

EL APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES CONDICIONALES USANDO GEOMETRÍA DINÁMICA

Nabil Ortegón, Guillermo Salas y Carmen Samper

Universidad Pedagógica Nacional

nabilortegon@hotmail.com, gsalas@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

Reportamos avances de una investigación en curso, enfocada en el proceso de conceptualización de la proposición condicional en matemáticas por parte de un grupo de estudiantes de educación básica. Se diseñaron tareas enmarcadas en un ambiente de geometría dinámica que buscan propiciar la interpretación de lo que es y lo que expresa una condicional en matemáticas. Con ellas pretendemos que los estudiantes comprendan que el consecuente es necesariamente resultado de las condiciones que se reportan en el antecedente y que el antecedente es suficiente para el consecuente. Presentamos respuestas a las tareas donde se evidencia lo mencionado anteriormente.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$)* de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), en consonancia con otros investigadores como Laudien (1999) en Chile, Laborde (2000) en Francia y Hoyles y Küchemann (2002) en Inglaterra, ha identificado algunas dificultades de los estudiantes relacionadas con la afirmación condicional como objeto matemático y como una herramienta en la deducción. Por ejemplo, observaron que los estudiantes interpretan la condicional como equivalente a su inversa pues creen que el antecedente y el consecuente son intercambiables, y que el mensaje es el mismo.

Las condicionales son afirmaciones usadas para expresar generalizaciones de propiedades matemáticas, ya sean como teoremas, postulados o conjeturas. Los investigadores concuerdan en que la falta de esta comprensión afecta la posibilidad de aprender a demostrar matemáticamente porque las condicionales juegan un papel importante en la deducción a través de esquemas de razonamiento válidos como *modus ponendo ponens* y *modus tollendo tollens*.

A partir de una prueba que realizamos a estudiantes del grado noveno del Instituto Pedagógico Nacional y del colegio República Bolivariana de Venezuela,

corroboramos la existencia de esas dificultades. Los resultados de la prueba mostraron que los estudiantes: i) interpretan la condicional como bicondicional; ii) no identifican argumentos deductivos válidos; y iii) no pueden determinar si la conclusión dada en un argumento se puede deducir de manera válida de los datos de la hipótesis.

Lo anterior sustenta la pregunta que orienta nuestra investigación:

¿Cómo aprovechar la geometría dinámica para favorecer que los estudiantes escolares usen y aprovechen significativamente lo que es una proposición condicional en geometría?

Una aproximación a la respuesta, en calidad de hipótesis, podría ser que el uso de la geometría dinámica impulsa la comprensión y el uso correcto de la condicional, y ayuda a los estudiantes a mejorar sus habilidades argumentativas para justificar afirmaciones. Laudien (1999) se pregunta a qué edad o nivel escolar (si los hay) comienzan los estudiantes a distinguir una condicional de una bicondicional; a su vez Hoyles y Küchemann (2002) suponen que los estudiantes pasan de lo empírico a lo deductivo en grados superiores de bachillerato. En el desarrollo de nuestra investigación esperamos poder aportar algún tipo de respuesta a estos interrogantes y suposiciones.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

De acuerdo con nuestra hipótesis, nuestra atención se dirigió hacia artículos e investigaciones que aportan algunos elementos conceptuales y metodológicos en torno a esta problemática.

Gutiérrez (2005) asegura que es importante usar la geometría dinámica (GD) como herramienta de mediación porque permite que los estudiantes formulen conjeturas con un alto grado de convicción de la veracidad de estas y ayuda a mejorar su habilidad de razonamiento deductivo. Colette Laborde – refiriéndose a artículos publicados en el mismo número de la revista *Educational Studies in Mathematics* que el suyo (Laborde, 2000), señala que Jones, Mariotti, Gutiérrez y Hadas concluyen que la GD proporciona posibilidades para la formulación de justificaciones teóricas, posiblemente con la mediación del profesor. Por último, Samper, Perry, Camargo, Molina y Echeverry (2010) sostienen que las tareas propuestas a estudiantes universitarios en un ambiente de trabajo apoyado por GD impulsan la interacción social en el aula y posibilitan la superación de dificultades asociadas a la comprensión de la condicional.

Echeverry, Molina, Samper Perry y Camargo y (2012) analizaron si unas estrategias didácticas usadas a lo largo de un semestre con estudiantes universitarios favorecieron el uso y la interpretación de la condicional. Para analizar respuestas a dos pruebas realizadas, una a principio del semestre y otra al final, establecieron dos grupos de categorías de análisis. El primero grupo se usó para estudiar el *tipo de justificación*, es decir para identificar en el argumento que expone el estudiante para justificar su decisión, cómo usan la información dada y si el argumento guarda relación con la lógica matemática. El segundo grupo de categorías de análisis se usó para estudiar el *uso de la condicional dada*; buscaban determinar si el estudiante reconocía la condicional como un instrumento para validar sus decisiones y cómo usaban los esquemas de razonamiento modus ponendo ponens y modus tollendo tollens. Estas categorías de análisis se convierten en el punto de partida para diseñar las que usaremos en el curso de nuestra investigación.

Por último, partiendo de que la matemática es una producción cultural, Moreno y Waldegg (2001), bajo el enfoque sociocognitivista, hacen referencia a que la interacción entre individuos se puede dar en dos líneas: simétrica y asimétrica. La primera se define como la interacción equilibrada; algunas formas de esta son: i) la cooperación; ii) el aprendizaje en grupo. La segunda se define como la interacción que tiene el experto (docente) con los estudiantes. En esta se reconoce la interacción tutorial, en la que el experto orienta al aprendiz y le ayuda a realizar alguna tarea. Este enfoque reconoce el conflicto sociocognitivo que surge por las interacciones sociales entre los estudiantes (e.g., distintos puntos de vista, diversos métodos y respuestas, discusiones, todo ello importante en el aprendizaje).

METODOLOGÍA

Para desarrollar nuestra investigación seguimos una metodología de indagación empírica, a través de experimentos de diseño. La investigación se está realizando con ocho estudiantes de décimo grado del Colegio República Bolivariana de Venezuela. Inicialmente se diseñó y se aplicó una prueba con la finalidad de identificar problemáticas específicas de los estudiantes que están participando en este experimento respecto a la interpretación de proposiciones condicionales. Al finalizar el experimento se realizará otra prueba para determinar si hubo cambios que se puedan atribuir a las acciones específicas de enseñanza en las que la GD juega un papel importante.

Posteriormente, se diseñó una secuencia de tareas para desarrollar en un ambiente de GD, encaminadas a que los estudiantes comprendan que una proposición condicional en geometría es aquella que expresa una dependencia entre propiedades. Aceptando que la construcción de conocimiento es un acto social, las respuestas a las tareas serán discutidas con los estudiantes para que a partir de ellas esta pequeña comunidad mejore su comprensión de lo que es una condicional. Simultáneamente, se realizó un análisis previo de las posibles actuaciones de los estudiantes en el proceso de resolución de las tareas, identificando construcciones, exploraciones y respuestas que podrían dar y la mediación correspondiente que debía hacer el profesor. Lo que sigue será analizar el registro de las construcciones que hacen los estudiantes, las conjeturas que plantean y las discusiones que tienen durante su trabajo y en el momento de la socialización, teniendo como referente las categorías que emergieron del análisis de la prueba inicial que son susceptibles a cambios.

Por último, las conclusiones de esta investigación, tendrán en cuenta aspectos particulares como: i) ambiente de aprendizaje ii) las tareas como herramienta para comprender la importancia de una condicional en una demostración y iii) el uso de la GD como mediadora en estos procesos.

EN CUANTO A LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

A partir de las respuestas de los estudiantes a las cuatro preguntas de la prueba inicial, establecimos nuestro primer conjunto de categorías de análisis. Para ilustrar, presentamos la Pregunta 2 y las respuestas de los estudiantes.

Pregunta 2: ¿Usted cree que la siguiente afirmación estaría en un libro de geometría? Explique su respuesta.

Si el cuadrilátero $ABCD$ es rectángulo entonces el cuadrado de un número es mayor o igual a cero.

Respuestas:

“Sí, porque tiene que ver con figuras geométricas”.

“No debería estar esta afirmación porque para que un cuadrilátero $ABCD$ sea rectángulo, el cuadrado de un número no tiene que ser mayor o igual a cero”.

“Pues yo pienso que no porque a veces cosas de geometría se encuentran en libros de matemáticas o problemas de ecuaciones”.

En la primera respuesta observamos que el estudiante no identificó dependencia; establecimos la categoría NID (no identifica dependencia). El argumento en la segunda respuesta menciona algún tipo de dependencia y por ello surge la categoría ID (identifica dependencia). Finalmente, la tercera respuesta no tiene relación con lo que se está preguntando y por ello se estableció la categoría RFC (respuesta fuera de contexto).

La siguiente tabla resume las categorías establecidas a partir de la prueba:

Categoría	Significado
Respuesta fuera de contexto (RFC)	Realiza una interpretación incorrecta de la situación y la asocia a un tipo de respuestas que no tienen relación con lo que se está preguntando.
Condicional implícita (CI)	Reconoce la condicional que subyace a la situación pero en la explicación no lo menciona de forma explícita en su respuesta.
Identifica dependencia (ID)	Identifica la dependencia entre las propiedades mencionadas en la situación.
No identifica dependencia (NID)	No identifica relaciones de dependencia entre propiedades.
Condicional explícita sin formato (CESF)	Responde con una condicional pero no usa el formato si... entonces...

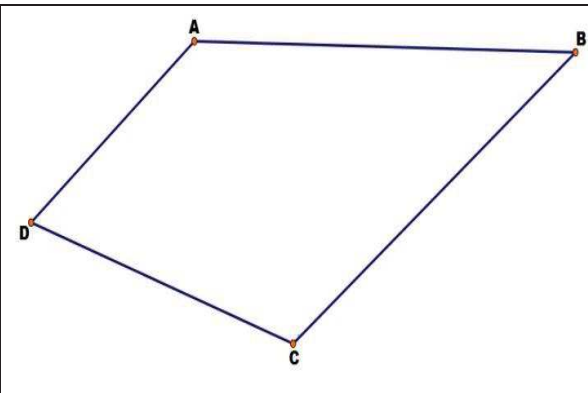
Tabla 1: Categorías de análisis

DISEÑO DE LAS TAREAS

Estas tareas buscan que los estudiantes reflexionen sobre las dependencias que existen entre conjuntos de propiedades y formulen esas dependencias a través de proposiciones condicionales. El usar la GD permite que los estudiantes identifiquen el antecedente y el consecuente de una proposición condicional a través de las exploraciones y descripciones realizadas.

Entre las tareas planteadas hay problemas como el que se presenta en la Figura 1. Con este problema se busca que los estudiantes determinen la relación entre tipo de cuadrilátero y las propiedades de las diagonales, y que se percaten de que todas y cada una de las condiciones en el antecedente hacen una diferencia en el resultado que se reporta en el consecuente. Es decir, los estudiantes no deben dar una conclusión respecto a una propiedad si no están seguros de

que las condiciones construidas que reportan en el antecedente realmente se tienen. Por ello, es imprescindible saber qué punto arrastran, qué medidas toman y en qué se están fijando cuando realizan el arrastre.



Construye las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.

Arrastra hasta lograr que las diagonales sean congruentes y que se bisquen (que el punto de intersección sea el punto medio de ambos segmentos). Describe el proceso de exploración.

Escribe la conjetura.

Figura 1: Ejemplo de problema propuesto a los estudiantes

A continuación describimos nuestra expectativa sobre el proceder de los estudiantes: 1) con el arrastre, hallando el punto medio de cada diagonal y su medida, logran que sean congruentes y se bisquen; 2) hacen una construcción robusta (Healy, 2000) de un cuadrilátero que cumpla las condiciones, trazando dos diámetros de una circunferencia y luego el cuadrilátero determinado por los extremos de estos. La conjetura esperada es: *si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan entonces es un rectángulo.*

Un grupo de estudiantes concluyen, a partir de una primera construcción, lo siguiente: “si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan entonces se encuentran dos triángulos isósceles iguales y dos diferentes”. Ante el cuestionamiento del profesor sobre la seguridad de su respuesta, proceden a maximizar su construcción y un estudiante nota que “se descuadró. Lina me va avisando cuando el punto se cuadre”. Es decir, observan que en efecto las diagonales no se bisecan. Realizan nuevamente la construcción y cambian su conjetura por la siguiente: “si las diagonales del cuadrilátero son congruentes y se bisecan entonces se forma un rectángulo”.

En la siguiente sesión, el docente retomó lo ocurrido en la clase anterior para reforzar la importancia de las relaciones entre los dos conjuntos de propiedades: las que están en el antecedente y las que están en el consecuente. Les explicó que aunque visualmente las representaciones obtenidas parecen cumplir las dos condiciones de las diagonales, haber obtenido resultados diferentes significa que no están reportando una dependencia real.

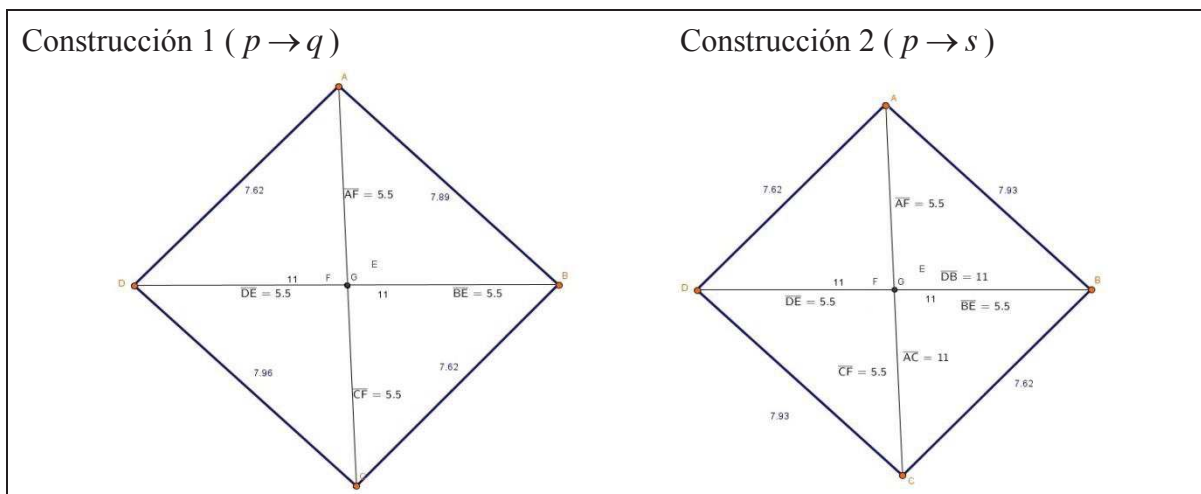


Figura 2: Construcción errónea y acertada

Aprovechó la situación para explicar que una condicional reporta una dependencia entre las propiedades dadas en el antecedente y las que constituyen el consecuente. El docente explicó que una exploración a partir del arrastre ofrece ideas de posibles dependencias, pero que como hay diferentes variables que están en juego es posible que no se consiga de manera precisa la construcción deseada. Por ello, sólo con una construcción robusta se puede asegurar la posible validez teórica y, por ende, establecer la conjetura. Así, el profesor indica que en la hipótesis de la primera conjetura sólo se debe mencionar la congruencia de las diagonales y que añadir la otra condición permite concluir que el cuadrilátero es un rectángulo.

Son experiencias visuales de este tipo, las que esperamos que ayuden a los estudiantes a entender lo que es y expresa una condicional, experiencias posibles sólo a través de la geometría dinámica.

CONCLUSIONES

Dado que lo que estamos reportando es el avance de la investigación, no podemos llegar a conclusiones respecto a la eficiencia de la secuencia de tareas para responder de forma positiva nuestra pregunta de investigación. Sin embargo, respecto a la prueba inicial, como solamente 18 de las 32 respuestas las clasificamos como ID, CI y CESF, ello indica que, en general, los estudiantes reconocieron que los problemas trataban sobre dependencias entre propiedades pero nunca expresaron ese reconocimiento formulando explícitamente una condicional. Por otro lado, las acciones y repuestas del problema sobre las diagonales del cuadrilátero ofrecieron elementos suficientes para que el do-

cente pudiera tratar asuntos respecto a la condicional, propiciando así la comprensión de ésta.

REFERENCIAS

- Echeverry, A., Molina, O., Samper, C., Perry, P. y Camargo (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 77-92. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/2055/1/2012-Echeverry%26Proposicion.pdf>
- Gutierrez, Á. (2005). Aspectos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploración con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 27-44). Córdoba, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft cabri Constructions. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 101-117). Hiroshima, Japón: Universidad de Hiroshima.
- Hoyles, C. y Küchemann, D. (2002). Students' understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*, 51(3), 193-223.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 151-161.
- Laudien, R. (1999). Misunderstanding of if-then as if and only if. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 225-231). Columbus, EUA: Eric Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education.
- Moreno, L. y Waldegg, G. (2001). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. en C. Castiblanco, L. Moreno, F. Rodríguez, M. Acosta, L. Camargo y E. Acosta (Eds.), *Memorias del seminario nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas* (pp. 52-57). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, O. y Echeverry, A. (2010). Geometría dinámica. Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces. *Educación Matemática*, 22, 119-142.