alumnos contribuiría a formar alumnos activos, autónomos a los que se les aporta un "sentido de propósito" (Arcavi, 2013) para estudiar las matemáticas, apreciar su utilidad y al mismo tiempo gozar de al experiencia que produce el comprender y 'empuñar' las matemáticas.

Referencias

Arcavi, A. (2004). "Education of Mathematics Teacher". En R. Strässer, G. Brandell, B. Grenvholm, and O. Helenius (Coords.), *Proceedings of an International Symposium on Mathematics Teacher Education: Educating for the Future.* Göteborg, Sweden: The Royal Swedish Academy of Sciences, pp. 227-234.

Arcavi, A. (2007). "Paisajes Matemáticos del Japón". *Matematicalia*, 3(1). http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=352&Itemid=212

Arcavi, A. (2013). "Reflexiones sobre el Álgebra Escolar y su Enseñanza". En L. R. Romero, M. C. Cañadas Santiago, J. F. Gutiérrez, M. Molina González, I. Segovia Alex (Coords.) *Investigación en Didáctica de la Matemática: Homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Comares, pp. 13-22.

Fernández Cano, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y Educación Matemática*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. (1997). "Análisis fenomenológico". En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori, pp. 61-94. Accesible en http://www.uv.es/puigl/fd.pdf

Rico, L. (2005). "La competencia matemática en PISA". En Fundación Santillana (Ed.), La Enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA. Madrid: Editor, pp. 21-40.

Rico, L., Lupiáñez, J.L. y Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.

Referencias a los autores

Abraham Arcavi, Instituto Weizmann de Ciencias (Israel)
abraham.arcavi@weizmann.ac.il

Mathematical gazes and numerical reasoning

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science (Israel)

Mathematical modeling is the process of describing and representing a situation outside mathematics using mathematical language and representations. Students in secondary and tertiary education are taught to construct and solve models in order to gain new knowledge about a given situation using the power of the mathematical means at their disposal. In elementary school, students do not have many opportunities to be exposed to or to experience mathematical modeling, or, more generally, to experience mathematics as a powerful tool to describe, understand and communicate phenomena encountered in our daily lives. This article proposes to integrate into the elementary school mathematics curriculum some aspects of the ways in which mathematics is used in the world around us with the goal of developing the capacity of noticing usually overlooked opportunities for numerical reasoning. Through a diverse collection of annotated examples, we attempt to show how students can be led to develop a "mathematical gaze", that is, to become sensitized to the many and variegated instances in which numbers are used, to inquire about the underlying rationale for such uses, and subsequently to uncover new information which is not immediately obvious at first sight even to knowledgeable adults. These examples illustrate, among other things, (a) how numbering used as a mere way to identify objects (e.g. license plates) can be the source of hidden information such as the possible quantities of those objects, (b) how numbers can be used to identify two different types of distances as ways to indicate an address in many countries, (c) how to infer implicit information in some numerical data by meaningfully connecting among them with an arithmetical operation (e.g. inferring the average weight of a person through the data provided in many elevators around the world), (d) to understand the sophistication behind worldwide numerical conventions (e.g. numbers at the extremes of airport runways worldwide). We claim that the incorporation of these types of situations (and many others yet to be developed and implemented) may make students more aware of the taken-for-granted uses of numbers around us and may lead students to be more inquisitive and to understand the ways in which "pure" numbers may serve us well. We propose that this kind of activities would enlarge both the scope of numerical reasoning and would enrich curricula in meaningful ways, making them more attuned to the goals of developing some of the competencies required for citizens of the 21st century.