¿SE MODIFICAN LOS ARGUMENTOS DE LOS ESTUDIANTES CUANDO SE PRIORIZA LO TEÓRICO SOBRE LO EMPÍRICO?

Claudia Vargas[1], Leidy Cepeda[1] y Carmen Samper[2]
Universidad Pedagógica Nacional
claudiavargas90@gmail.com, marcela_cepedab@hotmail.com, carmensamper@gmail.com

En el artículo se presenta un análisis de los argumentos utilizados por un grupo de estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional en dos momentos de su formación como licenciados en matemáticas. Para ello, se hace uso del modelo de Toulmin para estudiar la estructura de los argumentos y de la caracterización realizada por Viholainen, respecto a los argumentos formales e informales.

INTRODUCCIÓN

El estudio que se presenta es relativo a la argumentación que realizan unos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuando tratan de resolver un problema, que en esencia es el mismo, en dos momentos: en el primer semestre de su formación y cuando cursaban el tercer semestre. Para determinar semejanzas y diferencias, se analizan los argumentos usando el modelo de argumentación propuesto por Toulmin (1974, citado en Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010).

EL MODELO DE TOULMIN Y LOS TIPOS DE ARGUMENTOS

El modelo de Toulmin para la argumentación es una herramienta que permite determinar la estructura y la profundidad de un proceso de argumentación y caracterizar algunos tipos de argumentos (Cramer, 2011). Los elementos esenciales del modelo de Toulmin son la *conclusión*, los *datos* y el *garante*. La *conclusión* es el elemento sobre el cual se desarrolla el argumento, y se define como la opinión del hablante o la afirmación que establece como certera. Los *datos* son hechos incuestionables que sustentan la conclusión. El *garante* es un enunciado general que puede ser regla de inferencia, convención, principio o supuesto, que permite relacionar los datos con la conclusión (Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010).

---

[1] Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

[2] Profesora titular del Departamento de Matemáticas.

Vargas, C., Cepeda, L. y Samper, C. (2011). ¿Se modifican los argumentos de los estudiantes cuando se prioriza lo teórico sobre lo empírico? En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 315-322). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En ocasiones, en un argumento se evidencian otros tres elementos, también contemplados en el modelo, que se denominan *respaldo*, *refutador* y *calificador*. Cuando el *garante* en sí mismo no es suficiente para conectar la conclusión con los datos, se hace uso del *respaldo*. Éste es una evidencia adicional que le da fuerza al *garante*. En caso de que en un argumento exista una afirmación o hecho que invalide la conclusión, éste se denomina *refutador.* Por último, el *cualificado*r establece el grado de certeza que se tiene sobre la conclusión (Boero et al., 2010).

Además, el modelo de Toulmin es útil para distinguir entre *argumentos formales* e *informales;* en un *argumento formal*, el *garante* es elemento de un sistema teórico, mientras que en un *argumento informal*, el *garante* está basado en interpretaciones de propiedades matemáticas que se infieren a partir de una imagen visual o de una afirmación proferida por una autoridad externa, es decir, una persona que es autoridad para el sujeto, como el profesor, un texto, un compañero, un profesor de un curso anterior (Viholainen, 2011).

Descripción de la situación

A continuación, se realiza una breve descripción de los dos experimentos. El primero se realizó con un grupo de estudiantes (Camila, Pilar y Daniel) del primer curso de la línea de geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, curso en el cual el acercamiento a los conceptos y relaciones geométricos se hace de manera informal. Se centra en el desarrollo de competencias como la visualización, el lenguaje y la argumentación informal. Se les propuso el siguiente problema cuyo propósito era que descubrieran el hecho geométrico según el cual, en una circunferencia, los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes, y que justificaran informalmente su conjetura.

> Se tiene una circunferencia con centro en el punto *O*, y un punto fijo *P* en el interior de tal circunferencia, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ y son dos cuerdas cualesquiera de la misma circunferencia que contienen a dicho punto *P*. ¿En qué casos se tiene que $AP/BP=DP/CP$?

El segundo experimento fue cuando dos de ellos (Camila y Daniel) se encontraban en el tercer curso de la línea de geometría. Tanto el segundo como el tercer curso están enfocados en el desarrollo formal de un sistema teórico referente a la geometría euclidiana plana y del espacio. Se les propuso resolver el mismo problema, planteado de forma diferente porque el nivel de trabajo formal y de conocimientos de los estudiantes era mayor, con el objetivo de que ellos demostraran no sólo su conjetura sino también el hecho geométrico nombrado anteriormente:

> Construya una circunferencia con centro en C y un punto fijo en P en el interior de esta circunferencia. ¿Para qué cuerda $\overline{AB}$, de la misma circunferencia, que contenga dicho punto P se tiene que el producto $\mathrm{AP} \times \mathrm{BP}$ es máximo?

En ambos casos, se les pedía dar una anticipación, realizar la construcción, reportar los pasos de esta última y la forma como exploraron, producir una conjetura y justificarla. El primer experimento se realizó en el aula de clase y la docente desarrolló el papel de profesora-observadora. El segundo experimento fue una prueba clínica, en la cual se contó con dos observadoras, una de ellas la profesora que habían tenido en el curso del primer semestre.

En el primer experimento, el enunciado del problema nombraba dos cuerdas, puesto que se consideró que difícilmente los estudiantes en ese nivel piensan en construir otra cuerda para comparar resultados. Además, tener las cuerdas les podría sugerir construir segmentos para conformar triángulos que descubren semejantes, y que les permitiría justificar la respuesta al problema.

ANÁLISIS

Situación 1: Descubren el invariante

El primer momento que se analiza es cuando el grupo encuentra la invariancia, ya sea del cociente (experimento 1) o del producto (experimento 2). En ambos casos, habían realizado la construcción de la circunferencia, del punto P en el interior de la misma y de la cuerda AB. En el primer experimento, habían construido además la cuerda CD.

En el primer caso Pilar y Daniel encuentran las medidas de los segmentos determinados por P en las cuerdas AB y CD, y calculan las razones indicadas, cada uno de ellos en calculadoras diferentes. Los cocientes que encuentra Daniel no corresponden con los pedidos, obteniendo datos diferentes, mientras que Pilar lo hace correctamente y descubre que éstos son iguales.

231. Obs: ¿Qué paso Pilar?

232. Pilar: Que da igual. [Vuelve a calcular el cociente $\mathrm{DP/CP}$.] Da igual.

233. Camila: [Mirando la calculadora de Pilar.] Rótalo a ver si cambia algo.

234. Pilar: No, siempre da igual. Mira [Arrastra al punto D.] Está igual. Está muy raro.

235. Daniel: Voy a volver a hacer lo de las razones a ver si fue que yo medí mal. Voy a volver a medir los segmentos y volver a hacer la división. Debo tener entonces algo mal, porque tiene que dar en éste entonces igual. [Se refiere a la calculadora que él está usando.]

236. Camila: O es Pilar la que dividió mal, porque es imposible…

237. Pilar: Pero es que lo dividí tres veces los dos. Así mueva el punto *P* a cualquier lugar. [Mueve el punto *P* por la pantalla.]

[…]

241. Camila: Intenta mover la recta *AB*.

[…]

244. Pilar: [Arrastra la recta *AB*.] Vea, sí. Sigue siendo igual.

[…]

267. Daniel: Siempre dan igual. [Observa el nuevo resultado que obtuvo.]

En el anterior fragmento, se observa que el grupo de estudiantes, haciendo uso de Cabri, llega a establecer que los cocientes entre las longitudes de los segmentos determinados por *P*, en las dos cuerdas son iguales, siendo esto la *conclusión* de acuerdo con el modelo de Toulmin. Ésta se origina a partir de las medidas de los segmentos determinados por *P*, que en este caso serían los *datos* del argumento. El *garante*, que les permite relacionar los datos con la conclusión obtenida, es la evidencia que provee la calculadora al comparar los cocientes. En este proceso, la cuerda *CD* permanece fija, mientras que la cuerda *AB* es arrastrada. Esto permite que la comparación realizada, no sólo sea entre dos segmentos fijos, sino de innumerables casos.

En este caso, se identifica un *refutador* en el argumento: la evidencia encontrada por Daniel en su calculadora. Ésta habría podido invalidar la conclusión porque no corresponde con los resultados de Pilar. Este elemento pierde validez cuando Daniel vuelve a realizar el procedimiento y se da cuenta de que había cometido un error al calcular los cocientes. Por otra parte, frases como las proferidas en [236] y [237] muestran que la realimentación inmediata que les da el software no siempre es suficiente para tener certeza de la conclusión. Estas acciones de verificación eran necesarias para que ellos determinaran el *cualificador*.

En el segundo experimento, Camila y Daniel determinan las medidas de los segmentos *AP* y *PB*, y posteriormente calculan el producto de ellas. Al arrastrar la cuerda *AB*, Daniel observa que la medida es constante. Establecen como primera conjetura "No importa cuál sea la cuerda, el producto va a ser siempre constante".

27. Camila: [Toma las medidas AP y PB, y luego calcula el producto entre éstas.] Ahora tocaría hacer otras rectas …

    […]

31. Obs1: ¿Por qué dices que tocaría hacer otra recta?

32. Camila: Para comprobar si sí es la misma. O sea ya tenemos como una cuerda y ahora hacer otra por otro, sí otra recta que contenga a *P* y volver a medir si es…

33. Daniel: [Desoculta la recta *AB* y la mueve haciendo varios giros completos sobre la circunferencia.] O puedes mover la recta que construiste al principio como estoy haciendo yo…

    […]

37. Daniel: No importa cuál sea la cuerda, el producto va a ser siempre constante…

En este argumento, se tiene que el *dato* es la existencia de una cuerda de la circunferencia que contiene al punto *P*, junto con las medidas de los segmentos determinados por éste (AP y PB). El *garante*, utilizado por Daniel, es la evidencia encontrada en Cabri al considerar los innumerables casos obtenidos al arrastrar la recta. En el fragmento, se puede observar que Camila sugiere utilizar como *garante* la consideración de dos cuerdas cualesquiera, para comparar los productos de los segmentos determinados por *P*. Finalmente, la *conclusión* es la afirmación en la cual establecen que el producto siempre va a ser constante.

En ambos experimentos, el *garante* utilizado se deriva de la evidencia que brinda la calculadora. Por esta razón, los argumentos desarrollados son informales.

Situación 2: Acercamiento al teorema

En el primer experimento, Daniel hace uso de una propiedad geométrica que conocía con anterioridad (HG semicircunferencia: todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto) para determinar si obtiene el mismo resultado con cualquier ángulo inscrito en la circunferencia. Ello lo lleva a descubrir que todos los ángulos inscritos que subtienden la misma cuerda son congruentes, acercándose al hecho geométrico que se quería que reconocieran.

487. Daniel: Construí el ángulo; construí el triángulo *CDA*, volviendo a buscar lo mismo del hecho geométrico de la semicircunferencia. No me dio recto pero el ángulo se mantiene.

[…]

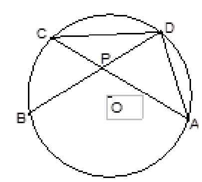
489. Daniel: Cuando arrastro.

[…]

491. Daniel: El ángulo *D*, que sería…

492. Obs: ¿Cuál ángulo se mantiene?

493. Daniel: Construí el triángulo *ACD*, AC lo tomé como si fuera el..., tomé la semicircunferencia *ADC*



494. Obs: Pero no es una semicircunferencia.

495. Daniel: Pero no es una semicircunferencia. Pero medí el ángulo *ADC* y se mantiene. […] Siempre se mantiene.

En este fragmento podemos observar que los *datos* son los ángulos inscritos que subtienden la cuerda *CA*, parcialmente implícitos porque Daniel no saca a relucir que todos subtienden esa cuerda. Con la intención de usar como *garante* el HG Semicircunferencia, él desea llegar a la *conclusión* de que todo ángulo inscrito en una circunferencia, que subtienda la misma cuerda, es recto. No obstante, al arrastrar el punto *D* sobre el arco menor determinado por *A* y *C* observa que este ángulo no es recto pero que su medida se mantiene. Por tanto, la evidencia suministrada por la calculadora se convierte en un *refuta-*

dor de su primer argumento y en un *garante* que lo lleva a replantear su *conclusión* de la siguiente forma: la medida del $\angle ADC$ siempre se mantiene.

En el segundo experimento, en el intento de justificar la congruencia de dos ángulos, Camila recuerda vagamente un teorema sobre ángulos inscritos que le permite justificarla. Para estar totalmente segura de esto, se fija en la medida de dos ángulos que había obtenido en la calculadora.

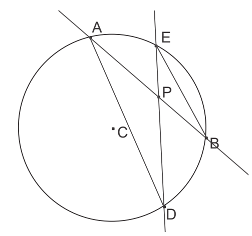
521. Camila: ¡Ay, sí!… Tú no te acuerdas una vez que… una vez Leo [un compañero de Camila y Daniel] nos decía que la medida de los ángulos… que cuando un ángulo estaba inscrito… o sea que compartían el mismo arco, eran congruentes… ¿Sí te acuerdas?

[Pausa.] Es que no me acuerdo cómo era que decía Leo…

[…]

569. Camila: Bueno el otro, el segmento que está acá, ¿sí ves que comparten el mismo arco? Entonces lo que es… sí es eso: sí tienen el mismo arco, son congruentes [refiriéndose a los $\angle AED$ y $\angle ABP$].

[…]



574. Obs2: ¿Te fijaste en ese ángulo?

575. Camila: Sí porque son los congruentes, cuando los medimos…

En este caso, los *datos* son los ángulos *AED* y *ABD* que subtienden el mismo arco, y la *conclusión* es la congruencia de ellos. En este argumento, el *garante* utilizado es el hecho de que en una circunferencia, los ángulos que subtienden el mismo arco son congruentes. Como los estudiantes no están seguros de la veracidad de este garante, recurren a la calculadora para comprobar el hecho. Por esta razón, el *respaldo* es la evidencia que obtienen al medir los ángulos en la calculadora.

En el primer experimento el *garante* para justificar la congruencia de los ángulos fue la evidencia suministrada por la calculadora. En el segundo caso, el *garante* provenía de una autoridad externa, un compañero de Camila y de Daniel, quien en el primer experimento llegó a esa conclusión y la compartió cuando socializó su respuesta al problema. Pero, Camila busca el respaldo a ese *garante* con evidencia suministrada por Cabri. Por tanto, es posible decir que ambos argumentos fueron informales. No obstante, en el primer caso la exploración realizada en Cabri estuvo influenciada por el intento de generalizar un hecho geométrico que se conocía dándole un tinte de formalismo al argumento.

CONCLUSIONES

Con el análisis realizado es posible determinar en ambos experimentos que el papel de Cabri en los argumentos del primer momento, formulación de conjetura, es de garante ya que les permite tener certeza de ésta; actúa también como una herramienta para descubrir y explorar. En el segundo momento, difiere el papel de Cabri en los argumentos. En el primer experimento, resultado de la exploración en Cabri, hubo un descubrimiento de un hecho geométrico, que se convirtió en la conclusión de un argumento. Por el contrario, en el segundo experimento los estudiantes recordaron vagamente el hecho geométrico que se pretendía demostraran. En este caso, Cabri verifica el garante, enmarcado en el sistema teórico, que quieren usar; Cabri actuó como una herramienta para verificar pero no para descubrir.

En ambos casos los argumentos fueron informales a pesar de que los estudiantes en el tercer curso ya tenían un sistema teórico con el cual podían haber respaldado sus argumentos. En el primer experimento Cabri actuó como garante para llegar a una conclusión, mientras que en el segundo, Cabri actuó con verificador de un garante del cual no se tenía plena certeza.

REFERENCIAS

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M.F.F. Pinto y T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 179-205). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Cramer, J. (2011). *Everyday argumentation and knowledge construction in mathematical tasks*. Tomado de: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Cramer.pdf

Viholainen, A. (2011). *The view of mathematics and argumentation*. Recuperado de: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Viholainen.pdf