SOLUCIONES ESPURIAS O EXTRAÑAS Y COMO DETERMINARLAS EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIONES IRRACIONALES DE ÍNDICE N = 2.

Larry Mendoza[1]; José Luis Vásquez Rivas[2]; Franklin J. Colina[3];
[1][2]Línea de Investigación Matemática Aplicada, Dpto. de Ciencias Básicas, Vicerrectorado "Luís Caballero Mejías" de la Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre".-
[3]División de Estudios para Graduados y Centro de Estudios Matemáticos y Físicos de la Facultad de Humanidades y Educación de La Universidad del Zulia.-
[1][2] prodimat@gmail.com y colina_2828@hotmail.com
Nivel Educativo: Educación Superior y Diversificada.-

Resumen

El presente trabajo pretende justificar las definiciones de soluciones espurias o extrañas y las transformaciones que las generan en el proceso de resolución de problemas de una ecuación irracional, que por lo general, los libros de textos no explican de donde surgen estas soluciones y otros la excusan superficialmente. La investigación se orienta hacia los docentes de matemática a los fines de que aborden las definiciones y justificaciones usando planes de resolución de problemas de Polya y Schoenfeld, por medio de la nueva algebra que propone Picciotto y Wah, y así facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera estimulante en el pensamiento crítico y la metacognición.

Palabras claves: Soluciones espurias o extrañas, transformaciones, resolución de problemas, enseñanza-aprendizaje.

1.- Introducción.

El problema de encontrar raíces o soluciones de ecuaciones polinómicas, ha sido objeto de estudio durante varios siglos y desde tiempos muy remotos antes de cristo y la historia nos señala que ciertos cientificos, tales como: Gauss, Cardano, Newton, D'Alembert, Cauchy, Descarte, Ferrari, Abel, Ruffini, Weirstrass, Vieta, entre otros, contribuyeron notablemente a la teoría de ecuaciones de grado menor o igual que cuatro, en busca de métodos generales en la resolución de estos tipos de ecuaciones por medio de radicales o de forma aproximada. En nuestro caso particular nos centraremos al estudio de las soluciones de las ecuaciones irracionales.

Rivero Mendoza (2009), señala que uno de los graves problemas en la educación media, es que se enseñan ecuaciones de primer grado, como un proceso mecánico, donde involucran unas series de reglas, que carecen de significado, porque la falta de modelos no permita visualizar su significado en el mundo real, obstaculizando así el proceso de enseñanza y aprendizaje en la resolución de ecuaciones; esto hace semejanza a lo que ocurre con las ecuaciones irracionales, que son más complicadas y por lo general, no se asocia este tipo de problema a un modelo que tenga aplicaciones.

Las ecuaciones irracionales, se caracterizan por ser no lineal y esto a su ves implica dificultades de toda índole, en particular se ven afectada en el proceso de resolución, es decir, tratar transformar una ecuación no lineal en una lineal, genera por lo general soluciones espurias o extrañas y el problema radica en como identificarlas y así excluirlas del conjunto de soluciones, de tal forma que permita la comprobación de soluciones, porque en algunos casos la verificación es más complicada que la misma resolución. El objetivo central de este trabajo es construir un intervalo solución que permita descartar las soluciones espurias y así no tener la necesidad de la confirmación. Otra ventaja que permite este método propuesto es que si el intervalo solución no existe implica que la ecuación irracional no tiene solución y no se tiene la necesidad de resolverla. Se motivara a manera de ejemplos donde intervienen las ecuaciones irracionales que están presentes en una serie de circunstancia o fenómenos de la vida real:

- **<u>En hidrodinámica:</u>** aparece la ley de Torricelli que establece que la velocidad de salida del fluido a través de orificio de salida es igual a la velocidad en caída libre desde la superficie del tanque:

  $$v = \sqrt{2gh}\,,$$

  para mayor detalle puede consultar Faber, (2001), Batchelor (2002). Streeter (1963); Velasco (2005).

- **<u>En teoría de vibraciones:</u>** En un sistema masa resorte, bajo ciertas restricciones, se defina la frecuencia natural del sistema como:

  $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

  Lo interesante de la frecuencia natural del sistema, es que sea distinta a la frecuencia de la fuerza externa, porque si llega a ser aproximadamente igual se produce el fenómeno de resonancia, es decir, el sistema entra en caos. Un ejemplo particular, nos muestra Braun M. (1993) y Levy & Salvadory (1992), donde relatan la famosa historia del puente colgante de Tacoma Narrows que era el tercer puente más largo del mundo para la época, situado en EEUU; que oscilaba considerablemente con el viento y entro en el fenómeno, de resonancia produciendo así el colapso estructural del puente.

- **<u>En la vida cotidiana:</u>** A apoyar en forma inclinada una escalera sobre un muro vertical, y se desea conocer la distancia de apoyo sabiendo la longitud de la escalera y la altura del muro; la aplicación inmediata es usar el Teorema de Pitágoras para relacionar las longitudes de los lados de un triangulo rectángulo, es posible formular el problema por medio de una ecuación irracional donde la incógnita esta en la parte subradical. Para mayor información se puede consultar en Mendoza, Vásquez, Colina & Serafín (2011).

Las herramientas que se usaran en proceso de resolución de ecuaciones irracionales, es un tratamiento analítico más no gráfico. Aclarando que el tratamiento con funciones es una herramienta más poderosa que la analítica y elegimos esta herramienta debido a que el alcance del trabajo esta hecho para estudiantes de precalculo, que pretenden estudiar ingeniería y nuestra experiencia nos indica que los estudiante no tienen la preparación suficiente para abordar este tipo de ecuaciones por método grafico lo que implica manejar funciones reales de variable real.

2.- Planteamiento del Problema.

Los estudiantes de ingeniería en el proceso de resolución de problemas caracterizados por modelos descritos mediante ecuaciones irracionales se enfrentan a ciertos obstáculos cognitivos para verificar la validez de las soluciones que obtienen. El proceso de resolución de ecuaciones irracionales involucra la utilización de transformaciones sobre la ecuación original que en general introduce soluciones para la ecuación transformada que no pertenecen al conjunto de soluciones de la ecuación original, denominándose estas situaciones como soluciones espurias o soluciones extrañas.

El enfoque tradicional para estos problemas exige realizar la comprobación de las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación original, como un criterio que le permite distinguir las soluciones válidas de las que no lo son, porque las primeras producen una identidad. Al consultar libros de texto de algebra elemental, preuniversitarios o de precálculo, se encuentra una orientación respecto a realizar la comprobación de las soluciones encontradas, señalando que solo si produce una identidad se considera como una solución de la ecuación inicial. En el caso contrario se señala que corresponde a una solución extraña o espuria (Middlemiss, 1952; Britton, Ben, & Rutland, 1969; Lehman, 1980; Sullivan, 2006). Los docentes en clase adoptan la misma estrategia exigiéndole a sus estudiantes efectuar el procedimiento de comprobación para determinar si las raíces encontradas son soluciones o no, sin justificar plenamente la necesidad de tal esfuerzo.

No obstante, algunos estudiantes no realizan la comprobación requerida, porque el enfoque tradicional con que se ha venido trabajando este asunto no permite que la mente del estudiante común albergue justificación alguna para realizarla, entendiendo ese procedimiento como algo adicional y superfluo. La ausencia de la verificación de la identidad hace que el estudiante pueda reportar resultados erróneos. Otros estudiantes, aun cuando quieren comprobar las soluciones, no lo logran en todas las ocasiones porque a veces los valores de la incógnita y la estructura de la ecuación original demandan de ellos herramientas del algebra que no dominan. A los fines de estimular el aprendizaje, la independencia y el pensamiento crítico en los estudiantes sería particularmente importante resaltar cuales transformaciones o procedimientos son los que hacen que aparezcan o no este tipo de soluciones, así como proponer nuevos criterios para discriminar las soluciones inválidas, que sean más sencillos o más eficientes, lo cual es precisamente el objeto que aborda este trabajo.

3.- Justificación, Fundamentación Teórica y Antecedentes de la investigación.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura en la declaración mundial sobre educación para todos: la Satisfacción de las necesidades básicas de aprendizaje, indica de forma explicita que la resolución de problemas es una las herramientas esenciales de para el aprendizaje (UNESCO, 1990). El Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos de América ha identificado la resolución de problemas como una de las metas más importantes en el aprendizaje de las matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, 2009). Particularmente, la matemática en la ingeniería se utiliza para establecer modelos de situaciones de la vida real, y es una herramienta vital en el paradigma de la profesión que se centra específicamente en la resolución de problemas (The Royal Academy of Engineering, 2010).

Una ecuación se llama irracional si contiene la incógnita bajo el signo del radical. Resolver una ecuación dada consiste bien sea en hallar todas las raíces de la misma, o en probar que ella no tiene solución. En el primer caso se llama número de soluciones de la ecuación a la totalidad de las raíces o valores que al sustituirles en la ecuación la transforman en una identidad numérica. Formalmente, se pueden introducir las siguientes definiciones:

Definición 1. El **intervalo solución** ($I.S.$) de la ecuación es el conjunto de valores de la incógnita para los cuales están bien definidos los miembros de la ecuación. Todo $x \in I.S.$ se considerará un valor admisible de la ecuación dada.

Definición 2. Una solución de una versión simplificada de una ecuación que no satisface la solución original se denomina solución espuria o extraña (Simmons, 2000).

Definición 3. Una ecuación se llama corolario con respecto otra primera ecuación si todas las soluciones de una ecuación son también soluciones de la otra. La segunda ecuación se llama corolario de la primera.

Definición 4. Dos ecuaciones se llaman equivalentes si cada una de ellas es corolario de la otra.

Note que de la ***Definición 3*** y de la ***Definición 4*** se deduce que las ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones.

Definición 5. Dos ecuaciones en un conjunto dado de valores de la incógnita son equivalentes, si tienen las mismas soluciones en ese conjunto de valores.

Simmons (2000) advierte que las soluciones espurias pueden ocurrir cuando se resuelven ecuaciones donde la incógnita aparezca en el denominador de una expresión racional, como parte del argumento de un logaritmo, o como variable subradical en una raíz enésima siempre que "n" sea un número par.

La escuela norteamericana por diversas razones es sumamente influyente en la educación matemática en Latinoamérica, como se afirmó con anterioridad históricamente sus textos no profundizan sobre las razones que provocan la aparición de soluciones espurias ni en su significado. Sin embargo, en Hispanoamérica y otras regiones de ascendencia latina se han presentado propuestas intermitentes que de una u otra forma progresan en los aspectos poco tratados en la corriente tradicional, particularmente, Cirodde (1861) explica con formalidad las definiciones básicas que se utilizan para la resolución de ecuaciones irracionales, Pastor & colaboradores (1960) exponen de una manera formal y detallada un análisis sobre la resolución de ecuaciones, Morgado & colaboradores (1974) explican de una manera muy sencilla cómo identificar soluciones extrañas y por qué suceden. Recientemente, Castro & Mendoza (2004) presentan de una manera elemental pero detallada, la determinación de soluciones espurias y el proceso por el cual se generan tales soluciones.

La escuela rusa ha abordado el tema con diferentes niveles de rigurosidad, por ejemplo, Doroféiev & colaboradores (1973) en un texto cuya esencia es el planteamiento de problemas, destacan en la sección de ecuaciones irracionales la necesidad de establecer restricciones para determinar las soluciones extrañas, Kalnin (1973) explica de una forma muy concisa como se introducen o se pierden las soluciones extrañas, a las cuales denomina raíces impropias. Potápov & Colaboradores (1986) dedican un capítulo completo a la teoría de resolución de ecuaciones, exponiendo en una manera extremadamente formal y rigurosa el proceso de solución, abordando entre otros, los problemas de ecuaciones irracionales y las soluciones espurias. Las características propias del enfoque de estos autores convierten el texto en una pieza muy complicada para el lector casual, en lo general, y para los noveles estudiantes de ingeniería, en lo particular.

4.- Metodología Empleada.

El presente trabajo se plantea desde el enfoque de la resolución de problemas de Polya, quién puede ser considerado el padre del área (Universidad Nacional Autónoma de México, 2005). Se Pretende ilustrar heurísticas tendientes a emplear casos particulares como lo plantea Schoenfeld para resolver problemas más simples y así abordar la etapa “b” del enfoque Polya, es decir, la propuesta que se presenta se utiliza como un plan de solución para los problemas que corresponden a ecuaciones irracionales que involucran raíces cuadradas. La propuesta que se plantea tiene como característica fundamental estimular el pensamiento crítico del estudiante, sin embargo esa exigencia significa una simplificación importante en el proceso de solución a contravía de lo que suele afirmarse en la literatura especializada. De hecho, Santos (2007) señala que en matemáticas cuando los estudiantes se enfrentan a problemas donde sólo tienen que aplicar reglas, algoritmos o fórmulas, generalmente se observa cierta fluidez y eficiencia al resolverlos mientras que cuando se les pide interpretar cierta información, estos mismos estudiantes muestran serias dificultades.

Además se pretende, abordar la resolución de problema de ecuaciones irracionales con el enfoque de Picciotto & Wah (1993), una nueva álgebra:

herramientas, temas, conceptos, que propone un cambio radical con cinco elementos principales que juegan un papel fundamental para abordar un problema, Esto se representa en el diagrama 4.1.

Este diagrama, permite concluir que las herramientas, permite fortalecer las habilidades, que a su ves constituye un medio más no un fin. Estas herramientas conllevan que el problema se haga de diferentes formas que lo conduzca llegar a una sola solución. Los temas son las aplicaciones que ayuda a realizar conexiones con los elementos del triangulo. Además se puede interpretar que los dos pilares claves y fundamentales del triángulo son las herramientas y los temas. Y la resolución de problemas es el eje central que consiste en tocar todos los elementos del triangulo en forma de espiral.

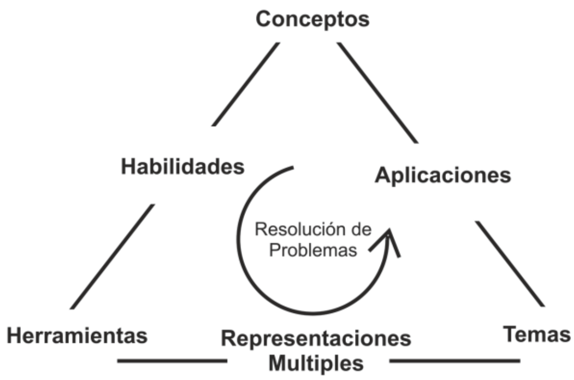

Diagrama Nº 4.1. Modelo de Una Nueva Algebra

Además Picciotto & Wah (1993) plantean que si se aplica esta nueva algebra, se estarían abriendo las puertas a los estudiantes en general y dándoles la oportunidad a aquellos que lamentablemente tienen la puerta cerrada, porque la enseñan de una manera tradicional.

5.- Propuesta del Método y Análisis de Resultado.

El método tradicional, que se expone en la mayoría de los libros de texto, cuando en el proceso de resolución de ecuaciones irracionales realizan transformaciones, que permite transformar la ecuación original en una ecuación más sencilla y como mecanismo de control, solo usan la comprobación de soluciones, para descartar las soluciones espurias.

Este trabajo solo se expondrá ciertas heurísticas particulares que permita resolver ecuaciones irracionales, de una manera más conciente de las transformaciones que generan soluciones espurias. En nuestro caso proponemos un método que desechar las soluciones espurias en el proceso de resolución y es tan versátil que, si el problema no tiene solución las condición para la búsqueda del intervalo solución determina de inmediato arrojando como resultado un intervalo vacío lo que indica que no existen valores para los cuales tenga sentido la ecuación irracional, de lo contrario de conseguir un intervalo solución, esto indica que son todos los valores admisibles, para los cuales tiene sentido la ecuación irracional.

En forma general podemos visualizar el proceso de resolución de las ecuaciones irracionales en el siguiente Diagrama 5.1.

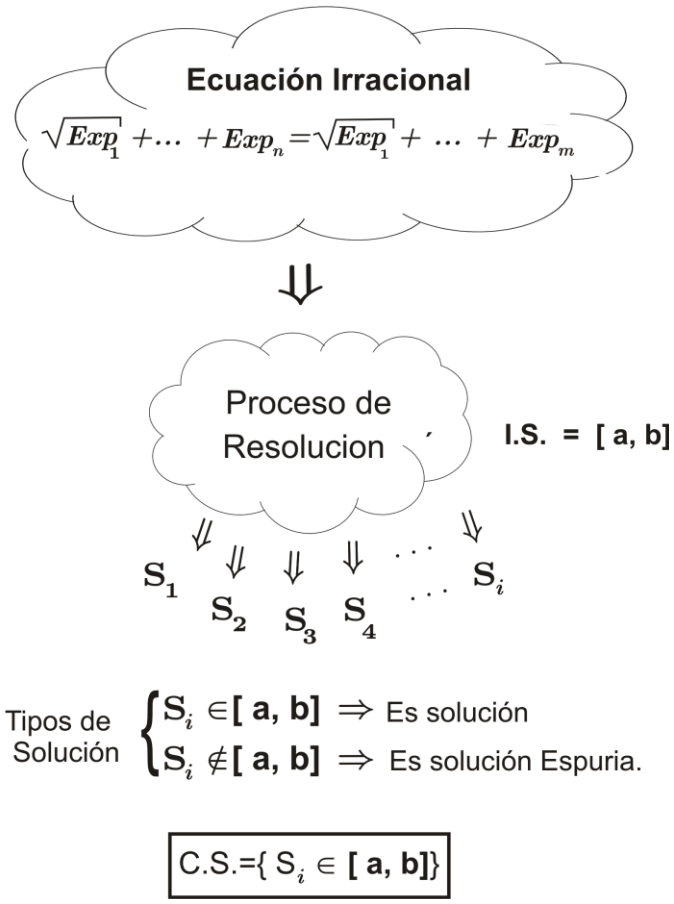

Diagrama 5.1. Proceso de Resolución de Ecuaciones Irracionales

Este diagrama, muestra que en el proceso de resolución de ecuaciones irracionales, lo primero que se hace es construir el intervalo solución, de existir se procede a resolver, pero hay que tomar en cuenta que el numero de transformaciones que se le haga a la ecuación indica el numero de intervalos a calcular. Estos intervalos nos van a dar las condiciones para desechar las soluciones, mostrando así que las soluciones obtenidas que pertenezcan al intervalo son las que forman parte del conjunto solución y las que no pertenezcan son de denominadas solucione espurias, que están excluidas del conjunto de soluciones.

Mostraremos unos ejemplos por el método tradicional y lo contrastaremos con el método propuestos.

Ejemplo 5.1. Resolver la siguiente ecuación irracional y determine el conjunto de soluciones.

$$\sqrt{1-4x} = x-1 \qquad (1)$$

<u>Solución por el Método Tradicional:</u> Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$x^2 + 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(x+2) = 0$$

Que tiene como soluciones:

$$x_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -2$$

Al verificar las soluciones en la ecuación inicial observaremos que

- Si $\quad x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{1-4(0)} \overset{?}{=} 0-1 \\ 1 = -1 \end{cases}$

- Si $\quad x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{1-4(-2)} \overset{?}{=} 5-1 \\ \sqrt{13} = 4 \end{cases}$

En conjunto de solución de la ecuación es vacío, denotado de la siguiente manera:

$$C.S. = \phi\,,$$

de donde se desprende que la ecuación irracional original (1) no tiene solución.

<u>Solución por el método propuesto:</u> Determinar el $I.S.$ exigiendo condiciones a cada miembro para que tengan sentido (cantidad subradical positiva).

Para el primer miembro: $1-4x \geq 0$, para el segundo miembro de la igualdad quedarías: $x-1 \geq 0$. Entonces el $I.S.$ vendrá dado por:

$$\left(x \leq \tfrac{1}{4}\right) \;\wedge\; \left(x \geq 1\right) \;\Rightarrow\; I.S. = \phi.$$

Es importante destacar que con el método propuesto se hace innecesario, para el ***Ejemplo 5.1***., realizar ningún cálculo dirigido a obtener soluciones porque se demuestra, previamente y con facilidad, que no existen soluciones para la ecuación (1) porque $I.S. = \phi$.

Este en un ejemplo muy interesante para abordar una clase de resolución de problema, donde involucra ecuaciones irracionales, porque además Polya mencionaba que el docente debe tomar las equivocaciones como modelos, es decir, colocar este problema dejar que los estudiantes resuelvan y cuando lleguen a comprobar la solución y posteriormente se debe discutir las soluciones obtenidas con todo el grupo para que cada uno aporte ideas, inquietudes y empezar a realizar pregunta, tales como ¿que ocurrió en el proceso de resolución? Como se hace para corregir este problema y luego se le explica el otro método que más efectivo, y se puede tener más control sobre lo que hacen los estudiante según lo afirma Polya y Schoenfeld.

Otro tipo de estrategia, que se puede usar para abordar este tipo de problema que la comprobación de para verificar las soluciones es más complicado que la resolución, un ejemplo de esto se muestra Gurevich (2003), que propone el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.2. *Resolver la ecuación:*

$$4{,}5-\sqrt{2x+1}=3x \tag{2}$$

En el proceso de resolución, se obtienen dos soluciones:

$$x_1=\frac{29+\sqrt{148}}{18} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{29+\sqrt{148}}{18}$$

El problema radica que la verificación, es decir,

Si $x_1=\dfrac{29+\sqrt{148}}{18} \quad \Rightarrow \quad 4{,}5-\sqrt{2\left(\dfrac{29+\sqrt{148}}{18}\right)+1}=3\left(\dfrac{29+\sqrt{148}}{18}\right)$

Si $x_2=\dfrac{29+\sqrt{148}}{18} \quad \Rightarrow \quad 4{,}5-\sqrt{2\left(\dfrac{29-\sqrt{148}}{18}\right)+1}=3\left(\dfrac{29-\sqrt{148}}{18}\right)$

Mostrar que las dos soluciones x_1 y x_2, son soluciones de la ecuación irracional, conlleva a un problema que radica que la comprobación es más complicada que la misma resolución del problema, aunque las herramientas que posee el estudiante puedan realizar la comprobación.

Otro ejemplo con mayor grado de dificultad, se puede observar en Mendoza, Vásquez, Colina & Serafín (2011), que propone un ejemplo que la estructura algebraica a comprobar es más complicada y las herramientas del algebra que deben manejar esta fuera de su alcance.

Ejemplo 5.3. *Resolver la siguiente ecuación irracional y determine el conjunto de soluciones.*

$$\sqrt{x+3}+2x-1=4 \qquad (2)$$

En el proceso de resolución de la ecuación se obtiene dos soluciones:

$$x_{1,2}=52\pm 8\sqrt{39}$$

Ahora cuando se procede a introducir estas soluciones en la ecuación irracional, observe la estructura algebraica que se general:

Si $\quad x_1=52+8\sqrt{39} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{55+8\sqrt{39}}+\sqrt{103+16\sqrt{39}} \overset{?}{=} 4$

Si $\quad x_2=52-8\sqrt{39} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{55-8\sqrt{39}}+\sqrt{103-16\sqrt{39}} \overset{?}{=} 4$

Observe que estas estructuras son complicadas de operar y mostrar que igualdad produce una identidad numérica, es demasiado complicado. Esto muestra que en una clase de resolución de problemas hay que buscar estrategias para motivar a los estudiantes con estos tipos de problemas y dar caminos más eficientes que permitan resolver el problema de una manera más apropiada teniendo control sobre la ecuación irracional como sucede en la construcción del intervalo solución. Observemos ahora cuanto da el intervalo solución de este problema:

$$\text{I.S.} = \left\{ x\in(-\infty,-3)\cup\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{14}{3}\right] \right\}.$$

Observe que:

$$x_1=52+8\sqrt{39}\approx 52+8*(\approx 6)=100 \quad \text{y} \quad x_2=52-8\sqrt{39}\approx 52-8*(\approx 6)=4$$

y solo queda verificar si esta en el intervalo solución de lo contrario es solución espuria, $x_1\notin I.S.$ y $x_2\in I.S.$Y se concluye sencillamente que el conjunto solución esta formado por la solución x_2, es decir:

$$C.S.=\left\{ 52-8\sqrt{39} \right\}.$$

Finalmente, estos ejemplos muestran que las resolución de ecuaciones irracionales son muy simples por ambos métodos y son igual de eficientes; pero siempre será importante afirmar que en el método propuesto se estimula el conocimiento respecto a las causas y orígenes de las soluciones extrañas o espurias, mientras que el método tradicional si bien las discrimina no le aporta al estudiante justificación sólida para hacerlo y no tiene control sobre el problema. Adicionalmente, cuando se motiva al estudiante a determinar el $I.S.$, los procedimientos y habilidades son los mismos que requerirá más adelante en los cursos de cálculo, por lo tanto se está introduciendo un concepto integrador (Ausebel, Novak, & Hanesian, 1978) que ayudará al estudiante a enfrentar con mayor éxito el cálculo de dominio de funciones reales de variable real, que en la experiencia de los autores de esta propuesta es uno de los temas con mayor índice de aplazados en la educación básica de los planes de ingeniería.

6.- Conclusiones y Recomendaciones.

La propuesta didáctica presentada está enmarcada en el enfoque de resolución de problemas de Polya, Schoenfeld, alineándose de esta forma con las tendencias más consensuadas y modernas de enseñanza de la matemática. Además se pretende que el docente, cuente con herramientas nuevas y aborde problemas interesantes que le despierten la curiosidad, realizarse preguntas y así motivar al estudiante al pensamiento crítico. Se pretende que el docente, enseñe usando el modelo de una nueva algebra, porque se conectan las cincos áreas fundamentales y su eje central es la resolución.

Los estudiantes aprendan heurísticas, que le permiten tener control sobre el problema planteado y así le permite lograr desechar las soluciones espurias en el proceso de resolución de ecuaciones irracionales, utilizando un procedimiento muchas veces más sencillo, y normalmente más eficiente.

Enseñar la resolución de ecuaciones irracionales a través de esta propuesta didáctica facilitará el aprendizaje futuro del estudiantes por la conexión que tiene con en el método y el cálculo de dominio de funciones reales de variable real. El docente que utilice esta propuesta didáctica tendrá a su disposición una herramienta sencilla, no disponible en la mayor parte de la literatura generalmente utilizada, para explicarles a sus estudiantes como determinar y porqué ocurren las soluciones espurias.

7.- Referencias.

Ausebel, D. A., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1978). Educational psychology: a cognitive view (2nd ed.). Nueva York: Holt, Rinehart, and Winston.

Batchelor, G. K. (2002). An introduction to fluid dynamics. (2da. Reimpresión ed.). Cambrige: Cambrige University Press.

Braun, M. (1993). Differential equation y their Aplicactions. Springer Verla. Pag. 173.

Britton, J. R., Ben, K. R., & Rutland, L. W. (1969). *Matemáticas Universitarias* (Vol. I). México: CECSA.

Castro, W., & Mendoza, L. (2004). Apuntes de Clase sobre Ecuaciones e Inecuaciones: Guía Teórico-Práctica. Caracas.

Cirrode, P. L. (1861). Lecciones de Álgebra. Madrid: Carlos Bailly Baillieri.

Doroféiev, G., Potápov, M., & Rozov, N. (1973). Temas selectos de matemáticas elementales. Moscú: MIR.

Faber, T. E. (2001). Fluid dynamics for Physicists. (2da. Reimpresión ed.). Cambrige: Cambrige University Press.

Gurevich, V. J. (2003). A Reasonable Restriction set for solving radical equations. national concil teachers mathematical (NCTM). P. 662-664.

Kalnin, R. A. (1973). *Álgebra y funciones elementales.* Moscú: MIR.

Lehman, C. (1980). *Álgebra.* México: Limusa.

Levy, M. & Salvadori, M. (1992). Why Buildings Fall Down: how structure fail. W. W. Norton Co. P. 109.

Mendoza, L., Vásquez, R., J. L., Colina, F. J. & Serafín, P., M. J. (2011). Determinación de soluciones espurias para ecuaciones irracionales. En XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife, Brasil.

Middlemiss, R. (1952). *College Algebra.* Nueva York: McGraw-Hill.

Morgado, A. C., Wagner, E., & Jorge, M. (1974). *Álgebra I.* Río de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora.

National Council of Teachers of Mathematics. (13 de Enero de 2009). *Agenda For Action: Problem Solving.* Recuperado el 14 de Enero de 2011, de Standards and Focal Points: http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17279

Pastor, J. R., Pi, C., & Trejo, C. A. (1960). *Análisis Matemático* (Vol. I). Buenos Aires: Kapelusz.

Picciotto, H. & Wah, A. (1993). A new algebra: Tools, themes, concepts. Journal of Mathematical Behavior, 12(1). Disponible en: www.picciotto.org/math-ed/new-algebra/new-algebra.html#geoboards

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (1ra en Español. 15ta Reimpresión ed.). México: Trillas.

Potápov, M., Alexándrov, V., & Pasichenko, P. (1986). *Álgebra y análisis de funciones elementales.* Moscú: MIR.

Rivero M., F. (1999). Resolviendo las ecuaciones lineales con el uso de modelos. Recuperado el: 25 de febrero de 2011 de: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Mateducativa/Modelopedagogico/Resolviendo%20las%20ecuaciones.pdf

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985) Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

Simmons, B. (2000). *Mathwords: Terms and Formulas from Beginning Algebra to Calculus*. Recuperado el 2 de Octubre de 2010, de http://www.mathwords.com/e/extraneous_solution.htm.

Streeter, V. *(1963). Mecanica de los Fluidos. (2da en Español. ed.). McGraw-Hill. España*

Sullivan, M. (2006). *Álgebra y Trigonometría* .México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

The Royal Academy of Engineering. (2010). *Philosophy of Engineering.* Londres: The Royal Academy of Engineering.

UNESCO (1990). Declaración mundial sobre educación para todos: la satisfacción de las necesidades básicas de aprendizaje. Recuperado el 15 de julio de 2011 de: http://www.unesco.org/education/efa/ed_for_all/background/jomtien_declaration.shtml

UNESCO (1990a). Proyecto principal de Educación en america latina y el caribe. (Boletin 21). Chile: Oficina Regional de Educación para america latina y el caribe.

Universidad Nacional Autónoma de México. (27 de Noviembre de 2005). *Escuela Nacional Preparatoria Plantel N°6 "Antonio Caso".* Recuperado el 7 de Abril de 2011, de http://www.prepa6.unam.mx/Colegios/Matematicas/papime/PAPIME/manuales/Polya.htm.

Velasco B., R. M. (2005). Introducción a la hidrodinámica clasica. Mexico: Fondo de Cultura Económica.