MEMORIAS XVIII ENCUENTRO DE GEOMETRÍA
Y
VI DE ARITMÉTICA

TEMAS EN:

ECUACIONES DIFERENCIALES

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

<u>Ecuación de riccati mediante grupos de lie</u>

Alberto Campos

Profesor Honorario Universidad Nacional de Colombia

Bogotá D.C, Colombia

Se consideran dos de las llamadas ecuaciones de Riccati, a saber,

- La estudiada por Daniel Bernoulli, y generalmente llamada *ecuación reducida de Riccati*

$$u_x = u^2 + R(x).$$

- La llamada (1763) por D'Alembert, *ecuación generalizada de Riccati*

$$u_x = L(x)u^2 + M(x)u + N(x).$$

Para funciones $L(x)$, $M(x)$, $N(x)$ cualesquiera, la ecuación de Riccati no es, en general, soluble mediante cuadraturas.

La cuestión aquí, prácticamente, es la de qué tanto permite avanzar en el estudio de la ecuación la introducción de los grupos de Lie; además, la de si la consideración de los métodos de solución mediante grupos de Lie permite esclarecer la estructura de las ecuaciones de Riccati que admiten grupos de Lie, o la del conjunto de soluciones.

Si se logra determinar para una ecuación, o una familia de ecuaciones, de Riccati un grupo de Lie mediante el cual la ecuación sea invariante, es posible que puedan enunciarse propiedades geométricas de la ecuación, o de la familia de ecuaciones.

Se usa un condicional, dado que no toda operación algebraica tiene una interpretación geométrica.

Ecuación determinante de simetrías

Los axiomas para tal estructura pueden ser presentados como sigue [**?**].

Se consideran abiertos en espacios euclidianos $\mathbb{E}^r$, $\mathbb{E}^n$ y una aplicación C^∞

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^r \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, \\ &\quad (p, x) \to g(x, p), \end{aligned}$$

donde los signos $x = (x^1, \ldots, x^n)$ indican puntos de $\mathbb{E}^n$ y van a designar las coordenadas; y donde $p = (p^1, \ldots, p^r)$ indican puntos de $\mathbb{E}^r$ y van a designar los parámetros.

Un primer axioma es que ha de existir una operación P que determine analíticamente sobre un abierto de $\mathbb{E}^r$ que contenga el vector nulo de $\mathbb{E}^r$ una estructura de grupo.

Un segundo axioma es que la composición verifique

$$\overset{**}{x} = g\left(\overset{*}{x}, \overset{*}{p}\right) = g\left(g(x,p), \overset{*}{p}\right) = g\left(x, P\left(p, \overset{*}{p}\right)\right).$$

Un tercer axioma es relativo a la transformación idéntica del grupo que corresponde al elemento neutro para la operación P entre parámetros:

$$g(x, \text{elemento neutro}) = x.$$

Para un grupo con un parámetro que actúa sobre el plano, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una transformación g es dada por expresiones

$$\begin{aligned}\overset{*}{x} &= X(x, u; p)\\ \overset{*}{u} &= U(x, u; p)\end{aligned}$$

tales que para $p = 0$ se tenga $\overset{*}{x} = x$, $\overset{*}{u} = u$. Mediante desarrollo de Taylor se obtiene

$$\begin{aligned}\overset{*}{x} &= x + p\, f(x, u) + O(p^2)\\ \overset{*}{u} &= u + p\, h(x, u) + O(p^2)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}f(x, u) &= \left.\frac{\partial X(x, u; p)}{\partial p}\right|_{p=0},\\ h(x, u) &= \left.\frac{\partial U(x, u; p)}{\partial p}\right|_{p=0}.\end{aligned}$$

Lie llama *transformación infinitesimal* al campo de vectores

$$v = f(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + h(x, u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Se llama *campo de vectores prolongado*, $v^{(1)}$, al campo de vectores

$$v^{(1)} = f(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + h(x, u)\frac{\partial}{\partial u} + (D_x h - u_x D_x f)\frac{\partial}{\partial u_x}$$

donde

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u}.$$

La expresión $D_x h - u_x D_x f$ resulta del siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}\overset{*}{u}_{\overset{*}{x}} = \frac{d\overset{*}{u}}{d\overset{*}{x}} = \frac{d\big(u + ph + O(p^2)\big)}{d\big(x + pf + O(p^2)\big)} &= \frac{u_x + (h_x + h_u u_x)p + O(p^2)}{1 + (f_x + f_u u_x)p + O(p^2)}\\ &= u_x + [(h_x + h_u u_x) - (f_x + f_u u_x)u_x]p + O(p^2)\\ &= u_x + [D_x h - u_x D_x f]p + O(p^2)\\ &= u_x + [h_x + (h_u - f_x)u_x - f_u u_x^2]p + O(p^2).\end{aligned}$$

El campo de vectores prolongado realiza la acción del grupo sobre funciones derivadas de primer orden; puede decirse, sobre elementos de contacto de primer orden de la curva.

Una ecuación diferencial admite, o mejor, es invariante respecto a un grupo de Lie de transformaciones si estas aplican curvas integrales en curvas integrales para la misma ecuación.

¿Cómo se determina, para una ecuación diferencial dada, un grupo de Lie admitido por la ecuación?

La pregunta y la respuesta, ambas dadas por Lie, constituyen el criterio infinitesimal de invariación.

Una vez efectuada la transformación $\overset{*}{x} = X(x,u,p)$, $\overset{*}{u} = U(x,u,p)$ importa comparar las ecuaciones inicial y transformada:

$$u_x = E(x,u), \qquad \overset{*}{u}_{\overset{*}{x}} = E\left(\overset{*}{x},\overset{*}{u}\right)$$

para lo cual se emplea un desarrollo de Taylor.

Por una parte, se obtiene el par de funciones $f(x,u)$, $h(x,u)$ componentes del campo de vectores.

Por otra parte, se tiene, también por desarrollo de Taylor,

$$E\left(\overset{*}{x},\overset{*}{u}\right) = E(x,u) + p\left[f\frac{\partial E}{\partial x} + h\frac{\partial E}{\partial u}\right] + O(p^2).$$

El criterio infinitesimal de invariación, debido a Lie, consiste en igualar los coeficientes de los desarrollos en el primer orden. Así se obtiene

$$h_x + (h_u - f_x)u_x - f_u u_x^2 = fE_x + hE_u.$$

Para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden,

$$e(x,u,u_x) = 0 = u_x - E(x,u)$$

el criterio infinitesimal de invariación puede enunciarse así [?].

Teorema. *Un grupo conexo de transformaciones, G, es un grupo de simetría para la ecuación $e(x,u,u_x) = 0 = u_x - E(x,u)$, si y solo si $v^{(1)}(e) = 0$, siempre que $e(x,u,u_x) = 0$, para cualquier generador infinitesimal v, del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, del grupo, G.*

Así, pues, se ha de cumplir que

$$v^{(1)}(e) = \left[f\frac{\partial}{\partial x} + h\frac{\partial}{\partial u} + (D_x h - u_x D_x f)\frac{\partial}{\partial u_x}\right][u_x - E(x,u)] = 0$$

siempre que $u_x - E(x,u) = 0$.

Al desarrollar la condición, resulta una ecuación diferencial parcial

$$h_x + (h_u - f_x)E - f_u E^2 - fE_x - hE_u = 0,$$

ecuación determinante de las simetrías, si la ecuación diferencial tiene alguna.

Hay dos funciones incógnitas f, g que han de satisfacer a una sola ecuación, por lo que es de suponer que siempre haya solución. Lo que va a suceder generalmente es que ella no es expresable mediante funciones elementales.

Aplicar el criterio infinitesimal de invariación a la ecuación generalizada de Riccati,

$$u_x = L(x)u^2 + M(x)u + N(x) = E(x,u),$$

consiste en reemplazar E, E_x, E_u en la ecuación determinante; se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= \left[-f_uL^2\right]u^4 + \left[-2f_uLM\right]u^3 + \left[(h_u - f_x)L - f_uM^2 - 2f_uLN - fL_x\right]u^2\\ &+ \left[(h_u - f_x)M - 2f_uMN - fM_x - 2hL\right]u\\ &+ \left[h_x + (h_u - f_x)N - f_uN^2 - fN_x - hM\right].\end{aligned}$$

Esta es una ecuación diferencial parcial de primer orden con dos funciones incógnitas $f(x,u)$, $h(x,u)$ escrita como un polinomio respecto a la indeterminada u. Por lo tanto, se tiene el sistema diferencial

$$\left.\begin{aligned} f_u &= 0\\ (h_u - f_x)L - fL_x &= 0\\ (h_u - f_x)M - fM_x - 2hL &= 0\\ h_x + (h_u - f_x)N - fN_x - hM &= 0\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

De la primera ecuación del sistema diferencial (A) se sigue que f no depende de u.

Primera hipótesis: $v = f(x)\dfrac{\partial}{\partial x} + h(x)\dfrac{\partial}{\partial u}$**.**

Las funciones coeficientes del campo de vectores f, h no dependen de u, sino solamente de la variable x; entonces es posible expresar f en función de L y de ahí obtener la derivada f_x. En efecto, si $h_u = 0$, de la segunda ecuación se sigue que

$$f_xL + fL_x = 0;$$

de donde, dado que $L(x) \neq 0$, para que la ecuación sea de Riccati,

$$f(x) = \frac{1}{L(x)}.$$

Por lo tanto

$$f_x = -\frac{L_x}{L^2}.$$

De la tercera ecuación del sistema diferencial se sigue entonces que

$$\begin{aligned}0 &= 2hL + fM_x + f_xM = 2hL + \frac{M_x}{L} - \frac{L_xM}{L^2}\\ &= 2hL + \frac{LM_x}{L^2} - \frac{L_xM}{L^2} = 2hL + \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$h = -\frac{1}{2L}\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right).$$

Resulta

$$h_x = -\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right) + \frac{1}{L}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right)\right)\right].$$

Al reemplazar estas expresiones en la cuarta ecuación del sistema diferencial se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right)\left[\frac{M}{2L}-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L}\right)\right]-\frac{d}{dx}\left(\frac{N}{L}\right)-\frac{1}{2L}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right)\right)\right)=0$$

Si las funciones $L(x)$, $M(x)$, $N(x)$ de la ecuación generalizada de Riccati satisfacen esta condición diferencial entonces la ecuación de Riccati es invariante respecto al grupo de Lie generado por el campo de vectores cuyas funciones coeficientes son $f(x)$, $h(x)$.

Es decir, $v^{(1)}[u_x - Lu^2 - Mu - N] = 0$ siempre que $u_x = Lu^2 + Mu + N$, donde

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2L}\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right)\frac{\partial}{\partial u} \\ &-\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right)+\frac{1}{2L}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right)\right)+u_x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u_x}. \end{aligned}$$

Proposición. *La ecuación generalizada de Riccati*

$$u_x = L(x)u^2 + M(x)u + N(x)$$

cuyos coeficientes $L(x)$, $M(x)$, $N(x)$ satisfagan la condición diferencial

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right)\left[\frac{M}{2L}-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L}\right)\right]-\frac{d}{dx}\left(\frac{N}{L}\right)-\frac{1}{2L}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right)\right)\right)=0$$

es invariante respecto al campo de vectores

$$v = f(x)\frac{\partial}{\partial x}+h(x)\frac{\partial}{\partial u}=\frac{1}{L(x)}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2L(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{L}\right)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejemplo. Considérese la familia de ecuaciones

$$u_x = Lx^a u^2 + Mx^b u + Nx^c,$$

en la cual

$$L(x) = Lx^a, \quad M(x) = Mx^b, \quad N(x) = Nx^c$$

donde L, M, N, a, b, c son constantes determinables por el cumplimiento de la condición diferencial.

Se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L(x)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Lx^a}\right) = -\frac{a}{Lx^{a+1}} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{M(x)}{L(x)}\right) &= \frac{M}{L}\frac{d}{dx}\left(x^{b-a}\right) = \frac{M}{L}(b-a)x^{b-a-1} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{N(x)}{L(x)}\right) &= \frac{N}{L}\frac{d}{dx}\left(x^{c-a}\right) = \frac{N}{L}(c-a)x^{c-a-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
0 =&\frac{d}{dx}\left(\frac{M(x)}{L(x)}\right)\left[\frac{M(x)}{2L(x)}-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L(x)}\right)\right]-\frac{d}{dx}\left(\frac{N(x)}{L(x)}\right)\\
&-\frac{1}{2L(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{M(x)}{L(x)}\right)\right)\\
=&(b-a)\frac{M}{L}x^{b-a-1}\left[\frac{Mx^b}{2Lx^a}+\frac{1}{2}\frac{a}{Lx^{a+1}}\right]-(c-a)\frac{N}{L}x^{c-a-1}\\
&-(b-a)(b-a-1)\frac{Mx^{b-a-2}}{2L^2x^a}\\
=&(b-a)\frac{M^2}{2L^2}x^{2b-2a-1}+\frac{(b-a)aM}{2L^2}x^{b-2a-2}-(c-a)\frac{N}{L}x^{c-a-1}\\
&-(b-a)(b-a-1)\frac{M}{2L^2}x^{b-2a-2}
\end{aligned}$$

Para que los exponentes de x sean iguales, ha de tenerse

$$2b-2a-1=c-a-1=b-2a-2.$$

De $2b-2a-1=b-2a-2$ se sigue $b=-1$.

De $c-a-1=(-1)-2a-2$ se sigue que $c=-a-2$.

Así, los tres exponentes son iguales a $-2a-3$.

En cuanto a los coeficientes se obtiene:

$$\begin{aligned}
(b-a)\frac{M^2}{2L^2}+\frac{(b-a)a}{2}\frac{M}{L^2}-(c-a)\frac{N}{L}-\frac{(b-a)(b-a-1)}{2L^2}=&\\
=-\frac{a+1}{2L^2}\big[2aM+M(M+2)-4LN\big]&
\end{aligned}$$

Hay dos maneras interesantes de anular este producto.

Una es $a=-1$; entonces, la ecuación es de la forma

$$u_x=\frac{Lu^2+Mu+N}{x}.$$

El campo de vectores toma la forma $v=\dfrac{x}{L}\dfrac{\partial}{\partial x}$ y el campo prolongado es

$$v^{(1)}=\frac{x}{L}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{u_x}{L}\frac{\partial}{\partial u_x}$$

y se cumple la condición de invariación.

Las variables en la ecuación resultan separadas

$$\frac{du}{Lu^2+Mu+N}=\frac{dx}{L}.$$

Por otra parte, si $M = 0$ ha de ser también $N = 0$.

La ecuación se reduce a

$$u_x = Lx^a u^2,$$

igualmente de coordenadas separables.

Un segundo modo de anular el producto, como ha de ser, es suponiendo $M \neq 0$,

$$a = \frac{4LN - M(M+2)}{2M},$$

Se dispone de las tres constantes L, M, N para obtener valores de a; por ello se habla de familia de ecuaciones de Riccati.

El campo de vectores será de la forma

$$v = \frac{1}{Lx^a}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(a+1)M}{2L^2}\frac{1}{x^{2(a+1)}}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Un *caso particular* es aquel en que $L = M = N = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2} \\
u_x &= x^{1/2}u^2 + \frac{u}{x} + \frac{1}{x^{5/2}} \\
v &= \frac{1}{x^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4x^3}\frac{\partial}{\partial u} \\
v^{(1)} &= \frac{1}{x^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4x^3}\frac{\partial}{\partial u} + \left(-\frac{9}{4}\frac{1}{x^4} + \frac{u_x}{2x^{3/2}}\right)\frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}$$

Se cumple la condición de invariación.

Para aplicar el algoritmo de Lie, que conduce a la separación de las coordenadas en la ecuación diferencial, se determina una función invariante respecto al campo, es decir, una función t tal que

$$v(t) = 0 = \frac{1}{x^{1/2}}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{3}{4x^3}\frac{\partial t}{\partial u}.$$

Se obtiene

$$t = u + \frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}.$$

Luego se determina una segunda función w tal que

$$v(w) = 1 = \frac{1}{x^{1/2}}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Se obtiene

$$w = \frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Las funciones t, w son difeomorfismos expresados en función de las variables x, u. Donde sean inversibles, $x \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
x &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} w^{2/3}, \\
u &= t - \frac{1}{3w}.
\end{aligned}$$

Ahora puede calcularse $u_x = \dfrac{du}{dx}$.

Al reemplazar en la ecuación de Riccati en cuestión, esta deviene una con coordenadas separadas, es decir, integrable

$$dw = \frac{dt}{t^2}.$$

Al reemplazar en la solución

$$w = -\frac{1}{t},$$

las funciones $w = w(x,u)$, $t = t(x,u)$ se obtiene la expresión de la solución expresada en las coordenadas iniciales.

Segunda hipótesis: $v = f(x)\dfrac{\partial}{\partial x} + \big[i(x)u + j(x)\big]\dfrac{\partial}{\partial u}$**.**

La función f solo depende de x. La función $h(x,u) = i(x)u + j(x)$ depende linealmente de u.

Mediante la ecuación determinante de campo de vectores respecto del cual una ecuación $u_x = E(x,u)$ sea invariante, se ha de tener

$$0 = h_x + (h_u - f_x)E - fE_x - hE_u.$$

Para la ecuación generalizada de Riccati

$$u_x = L(x)u^2 + M(x)u + N(x) = E(x,u),$$

es

$$\begin{aligned} E_x &= L_x u^2 + M_x u + N_x, \\ E_u &= 2L_u + M. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en la ecuación determinante se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= i_x u + j_x + (i - f_x)(Lu^2 + Mu + N) - f(L_x u^2 + M_x u + N_x) \\ &\quad - (iu + j)(2Lu + M) \\ &= u^2\left[-iL - Lf_x - fL_x\right] + u\left[i_x - f_x M - fM_x - 2jL\right] \\ &\quad + \left[j_x - jM + iN - f_x N - fN_x\right] \end{aligned}$$

De donde se obtiene el sistema (B)

$$\left.\begin{aligned} f_u &= 0 \\ iL + f_x L + fL_x &= 0 \\ i_x - f_x M - fM_x - 2jL &= 0 \\ j_x - jM + iN - f_x N - fN_x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

De la segunda ecuación en el sistema diferencial (B) resulta

$$i(x) = -f_x - f\frac{L_x}{L};$$

por lo tanto

$$i_x = -f_{xx} - f_x \frac{L_x}{L} - f \frac{L_{xx}}{L} + f \frac{L_x^2}{L^2}.$$

De la tercera ecuación del sistema diferencial (B) resulta

$$j(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{f_{xx}}{L} - f_x \frac{L_x}{L^2} - f \frac{L_{xx}}{L^2} + f \frac{L_x^2}{L^3} - f_x \frac{M}{L} - f \frac{M_x}{L}\right].$$

De donde

$$\begin{aligned} 2j_x = & -\frac{f_{xxx}}{L} - f_x \frac{L_{xx}}{L^2} + 3 f_x \frac{L_x^2}{L^3} - f_x \frac{L_{xx}}{L^2} - f \frac{L_{xxx}}{L^2} + 2 f \frac{L_x L_{xx}}{L^3} \\ & - 3 f \frac{L_x^3}{L^4} - 2 f_x \frac{M_x}{L} + f_x \frac{L_x M}{L^2} - f \frac{M_{xx}}{L} + f \frac{M_x L_x}{L^2}. \end{aligned}$$

Al reemplazar en $2(j_x - jM + iN - f_x N - f N_x) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = & \left(-\frac{1}{L}\right) f_{xxx} + f_x \left[-2\frac{L_{xx}}{L^2} + 3\frac{L_x^2}{L^3} + 2\frac{L_x M}{L^2} - 2\frac{M_x}{L} + \frac{M^2}{L} - 4N\right] \\ & + f \left[-\frac{L_{xxx}}{L^2} + 4\frac{L_x L_{xx}}{L^3} + \frac{L_{xx} M}{L^2} - 3\frac{L_x^3}{L^4} + \frac{L_x M_x}{L^2} - \frac{L_x^2 M}{L^3} \right. \\ & \left. - 2\frac{L_x N}{L} + \frac{M M_x}{L} - \frac{M_{xx}}{L} - 2N_x\right]. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} 0 = & f_{xxx} + f_x \left(2\frac{L_{xx}}{L} - 3\frac{L_x^2}{L^2} - 2\frac{L_x M}{L} + 2M_x - M^2 + 4LN\right) \\ & + f \left(\frac{L_{xxx}}{L} - 4\frac{L_x L_{xx}}{L^2} - \frac{L_{xx} M}{L} + 3\frac{L_x^3}{L^3} - \frac{L_x M_x}{L} + \frac{L_x^2 M}{L^2} \right. \\ & \left. + 2L_x N - M M_x + M_{xx} + 2L N_x\right). \end{aligned}$$

Las funciones $f(x)$, $L(x)$, $M(x)$, $N(x)$ han de verificar esta ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, lineal en la incógnita f, para que la ecuación generalizada de Riccati admita un grupo de Lie de transformaciones.

El problema de resolver una ecuación de primer orden, la generalizada de Riccati, se ha complicado, puesto que requiere resolver una ecuación de tercer orden, lineal en la incógnita f, pero con diez y siete términos.

Es posible modificar el problema. En efecto, la ecuación generalizada de Riccati puede ser transformada de modo que el coeficiente $L(x)$ del término cuadrático sea la unidad. Entonces, la ecuación de tercer orden con diez y siete términos, deviene

$$0 = f_{xxx} + f_x(2M_x - M^2 + 4LN) + f(M_{xx} - M M_x + 2L N_x)$$

Además, la ecuación de Riccati puede ser transformada de modo que sea nulo el coeficiente M del término lineal. La ecuación de Riccati toma la forma llamada reducida

$$u_x = u^2 + R(x),$$

forma inicialmente considerada por Riccati y por quienes posteriormente se ocuparon de ella.

La ecuación de tercer orden toma la forma

$$f_{xxx} + 4Rf_x + 2fR_x = 0.$$

Teorema. *Una ecuación reducida de Riccati,*

$$u_x = u^2 + R(x)$$

es invariante respecto del campo de vectores

$$v = f(x)\frac{\partial}{\partial x} - \left(uf_x + \frac{1}{2}f_{xx}\right)\frac{\partial}{\partial u},$$

si y solo si

$$f_{xxx} + 4R(x)f_x + 2fR_x = 0.$$

Como la de Riccati, es esta una notable ecuación de tercer orden en la función incógnita a la que puede llegarse desde diversos enfoques. Como para la de Riccati, no es trivial hallar soluciones. A diferencia de la de Riccati, esta es lineal. Además, puede ser estudiada mediante el algoritmo de Lie. Para dar algunos pasos en este sentido, conviene precisar lo que se entiende por ecuación diferencial ordinaria de tercer orden; por prolongación de un campo de vectores al tercer orden; por invariación de una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden respecto de un campo de vectores.

El tema es extenso. Se consigna aquí lo indispensable para la ecuación de tercer orden que resdulta asociada a la de Riccati. Para más detalles, ver: ([**?**], pp. 158-160); [**?**], capítulos 1, 2, 3).

Se denota $\mathbb{R}^2$ el espacio euclidiano de dimensión dos.

Una curva f, C^∞ en $\mathbb{R}^2$, tiene tangente única en cada punto $\big(x, f(x)\big)$. Se denota $\mathbb{R}^2_1$ la variedad diferenciable de los elementos lineales de $\mathbb{R}^2$ y $\big(x, f(x), f_x(x)\big)$ un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^2_1$. Se tiene que $\dim \mathbb{R}^2_1 = 3$.

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una relación entre elementos de $\mathbb{R}^2_1$.

Una transformación entre elementos lineales hace corresponder, punto por punto, a una curva y su tangente, la curva transformada y su tangente transformada.

Mediante desarrollo de Taylor al primer orden se tiene

$$\begin{aligned}
\overset{*}{x} &= x + p\, f(x,u) + O(p^2)\\
\overset{*}{u} &= u + p\, h(x,u) + O(p^2)\\
\overset{*}{u}_{\overset{*}{x}} &= \frac{d\overset{*}{u}}{d\overset{*}{x}} = u_x + p(D_x h - u_x D_x f) + O(p^2)
\end{aligned}$$

donde se designa la derivación total mediante

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u}.$$

La transformación actúa entonces mediante el campo de vectores prolongado

$$v^{(1)} = f(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + h(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + (D_x h - u_x D_x f)\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

Mediante invariación por el campo de vectores prolongado una vez son invariantes una ecuación diferencial de primer orden y las propiedades que esta conlleva relativas a elementos lineales, o lo que es lo mismo, elementos de contacto de primer orden.

A más de elementos lineales sobre una curva es posible considerar elementos de curvatura, es a saber, propiedades explícitas relativas al radio de curvatura de una curva en cada punto. Cada elemento se representa mediante cuatro números reales $\big(x, f(x), f_x(x), f_{xx}(x)\big)$. Si la variedad de estos elementos de segundo orden de $\mathbb{R}^2$ es designada mediante $\mathbb{R}^2_2$, entonces, $\dim \mathbb{R}^2_2 = 4$.

Una transformación actúa sobre los elementos de contacto de segundo orden mediante la segunda prolongación del campo de vectores.

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden es una relación entre elementos de contacto de segundo orden.

A las tres expresiones escritas antes para $\overset{*}{x}$, $\overset{*}{u}$, $\overset{*}{u}_{\overset{*}{x}}$, hay que añadir una cuarta

$$\overset{**}{u}_{\overset{**}{xx}} = \frac{d\overset{*}{u}_{\overset{*}{x}}}{d\overset{*}{x}} = u_{xx} + p\big[D_x(D_x h - u_x D_x f) - u_{xx} D_x f\big] + O(p^2)$$

donde

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

El campo de vectores prolongado al segundo orden es la expresión

$$\begin{aligned} v^{(2)} = f(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + h(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + (D_x h - u_x D_x f)\frac{\partial}{\partial u_x} \\ + \big[D_x(D_x h - u_x D_x f) - u_{xx} D_x f\big]\frac{\partial}{\partial u_{xx}}. \end{aligned}$$

El criterio infinitesimal de invariación se enuncia en ([**?**], p. 179).

Teorema. *Un grupo conexo de transformaciones, G, es un grupo de simetría para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden*

$$e(x,u,u_x,u_{xx}) = 0 = u_{xx} - E(x,u,u_x),$$

si y solo si

$$v^{(2)}\big[u_{xx} - E(x,u,u_x)\big] = 0,$$

siempre que $u_{xx} = E(x,u,u_x)$ para cualquier generador infinitesimal, v, del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, del grupo, G.

Si se consideran una curva C^∞, y en cada punto de ella, elementos de contacto de primero, de segundo y de tercer órdenes, entonces la variedad así constituida a partir de $\mathbb{R}^2$ se denota $\mathbb{R}^2_3$: es la variedad de los elementos de contacto de tercer orden de $\mathbb{R}^2$. $\dim \mathbb{R}^2_3 = 5$.

Una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden es una relación diferencial entre elementos de contacto de tercer orden de $\mathbb{R}^2$. Cada elemento de $\mathbb{R}^2_3$ se representa mediante cinco números reales $\big(x, f(x), f_x(x), f_{xx}(x), f_{xxx}(x)\big)$.

Una transformación actúa sobre elementos de contacto de tercer orden mediante la tercera prolongación del campo de vectores.

A las cuatro coordenadas $\overset{*}{x}$, $\overset{*}{u}$, $\overset{*}{u}_{\overset{*}{x}}$, $\overset{*}{u}_{\overset{**}{xx}}$ del elemento de contacto imagen expresado mediante las coordenadas x, u, u_x, u_{xx} del elemento de contacto que se transforma, se añade una quinta

$$\begin{aligned}\overset{*}{u}_{\overset{***}{xxx}} &= \frac{d\overset{*}{u}_{\overset{**}{xx}}}{d\overset{*}{x}}\\ &= u_{xxx} + p\Big\{D_x\big[D_x(D_xh - u_xD_xf) - u_{xx}D_xf\big] - u_{xxx}D_xf\Big\} + O(p^2)\end{aligned}$$

El campo de vectores prolongado hasta el tercer orden toma la forma

$$\begin{aligned}v^{(3)} = f(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + h(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + (D_xh - u_xD_xf)\frac{\partial}{\partial u_x}&\\ + \big[D_x(D_xh - u_xD_xf) - u_{xx}D_xf\big]\frac{\partial}{\partial u_{xx}}&\\ + \Big\{D_x\big[D_x(D_xh - u_xD_xf) - u_{xx}D_xf\big] - u_{xxx}D_xf\Big\}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}&.\end{aligned}$$

Una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden es una relación diferencial entre elementos de contacto de tercer orden

$$e(x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = 0 = u_{xxx} - E(x, u, u_x, u_{xx}).$$

El criterio infinitesimal de invariación puede expresarse así:

Teorema. *Un grupo conexo de transformaciones, G, es un grupo de simetría para la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden*

$$e(x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = 0 = u_{xxx} - E(x, u, u_x, u_{xx}),$$

si y solo si

$$v^{(3)}\big[u_{xxx} - E(x, u, u_x, u_{xx})\big] = 0,$$

siempre que $u_{xxx} = E(x, u, u_x, u_{xx})$ para cualquier generador infinitesimal, v, del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, del grupo de Lie, G.

Para estudiar según el algoritmo de Lie la ecuación

$$f_{xxx} + 4Rf_x + 2fR_x = 0.$$

es preciso aplicar a esta ecuación el criterio infinitesimal de invariación para las ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden, vale decir, el último teorema enunciado.

Dada la extensión que tomarían los cálculos, se abrevia el procedimiento, al suponer conocido el teorema siguiente demostrado por el mismo Lie.

Proposición. *Una ecuación diferencial ordinaria de orden $r > 2$ admite a lo más $r+4$ transformaciones infinitesimales independientes entre sí.*

Las siete para $r = 3$, son $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial u}$, $x\dfrac{\partial}{\partial x}$, $x\dfrac{\partial}{\partial u}$, $u\dfrac{\partial}{\partial u}$, $x^2\dfrac{\partial}{\partial u}$, $x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + 3xu\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Se está indagando si existe una función f tal que respecto del campo

$$v = f\frac{\partial}{\partial x} + h\frac{\partial}{\partial u},$$

donde h se expresa mediante funciones derivadas de f, sea invariante la ecuación reducida de Riccati: $u_x = u^2 + R(x)$.

En tal indagación se ha llegado a una condición necesaria y suficiente expresada mediante la ecuación

$$f_{xxx} + 4Rf_x + 2fR_x = 0.$$

Ahora se trata de estudiar esta última ecuación siempre mediante el algoritmo de Lie, lo cual implica determinar un campo de vectores nuevo, es decir, uno respecto del cual sea invariante, no ya la ecuación de Riccati, sino la ecuación diferencial de tercer orden que expresa la condición necesaria y suficiente para que la de Riccati sea invariante respecto de un campo de vectores.

Para evitar confusión, en la ecuación de tercer orden se sustituye la función incógnita f por la función incógnita u; se obtiene

$$u_{xxx} + 4Ru_x + 2uR_x = 0.$$

En lo que sigue, salvo que se escriba lo contrario, el signo de f es el del corficiente en un campo de vectores genérico $v = f\dfrac{\partial}{\partial x} + h\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Averiguada la invariación respecto de cada uno de los siete posibles campos de vectores, resulta que la ecuación $u_{xxx} + 4Ru_x + 2uR_x = 0$ únicamente es invariante respecto del campo $v = u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Para el campo de vectores $v = u\dfrac{\partial}{\partial u}$, es $f = 0$, $h = u$.

Por lo tanto, para la primera prolongación se obtiene

$$D_xh - u_xD_xf = D_xh - 0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u}\right)(u) = u_x.$$

Para la segunda prolongación es

$$\begin{aligned} D_x(D_xh - u_xD_xf) - u_{xx}D_xf &= D_x(D_xh - 0) - 0 = D_x(D_xh) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}\right)(u_x) = u_{xx}. \end{aligned}$$

Para la tercera prolongación es

$$\begin{aligned} &D_x\big[D_x(D_xh - u_xD_xf) - u_{xx}D_xf\big] - u_{xxx}D_xf \\ &\qquad = D_x\big[D_x(D_xh - 0) - 0\big] - 0 = D_x\big[D_x(D_xh)\big] \\ &\qquad = \left(\frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}\right)(u_{xx}) = u_{xxx}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el campo de vectores $v = u\dfrac{\partial}{\partial u}$ prolongado tres veces es igual a

$$v^{(3)} = u\frac{\partial}{\partial u} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}.$$

Se verifica que la ecuación es invariante respecto de $v^{(3)}$. En efecto

$$\begin{aligned}
&v^{(3)}(u_{xxx} + 4Ru_x + 2uR_x)\\
&\quad= \left(u\frac{\partial}{\partial u} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}\right)(u_{xxx} + 4Ru_x + 2uR_x)\\
&\quad= u\frac{\partial}{\partial u}(2uR_x) + u_x\frac{\partial}{\partial u_x}(4Ru_x) + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}(u_{xxx})\\
&\quad= u2R_x + u_x4R + u_{xxx} = 2uR_x + 4Ru_x - 4Ru_x - 2uR_x = 0.
\end{aligned}$$

Es decir, se cumple el criterio de invariación infinitesimal para una ecuación diferencial de tercer orden.

Dado que la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden es invariante respecto a un campo de vectores, ella es canónicamente reducible a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Ello se logra mediante integración del campo de vectores.

Al campo $v^{(3)}$ corresponde, por la teoría, la integral del sistema de ecuaciones diferenciales.

$$f = 0, \qquad \frac{du}{u} = \frac{du_x}{u_x} = \frac{du_{xx}}{u_{xx}} = \frac{du_{xxx}}{u_{xxx}}.$$

La integral del sistema suministra una secuencia de invariantes fundamentales.

Dado que f es idénticamente nulo, el primer invariante asociado a la transformación es $I = x$.

Un segundo invariante es obtenido mediante solución de la ecuación diferencial ordinaria asociada a la primera prolongación

$$\frac{du}{u} = \frac{du_x}{u_x}.$$

Se expresa la solución en la forma

$$J = \frac{u_x}{u}.$$

Con los invariante I, J se obtiene ([?], p. 140) un invariante, en este caso (J es de orden 1), de orden dos, mediante derivación, así

$$\frac{dJ}{dI} = \frac{d(u_x/u)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u_x}{u}\right) = \frac{u_{xx}}{u} - \left(\frac{u_x}{u}\right)^2 = \frac{u_{xx}}{u} - J^2.$$

De donde

$$u_{xx} = u\left[J^2 + \frac{dJ}{dI}\right].$$

Basta derivar una vez más para obtener una expresión invariante para u_{xxx}.

$$\begin{aligned}\frac{d^2J}{dI^2} &= \frac{d}{dI}\left(\frac{dJ}{dI}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{u_{xx}}{u} - J^2\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{u_{xx}}{u}\right) - \frac{d}{dx}\left(J^2\right) \\ &= \frac{u_{xxx}}{u} - \left(\frac{u_x}{u}\right)\left(\frac{u_{xx}}{u}\right) - 2J\frac{dJ}{dI} \\ &= \frac{u_{xxx}}{u} - J\left(\frac{dJ}{dI} + J^2\right) - 2J\frac{dJ}{dI} = \frac{u_{xxx}}{u} - 3J\frac{dJ}{dI} - J^3.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u_{xxx} = u\left(\frac{d^2J}{dI^2} + 3J\frac{dJ}{dI} + J^3\right).$$

Al reemplazar en la ecuación $u_{xxx} + 4Ru_x + 2uR_x = 0$, se obtiene

$$\frac{d^2J}{dI^2} + 3J\frac{dJ}{dI} + J^3 + 4JR + 2R_x = 0.$$

Se logra, pues, una ecuación diferencial de orden menor en uno, pero la resultante es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal, por consiguiente de más difícil estudio que la lineal de tercer orden; puede ser estudiada, no se hará aquí, según Vessiot, 1895.

Estudio de una ecuación de Riccati-Bernoulli

Se puede aplicar el criterio de Lie a la ecuación considerada por Riccati y por Bernoulli

$$u_x = u^2 + cx^m = E(x,u),$$

cuando se supone que $h(x,u)$ depende linealmente de u.

Es

$$\begin{aligned}E_x &= cmx^{m-1} \\ E_u &= 2u.\end{aligned}$$

Por la ecuación determinante se tiene entonces

$$\begin{aligned}0 &= i_xu + j_x + (i - f_x)\left(u^2 + cx^m\right) - f\left(cmx^{m-1}\right) - (iu + j)(2u) \\ &= u^2(-i - f_x) + u(i_x - 2j) + \left(j_x - cf_xx^m + icx^m - cmfx^{m-1}\right)\end{aligned}$$

De donde, el sistema diferencial

$$\left.\begin{aligned}f_u &= 0 \\ i + f_x &= 0 \\ i_x - 2j &= 0 \\ j_x + icx^m - cf_xx^m - cmfx^{m-1} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \text{(C)}$$

De la segunda ecuación se obtiene $i = -f_x$. Por lo tanto, $i_x = -f_{xx}$.

De la tercera ecuación se sigue

$$j = \frac{1}{2}i_x = -\frac{1}{2}f_{xx}.$$

Por lo tanto
$$j_x = -\frac{1}{2} f_{xxx}.$$
Al llevar estos valores a la cuarta ecuación se obtiene
$$f_{xxx} + 4cx^m f_x + 2cmx^{m-1} f = 0.$$
Es la condición a la que ha de satisfacer f para que pueda ser la función mediante la cual se define un campo de vectores respecto del cual es invariante una ecuación de Riccati.

Cuando se elige una f, puede irse más allá en el estudio de la ecuación.

Sea $f(x) = x^{a+1}$. Entonces
$$\begin{aligned} f_x &= (a+1)x^a \\ f_{xx} &= (a+1)ax^{a-1} \\ f_{xxx} &= (a+1)a(a-1)x^{a-2}. \end{aligned}$$
La condición de determinación toma la forma
$$\begin{aligned} &(a+1)a(a-1)x^{a-2} + 4cx^m(a+1)x^a + 2cmx^{m-1}x^{a+1} = \\ &\qquad = (a+1)a(a-1)x^{a-2} + 4(a+1)cx^{m+a} + 2cmx^{m+a} = 0. \end{aligned}$$
Ha de ser
$$a - 2 = a + m.$$
Por lo tanto, $m = -2$, es decir, la ecuación es
$$u_x = u^2 + \frac{c}{x^2}.$$
Por otra parte
$$\begin{aligned} (a+1)a(a-1) + 4(a+1)c + 2cm &= a(a+1)(a-1) + 4ac \\ &= a\big[(a+1)(a-1) + 4c\big] = 0. \end{aligned}$$
Se obtiene así
$$\text{o es } a = 0, \quad \text{o es } a^2 - 1 + 4c = 0.$$
Una de las dos constantes, o a, o c, es arbitraria, pues las dos están ligadas por una sola relación. Hay, entonces, una infinidad de posibilidades.

Para continuar en el estudio de la ecuación cuando $f(x) = x^{a+1}$, se calcula $h(x,u) = i(x)u + j(x)$.

Dado que
$$\begin{aligned} i(x) &= -(a+1)x^a, \\ j(x) &= -\frac{1}{2}(a+1)ax^{a-1}, \end{aligned}$$
se tiene que
$$h(x,u) = -(a+1)x^a u - \frac{1}{2}(a+1)ax^{a-1}.$$

Se calcula la función t, invariante para el campo de vectores v, es decir,

$$v(t) = 0 = x^{a+1}\frac{\partial t}{\partial x} - \left[(a+1)x^a u + \frac{1}{2}(a+1)ax^{a-1}\right]\frac{\partial t}{\partial u}.$$

La integral de este campo de vectores es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{-du}{(a+1)x^a u + \frac{1}{2}(a+1)ax^{a-1}},$$

es la solución de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden lineal

$$\frac{du}{dx} + \frac{(a+1)u}{x} + \frac{(a+1)a}{2x^2} = 0.$$

Su solución es canónica

$$\frac{du}{dx} + \frac{(a+1)u}{x} = 0$$

suministra

$$u = \frac{1}{x^{a+1}}.$$

Luego, la composición $u = p(x)q(x)$ lleva a la ecuación

$$q\left[p_x + \frac{(a+1)}{x}p\right] + pq_x + \frac{(a+1)a}{2x^2} = 0.$$

El coeficiente de q es nulo.

Se obtiene, finalmente

$$u(x) = p(x)q(x) = \frac{1}{x^{a+1}}\left[t - \frac{(a+1)x^a}{2}\right]$$

donde t es la constante de integración.

Se determina una segunda función mediante la ecuación

$$v(w) = 1 = x^{a+1}\frac{dw}{dx}.$$

De donde

$$dw = \frac{dx}{x^{a+1}}$$

y

$$w = \frac{1}{-ax^a} = \frac{1}{(-1)ax^a}.$$

Lo que sigue supone desarrollo en el campo complejo para garantizar la corrección de operaciones con potencias del número menos uno.

La inversa es

$$x = \frac{1}{(-1)^{1/a}a^{1/a}w^{1/a}}.$$

Así, puede escribirse también $u = u(t, w)$, es decir, la expresión

$$u = (-1)^{\frac{a+1}{a}}a^{\frac{a+1}{a}}w^{\frac{a+1}{a}}t - \frac{a+1}{2}(-1)^{1/a}a^{1/a}w^{1/a}.$$

Por lo tanto, puede obtenerse

$$u_x = \frac{du}{dx} = -(-1)^{\frac{a+2}{a}} a^{\frac{a+2}{a}} a w^{\frac{2(a+1)}{a}} \frac{dt}{dw} \\ - (-1)^{\frac{a+2}{a}} a^{\frac{a+2}{a}} (a+1) t w^{\frac{a+2}{a}} + (-1)^{2/a} a^{2/a} \left(\frac{a+1}{2}\right) w^{2/a}.$$

Se calcula por otra parte $u^2 + c/x^2$.

El resultado es

$$(-1)^{\frac{2(a+1)}{a}} a^{\frac{2(a+1)}{a}} t^2 w^{\frac{2(a+1)}{a}} + \frac{(a+1)^2}{4} (-1)^{2/a} a^{2/a} w^{2/a} \\ - (-1)^{\frac{a+2}{a}} a^{\frac{a+2}{a}} (a+1) t w^{\frac{a+2}{a}} + c(-1)^{2/a} a^{2/a} w^{2/a}.$$

Ahora, se comparan términos semejantes en una y en otra expresión.

A la izquierda se tiene

$$-(-1)^{\frac{a+2}{a}} a^{\frac{a+2}{a}} (a+1) t w^{\frac{a+2}{a}}.$$

A la derecha se tiene exactamente la misma expresión. Por lo tanto, se anulan.

Se comparan ahora los términos en $w^{2/a}$.

A la izquierda se tiene

$$(-1)^{2/a} a^{2/a} \frac{a+1}{2} w^{2/a}$$

Este término se lleva a la derecha para adicionarlo a sus semejantes

$$w^{2/a} (-1)^{2/a} a^{2/a} \left[-\frac{a+1}{2} + \frac{(a+1)^2}{4} + c \right].$$

El paréntesis rectangular es $\frac{1}{4}\left[-1 + a^2 + 4c\right]$. Se muestra que la relación entre los paréntesis rectangulares ha de ser nula.

Restan los términos:

a la izquierda

$$-(-1)^{\frac{a+2}{a}} a^{\frac{a+2}{a}} a w^{\frac{2(a+1)}{a}} \frac{dt}{dw};$$

a la derecha

$$(-1)^{\frac{2(a+1)}{a}} a^{\frac{2(a+1)}{a}} t^2 w^{\frac{2(a+1)}{a}}.$$

Al igualar se obtiene

$$-\frac{dt}{dw} \left[(-1)^{\frac{a+2}{a}} a^{\frac{a+2}{a}} a \right] = (-1)^{\frac{2(a+1)}{a}} a^{\frac{2(a+1)}{a}} t^2.$$

Por lo tanto

$$-\frac{dt}{dw} = \frac{(-1)^{\frac{2(a+1)}{a}} a^{\frac{2(a+1)}{a}} t^2}{(-1)^{\frac{a+2}{a}} a^{\frac{a+2}{a}} a} = (-1)^{\frac{2a+2-a-2}{a}} a^{\frac{2a+2-a-2}{a}} \frac{t^2}{a} \\ = (-1)^{a/a} a^{a/a} \frac{t^2}{a} = \frac{(-1)a}{a} t^2 = -t^2.$$

Es decir, se ha llegado a la ecuación en coordenadas separadas

$$\frac{dt}{t^2} = dw.$$

La solución de esta ecuación, sin la constante de integración, es $w = -\frac{1}{t}$. Dado que

$$t = x^a \frac{2xu + a + 1}{2},$$
$$w = \frac{1}{-ax^a};$$

la solución en las variables iniciales es

$$u = \frac{a-1}{2x}.$$

Se verifica que es solución porque al reemplazarla en la ecuación

$$u_x = u^2 + \frac{c}{x^2}$$

se llega a la identidad

$$\frac{1-a}{2x^2} = \frac{1-a}{2x^2}.$$

Cómo obtener ecuaciones reducidas de Riccati, invariantes respecto a un campo de vectores

$$f_{xxx} + 4Rf_x + 2fR_x = 0$$

es una ecuación funcional, de tercer orden y lineal en f; o de primer orden y lineal en R.

La ecuación ha aparecido en otros capítulos del análisis; aquí ha sido generada en el estudio de las ecuaciones de Riccati mediante grupos de Lie.

Diversas consideraciones matemáticas pueden hacerse acerca de la ecuación, pero conducen en general a ecuaciones más complicadas, por ejemplo, una de segundo orden no lineal. Así que no relaciona, lo cual podría haberse esperado, ecuaciones lineales ordinarias de segundo orden con alguna ecuación de Riccati, como lo hace la transformación de Jakob Bernoulli.

Algo general que puede hacerse es aprovechar que la ecuación es lineal y de primer orden en la función $R(x)$. Es decir, suponer que se conoce $f(x)$, que esta función satisface las condiciones requeridas. Se resuelve entonces la ecuación.

Se puede enunciar una propiedad general.

Proposición. *A partir de la ecuación diferencial*

$$f_{xxx} + 4Rf_x + 2fR_x = 0,$$

donde f es una función no nula por lo menos tres veces continuamente diferenciable, siempre es posible determinar una solución, $R(x)$, por lo menos una vez continuamente diferenciable. Más precisamente

$$R(x) = \frac{1}{f^2}\left[constante - \frac{1}{2}\int f f_{xxx}\, dx \right].$$

Con esta propiedad puede considerarse una más, dado que $R(x)$ puede entenderse como la función de x, que figura en una ecuación reducida de Riccati.

Proposición. *La ecuación reducida de Riccati*

$$u_x = u^2 + \frac{1}{f^2}\left[constante - \frac{1}{2}\int f f_{xxx}\, dx\right]$$

donde f es una función de una variable, de clase C^3, no nula, es invariante respecto del campo de vectores

$$v = f(x)\frac{\partial}{\partial x} - \left(u f_x + \frac{1}{2} f_{xx}\right)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Es, por lo tanto, soluble mediante el algoritmo de Lie.

Por ejemplo, para la función $f(x) = x^a$, se obtiene

$$R(x) = \frac{constante}{x^{2a}} - \frac{a(a-2)}{4x^2}.$$

Este ejemplo, puede relacionarse con uno que figura en la exposición del algoritmo de Kovacic.

No es seguro, sin embargo, que la teoría de Lie pueda facilitar los complejos cálculos del algoritmo de Kovacic.

Álgebra de Lie infinita asociada a las ecuaciones de Riccati

$$u_x = u^2 + \frac{c}{x^2}, \qquad (x \neq 0).$$

La condición de invariación conduce a la condición diferencial

$$f_{xxx} + \frac{4c}{x^2} f_x - \frac{4c}{x^3} f = 0.$$

Para f constante, no se cumple la condición.

Para $f(x) = x$, es $f_x = 1$, $f_{xx} = f_{xxx} = 0$. Por lo tanto

$$0 + \frac{4c}{x^2} - \frac{4c}{x^2} = 0.$$

La condición diferencial se cumple cualquiera sea el valor de c.

El campo en este caso es

$$v = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Para $f(x) = x^2$, la condición diferencial se cumple solo si $c = 0$.

Para $f(x) = x^3$, la condición diferencial se cumple si $c = -3/4$.

Para $f(x) = 1/x$, la condición diferencial se cumple si $c = -3/4$.

Para $f(x) = 1/x^2$, ha de ser $c = -2$.

Se puede escribir, para facilitar las operaciones que siguen, en general,

$$\begin{aligned} v_a &= x^a \frac{\partial}{\partial x} - \left[a x^{a-1} u + \frac{a(a-1)}{2} x^{a-2} \right] \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_b &= x^b \frac{\partial}{\partial x} - \left[b x^{b-1} u + \frac{b(b-1)}{2} x^{b-2} \right] \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

Estos son campos de vectores de la forma básica (porque surgen de la pregunta inicial de campos de vectores respecto de los cuales una ecuación de Riccati es invariante)

$$v = f(x) \frac{\partial}{\partial x} - \left(u f_x + \frac{1}{2} f_{xx} \right) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Al hacer el producto de Lie con los campos de vectores v_a, v_b, se obtiene, $a < b$,

$$[v_a, v_b] = (b-a) v_{b+a-1}.$$

Precisamente, $a < b$,

$$\begin{aligned} [v_a, v_b] = (b-a) x^{a+b-1} \frac{\partial}{\partial x} \\ + \left\{ \big[a(a-1) - b(b-1) \big] \left[xu + \left(\frac{a+b-2}{2} \right) \right] x^{a+b-3} \right\} \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Se obtiene el vector nulo, cuando $a = b$.

Igualmente, se cumple la identidad de Jacobi

$$\big[v_a, [v_b, v_c] \big] + \big[v_b, [v_c, v_a] \big] + \big[v_c, [v_a, v_b] \big] = 0$$

Se tiene, pues, un álgebra de Lie.

En particular, con los campos de vectores v_0, v_1, v_2 se tiene

	v_0	v_1	v_2
v_0	0	v_0	$2v_1$
v_1	$-v_0$	0	v_2
v_2	$-2v_1$	$-v_2$	0

Esta es la estructura del álgebra finita $SL(2, \mathbb{R})$.

Cuando un subíndice es diferente de 0, 1, 2, el álgebra se extiende indefinidamente. Una ilustración muestra el resultado hasta subíndice 8. Desde luego, el cuadro completo se obtiene escribiendo los simétricos negativos.

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_0	0	v_0	$2v_1$	$3v_2$	$4v_3$	$5v_4$	$6v_5$	$7v_6$	$8v_7$
v_1		0	v_2	$2v_3$	$3v_4$	$4v_5$	$5v_6$	$6v_7$	$7v_8$
v_2			0	v_4	$2v_5$	$3v_6$	$4v_7$	$5v_8$	$6v_9$
v_3				0	v_6	$2v_7$	$3v_8$	$4v_9$	$5v_{10}$
v_4					0	v_8	$2v_9$	$3v_{10}$	$4v_{11}$
v_5						0	v_{10}	$2v_{11}$	$3v_{12}$
v_6							0	v_{12}	$2v_{13}$
v_7								0	v_{14}
v_8									0

El álgebra resulta asociada a la ecuación de Riccati $u_x = u^2 + c/x^2$, en cuanto se cumpla la condición diferencial

$$f_{xxx} + \frac{4c}{x^2} f_x - \frac{4c}{x^3} f = 0,$$

la cual para $f(x) = x^{a+1}$ implica la relación algebraica

$$a^2 - 1 + 4c = 0.$$