Bases de gröbner y triángulos

Luz Adriana Mejia Castallo
Estudiante de matemática pura
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
sighana25@hotmail.com

1. Introducción

Cuando tenemos un conjunto de polinomios que describen una superficie deseamos encontrar una forma sistemática de hallar teoremas nuevos a partir de este conjunto restringuiendo el número de variables y/o utilizando solo algunas de estas.

Recordemos que el Teorema de La Base de Hilbert nos dice que todo ideal $I \subseteq K[x_1, ..., x_n]$ tiene un conjunto generador finito. Si tomamos a $I =< g >= \{\alpha g | \alpha \in K\} \subseteq K[x]$, $f \in I$ sii el residuo de dividir f en g es cero; pero en varias variables solo tenemos una implicación ya que el residuo suele tener términos que no pueden ser removidos por división de los generadores de I, por ejemplo si tomamos

$$I =< x^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 4 > \text{ y } p = x^2 + \frac{1}{2}y^2z - z - 1 \in I$$

$$p = (-\frac{1}{2}z + 1)(x^2 + z^2 - 1) + \frac{1}{2}z(x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 4)$$

pero por el algoritmo de la división

$$p = (x^2 + z^2 - 1) + \frac{1}{2}y^2z - z^2 - z$$

y este residuo no es removible.

En especial, lo anterior ocurre si los términos lider (TL) de los generadores no dividen al TL del residuo. Para llegar a producir residuos nulos para todo elemento de I necesitamos remover todos los TL de los elementos de I usando los TL de los divisores. Aquí nacen las Bases de Gröbner (BG). Sea $>$ un orden monomial sobre $K[x_1, ..., x_n]$ e I un ideal, una BG es una colección finita de polinomios

$$G = \{g_i \in I | i = 1, ..., t \wedge (\forall f \in I)(\exists i = 1, ..., t)(TL(g_i) \mid TL(f))\}$$

Veremos ejemplos de BG mas adelante.

Para todo I existen al menos una BG y si G es una BG entonces para todo $f \in I$ el residuo de f al dividirlo en los polinomios de G ($\overline{f}^G$) es cero, que era lo que estabamos buscando, además si $f \in K[x_1, ..., x_n]$, $\overline{f}^G$ es único, hecho que en general no ocurre con otro tipo de base, como por ejemplo si seguimos con la idea expuesta al final del segundo parrafo tenemos que $p = (x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 4) + \frac{1}{2}y^2z - y^2 - (z-1)^2 + 3$ y este residuo es diferente al obtenido anteriormente.

En la definición de una GB se define un orden previamente, pero según el orden monomial que escojamos tendremos una BG diferente, si consideramos $I = [x^3 - 3xy, x^2y - 2y^2 + x]$, la BG con orden lexicografico es $[y^6 - 3y^3, x + y^5 - 2y^2]$ pero con orden lexicografico grado inverso es $[y^3 + xy, xy^2 + x^2, x^2y - 2y^2 + x, x^3 - 3xy]$.

Ahora nos concierne dar una nueva definición, la de ideal l-ésimo de eliminación. Sea $I \subseteq K[x_1, ..., x_n]$ un ideal y $l < n$ luego $I_l := I \bigcap K[x_{l+1}, ..., x_n]$. Estos ideales son la base central del trabajo que desarrollaremos, ya que generan teoremas nuevos (nuevas relaciones) a partir de la información de I (geometrica en este caso).

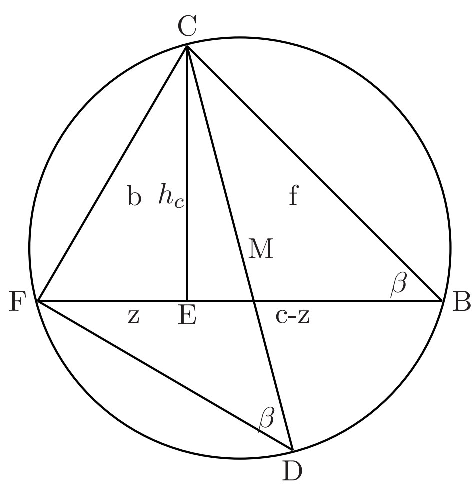
Si tomamos $f, g \in K[x_1, ..., x_n]$ y fijamos un orden monomial, sea $\mathrm{LT}(f) = cx^\alpha$ y $\mathrm{LT}(g) = dx^\beta$ donde $c, d \in K$. Sea x^γ el máximo común múltiplo entre x^α y x^β. Definimos el S-polinomio de f y g como

$$S(f,g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)}f - \frac{x^\gamma}{LT(g)}g \in < f, g >$$

Este concepto lo introducimos ya que se puede dar el caso de que $\mathrm{LT}\overline{S(f,g)}^I$ no sea divisible ni por LT(f) ni por LT(g), por ejemplo si tomamos $f = x^3y - 2x^2y^2 + x, g = 3x^4 - y$, $S(f,g) = -2x^3y^2 + x^2 + \frac{y^2}{3}$.

Buchberger demostró que G es una GB sii $\overline{S(f,g)}^G = 0$ para todo $f, g \in G$, y en base a esto creo el siguiente argumento o algoritmo rústico para producir bases de Gröbner, sea $F = (f_1, ..., f_s)$, definimos $G_1 = F$, para cada par $p \neq q \in F$, sea $S = \overline{S(p,q)}^{G_1}$, si $S \neq 0$ entonces $G_2 = G_1 \bigcup \{S\}$, paramos cuando para todo par $S = 0$.

2. Ecuaciones del triángulo



Tomemos un triángulo de lados a, b, c. Sea r el radio del círculo inscrito, R el del circunscrito, W el área del triángulo, $2s$ su perímetro, h_c la altura que pasa por C, E el punto de intersección del lado c con h_c, z el segmento $\overline{AE}$.

Luego las ecuaciones que describen a este triángulo son:

$p_1 := 2s - a - b - c = 0$, definición de perímetro.

$p_2 := W - rs = 0$, tomemos a O como el centro de la circunferencia inscrita y trazamos los triángulos AOB, BOC, COA, luego respectivamente el área de cada uno es $\frac{cr}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{br}{2}$ pero $W = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{r}{2}(a+b+c) = rs$.

$p_3 := ch_c = 2W$, definición de área. $p_4 := b^2 - h_c^2 - z^2 = 0$, teorema de pitágoras. $p_5 := a^2 - h_c^2 - (c-z)^2 = 0$, teorema de pitágoras.

$p_6 := ab - 2Rh_c = 0$, los triángulos CAD y CEB son rectángulos y tienen un ángulo agudo en común (β), luego son semejantes, por tanto se cumple que $\frac{a}{h_c} = \frac{2R}{b}$.

A continuación utilizaremos bases de Gröbner -eliminación de variables- con el fin de encontrar un sistema de ecuaciones más "sencillo"(con menor número de incógnitas) que describan al triángulo mencionado anteriormente.

$$\begin{aligned}
p_1 &:= 2s - a - b - c = 0\\
p_2 &:= W - rs = 0\\
p_3 &:= ch_c = 2W\\
p_4 &:= b^2 - h_c^2 - z^2 = 0\\
p_5 &:= a^2 - h_c^2 - (c-z)^2 = 0\\
p_6 &:= ab - 2Rh_c = 0
\end{aligned}$$

Teorema 2.1. $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ es equivalente a $\{p_1, p_2, p_7, p_8\}$ donde

$$\begin{aligned}
p_7 &:= 4WR - abc = 0\\
p_8 &:= (b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) - 8Wr = 0
\end{aligned}$$

Demostración:
Se desea eliminar las variables h_c y z, luego debemos calcular una base de Gröbner para $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ respecto al orden lexicográfico $\{z, h_c, R, r, W, s, a, b, c\}$. Tomemos por comodidad $h_c = h$, calculando la base en MAPLE obtenemos:

$\{2s-a-b-c, -2a^2b^2+b^4+a^4-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4+16W^2, -2W+ra+rb+rc, a^3b^2+ca^3b-a^2b^3-2a^2b^2c-a^2bc^2-ab^4+b^3ac+c^2b^2a-c^3ab+b^5-2b^3c^2+bc^4+8rWb^2+8crbW, Ra^3b^2+Rca^3b-Ra^2b^3-2Ra^2b^2c-Ra^2bc^2-Rab^4+Rb^3ac+Rc^2b^2a-Rc^3ab+Rb^5-2Rb^3c^2+Rbc^4-2b^4cr-4b^3c^2r-2c^3b^2r+4b^3cW+4b^2c^2W, -2Ra^2b^2+Rb^4+Ra^4-2Ra^2c^2-2Rb^2c^2+Rc^4+4abcW, 4WR-abc, 16Rb^4cr+32Rb^3c^2r+16Rc^3b^2r+4b^4cr^2+8b^3c^2r^2+4r^2b^2c^3+a^2b^4c+2a^2b^3c^2+a^2b^2c^3-2ab^5c-6b^4c^2a-6b^3c^3a-2b^2c^4a+cb^6-2c^3b^4+c^5b^2, ch-2W, ha^3-a^2hb-ahb^2+hb^3+8rhW-2a^2W+4baW-2acW-2b^2W-2bcW+2c^2W, -ab+2Rh, a^2-c^2+2cz-b^2, -8hW+3b^2c+2za^2-2zb^2+ca^2-c^3, -2cW+4zW+ha^2-hb^2, -b^2+h^2+z^2\}$

Eliminando las variables h y z, obtenemos:

$\{2s-a-b-c, -2a^2b^2+b^4+a^4-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4+16W^2, -2W+ra+rb+rc, a^3b^2+ca^3b-a^2b^3-2a^2b^2c-a^2bc^2-ab^4+b^3ac+c^2b^2a-c^3ab+b^5-2b^3c^2+bc^4+8rWb^2+8crbW, Ra^3b^2+Rca^3b-Ra^2b^3-2Ra^2b^2c-Ra^2bc^2-Rab^4+Rb^3ac+Rc^2b^2a-Rc^3ab+Rb^5-2Rb^3c^2+Rbc^4-2b^4cr-4b^3c^2r-2c^3b^2r+4b^3cW+4b^2c^2W, -2Ra^2b^2+Rb^4+Ra^4-2Ra^2c^2-2Rb^2c^2+Rc^4+4abcW, 4WR-abc, 16Rb^4cr+32Rb^3c^2r+16Rc^3b^2r+4b^4cr^2+8b^3c^2r^2+4r^2b^2c^3+a^2b^4c+2a^2b^3c^2+a^2b^2c^3-2ab^5c-6b^4c^2a-6b^3c^3a-2b^2c^4a+cb^6-2c^3b^4+c^5b^2\}$.

Factorizando algunos de los polinomios obtenemos:

$\{2s-a-b-c, (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)+16W^2, (a+b+c)r-2W, -((b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)-8Wr)(b+c)b, -((b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)R+2(b+c)bcr-4Wbc)(b+c)b, (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)R+4Wabc, 4WR-abc, -((2b+2c-a)a-b^2+2bc-c^2-4r^2-16Rr)(b+c)^2b^2c\}$

Pero como estos polinomios representan un objeto geométrico, podemos simplificarlos, por ejemplo en el cuarto polinomio de la lista anterior, no es posible que b ò $b+c$ sean cero luego $-((b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)-8Wr)(b+c)b$ se convierte en $(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)-8Wr$; el quinto se convierte en $(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)R+2(b+c)bcr-4Wbc$; y el octavo en $(2b+2c-a)a-b^2+2bc-c^2-4r^2-16Rr$.

Así el sistema de ecuaciones que describe el triángulo es:

1. $2s-a-b-c=0$,
2. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)+16W^2=0$,
3. $(a+b+c)r-2W=0$,
4. $(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)-8Wr=0$,
5. $(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)R+2(b+c)bcr-4Wbc=0$,
6. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)R+4Wabc=0$,
7. $4WR-abc=0$,
8. $(2b+2c-a)a-b^2+2bc-c^2-4r^2-16Rr=0$

Pero hay cuatro de estas que no son independientes (5,6,2,8 se derivan de 1,3,4,7).

- Partiendo de (7) tenemos:

$$\begin{aligned}
4Wr &= abc \quad \text{multiplicando por } 2r\\
8WRr &= 2bc(ar) = 2bc(2W-br-cr) \quad \text{- con (3) -}\\
&= 4Wbc - 2b^2cr - 2bc^2r\\
&= 4Wbc - 2bcr(b+c),
\end{aligned}$$

  Luego tomando (4) y multiplicando por R,

  $(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)R = 8RWr = 4Wbc - 2bcr(b+c)$, así $(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)R-4Wbc+2bcr(b+c)=0$ que es (5).

- Partiendo de (4),

$$\begin{aligned}
8Wr(a+b+c) &= (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)\\
&= -(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) \quad \text{y}\\
-8Wr(a+b+c)R &= R(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)
\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}-8Wr(a+b+c)R &= -8WR(2W) \quad \text{- con (3) -}\\ &= -4Wabc \quad \text{- con (7), luego}\end{aligned}$$

$$R(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)+4Wabc=0$$

que es (6).

- Partiendo de (4),
  $(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) = -8Wr(a+b+c)$
  $= 16W^2$ - con (3) -
  Luego $(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)+16W^2 = 0$ que es (2).
- (8) también se deriva de (1), (3), (4) y (7), que son las ecuaciones p_1, p_2, p_8, p_7 respectivamente.

□

Corolario 1 (Fórmula de Herón). El área de un triángulo está dada por $W^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$.

Demostración:
Retomemos la fórmula (2) del teorema anterior, $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)+16W^2 = 0$ además $2s = a+b+c$ entonces $2s(a+b+c-c-c)(a+c+b-b-b)(b+c+a-a-a) = 16W^2$ $2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a) = 16W^2$, obteniendo la fórmula de Herón.

Veamos como escribir s, W, r, R (semiperimetro, área, radio inscrito y circunscrito) en términos de a, b, c. □

Teorema 2.2.

1. $s = \dfrac{a+b+c}{2}$,
2. $W^2 = \dfrac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{16}$,
3. $r^2 = \dfrac{(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4(a+b+c)}$,
4. $R^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}$

Demostración:
La fórmula (i) claramente es p_1. La fórmula (ii) claramente es la fórmula (2) del teorema 1. Ahora tomemos p_8, $(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)-8Wr = 0$ y reemplazamos $(a+b+c)r = 2W$, obtenemos $(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)-4r^2(a+b+c) = 0$ que es la fórmula (iii). Tomemos

la fórmula (6) del teorema 1, $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)R+4Wabc=0$ y multipliquemosla por R, obteniendo $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)R^2+4WRabc=0$ y reemplazemos $4WR=abc$, teniendo la fórmula (iv). □

3. Nuevos teoremas

Veamos una forma de crear nuevos teoremas utilizando bases de Gröbner sobre los polinomios p_1, p_2, p_7, p_8; suponiendo que solo conocemos R, r, s para cada triángulo.

Teorema 3.1. Un triángulo es rectángulo sii la relación $p_9 := 2R+r-s=0$ es válida.

Demostración:

⇒ Por el teorema de Pitágoras sabemos que un triángulo es rectángulo sii se cumple $q_1 := ((a^2-b^2-c^2)(b^2-c^2-a^2)(c^2-a^2-b^2)=0$ ya que no sabemos cual de los lados es la hipotenusa. Debemos calcular la base de Gröbner de $\{p_1,p_2,p_7,p_8,q_1\}$ respecto al orden lexicográfico $\{W,a,b,c,R,r,s\}$ (buscamos relaciones que dependan (únicamente) de R,r,s) y encontrar un polinomio que solo dependa de R,r,s.

La base obtenida es:

$\{4R^2r^2s^2+4Rr^3s^2+r^4s^2-s^4r^2, sc^3-2c^2s^2+4cRrs+r^2cs+cs^3-4s^2Rr, b^2s+bcs-2s^2b+c^2s-2cs^2+4Rrs+r^2s+s^3, b^2c+bc^2-2bcs+4Rrs, -2s+a+b+c, W-rs\}$

El polinomio que buscamos es $4R^2r^2s^2+4Rr^3s^2+r^4s^2-s^4r^2=-s^2r^2(r+2R+s)(-2R-r+s)$ al igualar a cero, vemos que $-s^2r^2$ ni $(r+2R+s)$ pueden ser cero por su representación geométrica, luego $-2R-r+s=0$.

⇐ Calculando la base de $\{p_1,p_2,p_7,p_8,p_9\}$ con orden lex $\{R,r,s,W,a,b,c\}$ obtenemos:

$\{2a^2b^2c^2-a^4b^2-a^2b^4-a^4c^2+a^6-b^4c^2+b^6+c^6-c^4a^2-c^4b^2, a^5-ba^4-a^4c+2ca^3b+8cb^2W+8bc^2W-ab^4-2b^3ac-2c^2b^2a-2c^3ab-c^4a+b^5+b^4c-2b^3c^2-2b^2c^3+bc^4+c^5, a^3-ba^2-ca^2-b^2a-2abc-c^2a+b^3-b^2c-bc^2+c^3+4aW+4Wb+4cW, -2a^2b^2+b^4+a^4-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4+16W^2, 2s-a-b-c, 4cb^2r+4c^2br+a^4-2a^3b-2ca^3-8b^2W-16bcW+2a^2bc-8c^2W+2ab^3+4b^2ca+4abc^2+2ac^3-b^4+2b^2c^2-c^4, -2W+ra+rb+rc, 8Wr+a^3-ba^2-ca^2-b^2a+2abc-c^2a+b^3-b^2c-bc^2+c^3, 4R+2r-c-b-a\}$

El polinomio buscado es $2a^2b^2c^2-a^4b^2-a^2b^4-a^4c^2+a^6-b^4c^2+b^6+c^6-c^4a^2-c^4b^2=(-b^2+c^2+a^2)(a^2-b^2-c^2)(b^2+a^2-c^2)$.

□

Teorema 3.2. Un triángulo es isosceles sii se cumple

$$p_{10} := s^4-4R^2s^2-20rsR+2r^2s^2+64rR^3+48r^2R^2+12r^3R+r^4=0$$

Teorema 3.3. $\Rightarrow$ Un triángulo es isósceles sii se cumple $q_2 := (a-b)(a-c)(b-c) = 0$ osea si al menos dos de los lados son iguales. Calculando una base de $\{p_1, p_2, p_7, p_8, p_{11}\}$ con orden lex $\{W, a, b, c, s, R, r\}$, obtenemos:

$\{s^5r^2 - 4R^2s^3r^2 - 20s^3Rr^3 + 2s^3r^4 + 64R^3r^3s + 48R^2r^4s + 12Rr^5s + r^6s, 8c^2R^2r^2s - 14c^2Rr^3s - 4r^4c^2s + cs^4r^2 - 12cR^2r^2s^2 + 6cRr^3s^2 + 9cr^4s^2 - 8s^3Rr^3 - 2s^3r^4 + 64R^3r^3s - 12Rr^5s - 2r^6s, 2c^2Rs^2r - 4r^2c^2s^2 - 2cRs^3r + 7cs^3r^2 - 16cR^2r^2s - 8cRr^3s - cr^4s - 2s^4r^2 + 16R^2r^2s^2 - 4Rr^3s^2 - 2r^4s^2, s^3c^2 - 12c^2Rrs - 3r^2c^2s - s^4c + 10cRs^2r + 7s^2r^2c + 4s^3Rr - 2s^3r^2 - 32R^2r^2s - 16Rr^3s - 2r^4s, sc^3 - 2c^2s^2 + 4cRrs + r^2cs + cs^3 - 4s^2Rr, c^5 - 38c^2Rrs - 4r^2c^2s - s^4c + 42cRs^2r + 23s^2r^2c + 4s^3Rr - 6s^3r^2 - 128R^2r^2s - 56Rr^3s - 6r^4s, 8bcR^2r^2s - 14bcRr^3s - 4bcr^4s - s^4br^2 - 4bR^2r^2s^2 + 22Rr^3bs^2 - r^4bs^2 - cs^4r^2 - 4cR^2r^2s^2 + 22cRr^3s^2 - cr^4s^2 + 8R^2s^3r^2 + 2s^3Rr^3 - 96R^3r^3s - 48R^2r^4s - 6Rr^5s, 2bcRs^2r - 4s^2br^2c - 2bRs^3r + s^3br^2 + 16bR^2r^2s + 8Rr^3bs + r^4bs - 2cRs^3r + cs^3r^2 + 16cR^2r^2s + 8cRr^3s + cr^4s + 2s^4Rr - 24R^2r^2s^2 - 6Rr^3s^2, s^3bc - 12bcRrs - 3br^2cs - s^4b + 14bRs^2r - r^2bs^2 - s^4c + 14cRs^2r - s^2r^2c + s^5 - 16s^3Rr + 2s^3r^2 + 16R^2r^2s + 8Rr^3s + r^4s, 3sbc^2 - 4s^2bc + s^3b + 4bRrs + r^2bs - 2c^2s^2 + 3cs^3 - 4cRrs - r^2cs - s^4 + 2s^2Rr - r^2s^2, 6bc^3 - 8s^2bc + 2s^3b + 20bRrs + 2r^2bs + 3c^4 - 16c^2s^2 + 15cs^3 + 34cRrs + 7r^2cs - 2s^4 - 44s^2Rr - 2r^2s^2, b^2s + bcs - 2s^2b + c^2s - 2cs^2 + 4rsR + r^2s + s^3, b^2c + bc^2 - 2bcs + 4rsR, b^3 - 3bc^2 + 6bcs - 4s^2b - c^3 + 6c^2s - 8cs^2 + 3s^3 + 6rsR + 3r^2s, -2s + a + b + c, W - rs\}$.

El polinomio buscado es $s^5r^2 - 4R^2s^3r^2 - 20s^3Rr^3 + 2s^3r^4 + 64R^3r^3s + 48R^2r^4s + 12Rr^5s + r^6s = sr^2(s^4 - 4R^2s^2 - 20rsR + 2r^2s^2 + 64rR^3 + 48r^2R^2 + 12r^3R + r^4)$ pero al igualarlo a cero, sr^2 no puede ser cero, luego $s^4 - 4R^2s^2 - 20rsR + 2r^2s^2 + 64rR^3 + 48r^2R^2 + 12r^3R + r^4 = 0$.

$\Leftarrow$ Calculando una base para $\{p_1, p_2, p_7, p_8, p_{10}\}$ según orden lex

$\{W, s, R, r, a, b, c\}$ obtenemos:

$\{b^4ca^4 - b^3c^2a^4 - c^3b^2a^4 + c^4ba^4 - 2cb^5a^3 + 4a^3c^3b^3 - 2bc^5a^3 + b^6a^2c + 3b^5a^2c^2 - 4b^4c^3a^2 - 4c^4b^3a^2 + 3c^5a^2b^2 + a^2c^6b - 2ab^6c^2 + 4ac^4b^4 - 2b^2c^6a + b^6c^3 - c^4b^5 - c^5b^4 + c^6b^3, -2a^2c^3b^2 + c^4b^2a + b^4c^2a + c^2ba^4 + 2c^3ba^3 + b^4a^2c - 2b^3c^2a^2 - 2b^5ac + c^4a^2b + b^2ca^4 - 2a^5bc - 2c^2b^2a^3 + b^5c^2 - b^4c^3 - b^3c^4 + b^2c^5 + b^2a^5 - b^4a^3 - c^4a^3 + b^5a^2 + a^2c^5 + c^2a^5 - b^3a^4 - c^3a^4 + 2c^3b^3a + 2b^3ca^3 - 2c^5ab, -8b^2c^7a^2 - 8b^2c^8a + 64b^2c^7r^2 - 8a^2b^7c^2 + 16b^8r^2c - 8b^9ca + 4c^8ba^2 + 19a^2b^4c^5 - 8ab^8c^2 + 36b^6c^3r^2 + 8b^4c^6a + 16c^8r^2b + 30c^3ab^7 - 44ac^5b^5 - 116r^2c^4b^5 - 8c^9ba + 19c^4a^2b^5 - 15c^3a^2b^6 + 8a^3b^6c^2 + 30c^7b^3a + 8b^6ac^4 + 36c^6b^3r^2 + 64r^2b^7c^2 + 8b^2c^6a^3 + 4b^8a^2c - 23b^7c^4 - 19b^8c^3 + 4b^{10}c + 30c^6b^5 - 23c^7b^4 - 116c^5b^4r^2 + 8b^2c^9 + 4c^{10}b - 16a^3c^4b^4 + 30b^6c^5 - 15c^6b^3a^2 - 19c^8b^3 + 8b^9c^2 \ldots\}$

El polinomio buscado es $b^4ca^4 - b^3c^2a^4 - c^3b^2a^4 + c^4ba^4 - 2cb^5a^3 + 4a^3c^3b^3 - 2bc^5a^3 + b^6a^2c + 3b^5a^2c^2 - 4b^4c^3a^2 - 4c^4b^3a^2 + 3c^5a^2b^2 + a^2c^6b - 2ab^6c^2 + 4ac^4b^4 - 2b^2c^6a + b^6c^3 - c^4b^5 - c^5b^4 + c^6b^3 = bc(c-a)^2(b-a)^2(b+c)(-c+b)^2$.

Teorema 3.4. Un triángulo es equilátero sii cumple $p_{11} := R - 2r = 0$.

Demostración:

Un triángulo es equilátero sii cumple $q_3 := a - b = 0$ y $q_4 := a - c = 0$ ($a = b = c$). Calculando una base para $\{p_1, p_2, p_7, p_8, q_3, q_4\}$ según orden lex $\{a, b, c, W, s, R, r\}$ obtenemos: $\{Rrs - 2r^2s, s^3 - 27r^2s, W - rs, -2s + 3c, 3b - 2s, 3a - 2s\}$

El polinomio buscado es $Rrs - 2r^2s = -rs(2r - R)$ al igualar a cero, $-rs$ no puede ser cero, entonces $2r - R = 0$.

$\Leftarrow$ Calculando una base para $\{p_1, p_2, p_7, p_8, p_{11}\}$ para un orden lex

$\{R, W, s, r, a, b, c\}$ obtenemos:

$\{a^3-a^2b-ca^2-b^2a+3abc-c^2a+b^3-b^2c-c^2b+c^3, 36cb^2r^2+36c^2br^2+a^2b^2c+a^2c^2b-2b^3ac-4c^2b^2a-2c^3ab+b^4c-b^3c^2-c^3b^2+c^4b, 4r^2a+4r^2b+4r^2c-abc, 2s-a-b-c, -ra-rb-rc+2W, -2r+R\}$

El polinomio buscado es $a^3-a^2b-ca^2-b^2a+3abc-c^2a+b^3-b^2c-c^2b+c^3$. Sea $G(a,b,c) := a^3-a^2b-ca^2-b^2a+3abc-c^2a+b^3-b^2c-c^2b+c^3 = abc-(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) = 4WR-(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$ utilizando p_7

$= 4WR - 8Wr$ utilizando p_8

$= 4W(R-2r)$. Veamos que $G(a,b,c)=0$ sii $a=b=c$; luego esto implicaría q_3 y q_4.

$$\begin{aligned}
G(x+w, y+w, z+w) =& (x+w)^3+(y+w)^3+(z+w)^3-(x+w)^2(y+w) \\
& -(x+w)(y+w)^2-(x+w)^2(z+w)-(x+w)(z+w)^2 \\
& -(y+w)^2(z+w)-(y+w)(z+w)^2+ \\
& 3(x+w)(y+w)(z+w) \\
=& x^3+y^3+z^3+x^2w+y^2w+z^2w-x^2y-xyw-xy^2- \\
& x^2z-xwz-xz^2-y^2z-ywz-yz^2+3xyz \\
=& \frac{w}{2}(2x^2-2xy+2y^2-2xz+2z^2-2yz)+x^3+y^3+ \\
& z^3-x^2y-xy^2-x^2z-xz^2-yz^2-y^2z+3xyz \\
=& \frac{w}{2}(x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+2z^2+y^2-2yz+z^2)+ \\
& x^3+y^3+z^3-x^2y-xy^2-x^2z-xz^2-yz^2-y^2z+3xyz
\end{aligned}$$

$= \frac{w}{2}((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2)+G(x,y,z) = G(x+w, y+w, z+w)$ (1)

Asumamos, sin perdida de generalidad, que $a \geq b \geq c \geq 0$. Tomemos en (1) $z=0, w=c$ luego $x=a-c, y=b-c$, por tanto,

$G(a,b,c) = \frac{c}{2}((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2)+G(a-c,b-c,0) = \frac{c}{2}((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2)+(a-c)^3+(b-c)^3-(a-c)^2(b-c)-(a-c)(b-c)^2 = \frac{c}{2}((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2)+a^2-a^2(b+2c)+ab(4c-b)+b^3-2b^2c = \frac{c}{2}((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2)+(a-b)^2(a+b-2c)$

Y esto muestra que $G(a,b,c) \geq 0$ ya que todos los sumandos son positivos, luego $G(a,b,c)=0$ sii $(a-b)^2=(a-c)^2=(b-c)^2=0$ por tanto $a=b=c$. Por tanto el triángulo es equilátero. □

Corolario 2. Todo triangulo satisface $R > 2r$

Bibliografía

[1] D.Cox, J. Little y D. O'shea. *Using Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[2] W.Koepf. *Grobner bases and Triangles.* Preprint SC 96-24 (Septiembre 1996)