La proyección estereográfica

Gonzalo García

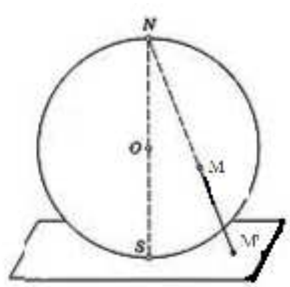
Universidad del Valle

gonzalo.garcia@correounivalle.edu.co

En este cursillo estudiaremos la proyección estereográfica. Dicha función es una proyección de la esfera, desde uno de sus puntos *N*, a un plano que toca a la esfera en un punto *S* diametralmente opuesto al punto *N*. Demostraremos que la proyección estereográfica preserva ángulos y envía circunferencias a rectas o a circunferencias. Analizaremos la relación entre la proyección estereográfica y la inversión respecto a una circunferencia. Finalmente definiremos el plano de Lobachevski y mostraremos cómo, mediante una proyección estereográfica especial, se puede obtener un modelo de este plano sobre un plano común conocido como el modelo de Poincaré para la geometría hiperbólica.

Definición y propiedades de la proyección estereográfica

Consideremos la esfera unitaria S^2 y un punto N sobre ella. Sea *S* el punto en la esfera diametralmente opuesto a N y sea π el plano tangente a S^2 en el punto *S*. Sea M un punto de S^2 diferente de N y sea NM la recta determinada por los puntos M y N. Sea M' el punto de intersección de la recta NM con el plano π. Diremos que M' es la proyección estereográfica del punto M de S^2 al plano π. Esta correspondencia define una función biyectiva entre $S^2 / \{N\}$ y el plano π.



Tomemos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares $Oxyz$ en el espacio. Sea la esfera unitaria S^2 con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Consideremos la proyección estereográfica, con centro el polo norte $N(0,0,1)$, sobre el plano $Z = -1$. Sea $M(x, y, z)$ un punto en la esfera distinto de *N*. La imagen del punto *M* por la proyección estereográfica es el punto $M'(u, v, -1)$ donde

García, G. (2013). La proyección estereográfica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 63-66). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

$$u = \frac{2x}{1-z} \qquad\qquad v = \frac{2y}{1-z}$$

Claramente la proyección estereográfica es una función inyectiva sobre el plano $Z = -1$, con inversa la función

$$x = \frac{4u}{u^2+v^2+4} \qquad y = \frac{4v}{u^2+v^2+4} \qquad z = \frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4}$$

Proposición. La proyección estereográfica envía circunferencias que no pasan por el punto de proyección en circunferencias y envía circunferencias que pasan por el punto de proyección en rectas (Rosenfeld y Sergeeva, 1977; Cannon, Floyd, Kenyon y Parry, 1997).

Demostración. Las circunferencias se obtienen al intersecar la esfera con un plano de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Entonces

$$A\frac{4u}{u^2+v^2+4} + B\frac{4v}{u^2+v^2+4} + C\frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4} + D = 0$$

y por lo tanto

$$(C+D)(u^2+v^2) + 4Au + 4Bv + 4(D-C) = 0$$

Si el plano dado pasa por el polo norte, entonces $C + D = 0$, y la anterior es la ecuación de una recta en el plano $Z = -1$. Si el plano dado no pasa por el polo norte, entonces $C + D \neq 0$ y la ecuación anterior corresponde a una circunferencia en el plano $Z = -1$.

Proposición. La proyección estereográfica conserva ángulos; es decir, la proyección estereográfica envía los ángulos formados por curvas de la esfera en ángulos iguales formados por las curvas proyectadas en el plano π (Rosenfeld y Sergeeva, 1977; Cannon, Floyd, Kenyon y Parry, 1997).

Demostración. Sean

$$\alpha_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)), i = 1, 2$$

dos curvas en la esfera unitaria que se intersecan en el punto

$$\alpha_i(0) = M(x, y, z).$$

Sea Φ el ángulo entre las curvas en el punto *M*. Es decir, Φ es el ángulo formado por las rectas tangentes a las curvas en dicho punto. Por lo tanto

$$\cos\Phi = \frac{x_1'(0)x_2'(0) + y_1'(0)y_2'(0) + z_1'(0)z_2'(0)}{\sqrt{(x_1'(0))^2 + (y_1'(0))^2 + (z_1'(0))^2}\sqrt{(x_2'(0))^2 + (y_2'(0))^2 + (z_2'(0))^2}}.$$

Por otro lado, el ángulo ϕ formado por las curvas proyección de las curvas α_i satisfacen

$$\cos\phi = \frac{u_1'(0)u_2'(0) + v_1'(0)v_2'(0)}{\sqrt{(u_1'(0))^2 + (v_1'(0))^2}\sqrt{(u_2'(0))^2 + (v_2'(0))^2}}.$$

Derivando las funciones α_i con respecto a *t* y usando las ecuaciones de la función inversa de la proyección estereográfica encontramos que

$$\cos\Phi = \cos\phi$$

y por lo tanto, el ángulo Φ, formado por las curvas en la esfera es igual al ángulo ϕ formado por las curvas proyección en el plano π.

PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA E INVERSIÓN RESPECTO A UNA ESFERA

Sea $S(R)$ una esfera con centro en un punto M_0 y radio R. Dado un punto M del espacio, diferente de M_0, sea M_1 otro punto tal que pertenece al rayo que contiene a M_0 y M y que tiene origen en M_0 y tal que $M_0M.M_0M_1 = R^2$. Se llama inversión respecto de la esfera *S* a la función que lleva el punto *M* en el punto M_1.

Si tomamos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio y la esfera $S(2)$ con centro en el polo norte, tenemos que la inversión envía el punto $M(x, y, z)$ en el punto $M_1(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ donde

$$u = \frac{4x}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} \qquad v = \frac{4y}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} \qquad w = \frac{x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 4}{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

Igual que la proyección estereográfica, la inversión envía esferas que no pasan por el punto M_0 en esferas y a esferas que pasan por M_0 en planos del espacio. Observemos que si se restringe la inversión a la esfera con centro en el origen y radio uno se obtiene la proyección estereográfica definida antes. Una observación importante acerca de la inversión es que es su propia inversa.

La proyección estereográfica y el plano de Lobachevski

Consideremos el espacio $R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ con la métrica de Minkowski: Dados los puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$, definimos la distancia entre M_1 y M_2 por

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2},$$

y el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OM_1}$ y $\overrightarrow{OM_2}$ por

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 - z_2^2}}.$$

Definimos el plano de Lobachevski por $L = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathrm{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$. Así, el plano de Lobachevski es un hiperboloide de 2 hojas que se puede pensar como una esfera de radio imaginario i en el espacio de Minkowski. En este espacio, al igual que en el espacio euclidiano, podemos definir la proyección estereográfica de la esfera de radio i, con centro en el punto $N(0,0,1)$, sobre el plano $Z = -1$. Esta proyección tiene las mismas propiedades demostradas para la proyección sobre la esfera de radio 1. La imagen de la hoja inferior del hiperboloide mediante esta proyección es el interior de la circunferencia de centro en el origen y radio 2. Esto, junto con las propiedades de la proyección estereográfica nos permitirá estudiar algunas propiedades de otro modelo de la geometría hiperbólica, el modelo de Poincaré (Rosenfeld y Sergeeva, 1977).

Referencias

Cannon, J., Floyd, W., Kenyon, R. y Parry, W. (1997). Hyperbolic geometry. En S. Levy (Ed.), *Flavors of geometry* (pp. 59-116). Cambridge, EUA: Cambridge University Press.

Rosenfeld, B. y Sergeeva, N. (1977). *Proyección estereográfica*. Moscú, Rusia: Editorial Mir.