View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Funes

LA REVOLUCIÓN NO EUCLIDIANA

Clara H. Sánchez

Universidad Nacional de Colombia

chsanchezb@unal.edu.co

Varios autores coinciden en que la aparición de las geometrías no euclidianas, con los trabajos del húngaro Bolyai y el ruso Lobatchevsky, en los comienzos del siglo XIX, representa una revolución en matemáticas. Uno de esos trabajos es el trabajo de Trudeau (1987) del cual he tomado el nombre para este cursillo. El cursillo pretende hacer un recorrido por la historia del quinto postulado de los *Elementos* de Euclides y los intentos más representativos por demostrarlo a partir de los demás axiomas, y la demostración de su independencia con respecto a ellos en el siglo XIX. Se reflexionará sobre por qué se consideran las geometrías no euclidianas una revolución en matemáticas, en ciencia y en filosofía.

EL QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES

Para comenzar es conveniente recordar el enunciado de los cinco postulados que abren el primer libro de los *Elementos* de Euclides (1991, trad.)[1], luego de 23 definiciones:

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una línea recta finita en línea recta.
3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta al incidir sobre otras dos hace los ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

[1] He tomado la versión al español de la prestigiosa editorial Gredos por ser la más confiable hasta el momento, ya que ha sido traducida directamente del griego por María Luisa Puertas y tiene una excelente introducción de Luis Vega Reñón, reconocido historiador y filósofo español.

Sánchez, C.H. (2013). La revolución no euclidiana. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 79-82). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

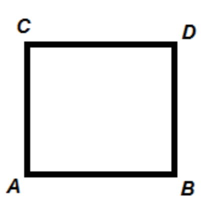
Desde la antigüedad el quinto postulado fue cuestionado por los geómetras; lo sabemos por Proclo (siglo V), quien en sus *Comentarios al primer libro de los Elementos de Euclides* afirma:

> Debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema henchido de dificultades, que Tolomeo [siglo II] se propuso resolver en un libro, y su demostración requiere varias definiciones y teoremas. Más aún: la proposición conversa es efectivamente demostrada por el propio Euclides como un teorema. (Proclo, citado[2] por la traductora de Euclides, 1991, p. 198)

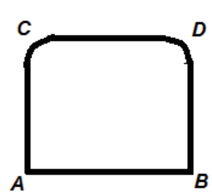
La historia de las geometrías no euclidianas es en alto grado la historia de los intentos por demostrar el quinto postulado de los *Elementos*. La lista de quienes lo intentaron a partir de los otros cuatro postulados es bastante larga; aquí nos concentraremos esencialmente en dos intentos: el de G. Saccheri (1667-1733) y el de J. Playfair (1748-1819), que muestran dos aspectos interesantes de la historia. Saccheri intentó hacer una demostración por reducción al absurdo y no percibió la importancia de su trabajo. El postulado de Playfair: "Por un punto exterior a una recta pasa a lo más una paralela", comenzó a usarse en los libros de texto, y es el que generalmente se asocia y conoce como el quinto postulado o el postulado de las paralelas de Euclides. Este postulado es equivalente al quinto postulado de Euclides pero es más sencillo en su enunciado y tiene la misma característica de evidencia que caracterizaba a los otros cuatro.

Los cuadriláteros de Saccheri

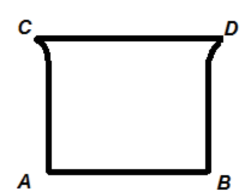
Cuando uno intenta construir con regla y compás un cuadrado $ABCD$ dado su lado, el camino que se sigue de manera casi generalizada es el siguiente: dado un segmento AB, se traza un perpendicular a AB por A y otra perpendicular a AB por B, luego se "cortan" sobre esas perpendiculares los segmentos AC y BD.



Hipótesis del ángulo recto



Hipótesis del ángulo obtuso



Hipótesis del ángulo agudo

La figura resultante sin duda es un cuadrilátero con tres lados iguales y dos ángulos rectos, pero no hay garantía de que el cuarto lado sea igual a los otros

[2] Cita hecha en el comentario al quinto postulado.

tres y que los ángulos en C y en D sean rectos. Saccheri analizó los tres casos posibles, a los que llamó: hipótesis del ángulo recto, hipótesis del ángulo obtuso e hipótesis del ángulo agudo como se observa en la Figura anterior. Su idea era probar que estos dos últimos casos eran imposibles y de esta manera sólo quedaba el caso del ángulo recto. Saccheri encontró una contradicción en el caso del ángulo obtuso, pero no pudo encontrar una en el caso del ángulo agudo, y la descartó por encontrar resultados que contrariaban la intuición.

El postulado de Playfair

En 1795, Playfair enuncia como postulado alternativo para el quinto postulado la afirmación "Por un punto exterior a una recta pasa a lo más una paralela". Aunque este enunciado se conocía desde Proclo, es a partir del trabajo de Playfair cuando empieza a usarse regularmente. En *Elementos* se prueba (proposición 27) que por un punto exterior a una recta se puede trazar (por lo menos) una paralela sin necesidad del quinto postulado, pero no se puede probar que hay exactamente una, sin el quinto postulado. De esta manera resultan equivalentes.

Los trabajos de Bolyai, Lobatchevsky y Gauss

Los trabajos de Janos Bolayi (1802, 1860), de Nicolai Lobatchevsky (1792, 1856) y de Karl Friedrich Gauss (1777, 1855) se basan en construir una teoría en la cual se cambia el quinto postulado por uno que afirma que *por un punto exterior a una recta pasan por lo menos dos paralelas*. Con ello se puede demostrar que en realidad pasan infinitas. De los axiomas de la teoría se deduce que la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que 180°. Como la teoría parece contradecir la experiencia, a pesar de ser lógicamente consistente, estos trabajos fueron considerados meras especulaciones intelectuales sin ningún tipo de utilidad, apenas un "juego lógico". En la segunda mitad del siglo XIX, Henri Poincaré (1854, 1912) y Eugenio Beltrami (1835, 1900) dieron modelos para la teoría y desde entonces la comunidad matemática y científica comenzó a percibir la trascendencia de estos resultados.

El trabajo de Riemann

Por su lado Bernhard Riemann (1826, 1866) escogió el camino de que por un punto exterior a una recta no pasan paralelas. Se inspiró en la superficie terrestre, y consideró que la infinitud de la recta podía cambiarse por la noción de ilimitada, sin principio ni fin, como lo es una circunferencia, con lo cual cambió también el segundo postulado. Así que una recta en su sistema es un círculo máximo de la esfera y de esta manera todos los círculos máximos se cortan en los "polos" o en el Ecuador terrestre y no hay rectas paralelas. En este sistema la suma de los ángulos de un triángulo es mayor de 180°.

La revolución no euclidiana

¿Por qué considerar las geometrías no euclidianas una revolución en matemáticas? (Véase Kline, 1967/1992; Zheng, 1992/1995; Campos, 2008) Porque, sin duda, cambió el paradigma de lo que hasta entonces se consideraba matemática: una ciencia que tenía nexos indiscutibles con la realidad, el espacio físico coincidía con el espacio euclidiano. Al haber tres geometrías, tres teorías lógicamente consistentes, es necesario preguntarse por la noción de espacio y cuál de ellas coincide con la "realidad" (ver Gray, 1979/1992). La matemática perdió su carácter de obtener verdades absolutas y la noción de espacio absoluto de Newton quedó cuestionada. Así que la pregunta de qué entendemos por verdad y el papel de la matemática en la ciencia serán temas de reflexión de los filósofos y los científicos. Desde entonces ni la matemática ni la ciencia son las mismas de antes, y eso es lo que se llama una revolución, un cambio de pensamiento que trasciende todas las esferas del conocimiento.

Referencias

Campos, A. (2008). *Introducción a la historia y la filosofía de la matemática* (vol. 2). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Euclides (1991, trad.). *Elementos* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Gray, J. (1992). *Ideas de espacio* (Fernando Romero, Tr.). Madrid, España: Biblioteca Mondadori (primera edición en inglés, 1979).

Kline, M. (1992). Las geometrías no euclidianas y su significación. En *Matemáticas para los estudiantes de humanidades* (pp. 451-475). México: Fondo de Cultura Económica (primera edición en inglés, 1967).

Trudeau, R.J. (1987). *The non-Euclidean revolution*. Cambridge, EUA: Birkhauser Boston Inc.

Zheng, Y.X. (1995). Non-Euclidean geometry and revolutions in mathematics. En D. Gillies (Ed.), *Revolutions in mathematics* (pp. 169-182). Nueva York, EUA: Oxford University Press (primera edición en inglés, 1992).