Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 29 » AÑO 2016 » ISSN 2448-6469

ALME 29

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME, A.C.

www.clame.org.mx

Edición del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. – México

ISSN: 2448-6469

Autor(es) (2016). Nombre del artículo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 29. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Consejo Directivo

Claudia M. Lara Galo - Presidente
Elizabeth Mariscal Vallarta - Tesorera
Cecilia R. Crespo Crespo - Secretaria
Ángela M. Martín - Vocal Caribe
Edison de Faria - Vocal Centroamérica
Marcela Ferrari Escolá - Vocal Norteamérica
Patricia Lestón - Vocal Sudamérica

Consejo consultivo

Egbert Agard
Ricardo Cantoral
Fernando Cajas
Guadalupe de Castillo
Evarista Matías
Rosa María Farfán
Teresita Peralta
Gustavo Martínez Sierra

Comisión de admisión

Santa Daysi Sánchez
Christiane Ponteville
Marger da Conceição Ventura Viana

Comisión de promoción académica

Edison de Faria
Yolanda Serres
Leonora Díaz Moreno
Mayra Castillo
Javier Lezama

Comité internacional de RELME

Analida Ardila (Panamá)
Blanca Peralta (Colombia)
Blanca Rosa Ruiz Hernández (México)
Claudia María Lara Galo (Guatemala)
Claudia Rodríguez Muñoz (México)
Luis Roberto Moreno (Panamá)
Ruth Rodríguez Gallegos (México)

Comité Científico de Evaluación

Ademir Basso	Brasil
Adlai Ralph Detoni	Brasil
Agustín Grijalva Monteverde	México
Alejandro Lois	Argentina
Alejandro Miguel Rosas Mendoza	México
Alfonso Escorza Morales	México
Alma Rosa Pérez Trujillo	México
Ana Rosa Corica	Argentina
Astrid Marlene Morales Soto	Chile
Bertha Ivonne Sánchez Luján	México
Blanca Ruiz Hernández	México
Catalina Navarro Sandoval	México
Cecilia Crespo Crespo	Argentina
Cecilia Elguero	México
Claudia Leticia Méndez Bello	México
Claudia Lisete Oliveira Groenwald	Brasil
Crisólogo Dolores Flores	México
Cristina Mercedes Camós	Argentina
Daniela Reyes–Gasperini	Argentina
Elena Nesterova	México
Elisa Silvia Oliva	Argentina
Elpidio López Arias	Cuba
Elsa Caridad Ramírez García	Cuba
Enrique Javier Gómez Otero	México
Eugenio Carlos Rodríguez	Cuba

Evelia Reséndiz Balderas	México
Flor Monserrat Rodríguez Vásquez	México
Francisco Cordero	México
Gisela Montiel Espinosa	México
Héctor Alejandro Silva Crocci	Chile
Hipólito Hernández Pérez	México
Isabel Tuyub Sánchez	México
Jaime Mena Lorca	Chile
Jorge Iván Ávila Contreras	Chile
Juan Adolfo Álvarez Martínez	México
Judith Alejandra Hernández Sánchez	México
Karla Margarita Gómez Osalde	México
Leopoldo Zúñiga Silva	México
Leticia Sosa Guerrero	México
Lianggi Luis Espinoza Ramírez	Chile
Lidia Beatriz Esper	Argentina
Lilia López Vera	México
Liliana Milevicich	Argentina
Liliana Suárez Téllez	México
Luis Roberto Moreno Chandler	Panamá
Luis Roberto Pino-Fan	Chile
Malva Alberto	Argentina
Marcela Ferrari Escolá	México
Marcela Parraguez González	Chile
Marcelino González Maitland	México
Marger da Conceição Ventura Viana	Brasil
Maria del Socorro Valero Cazarez	México
María Esther Magali Méndez Guevara	México
María Guadalupe Ordaz Arjona	México
María Inés Ciancio	Argentina
María Nubia Soler Álvarez	Colombia
María Patricia Colin Uribe	México
Mariana Talamonti Baldasarre	Argentina
Marlene Alves Dias	Brasil
Marta Inés Marcilla	Argentina

Mayra Anaharely Sarai Báez Melendres	México
Miriam Martínez Vázquez	México
Mirta Débora Chan	Argentina
Mónica García Zatti	Argentina
Mónica Lorena Micelli	Argentina
Patricia Lestón	Argentina
Rebeca Flores García	México
Ricardo Cantoral Uriza	México
Rosa Araceli Rotaeche Guerrero	México
Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre	Perú
Rosa Isela Vázquez Camacho	México
Rosa María Farfán Márquez	México
Silvia Guadalupe Maffey García	México
Susana Beatriz Mercau	Argentina
Teresa Claudia Braicovich	Argentina
Teresa Cristina Ochoviet Filgueiras	Uruguay
Víctor Larios Osorio	México
Yolanda Serres Voisin	Venezuela

PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DE LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y EL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

Juan D. Godino, Belén Giacomone, Miguel R. Wilhelmi, Teresa F. Blanco, Ángel Contreras

Universidad de Granada (España), Universidad Pública de Navarra (España), Universidad de Santiago de Compostela (España). Universidad de Jaén (España)

jgodino@ugr.es, belen.giacomone@gmail.com, miguelr.wilhelmi@unavarra.es, teref.blanco@usc.es, afuente@ujaen.es

Palabras clave: diagramas, razonamiento matemático, lenguajes visuales, lenguajes secuenciales, objetos no ostensivos

Key words: diagrams, mathematical reasoning, visual languages, sequential languages, non – ostensive objects

RESUMEN: Los diagramas, y en general el uso de visualizaciones y materiales manipulativos, desempeñan un papel importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo aplicamos algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático para analizar la diversidad de objetos y procesos implicados en la actividad matemática, que se realiza con apoyo de representaciones diagramáticas. Esto permite apreciar las relaciones sinérgicas entre los objetos ostensivos (lenguajes visuales y secuenciales) y los objetos no ostensivos (entidades abstractas y mentales) imbricados en las prácticas matemáticas.

ABSTRACT: Diagrams, and in general the use of visualizations and manipulative materials play an important role teaching and learning of mathematics. In this paper, we apply some theoretical tools from the onto-semiotic approach to mathematical knowledge to analyze the diversity of objects and processes involved in mathematical activity, carried out with the support of diagrammatic representations. This allows us to appreciate the synergistic relationship between ostensive objects (visual and sequential languages) and non - ostensive objects (abstract and mental entities) interwoven in mathematical practices.

INTRODUCCIÓN

Para favorecer el aprendizaje de las matemáticas se propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas, materiales manipulativos, asumiendo el supuesto de que tales materializaciones constituyen *modelos* de los conceptos matemáticos y de las estructuras en las cuales se organizan. Se supone que el uso de representaciones materiales es necesario no solo para comunicar las ideas matemáticas sino también para su propia construcción.

El problema que abordamos surge de la constatación de que algunos trabajos sobre el razonamiento diagramático, y en general sobre el uso de visualizaciones en educación matemática, no abordan de manera explícita la naturaleza y diversidad de objetos matemáticos representados mediante los diagramas y demás visualizaciones. Los objetos matemáticos son considerados como abstractos mientras que los diagramas lo son como concretos o perceptibles, y se insiste en no confundirlos, pero las relaciones entre ambos tipos de objetos no son abordadas de manera explícita. No es de extrañar esta situación dado que clarificar lo que sean los objetos abstractos y su relación con el mundo empírico es un problema filosófico y psicológico de primera magnitud que es abordado desde diversos paradigmas y marcos teóricos.

En este trabajo pretendemos progresar en la identificación de los objetos involucrados y en la descripción de su naturaleza. Para ello, utilizaremos la perspectiva semiótica y antropológica propuesta por el “enfoque ontosemiótico” (EOS) del conocimiento matemático (Godino, 2002; Font, Godino y Gallardo, 2013).

VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández (2012) analizan la noción de visualización aplicando las herramientas del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS) (Godino, 2002; Font et al., 2013) y proponen distinguir entre “prácticas visuales“ y “prácticas no visuales” o simbólico/analíticas. Fijan la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica, los cuales son considerados como visuales si ponen en juego la percepción visual. Las representaciones simbólicas (lengua natural o lenguajes formales), aunque consisten en inscripciones visibles, no son consideradas como inscripciones propiamente visuales, sino como analíticas o sentenciales. Los *lenguajes secuenciales* (por ejemplo, lógicas simbólicas, lenguajes naturales) usan solo la relación de concatenación para representar relaciones entre objetos. Por el contrario, en los diagramas se hace uso de relaciones espaciales para representar otras relaciones.

El rol de los diagramas en el trabajo matemático

En las investigaciones analizadas en el campo de la educación matemática se proponen diferentes concepciones sobre el uso de diagramas. Arcavi lo incluye como un recurso visual más que articula con la visualización; pero según la literatura sobre razonamiento diagramático, los diagramas, entendidos en el marco de la *semiótica peirceana* (Dörfler, 2005; Bakker y Hoffmann, 2005; Rivera, 2011), constituyen un recurso esencial del razonamiento matemático, así como en otros campos y disciplinas científicas (Shin y Lemon, 2009).

Encontramos que dichas investigaciones presentan una doble concepción sobre la noción de diagrama. Una concepción amplia en la que casi cualquier tipo de inscripción que hace uso del posicionamiento espacial en dos o tres dimensiones (derecha, izquierda; delante, detrás; arriba, abajo; inclusión, intersección, separación; acumulación, …) es un diagrama (figuras geométricas;

gráficos cartesianos; matrices; grafos; mapas conceptuales; organigramas; croquis y mapas, …). Otra concepción más restringida requiere poder realizar con dichas representaciones determinadas transformaciones, combinaciones y construcciones según ciertas reglas sintácticas y semánticas específicas. Las partes constituyentes de un diagrama pueden ser cualquier tipo de inscripción como letras, numerales, signos especiales o figuras geométricas.

El razonamiento diagramático implica tres pasos (Bakker y Hoffmann, 2005, p. 340): en primer lugar, construir uno o varios diagramas mediante un sistema de representación; en segundo lugar, experimentar con los diagramas; y en tercer lugar, observar los resultados de la experimentación y reflexionar sobre ellos. Cualquier experimentación con un diagrama se está ejecutando dentro de un sistema de representación y es una regla o actividad, situado dentro de una práctica.

CONFIGURACIONES ONTOSEMIÓTICAS

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) se postula que en las prácticas matemáticas intervienen seis tipos de objetos los cuales pueden ser contemplados desde cinco pares de puntos de vista duales (Font et al., 2013). Se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para justificar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto. La emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

Esta manera antropológica de entender la abstracción, esto es, la emergencia de objetos generales e inmateriales que constituyen las estructuras matemáticas, tiene importantes consecuencias para la educación matemática ya que el aprendizaje matemático debe tener lugar mediante la progresiva participación de los estudiantes en los juegos de lenguaje matemáticos realizados en el seno de comunidades de prácticas matemáticas (instituciones o grupos socioculturales). De esta manera, el diálogo y la interacción social cobran un papel clave, en contraposición a la mera manipulación y visualización de objetos ostensivos.

Detrás del razonamiento diagramático, del uso de visualizaciones y manipulativos para facilitar el aprendizaje matemático, hay la adopción implícita de una posición empírico - realista sobre la naturaleza de las matemáticas, que no concede el papel esencial al lenguaje y la interacción social en la emergencia de los objetos matemáticos. En cierta manera, se supone que el objeto

matemático “se ve”, se abstrae de manera hipostática de cualidades empíricas de las colecciones de cosas. Frente a esta posición proveniente de la epistemología y semiótica peirceana se encuentra la concepción antropológica de las matemáticas, según la cual los conceptos y proposiciones matemáticas se deben entender, no como abstracciones hipostáticas de cualidades perceptibles, sino como *regulaciones* de las prácticas operativas y discursivas realizadas por las personas para describir y actuar en el mundo social y empírico en el que vivimos.
En trabajos previos venimos desarrollando una técnica de análisis semiótico de las prácticas matemáticas mediante la cual tratamos de desvelar la trama de objetos matemáticos que se ponen en juego en dichas prácticas. En la sección 4 mostramos una versión del análisis semiótico que consideramos más operativa y eficaz para mostrar la configuración de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de un problema. Consideramos que esta técnica puede estar al alcance de los profesores de matemáticas y puede ayudar a que tomen conciencia de las relaciones entre los diversos tipos de lenguajes y sus relaciones con los objetos y procesos matemáticos. Ello requerirá, no obstante, el diseño, implementación y evaluación de procesos formativos específicos.

CONFIGURACIONES ONTOSEMIÓTICAS IMPLICADAS EN EL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

En esta sección analizamos los tipos de prácticas, objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de un problema sobre fracciones aplicando un procedimiento que involucra el uso de razonamiento diagramático. Se tratará de mostrar que acompañando al lenguaje visual – diagramático es necesario el concurso del lenguaje secuencial – analítico, y que junto a los objetos ostensivos, consustanciales con ambos tipos de lenguajes, está siempre presente una configuración de objetos abstractos que participan de la práctica matemática. Así mismo, mostraremos que la resolución del problema implica la realización de procesos de particularización de objetos abstractos previamente compartidos y procesos de materialización (construcción y manipulación de diagramas).

Problema del cóctel de Martini (fracción de alcohol)

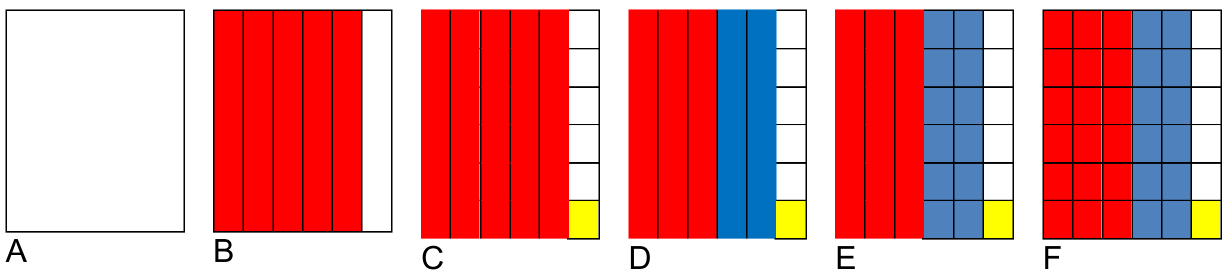
Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol. ¿Qué porcentaje de alcohol lleva un Martini?

La secuencia de diagramas de áreas de la figura 1 es explicativa del proceso de resolución para alguien que conozca las convenciones asumidas, así como los conceptos y procedimientos implicados. Sin embargo, la justificación y explicación de la solución requiere realizar la siguiente secuencia de prácticas discursivas y operativas:

1) La cantidad unitaria de Martini se representa mediante un cuadrado (figura 1A).
2) El cuadrado se divide en 6 partes iguales verticalmente (figura 1B).
3) La fracción de ginebra son los 5/6 del cuadrado unidad (color rojo, figura 1B).
4) La fracción de vermut son 1/6 de dicho cuadrado (color blanco, figura 1B).
5) El rectángulo blanco que representa la cantidad de vermut se divide en 6 partes iguales de las cuales 1 parte corresponde a la cantidad de alcohol (1/6 de 6) (figura 1C).
6) La cantidad de alcohol de la ginebra se representa por las dos barras azules de la figura 1D (2/5 de 5).

7) Las cantidades de alcohol en la ginebra y el vermut se deben expresar en la misma unidad de medida, para lo cual los dos rectángulos azules que representan la cantidad de alcohol en la ginebra se debe dividir horizontalmente en 6 partes iguales (figura 1E).
8) La cantidad total de alcohol en el Martini serán 12 + 1 = 13 cuadraditos (figura 1E).
9) La cantidad total de Martini representada por el cuadrado inicial se debe medir también con la misma unidad que se mide las cantidades de alcohol, para lo cual se prolongan las seis líneas horizontales (figura 1F).
10) La fracción de alcohol del Martini será 13/36 (figura 1F).
11) Puesto que la proporción (tanto por uno) de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.

Figura 1. Diagramas de áreas para resolver el problema del Martini



En términos de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (2006) se comienza con una conversión, pasando del registro secuencial de la lengua natural (enunciado de la tarea) al registro gráfico (diagramas de áreas); dentro de este registro se realizan determinados tratamientos para finalmente pasar de nuevo al registro secuencial: *La fracción de alcohol del Martini es 13/36*. Pero como se muestra en la secuencia de prácticas 1) a 9) el registro secuencial acompaña necesariamente al registro gráfico. Así mismo, las prácticas operativas y discursivas puestas en acción están guiadas por la trama de objetos y procesos *no ostensivos* que desvelamos en la tabla 1.

Tabla 1. Configuración de objetos y significados

.

OBJETOS OSTENSIVOS (Medios de expresión)	OBJETOS NO OSTENSIVOS (SIGNIFICADOS) (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
Enunciado:	
Un Martini se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut (LS, lenguaje ordinario)	*Concepto:* Un todo unitario de volumen *Procedimiento*: Composición de un todo unitario a partir de partes iguales *Particularización:* Una cantidad unitaria de volumen de Martini se compone de 6 partes, 5 de las cuales son ginebra y 1 parte vermut
2/5 (LD, diagrama aritmético)	*Concepto:* fracción; un todo unitario se divide en partes iguales de las cuales se individualiza una parte. *Particularización:* Aquí se particulariza la división a 5 partes iguales y se consideran aparte 2.

2/5 de la ginebra es alcohol (LD y LS)	*Concepto:* Fracción de alcohol en un volumen unitario de ginebra. *Particularización:* Un volumen unitario de ginebra se divide en 5 partes iguales; 2 de dichas partes son alcohol
1/6 del vermut es alcohol (LD y LS)	(IDEM)
¿Qué porcentaje de alcohol lleva un Martini? (LS, lenguaje ordinario)	*Conceptos*: Todo unitario; fracción, parte de un todo dividido en partes iguales; porcentaje. *Particularización:* El todo unitario es un volumen indeterminado de Martini; la parte fraccionaria corresponde al alcohol contenido en el todo.
Resolución	
1) La cantidad unitaria de Martini … (figura 1A) [LD, diagrama de áreas; [LS, descripción en lengua natural del significado del cuadrado]	*Concepto:* cantidad unitaria *Particularización:* un cuadrado de dimensiones arbitrarias representa la cantidad unitaria de Martini.
2) El cuadrado se … (figura 1B) [LD y LS]	*Procedimiento:* división de la unidad en partes iguales *Particularización:* el cuadrado unitario se divide en 6 partes iguales
3) La fracción de … (figura 1B) [LD, diagrama gráfico y aritmético] [LS, descripción del significado de los diagramas]	Concepto: fracción como parte de un todo dividido en partes iguales Particularización: el cuadrado se divide en 6 partes y se marcan 5 de rojo para representar 5/6. Convención: la fracción se expresa de dos maneras equivalentes, con un diagrama aritmético (5/6) y un diagrama gráfico
4) La fracción de …. (figura 1B) IDEM	IDEM
5) El rectángulo blanco,… se divide en 6 partes… (figura 1C) [LD y LS]	Procedimiento: división de una unidad en partes iguales Concepto: fracción como operador Particularización: al caso del rectángulo que representa la cantidad unitaria de vermut
6) La cantidad de alcohol de la ginebra …(figura 1D) [LD y LS]	Concepto: fracción como operador Particularización: al caso de la cantidades de ginebra consideradas como nueva unidad (2/5 de 5).
7) Las cantidades de alcohol y ginebra … (figura 1E) [LD y LS]	Concepto: unidad de medida; medida Procedimiento: medir un área con una unidad dada. Particularización: al caso del rectángulo que representa el alcohol de la ginebra, medido con la cuadra pequeño que representa la cantidad de alcohol del vermut.
8) La cantidad total de alcohol … (figura 1E) [LD y LS]	Concepto: magnitud volumen (sumable) Procedimientos: conteo y adición Particularización: cantidad total de alcohol en el Martini
9) La cantidad total … (figura 1F) [LD y LS]	Procedimiento: medir un área con una unidad dada. Concepto: producto cartesiano de números naturales Particularización: al caso del cuadrado que representa la cantidad de Martini (6 × 6 = 36).
10) La fracción de alcohol … (figura 1F) [LD y LS]	Concepto: fracción como parte de un todo Proposición: La fracción del alcohol en el Martini es 13/36 Argumentación: está formada por la secuencia de pasos 1) a 10), apoyada en el uso de los diagramas aritméticos y de áreas y del lenguaje secuencial natural Particularización: al caso de la fracción de alcohol en el Martini
11) Puesto que la proporción	Conceptos: número racional; proporcionalidad; fracción;

… 36,11% [LS] (conversión de expresión fraccionaria a decimal y porcentaje)	aproximación decimal Procedimientos: Obtención de la expresión decimal mediante el cociente del numerador y denominar; paso a la expresión porcentual. Particularización: al caso del racional 13/36.

Nota 1. Usamos las abreviaturas: LD, Lenguaje Diagramático y LS, Lenguaje Secuencial

Además de los procesos indicados en la tabla 1 el sujeto que resuelve el problema basando su razonamiento en el uso de diagramas de áreas realiza procesos de *materialización* de los conceptos y operaciones con fracciones implicadas en el enunciado y de *composición* de los resultados parciales que va obteniendo. La solución la encuentra finalmente mediante un procedimiento aritmético de conteo de las fracciones unitarias que ha representado en el último diagrama mediante un proceso de *idealización* (la razón del número de cuadraditos azules al número total de cuadraditos es la fracción de alcohol del Martini).

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos mostrado que existe una estrecha imbricación entre los objetos que intervienen en la actividad matemática, específicamente entre

- los lenguajes diagramáticos - visuales y los lenguajes secuenciales,
- los objetos ostensivos (materiales) y los no ostensivos (inmateriales),
- los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales).

El uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para lograr la justificación y explicación de las tareas matemáticas y las prácticas operativas y discursivas implicadas en su realización. La génesis del conocimiento matemático se sitúa en un punto medio entre ambos lenguajes, donde es necesaria su interrelación e reinterpretación mutua. Pero además hemos mostrado que los medios de expresión son “artefactos” empíricos que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos de naturaleza conceptual, proposicional, procedimental y argumentativa, que constituyen la esencia de la actividad matemática realizada con el apoyo de los objetos ostensivos. También hemos desvelado algunos procesos de particularización, generalización; descomposición, composición; materialización, idealización que se ponen en juego en el proceso demostrativo – explicativo realizado.

La manera de entender los diagramas tiene importantes consecuencias para la educación matemática toda vez que el uso de estos recursos penetra en toda la actividad matemática escolar. Consideramos que es necesario superar posiciones empiristas ingenuas sobre el uso de manipulativos y visualizaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático: acompañando a las necesarias materializaciones que intervienen en las situaciones - problemas y las prácticas matemáticas correspondientes hay siempre una cohorte de objetos no materiales intervinientes que son imprescindible para la solución de tales situaciones. Esta visión ontosemiótica de las prácticas matemáticas (antropológica y pragmatista) ayuda a tomar conciencia que tales objetos inmateriales no proceden de un mundo inaccesible sino que son de este mundo social en que vivimos y están implicados en nuestra práctica cotidiana.

El profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos que intervienen en la práctica matemática escolar, apoyada en el uso de diversos sistemas de representación y siendo consciente de las relaciones sinérgicas entre los mismos. Debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bakker, A. y Hoffmann, M.H.G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 333-358.

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking. Affordances and constraints. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and sign-Grounding Mathematics Education* (pp. 57-66). Springer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(2),163-184.

Shin, S-J. y Lemon, O. (2008). Diagrams. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Recuperado el 22 de septiembre de 2015 de

http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ALME 29