# Aplicaciones de los grupos cociente

**Brigitte Johanna Sánchez Robayo**
*Profesora Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C., Colombia*
juanitasan82@msn.com

**Jaime Fonseca González**
*Profesor Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C., Colombia*
jfgonzalez@uni.pedagogica.edu.co

**Resumen**

Una de las aplicaciones que tiene el grupo cociente, es la determinación de grupos cristalográficos, que a su vez, son grupos de transformaciones rígidas más conocidas como isometrías. Luego de estudiar las clases de transformaciones rígidas: Translaciones, reflexiones centrales, rotaciones y reflexiones axiales, con las dos primeras definidas a partir de paralelogramos, se encuentran subgrupos de transformaciones que serán útiles en la determinación de grupos cristalográficos por medio de grupos cociente entre ellos.

## 1. Introducción

Las isometrías pueden ser estudiadas desde la geometría o el álgebra, la segunda opción permite determinar propiedades cuyas demostraciones serían geométricamente engorrosas. La característica fundamental de este estudio es el uso de transformaciones lineales que reflejan la conservación de las distancias entre parejas de puntos transformados. A partir del estudio de las transformaciones rígidas en general, se definen y deducen propiedades de sus clases, lo que permite demostrar el teorema fundamental de transformaciones rígidas; posteriormente, se definen los elementos necesarios para verificar la existencia de los 17 grupos cristalográficos y se construye uno de ellos a partir de grupos cocientes.

## 2. Transformaciones Rígidas

A continuación, se mostrarán algunas definiciones y propiedades necesarias para emprender el estudio de las clases de transformaciones rígidas.

**Definición 1.** Si $V$ y $W$ son dos espacios vectoriales sobre un campo (escalares), una función $F$ de $V$ en $W$ se llama transformación lineal de $V$ en $W$ ($F : V \to W$) si tiene las siguientes propiedades:

- $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$

- $F(cX) = cF(X)$, para todo $c$ un escalar

**Definición 2.** Una *transformación rígida* $T$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ $(F : V \to W)$ tal que para cualquier par de puntos $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, se cumple que:

$$d(X_1, X_2) = d(T(X_1), T(X_2))$$

Es decir, cuando se habla de transformaciones rígidas, se hace referencia a funciones que aplicadas a dos puntos, conservan la distancia entre ellos.
El actual trabajo se limitará al estudio de las transformaciones rígidas en el plano euclidiano $\Pi$ , con lo que definimos el conjunto

$$\mathbf{R} = \{T | T : \Pi \to \Pi\}, \text{ siendo } T \text{ una transformación rígida.}$$

Teniendo en cuenta la definición de transformaciones, se puede pensar en la operación de composición y estudiar así la estructura resultante.

**Teorema 1.** $(\mathbf{R}, \circ)$ *es grupo*

Esta demostración se realiza utilizando la definición de transformación rígida y las propiedades de funciones.
Podría asegurarse que la existencia de una transformación rígida se puede garantizar únicamente, cuándo se prueba que conserva la distancia entre cualquier par de puntos del plano, sin embargo, existe un criterio que cumple la misma función a partir de la conservación de la distancia para tres puntos no colineales y sus imágenes por una transformación.

**Teorema 2 (Teorema Fundamental de existencia de transformaciones rígidas en $\mathbf{R}^2$).** *Sean $A$, $B$ y $C$ puntos no colineales en $\Pi$ y sus respectivas imágenes $A', B'$ y $C'$ tales que se preserva la distancia entre cualquier par de esos puntos y sus respectivas imágenes, existe una única transformación rígida en $\mathbf{R}$ que aplica $A, B$, $C$ en $A', B'$ y $C'$ respectivamente.*

De este teorema, se puede demostrar fácilmente que:

**Teorema 3.** *Si $T$ y $U$ son dos transformaciones rígidas de $\mathbf{R}$, y $P$, $Q$ y $S$ son puntos no colineales de tales que $T(P) = U(P)$, $T(Q) = U(Q)$ y $T(S) = U(S)$, entonces $T = U$.*

Se puede profundizar el estudio de las transformaciones rígidas si las clasificamos según su comportamiento, de tal forma que se puedan encontrar subgrupos de $\mathbf{R}$.

# 3. Clases De Transformaciones Rígidas

## 3.1. Translaciones

Tomando como base un paralelogramo se puede definir algunas transformaciones rígidas, que serán agrupadas en un conjunto y en su estudio, se probarán algunas propiedades de sus elementos que enriquecidos con la operación de composición, servirán como herramienta para demostrar que forman una estructura de grupo abeliano.

**Definición 3.** Un paralelogramo $ABCD$ es:

1. Si $A, B, C, D$ son puntos no colineales, esto es el cuadrilátero $ABCD$ donde $\overline{AB} \| \overline{CD}$ y $\overline{BC} \| \overline{AD}$.

2. Si $A, B, C, D$ son colineales, esto es la unión $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{DA} \cong \overline{BC}$ (en este caso, el paralelogramo es degenerado) Si se *reordena cíclicamente* los vértices, se puede concluir que cualquiera

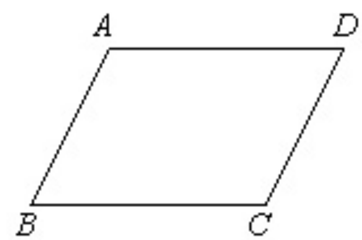


Figura 1: Paralelogramo

de las siguientes expresiones son equivalentes y hacen referencia al mismo paralelogramo:

$$\square ABCD \leftrightarrow \square BCDA \leftrightarrow \square CDAB \leftrightarrow$$

$$\square DABC \leftrightarrow \square DCBA \leftrightarrow \square CBAD \leftrightarrow \square BADC \leftrightarrow \square ADCB$$

Con esta definición, se puede deducir la siguiente propiedad de los paralelogramos:

**Teorema 4.** *Si existe el paralelogramo $ABCD$ con $A, B, C, D$ no colineales, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ .*

La existencia de determinados paralelogramos cumplen propiedades como:

**Teorema 5 (Transitividad de paralelogramos).** *Si existen los paralelogramos $ABCD$ y $CDEF$, existe el paralelogramo $ABFE$.*

**Criterio 1 (Principio del cuarto vértice principal).** . *Si existen los paralelogramos $ABCD$ y $ABCF$, entonces $D = F$.*

Luego de definir y probar algunas propiedades de los paralelogramos, se puede dar una definición de una clase de transformación rígida.

**Definición 4 (Translación).** Supongamos que $P$ y $Q$ son puntos fijos (no necesariamente distintos) en $\Pi$ , entonces se define

$$\begin{aligned} \overline{QP} : \Pi &\rightarrow \Pi \\ X &\rightarrow \overline{QP}(X) \text{ donde existe } \square QPX\overline{QP}(X) \end{aligned}$$

Si se nombra $X'$ a la translación de $X$ en la dirección de $P$ a $Q$, a través de la distancia entre $P$ y $Q$, entonces, la definición se puede reescribir así:

$$\text{Para cualquier punto } X \text{ en } \Pi,\ \overline{QP}(X) = X' \text{ si y sólo si } \square QPXX'.$$

A lo largo del texto se presentarán algunas demostraciones, como una manera de mostrar el tratamiento que se les da a las transformaciones cuando logran ser definidas a partir de paralelogramos.

**Teorema 6.** *Si $P = Q$, entonces $\overline{PP} = I_\Pi$*

Demostración
Por definición se tiene que $\overline{PP}(X) = X'$ si y sólo si existe $\square PPXX'$, de donde $\overline{PP} \cong \overline{XX'}$ , luego $X' = X$. Como $\overline{PP}(X) = X' = X$ para todo $X \in \Pi$, entonces $\overline{PP} = I_\Pi$. $\square$.
Aunque se concibieron las translaciones como una clase de transformaciones rígidas, es necesario probar que cumplen la condición para pertenecer a este conjunto.

**Teorema 7.** *Para cualquier par de puntos $Q, P \in \Pi$ $\overline{QP} \in \mathbf{R}$*

Demostración
Sean $X, Y$ dos puntos arbitrarios de $\Pi$, entonces por definición de $\overline{QP}$, existen los paralelogramos $\square QPX\overline{QP}(X)$ y $\square QPY\overline{QP}(Y)$ respectivamente.
Por reordenamiento cíclico de $\square QPX\overline{QP}(X)$ se obtiene $\square X\overline{QP}(X)PY$ y, por transitividad con $\square QPY\overline{QP}(Y)$ existe $\square XY\overline{QP}(Y)$, luego, $\overline{XY} \cong \overline{\overline{QP}(X)\overline{QP}(Y)}$ y por consiguiente $d(X, Y) = d(\overline{QP}(X), \overline{QP}(Y))$. Así, $\overline{QP}$ preserva distancias, luego es una transformación rígida. $\square$

**Teorema 8.** *Si $P \neq Q$ entonces $\overline{QP}(P) = Q$.*

Demostración
Por definición de $\overline{QP}$ existe $\square QPP\overline{QP}(P)$, entonces $d(P,P) = d(Q, \overline{QP}(P))$. Como $d(P,P) = 0$ se tiene que $d(Q, \overline{QP}(P)) = 0$ y por ende, $Q = \overline{QP}(P)$. $\square$

**Teorema 9.** *Si $P \neq Q$, entonces $\overline{QP}$ no tiene puntos fijos*

Demostración
Suponga que $X$ es un punto fijo, entonces $\overline{QP}(X) = X$. Por definición de $\overline{QP}$ existe $\square QPXX$, de donde $\overline{QP} \cong \overline{XX}$ y $d(P,Q) = d(X,X)$, así $P = Q$. Lo cual es una contradicción a la hipótesis. $\square$
En este momento, surge la inquietud acerca de cuándo dos translaciones son iguales, qué características cumplen y cómo se puede garantizar de manera eficaz tal igualdad. Los siguientes dos teoremas, aclararán tales preguntas.

**Teorema 10.** *$\overline{QP} = \overline{SR}$ si y sólo si tienen el mismo efecto sobre un punto.*

Demostración

i. Suponga que para algún punto $A \in \Pi$, $\overline{QP}(A) = \overline{SR}(A)$. Se mostrará que $\overline{QP}(X) = \overline{QP}(X)$ para cada $X \in \Pi$.

   Sea $X$ un punto arbitrario en $\Pi$ , por definición de $\overline{QP}$ y de $\overline{SR}$, existen $\square QPX\overline{QP}(X)$ y $\square SRX\overline{SR}(X)$ que por reordenamiento cíclico es el paralelogramo $\square RS\overline{SR}(X)X$.

   Por hipótesis, $\overline{QP}(A) = \overline{QP}(A) = A'$, entonces existen $\square QPAA'$ y $\square SRAA'$; si se reordena este último, se obtiene $\square AA'SR$ y por transitividad con $\square QPAA'$, existe $\square QPRS$; nuevamente, por transitividad con $\square RS\overline{SR}(X)X$, existe $QPX\overline{SR}(X)$, y por el principio del cuarto vértice principal entre este último y $\square QPX\overline{QP}(X)$, se obtiene que $\overline{QP}(X) = \overline{SR}(X)$.

   Puesto que $X$ es un punto arbitrario en $\Pi$, $\overline{QP} = \overline{SR}$.

ii. Suponga que $\overline{QP} = \overline{SR}$, entonces por definición de igualdad entre dos transformaciones $\overline{QP}(A) = \overline{SR}(A)$ para $A \in \Pi$. $\square$

Por i) y ii) queda demostrado que $\overline{QP} = \overline{SR}$ si y sólo si $\overline{QP}(A) = \overline{QP}(A)$ para algún $A \in \Pi$.
Otro criterio para probar la igualdad de dos translaciones $\overline{QP}$ y $\overline{SR}$, es probar que existe el $\square PQSR$, así mismo, si las translaciones son iguales, existe el paralelogramo.

De forma similar pueden demostrarse propiedades como $\overline{QP}^{-1} = \overline{PQ}$ y la composición de dos translaciones $\overline{RQ}$ y $\overline{QP}$ es la translación $\overline{RP}$.
Si se define $\tau$ como el conjunto de todas las translaciones de $\Pi$ en sí mismo, se puede probar que la estructura $(\tau, \circ)$ es un subgrupo conmutativo de $\mathbf{R}$, lo que implica que

**Teorema 11.** *$\tau$ es un subgrupo normal de* $\mathbf{R}$.

Para estudiar la siguiente clase de transformación rígida se requiere tomar una definición alternativa de paralelogramo, que sin alterar la definición y propiedades anteriores, utilizan nuevos elementos que también caracterizan el paralelogramo.

## 3.2. Reflexión Central

**Definición 5 (Definición alternativa de paralelogramo).** El cuadrilátero $ABCD$ será llamado un paralelogramo $ABCD$ si y sólo si $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tiene el mismo punto medio.

**Teorema 12 (Propiedad transitiva alternativa de paralelogramo).** *Sea $\square ABCD$ y $\square BEDF$, existe $\square AECF$.*

**Definición 6 (Reflexión Central).** Suponga que $P$ es un punto fijo en $\Pi$. La reflexión central $[P]$ sobre $P$ (llamado el centro de la reflexión central) se define:

$$\begin{aligned} [P] : \Pi &\rightarrow \Pi \\ X &\rightarrow [P](X) \end{aligned}$$

Donde para cualquier punto $X$, existe el paralelogramo $\square PXP[P](X)$.

Si se nombra $X'$ a la imagen de $X$ por $[P]$, se puede escribir la definición así:

$[P](X) = X'$ si y sólo si existe $PXP[P](X)$, siendo P el punto medio de $\overline{XX'}$.

Teniendo en cuenta esta definición, se pueden demostrar algunas propiedades de las reflexiones centrales, tales como la contenencia en el conjunto de transformaciones rígidas.

**Teorema 13.** *$[P]$ no tiene puntos fijos distintos a $P$.*

Demostración
Suponga que existe algún punto $X$ en $\Pi$ que es punto fijo de $[P]$, entonces $[P](X) = X$, se probará que $X = P$.

Por definición de $[P]$ existe $\square PXP[P](X)$, y por hipótesis $[P](X) = X$, luego existe $\square PXPX$, de esta manera el punto medio de $\overline{PP}$ es el mismo punto medio de $\overline{XX}$, con lo que se demuestra que $P = X$. $\square$

Al igual que las translaciones, las reflexiones centrales son iguales si asignan la misma imagen a un punto arbitrario de $\Pi$, este no es el único criterio que determina la igualdad entre dos reflexiones centrales, a partir de la igualdad entre los centros de las reflexiones se deduce lo mismo: $[P] = [Q]$ si y sólo si $P = Q$.

Por otro lado, la transformación inversa de una reflexión central es ella misma

**Teorema 14.** $[P]^{-1} = [P]$

Demostración

Sea $X$ un punto arbitrario en $\Pi$, se mostrará que $[P]^{-1}(X) = [P](X)$. Por definición de $[P]$, existe $\square PXP[P](X)$; como $[P]^{-1} \in \mathbb{R}$, si se aplica al paralelogramo anterior, se convierte en $\square[P]^{-1}(P)[P]^{-1}(X)[P]^{-1}(P)[P]^{-1}([P](X))$.

Si se tiene en cuenta que $[P]^{-1}(P) = P$, entonces el último paralelogramo se puede denotar como $\square P[P]-1(X)PX$ o también como $\square PXP[P]-1(X)$, por el principio del cuarto vértice principal con $PXP[P](X)$ se obtiene que $[P](X) = [P]-1(X)$. $\square$

A diferencia de las translaciones, las reflexiones con la operación de composición no son una estructura cerrada; en los siguientes teoremas se mostrará cuál es el resultado de componer dos reflexiones centrales, así mismo, se dejará ver la relación entre las reflexiones y las translaciones.

**Teorema 15.** $[Q] \circ [P] = \overline{RP}$, *donde* $R = [Q](P)$

Demostración

Sea $X$ un punto arbitrario en $\Pi$, se quiere probar que $([Q] \circ [P])(X) = \overline{RP}(X)$. Sea $[P](X) = X'$, $[Q]^{(}X') = X''$, por hipótesis se tiene que $[Q](P) = R$, entonces existen $\square PXPX'$ , $\square QX'QX''$ y $\square QPQR$ respectivamente, el último paralelogramo puede denotarse por $\square RQPQ$ y, por transitividad con $\square QX'QX''$, existe $RX'PX''$ que puede escribirse como $\square PX'RX''$. Nuevamente, por transitividad con $\square PXPX'$, existe $\square PXX''R$ que es equivalente a $\square RPXX''$. Debido a la existencia de $\overline{RP}$, existe $\square RPX\overline{RP}(X)$ y por el principio del cuarto vértice principal con $\square RPXX''$, se obtiene $\overline{RP}(X) = X''$, sustituyendo $X''$ se obtiene

$$\overline{RP}(X) = ([Q] \circ [P])(X).$$

Luego $\overline{RP} = ([Q] \circ [P])(X)$ para cualquier $X \in \Pi$; con lo que se demuestra que $[Q] \circ [P] = \overline{RP}$. $\square$

Del teorema anterior se deduce que: para cualquier translación $T$ y algún punto fijo $P$, existe un único punto $Q$, tal que $T = [Q] \circ [P]$; así mismo, para alguna translación $T$ y algún punto fijo $Q$, existe un único punto $P$, tal que $T = [Q] \circ [P]$ y, para cualquier translación $T$ y alguna reflexión central $U$, $U \circ T$ y $T \circ U$ son reflexiones centrales. Nuevamente, se agruparán todas las reflexiones centrales para observar qué características tiene este conjunto.

**Definición 7.** $\zeta$ es el conjunto de todas las reflexiones centrales.

La estructura que resulta de la unión entre el conjunto de las reflexiones centrales y el de las translaciones con la composición, es un subgrupo de las transformaciones rígidas.

**Teorema 16.** $(\tau \cup \zeta, \circ)$ *es un subgrupo normal de* $\mathbb{R}$.

Demostración
Tómese $U \in \tau \cup \zeta$ y $T \in \mathbb{R}$, se probará que $T \circ U \circ T^{-1} \in \tau \cup \zeta$.

I. Si $U \in \tau$, por la normalidad de $\tau$ en $\mathbb{R}$, $T \circ U \circ T^{-1} \in \tau \subset \tau \cup \zeta$

II. Si $U \in \zeta$, $U = [P]$ para algún $P \in \Pi$. Se debe mostrar que $T \circ U \circ T^{-1} \in \tau \cup \zeta$.

   Sea $X \in \Pi$ y $W = T^{-1}(X)$, por definición de $[P]$, existe $\square PWP[P](W)$; como $T \in R$, existe $\square T(P)T(W)T(P)T([P](W))$ y teniendo en cuenta que $T(W) = X$, este paralelogramo puede denotarse como $\square T(P)XT(P)T([P](T^{-1}(X)))$ o mejor,

$$\square T(P)XT(P)(T \circ [P] \circ T^{-1})(X).$$

   Ahora, por definición de $[T(P)]$, existe $\square T(P)XT(P)[T(P)](X)$ y finalmente, por el principio del cuarto vértice principal entre los dos últimos paralelogramos se encuentra que $(T \circ [P] \circ T^{-1})(X) = [T(P)](X)$ para cualquier punto $X$ de $\Pi$ . Luego $T \circ U \circ T^{-1} \in \zeta \subset \tau \cup \zeta$

De i) y ii) se concluye que $(\tau \cup \zeta, \circ)$ es un subgrupo normal de $\mathbf{R}$.
Sería ideal que todas las transformaciones rígidas se pudieran definir a partir de un paralelogramo, sin embargo, como habrá observado, adaptar la definición y características del paralelogramo a su desarrollo teórico, se torna complejo. Ahora, se estudiará otra clase de transformaciones conocidas como rotaciones, que desafortunadamente no pueden ser definidas a partir de un paralelogramo como las dos anteriores y cuyo estudio brindará más información acerca del conjunto que estamos referenciando.

## 3.3. Rotación

**Definición 8.** Sea $P$ un punto fijo y un ángulo $\alpha$ tal que $\alpha \in [-180^o, 180^o]$. Se define la rotación $[P(\alpha)]$ sobre el punto $P$ (centro de la rotación) a través de $\alpha$ (ángulo dirigido) como:

$$\begin{aligned} [P(\alpha)] : \Pi &\rightarrow \Pi \\ X &\rightarrow [P(\alpha)](X) \end{aligned}$$

Donde

1. Si $X = P$, $[P(\alpha)](X) = X$.
2. Si $X \neq P$, entonces $[P(\alpha)](X)$ es un punto tal que

$$d(P, [P(\alpha)](X)) = d(P, X) \text{ y } \angle XP[P(\alpha)](X) = \alpha.$$

El ángulo $\alpha$ será positivo si el sentido es opuesto al de las agujas del reloj y en caso contrario, $\alpha$ será negativo.

**Teorema 17.** $[P(\alpha)] = \mathbf{R}$.

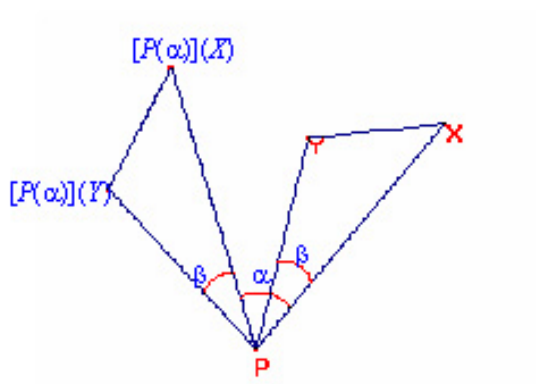


Figura 2: Rotaciones como transformaciones rígidas

**Teorema 18.** $[P(0^o)] = \mathbf{R}$.

Demostración

Sea $[P(0^{\text{o}})] \in \mathbf{R}$, se mostrará que para un punto arbitrario $X \in \Pi$, $[P(0^{\text{o}})](X) = X$ Tómese $X$ un punto arbitrario en $\Pi$, por definición de $[P(0^{\text{o}})]$,

$\angle XP[P(0^o)](X) = 0^o$, además $\angle XPX = 0^o$, luego $\angle XP[P(0^o)](X) = \angle XPX$. Por otro lado $d(P, [P(0^o)](X)) = d(X, P)$ y por tanto, $\triangle XPX \cong \triangle XP[P(0^o)](X)$. Existe una transformación $T$ tal que $T\left(\overline{P[(0^o)](X)X}\right) = \overline{XX}$, así que $d([P(0^o)](X), X) = d(X, X) = 0$, y por ende $[P(0^o)](X) = X$ para cualquier $X \in \Pi$. $\square$

Existen características que facilitan en algunos casos determinar el resultado de aplicar una rotación a puntos del plano; los dos teoremas siguientes mostrarán tales casos.

**Teorema 19.** *Si $\alpha \neq 0^o$, entonces $[P(\alpha)](X) = X$ si y sólo si $X = P$.*

Demostración

Sean $X, P \in \Pi$ con $P$ fijo. Si $X = P$, por definición de $[P(\alpha)]$, se tiene que $[P(\alpha)](X) = X$. Si $[P(\alpha)](X) = X$ con $\alpha \neq 0^o$, suponga que $X \neq P$, entonces $\angle XPX = \angle XP[P(\alpha)](X)$, pero $\angle XPX = 0^o$, luego $\angle XP[P(\alpha)](X) = 0^o$. Por definición de $[P(\alpha)]$, $\angle XP[P(\alpha)](X) = \alpha$ , con lo que se tiene que $= 0^o$, lo cual es una contradicción. Lo anterior muestra que si $\alpha \neq 0^o$, entonces $[P(\alpha)](X) = X$ si y sólo si $X = P$.

**Teorema 20.** *$P = Q$ y $\alpha = \beta$ si y sólo si $[P(\alpha)] = [Q(\beta)]$*

Demostración

I. Si $P = Q$ y $\alpha = \beta$ es fácil demostrar que $[P(\alpha)] = [Q(\beta)]$

II. Si $[P(\alpha)] = [Q(\beta)]$ entonces $\alpha = \beta$ y $P = Q$. Sea $X$ un punto arbitrario de $\Pi$, por definición de $[P(\alpha)]$ y $[Q(\beta)]$, se tiene que $d(P, X) = d(P, [P(\alpha)](X))$ y $d(Q, X) = d(Q, [Q(\beta)](X))$. Como lo anterior se cumple para todo $X \in \Pi$, y se necesita conocer la relación de los ángulos que son fijos, es pertinente precisar un punto particular de $\Pi$ y observar qué pasa. En este caso, se tomará un punto $X$ en la mediatriz de $\overline{PQ}$. De esta manera, $d(P, X) = d(Q, X)$ y $d(P, [P(\alpha)](X)) = d(Q, [Q(\beta)](X))$, además $\overline{X[P(\alpha)](X)} \cong \overline{X[Q(\beta)](X)}$ ,pues $[P(\alpha)](X) = [Q(\beta)](X)$.
Por el criterio LLL, $\triangle XP[P(\alpha)](X) \cong \triangle XQ[Q(\beta)](X)$, con lo que $\angle XP[P(\alpha)](X) \cong \angle XQ[Q(\beta)](X)$, luego $\alpha = \beta$.

   Ahora, se probará que $P = Q$, para lo cual, recuerde que $[P(\alpha)]$ está definido para todo punto de $\Pi$ , incluyendo a $P$. Por definición, $[P(\alpha)](P) = P$ y por ende, $d(P, P) = d(P, [P(\alpha)](P))$. Aplicando $[Q(\beta)]$ a $P$, obtenemos que $d(Q, P) = d(P, [Q(\beta)](P))$, como $[P(\alpha)] = [Q(\beta)]$, $[Q(\beta)](P) = P$, entonces $d(Q, P) = d(P, P) = 0$, de donde concluimos que $P = Q$. $\square$

Ahora, estudiaremos la composición de dos rotaciones con el mismo centro, para determinar nuevas propiedades de ellas.

**Teorema 21.** $[P(\beta)] \circ [P(\alpha)] = [P(\beta + \alpha)]$

**Teorema 22.** $[P(\alpha)]^{-1} = [P(-\alpha)]$

Demostración
Probaremos que $[P(\alpha)] \circ [P(-\alpha)] = I_\Pi = [P(-\alpha)] \circ [P(\alpha)]$. Por teorema anterior

$$\begin{aligned} [P(\alpha)] \circ [P(-\alpha)] &= P(\alpha + (-\alpha)), \text{luego} \\ &= P(0^0), \text{y por teorema } 2.33 \\ &= I_\Pi \end{aligned}$$

En forma análoga se demuestra que $[P(-\alpha)] \circ [P(\alpha)] = I_\Pi$ , con lo que se termina la demostración.

**Teorema 23.** $[P(180^o)] = [P(-180^o)] = [P]$

**Teorema 24.** $[P(\alpha)] = [Q(\beta)]$ *si y sólo si* $[P(\alpha)](A) = [Q(\beta)](A)$ *y* $[P(\alpha)](B) = [Q(\beta)](B)$ *para dos puntos distintos* $A$ *y* $B$*.*

Al igual que las reflexiones centrales, el conjunto de las rotaciones con la operación de composición no es un conjunto cerrado, pues al componer dos rotaciones no siempre se obtiene como resultado otra rotación; sin embargo, queremos continuar nuestro estudio algebraico de todas las transformaciones rígidas y por consiguiente, en los siguientes teoremas daremos una idea de cómo podemos formar una estructura de grupo teniendo a las rotaciones como parte de ella.

**Teorema 25.** $[Q(-\alpha)] \circ [P(\alpha)] = \overline{[Q(-\alpha)](P)P}$

La demostración de este teorema se deduce fácilmente, ya que $[Q(-\alpha)] \circ [P(\beta)] \in \mathbf{R}$ implica que $d(P, X) = d([P(-\alpha)](P), X'')$, y las rectas $\overline{PX}$y $\overline{[P(\alpha)](P)X''}$ son paralelas.

**Teorema 26.** $[P(\alpha)] \circ \overline{BA} \int \mathbf{Rot}$.

Demostración
Supongamos que $[P(\alpha)] \circ \overline{BA} = [Q(\beta)]$, utilizando equivalencias, llegaremos a una verdad comprobada para demostrar que nuestra suposición es cierta.
$[P(\alpha)] \circ \overline{BA} = [Q(\beta)]$, aplicando la rotación inversa de $[Q(\beta)]$, es equivalente a $[Q(\beta)]^{-1} \circ [P(\alpha)] \circ \overline{BA} = I_\Pi$ que se puede escribir como $[Q(\beta)]^{-1} \circ [P(\alpha)] \circ \overline{BA} = I_\Pi$

Componiendo por derecha la translación inversa de $\overline{BA}$ , la anterior expresión corresponde a $[Q(-\beta)] \circ [P(\alpha)] \circ \overline{BA} \circ \overline{BA}^{-1} = I_\Pi$ lo que equivale a $[Q(-\beta)] \circ [P(\alpha)] = \overline{AB}$ ; en particular, para $\beta = \alpha$, tenemos $[Q(-\beta)] \circ [P(\alpha)] = \overline{AB}$, lo cual es verdadero por el teorema anterior, garantizando la veracidad de nuestra suposición. Del teorema anterior $[Q(-\alpha)] \circ [P(\alpha)] = \overline{[Q(-\alpha)](P)P}$, por lo que $\overline{[Q(-\alpha)](P)P} = \overline{AB}$ donde existe $\Box PBA[Q(-\alpha)](P)$. Luego, $[P(\alpha)] \circ \overline{BA} = [Q(\alpha)]$ si y sólo si $\Box PBA[Q(-\alpha)](P)$. $\Box$

**Teorema 27.** $\overline{DC} \circ [P(\alpha)] = [Q(\beta)]$, *donde existe* $\Box PCD[Q(\alpha)](P)$

**Teorema 28.** *Si* $\beta \neq \alpha$, *entonces* $[Q(\beta)] \circ [P(\alpha)] \in \mathbf{Rot}$

Demostración
$[Q(\beta)] \circ [Q(\alpha)] = [Q(\gamma)]$, donde $\gamma$ depende de $\alpha$ y $\beta$ ; aplicando el inverso de $[Q(\alpha)]$, obtenemos $[Q(\beta)] = [Q(\gamma)] \circ [Q(-\alpha)]$, por consiguiente $[Q(\beta)] \circ [P(\alpha)] = [Q(\gamma)] \circ [Q(-\alpha)] \circ [P(\alpha)]$, por el teorema 25 tenemos $[Q(\beta)] \circ [P(\alpha)] = [Q(\gamma)] \circ \overline{[Q(-\alpha)(P)P]}$ y por el teorema 26, $[Q(\beta)] \circ [P(\alpha)] = [R(\gamma)]$ donde existe $\Box Q[Q(-\alpha)](P)P[R(-\gamma)](Q)$. Luego, $[Q(\beta)] \circ [P(\alpha)] \in \mathbf{Rot}$. $\Box$
Como observamos anteriormente, si agrupamos las rotaciones con las translaciones, obtenemos un conjunto cerrado tomando la composición como operación; también probamos que las reflexiones centrales son subconjunto de las rotaciones; por ello, si unimos las rotaciones con las translaciones y las reflexiones centrales, obtenemos un subgrupo normal de las transformaciones rígidas.

## 3.4. Reflexiones Axiales

Las *reflexiones axiales* son otra clase de transformaciones rígidas que al igual que las rotaciones, no se definen a partir de un paralelogramo. Estas transformaciones son muy especiales, pues como veremos más adelante, todo el estudio de las transformaciones rígidas se centra en el comportamiento de las reflexiones axiales.

**Definición 9 (Reflexión axial).** Sea $l$ una recta fija en $\Pi$, la reflexión axial $[l]$ sobre la recta $l$ (eje de la reflexión axial) se define:

$$\begin{aligned}[l] : \Pi &\to \Pi \\ X &\to [l](X)\end{aligned}$$

donde

1. Si $X \in l$, entonces $[l](X) = X$.
2. Si $X \notin l$, entonces $l$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{X[l](X)}$ .

**Teorema 29.** $[l] \in \mathbf{R}$.

En los siguientes teoremas, mostraremos algunas propiedades que tienen las reflexiones axiales y que posteriormente, nos serán de gran utilidad en la determinación de transformaciones basadas en la composición de estas reflexiones.

**Teorema 30.** $[l](X) = X$ *si y sólo si* $X \in l$.

Demostración
Si $X \in l$, por definición de $[l]$, $[l](X) = X$.
Si $[l](X) = X$ entonces $d(X, [l](X)) = 0$, así mismo existe un punto $S \in l$, tal que $S$ es el punto medio de $\overline{X[l]X}$, por ello $d(X, S) = d(S, [l](X)) = 0$. De aquí obtenemos que $d(X, S) = 0$, con lo que $S = X$. Luego, $X \in l$. Por lo anterior, $[l](X) = X$ si y sólo si $X \in l$

**Teorema 31.** $[l] = [m]$ *si y sólo si* $l = m$.

**Teorema 32.** $[l] = [m]$ *si y sólo si tienen el mismo efecto sobre dos puntos distintos de .*

Demostración

I. Si $[l] = [m]$, por definición de igualdad entre transformaciones, para cualquier par de puntos $A, B \in \Pi$, se tiene que $[l](A) = [m](A)$ y $[l](B) = [m](B)$.

II. Sean $A, B$ dos puntos distintos de $\Pi$, tales que $[l](A) = [m](A)$ y $[l](B) = [m](B)$, entonces, $[l] = [m]$.

   Como $[l](A) = [m](A)$, entonces $l$ es bisectriz perpendicular de $\overline{A[l](A)}$ y $m$ es bisectriz perpendicular de $\overline{A[m](A)}$, además $\overline{A[l](A)} = \overline{A[m](A)}$ , luego $l$ y $m$ son bisectrices perpendiculares de un mismo segmento, lo cual sólo puede ocurrir si $l = m$, y por teorema anterior $[l] = [m]$.

Como hemos podido notar hasta el momento, las reflexiones axiales tienen ciertas características similares a las reflexiones centrales, incluso la propiedad de tener el inverso de un elemento igual a sí mismo.

**Teorema 33.** $[l]^{-1} = [l]$

Al igual que hemos hecho con las otras transformaciones, estudiaremos qué pasa si realizamos la composición entre reflexiones axiales.

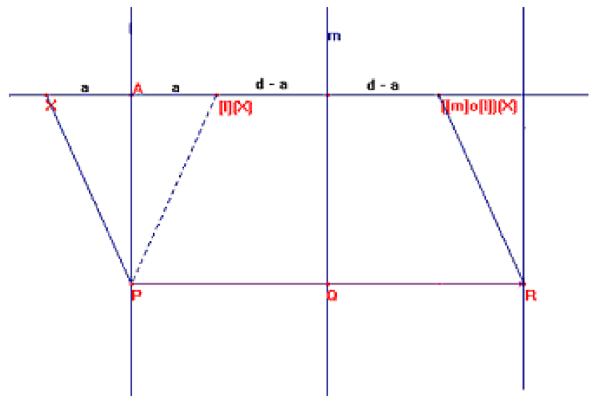


Figura 3: Composición de reflexiones axiales con ejes paralelos

**Teorema 34.** *Si $l$ y $m$ son rectas paralelas, entonces $[m] \circ [l] = \overline{RP})$, donde la dirección de $P$ a $R$ es la dirección de $l$ a $m$ sobre la perpendicular y a través de una distancia igual a $2d(l, m)$.*

**Teorema 35.** *Sea $\overline{BA}$ y una recta $l \perp \overline{AB}$, existe una recta $m$ tal que $l \| m$ y $\overline{BA} = [m] \circ [l]$.*

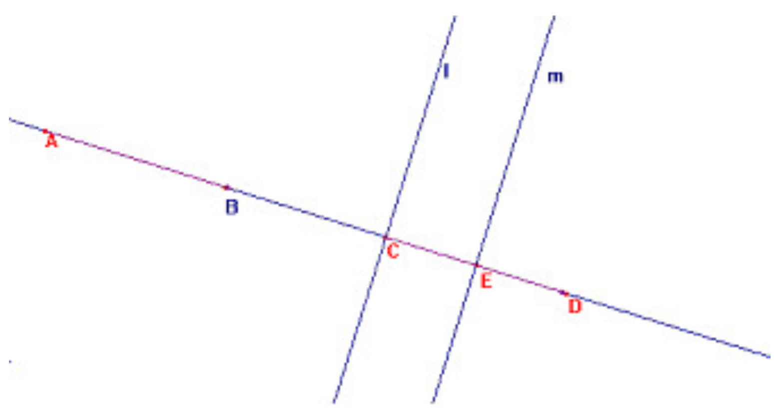


Figura 4: Translaciones como composición de reflexiones axiales(1)

Luego de observar la equivalencia entre las translaciones y la composición de dos reflexiones axiales cuyos ejes son paralelos, observaremos a que transformación corresponde la composición de dos reflexiones axiales cuándo los ejes centrales son perpendiculares.

**Teorema 36.** *Si* $l \perp m$, *entonces* $[m] \circ [l] = [P]$, *donde* $P$ *es el punto de intersección entre* $m$ *y* $l$.

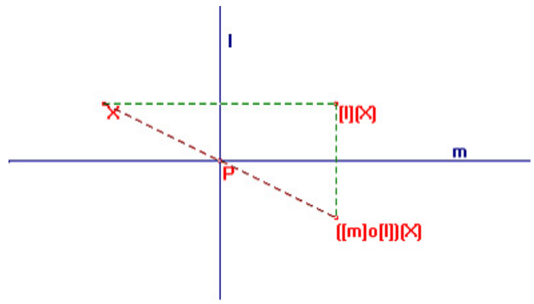


Figura 5: Reflexiones centrales como composición de reflexiones axiales

La composición entre reflexiones axiales no sólo generan translaciones y reflexiones centrales, como veremos posteriormente, también generan rotaciones cuándo los ejes centrales se cortan sin determinar necesariamente un ángulo recto entre ellos.

**Teorema 37.** *Dadas dos rectas* $m$ *y* $l$, *se tiene que* $[m] \circ [l] = [P(2\alpha)]$ *donde* $P = l \cap m$ *y* $\alpha$ *es el ángulo cuyo valor absoluto es el menor de los ángulos determinados por las rectas* $l$ *y* $m$.

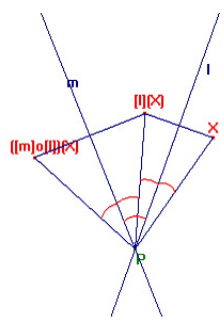


Figura 6: Rotaciones como composición de reflexiones axiales

**Lema 1.** *Sean* $T, U \in \mathbf{R}$ *tales que* $T(A) = U(A)$ *y* $T(B) = U(B)$, *para dos puntos distintos* $A$ *y* $B$ *de* $\Pi$, *entonces* $T = U$ *ó* $T = [m] \circ U$, *donde* $m = T(A) \circ T(B)$.

**Teorema 38 (Teorema Fundamental De Descomposición De Transformaciones Rígidas).** *Toda transformación rígida* $T$ *es la composición de una, dos o tres reflexiones axiales.*

Demostración

Sea $T$ una transformación rígida arbitraria y fijemos $\overline{\triangle ABC}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle T(A)T(B)T(C)$. Consideremos $T_1 = \overline{T(A)A}$, entonces $T_1(A) = T(A)$, además $T_2 = [T_1(A)(\beta)]$ y $\beta = \angle T_1(B)T_1(A)T(B)$. Por definición de $T_2$, $(T_2 \circ T_1)(A) = T_1(A)$, luego $(T_2 \circ T_1)(A) = T(A)$. $T \in \mathbf{R}$ y $T_1(A) = T(A), \overline{T(A)T(B)} \cong \overline{AB} \cong \overline{T_1(A)T(B)}$, además $\beta = \angle T_1(B)T_1(A)T(B)$, por consiguiente $[T_1(A)(\beta)](B) = T(B)$. Así $(T_2 \circ T_1)(B) = T(B)$. $T$ y $(T2 \circ T1)$ tienen el mismo efecto sobre dos puntos, entonces $T = T2 \circ T1$ ó $T = [m] \circ (T_2 \circ T_1)$ donde $m = \overline{T(A)T(B)}$.

También $T_1 = \overline{T(A)A}$, entonces $T_1 = [n] \circ [l]$ donde $n$ pasa a través de $T(A)$, y $l$, $n$ son perpendiculares a $\overline{AT(A)}$. De igual manera, $T_2 = [T1(A)(\beta)] = [q] \circ [n]$ donde la intersección de $n$ y $q$ es $T_1(A)$ y el menor de los ángulos determinados por ellas es $\beta/2$.

Por consiguiente: $T = T_2 \circ T_1 = [q] \circ [n] \circ [n] \circ [l] = [q] \circ [l]$ ó $T = [m] \circ T_2 \circ T_1 = [m] \circ [q] \circ [n] \circ [n] \circ [l] = [m] \circ [q] \circ [l]$ Lo cual culmina la demostración. □

El teorema fundamental nos dice que las transformaciones estudiadas se pueden expresar como composición de una, dos ó tres reflexiones axiales, sin embargo, hasta el momento hemos demostrado que se pueden escribir como composición de una ó dos, nos asalta la pregunta ¿Cuáles son las transformaciones que pueden ser definidas con tres reflexiones axiales?, para responder a estas preguntas tenemos que estudiar la relación de sus ejes. Por el momento, definiremos una transformación empleando la composición de tres reflexiones axiales.

## 3.5. Deslizamiento

**Definición 10 (Deslizamiento).** Un deslizamiento es cualquier transformación rígida de la forma $[l] \circ \overline{BA}$ donde $\overline{AB} \| .l$

Como podemos recordar, la translación se puede expresar como la composición de dos reflexiones axiales cuyos ejes son paralelos, por consiguiente l es perpendicular a ellos; el siguiente lema nos muestra que las posibilidades de relacionar tres reflexiones con ejes cualesquiera, se reduce a una reflexión axial ó un deslizamiento.

**Lema 2.** *Sean $l, m, n$ tres rectas en $\Pi$. Entonces:*

1. *Si $l \| m \| n$, entonces $[n] \circ [m] \circ [l]$ es una reflexión axial.*
2. *Si $l \cap m \cap n = P$, entonces $[n] \circ [m] \circ [l]$ es una reflexión axial.*
3. *Si $l, m, n$ son los lados de un triángulo, $[n] \circ [m] \circ [l]$ es un deslizamiento.*

4. *Si dos de las líneas son paralelas y la tercera es una transversal, la composición es un deslizamiento.*

**Teorema 39.** *Toda transformación rígida es:*

1. *Una translación*
2. *Una rotación (incluye reflexión central)*
3. *Una reflexión axial*
4. *Un deslizamiento*

Los homomorfismos son de utilidad para determinar nuevos grupos, a continuación mostraremos dos ejemplos que serán de gran importancia para el estudio posterior de la relación entre grupos de transformaciones rígidas y otros grupos conocidos como cristalográficos.

# 4. Grupos cristalográficos

**Definición 11 (Grupo conjugado).** Sea $H$ un subgrupo de $G$, $xHx^{-1}$ con $x$ un elemento fijo de $G$, es denominado un grupo conjugado a $H$.

El término grupo es justificado por la existencia del homomorfismo de $G$ en $G$ definido por:

$$f(h) = xhx^{-1}$$

$f(H)$ es un subgrupo de $G$, pues para un subgrupo $H$ de $G$, $f(H)$ es un subgrupo de $G'$.

**Definición 12 (Grupo isotrópico).** Si un grupo de transformaciones $G$ actúa sobre un espacio, el grupo isotrópico $\vartheta_P$ de un punto $P$ es el subgrupo de todos los elementos $g \in G$ tales que $g(P) = P$.

En este caso, el término grupo se deduce a partir de las propiedades de grupo, pues la asociatividad se hereda de $G$; la transformación idéntica $I \in \vartheta_P$; $g(P) = P$, entonces $g^{-1}(P) = P$, por consiguiente $g^{-1} \in P$, además, $\vartheta P$ es cerrado porque $(g \circ g')(P) = g(P) = P$.

**Teorema 40.** *El plano puede ser identificado con el grupo cociente* $\mathbf{M}/\vartheta_A$.

Una aplicación interesante de la teoría de grupos es la determinación de posibles formas de cristales en geometría sólida y la posible combinación de ornamentos en el plano, sin embargo, en este escrito nos limitaremos al desarrollo del segundo caso.

**Definición 13 (Ornamento).** Un ornamento es un modelo cuya repetición regular se extiende por todo el plano.

Figura 7: Ornamento

He aquí la condición a la cual nos referimos para encontrar nuevos subgrupos de transformaciones rígidas:

**Definición 14 (Grupo Cristalográfico).** Un grupo cristalográfico es un subgrupo $\delta$ de $\mathbf{M}$ para el cual existe un polígono $\Omega$ tal que:

1. Todo punto en el plano es la imagen de un punto de $\omega$ por algún elemento de $\delta$, y
2. Si $g_1, g_2 \in \delta$, $g_1(\Omega)$ y $g_2(\Omega)$ tienen un punto interior común, entonces $g_1(\Omega) = g_2(\Omega)$

Estas dos condiciones implican que todo el plano $\Pi$ puede ser cubierto por $\Omega$ y sus imágenes bajo $\delta$ sin huecos o traslapes. El ornamento de los polígonos $g(\Omega)$, con $g \in \delta$, es llamado también un **teselado** donde $\Omega$ es el *dominio fundamental* del ornamento, o teselado. De otro lado, el término grupo se justifica porque para dos elementos $g_1, g_2 \in \delta$, $g_2^{-1} \in \delta$ y $(g_1 \circ g_2)(\Omega) = g_1(\Omega^{'}) = \Omega^{''}$, luego $g_1 \circ g_2^{-1}$. Es de resaltar, que existen infinidad de dominios fundamentales posibles $\Omega$, donde $\Omega$ no es necesariamente un polígono, sin embargo, las posibilidades para construir grupos cristalográficos son bastantes restringidas, pues en realidad sólo existen 17 de ellos. La prueba, es por construcción explícita de los grupos $\delta$ como **grupos lattice** y sus subgrupos.

**Definición 15 (Lattice).** Un *lattice* es el conjunto de todos los puntos $(nT_1 \circ mT_2)(X)$ donde $X$ es un punto fijo, $m, n$ enteros y $T_1$ y $T_2$ dos translaciones fijas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tales que $\overline{AB} \not\parallel \overline{AB}$

Aclaramos que la notación $nT_1$ hace referencia a la $n$-ésima composición de $T_1$ si $n \geq 0$, ó la $n$-ésima composición de $T_1^{-1}$ si $n < 0$, de igual forma para $mT_2$. Además, cualquier punto de un lattice puede ser tomado como punto base $X$. Al escoger un punto $X$ en el interior de un dominio fundamental $\Omega$ de un ornamento, dado el grupo $\delta$ y considerando el conjunto $L$ de todos los puntos $g(X)$ con $g \in \delta$, es decir $L = \{g(X) : X \in \Omega \wedge g \in \delta\}$. Entonces L es un lattice.

En la figura se muestran un ejemplo de tesela por cada grupo cristalográfico.

Después de encontrar diversos grupos a partir del estudio algebraico de las transformaciones rígidas, y del uso del grupo cociente en ellas, se mostrará un ejemplo de construcción de un grupo cristalográfico como unión de clases laterales de un grupo cociente.

## 4.1. Construcción de $D_1kk$.

Es pertinente mencionar que las transformaciones que admite este grupo son las reflexiones cuyos ejes son paralelos y las translaciones que ellas generan.

Para empezar esta construcción, consideremos una recta $l$ y el conjunto $R_l = \{[k], \overline{AB} : k \| l \wedge \overline{AB} = [l] \circ [k]\}$ , donde está contenida en una recta perpendicular a $l$. Probaremos que este conjunto forma un grupo con la operación de composición.

Como la reflexión inversa de una reflexión axial es ella misma, y la translación inversa de $\overline{AB}$ también cumple las condiciones para estar en $R_l$, entonces, nuestra prueba se limita a demostrar la cerradura del conjunto.

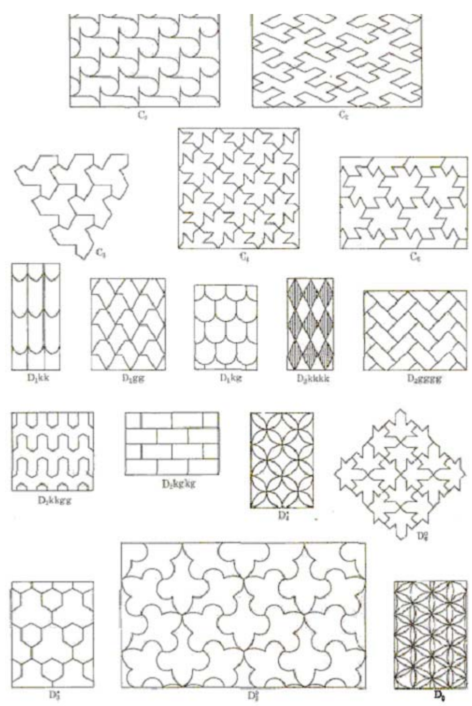

Figura 8: Ejemplos de teselas para cada grupo cristalográfico.

Sean $X, Y \in R_l$, si $X$ y $Y$ son reflexiones, su composición es una translación

$\overline{AB}$ tal que la recta $AB$ es perpendicular al eje de reflexión de $X$. Si $X = \overline{AB}$ y $Y = [m]$, entonces $X \circ Y = [l] \circ [n] \circ [m] = [s]$ donde $s \| l$. Finalmente, la composición de dos translaciones de $R_l$ es una translación $\overline{CD}$ tal que $\overline{CD} \perp l$, con lo que podemos concluir que $R_l$ es cerrado. Luego, $(R_l, \circ)$ es un grupo. Debemos aclarar que todas las translaciones de $R_l$ se pueden considerar sobre una recta $w$ perpendicular a $l$. Consideremos el subgrupo $\langle T_1 \rangle$ de $R_l$ y probemos que es normal en $R_l$, es decir, que para todo $k \in R_l$, $k\langle \circ T_1 \rangle \circ k^{-1} \subseteq \langle T_1 \rangle$. Si $k$ es una translación, la afirmación es verdadera, si $k = [m]$, entonces $[m] \circ nT_1 \circ [m] = [m] \circ ([l] \circ [m]) \circ [m] = [m] \circ [l]$ donde $m \| l$, pero $[m] \circ [l] = nT_1^{-1}$ luego $k \circ \langle T_1 \rangle \circ k^{-1} \subseteq \langle T_1 \rangle$.

Con esto, podemos definir el grupo cociente $R_l / \langle T_1 \rangle$ y estudiar los elementos de sus clases laterales.

Sea $T \in R_l$, existe[1] $T_2$ tal que $T\langle T_1 \rangle = \langle T_2 \rangle$. Ahora, tomemos $[n] \in R_l$, existe una única reflexión $[y] \in R_l$ tal que $[n] = [y] \circ [m] \circ [s]$ con $[m] \circ [s] = T$, luego la clase lateral $[n]\langle T_1 \rangle = ([y] circ T)\langle T_1 \rangle$ cuyos elementos son de la forma $\{[y] \circ (T \circ T_1), [y] \circ (T \circ 2T_1), \ldots, [y] \circ (T \circ nT_1), \ldots\}$ que corresponden a los elementos de $[y] \circ \langle T_2 \rangle$ ; en particular, son reflexiones con ejes paralelos por los puntos medios y extremos de los segmentos que determinan las translaciones $mT_2$.

De esta manera, la unión de las clases laterales $T\langle T_1 \rangle$ y $[y] \circ T_2$ es un conjunto de reflexiones con ejes en una sola dirección y translaciones de la forma $mT_2$, por consiguiente, $R_l / \langle T_1 \rangle$ genera a $D_1 k$ que es isomorfo a $D_1 kk$, luego $R_l / \langle T_1 \rangle$ genera a $D1k_k$.

Éste es un ejemplo de cómo al aplicar el grupo cociente a grupos de transformaciones rígidas, se pueden construir grupos cristalográficos, sin embargo, es claro que tales construcciones se pueden continuar haciendo si determinamos, primero, los grupos que los pueden generar para luego encontrar algún subgrupo de ellos que sea normal y definir el grupo cociente tal que sus clases laterales ó la unión entre ellas, generen el grupo que se desea construir. A medida que se consideran grupos cristalográficos que admitan más elementos, este proceso se hace más complejo, pues para estudiar la normalidad entre subgrupos se tienen que tener en cuenta múltiples casos de composición entre elementos del subgrupo y del grupo. ¡Tarea no muy fácil, pero agradable!.

# Bibliografía

[1] BELL, E. *Historia de matemática*, Mac Graw Hill, 1995. p. 457.

[1]Un grupo unidimensional de translaciones sin elementos arbitrariamente pequeños en el plano, es un grupo cíclico

[2] COXETER, Harold *Geometric transformations group and other topics.*, Mathematical association of America. En: CUPM geometry conference. 1968

[3] EUCLIDES. *Los Elementos.*

[4] GARCÍA-VALCÁRCEL. 1996. p.193.

[5] GUERRERO SUÁREZ, Cristóbal. *Los entornos virtuales de aprendizaje como instrumento de mediación.*, Universidad de Salamanca. http://www3.usal.es/∽teoriaeducacion/rev_numero_04/n4_art_suarez.htm

[6] GUGGENHEIMER. *Heinrich Plane Geometry and its groups*, Holden day. 1967

[7] IRIBARREN. Ignacio. *Matemáticas e Informática: una historia de influencias recíprocas.* http://www.analitica.com/bitblioteca/iribarren /matematicas.asp

[8] JONASSEN, D. H. *Computadores como herramientas de la mente.* Eduteka, http://www.eduteka.org/tema_mes.php3?TemaID=0012

[9] KATZ V. *A history of mathematics.* Addison - Wesley, 1998. p. 673.

[10] MODENOV P.S. y PARKHOMENKO A.S. *Geometric transformations.* En: Euclidean and affine tranformations. Vol I. Academic press. 1965.

[11] MORENO ARMELLA. *Luis. Instrumentos matemáticos computacionales.* http://www.eduteka. org/tema_mes.php3?TemaID=0003

[12] PASTOR JAIME, Adela y GUTIERREZ RODRÍGUEZ, Angel. *El grupo de las isometrías del plano.* Síntesis

[13] PASTOR R. *Historia de la matemática.* Gedisa, 1986. p. 182.

[14] PÉREZ ORDOÑEZ, Edgar. *Estructuras Algebraicas.* Universidad Pedagógica Nacional. 2001

[15] PÉREZ ORDOÑEZ, Edgar. *Manuscrito Aplicaciones de transformaciones rígidas.*

[16] POLEO, Carmelo. http://www.monografias.com/trabajos6/intert /intert2.shtml

[17] RIBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas.* Moscú : Mir, 1987. p. 353.

[18] SALOMON, G., PERKINS, D. y GLOBERSON. T. *Coparticipación en el conocimiento: al ampliación de la inteligencia humana con las tecnologías inteligentes*. 1992. p. 6-22. (Comunicación, lenguaje y educación, N° 13).

[19] YAGLOM I.M. .*Geometric Transformations*. Yale university. Panel. 1986