Método geométrico de construcción de números reales en von Staudt Veblen y Young

Álvaro Duque H.

Profesor Pontificia Universidad Javeriana

Bogotá D.C, Colombia

En la obra de Von Staudt la construcción por métodos de geometría de posición se intenta con el objetivo de llegar al número real. No se alcanza allí esta meta. Pero ha inspirado otros intentos (por el mismo camino) donde el más representativo puede ser la obra sobre geometría proyectiva, debida a Oswald Veblen y John Wesley Young, y que lleva por nombre Geometría Proyectiva de 1910 (Primer tomo) y 1918 (Segundo tomo). Nos referimos a este intento. Sobre la cuestión que nos ocupa, la construcción de los números reales (terminología propia de los autores), no hay consenso entre los autores de historia del análisis en el siglo XX. Algunos leen en las páginas de la geometría mencionada, una axiomatización de la geometría proyectiva que no pasa de utilizar los "números reales" que se obtuvieron por métodos geométricos, que reflejan la obra de Dedekind sobre cortes introducidos en el conjunto de números racionales, y no ven un resultado nuevo. Para otros, hay en la presentación que se hace en la obra de Veblen y Young del "sistema" $\mathbb{R}$ conjunto $\mathbb{R}$ a partir de redes de racionalidad. Nos es imposible hacer justicia a los argumentos esgrimidos por los autores que han opinado en este debate. La dificultad estriba en lo que Veblen y Young expresan al enunciar los axiomas. Incluimos en detalle el que parece ser más claro: El postulado K que, con una traducción literal se puede exponer así:

> *K. Un sistema numérico geométrico es isomorfo al sistema de números reales del análisis.*

Los términos empleados por los autores son claros y ya han sido comentados los significados en conferencias anteriores.

Se puede ver en la cita que sigue, el uso que hacen los coautores de las "redes de racionalidad" y de sus "cortes".

Definición. Dos conjuntos $[A]$ y $[B]$ de una red de racionalidad $R(H_0\ H_1\ H_\infty)$ constituye un corte (A, B) con respecto a la escala $H_0\ H_1\ H_\infty$ si y sólo si estos [Subconjuntos] satisfacen las condiciones siguientes:

(1) Todo punto de la red excepto H_∞ está en $[A] \circ [B]$;

(2) Con respecto a la escala $H_0\ H_1\ H_\infty$ todo punto de $[A]$ precede a todo punto de $[B]$.

Si existe un punto $\bigcirc$ en $[A]$ o en $[B]$ tal que todo punto de $[A]$ distinto de $\bigcirc$ lo precede y cada punto de $[B]$ distinto de $\bigcirc$ lo siguie, el corte se dice cerrado y que tiene a $\bigcirc$ como punto de corte. En cualquier otro caso el corte se dice abierto. La clase $[A]$ se llama el lado inferior y la clase $[B]$ se llama el lado superior del corte.

Esta cita es larga pero indispensable. [2, Tomo II, p.14]. Los autores entienden que las coordenadas han estado presentes en todas, se puede decir, las etapas de su trabajo. En este sentido dan la siguiente advertencia

> *Sería posible enteramente realizar la discusión del orden en la red de racionalidad sin el uso de coordenadas.*

Ciertamente han empleado coordenadas racionales en las páginas precedentes para manejar simbólicamente los resultados de sus definiciones y teoremas que se fundamentan en axiomas de geometría según Von Staudt, y en procedimientos de geometría pura.

No los podemos comentar aquí porque es más importante que los autores mismos muestren dónde hace su aparición el número real irracional. La cita pertinente es como sigue:

> *Con respecto a la escala $H_0\ H_1\ H_\infty$ todo punto $\bigcirc$ ($\bigcirc \neq H_\infty$) de una red $R(H_0\ H_1\ H_\infty)$ determina dos conjuntos de puntos $[A]$ y $[B]$ tal*

> *que todo A precede o es idéntico con $\bigcirc$ y $\bigcirc$ precede todo B. Estos conjuntos de son por tanto un corte cerrado con $\bigcirc$ como punto de corte. No todo corte, empero, es cerrado pues considérese el conjunto $[A]$ que incluya a todos los puntos cuyas coordenadas, en un sistema de coordenadas no homogéneas con H_∞ como punto ∞, son negativas o en el caso en que sean positivas, tengan cuadrado que valga menos que 2; y el conjunto $[B]$ que incluya todos los puntos cuyas coordenadas son positivas y racional puede satisfacer la ecuación $x^2 = 2$, esta ecuación no se cumple para las coordenadas de ningún punto en la red. Los conjuntos $[A]$ y $[B]$ constituyen un corte abierto.*

Aquí incluyeron los autores un argumento ya clásico de existencia de cortes que no son racionales.

El trabajo de Veblen y Young incluye una discusión del orden (total) entre cortes y de más conceptos como relación "entre" que ayuda para obtener el concepto de intervalo. Lo que deja de estar claro: si el postulado de continuidad, que traen después del axioma K, es suficiente para fundamentar la prueba que traen de dos resultados sobre puntos no pertenecientes a la red de racionalidad, o sea, existencia de irracionales (primer resultado) y sobre el isomorfismo entre el "sistema" de números reales del análisis y el "sistema" de cortes que es fruto de las construcciones detalladas que se realizaron por métodos de geometría pura y coordenadas no homogéneas racionales. La discusión de estos tópicos exige un trabajo que por ahora sería demasiado extenso para incluirlo. Se debe orientar la mirada hacia el momento en que estas ideas se están gestando y se debe anotar que el trabajo de R. Dedekind influye en los autores Veblen y Young. Ya en el principio mismo del siglo XX Dedekind tenía trabajos terminados sobre teoría de retículos completos (para esas fechas), podemos ver algo prometedor en el horizonte de los investigadores de principios del siglo XX. (R. Dedekind tiene un artículo del año 1900 donde se transparenta el dominio alcanzado en el manejo de retículos).

Sin que se tenga unanimidad en lo que se debe afirmar sobre la validez del método de construcción de los números reales por Von Staudt o por lo que lo mejoraron como son por ejemplo Veblen y Young, sus esfuerzos los vemos bien empleados si miramos el edificio teórico cuyos fundamentos yacen en la teoría de retículos, de retículos completos. (La obra de G. Birkhoff sobre retículos aparece en 1940 pero allí están consignadas proposiciones ya demostradas por este autor a partir de 1935)

Así tenemos un método nuevo de enfocar estructuras con orden parcial y que tienen la noción de completez. Para el año 1950 ya la siembra de los años anteriores ha tenido un desarrollo suficiente para introducir la teoría de retículos geométricos.

En el marco de estos comentarios solo cabe definir rigurosamente el concepto de retículo completo. Puede ser útil empezar con tratar de justificar el nombre geométrico. La literatura sobre este tema es abundante y es unánime al destacar que las geometrías proyectivas finitas (que, al margen, están incluidas en la obra de Veblen y Young) han sido la fuente de donde surge una teoría algebraica que se puede desarrollar con métodos algebraicos. Sin embargo la presentación de tales retículos se puede hacer de modo eficiente por los métodos de Von Staudt. El tema históricamente tratado no deja de atraer la atención pero no se puede incluir aquí.

Definición. Un retículo L se llama geométrico si y sólo si L es semi-modular, L es algebraico y los elemento compactos de L son exactamente los supremos calculados sobre un número finito de átomos.

La definición anterior usa el lenguaje de la teoría de retículos, su origen geométrico queda difícil de apreciar pero el estudio de esta clase de retículos enriquece la teoría la teoría de las geometrías proyectivas finitas, por ejemplo. Debemos poner fin a nuestros comentarios pero una disgresión puede ayudar a formar un concepto claro de la importancia de la teoría de retículos en teoría general de órdenes. Ver [1]

Teorema (Teorema de MacNeil, 1939). *"Todo conjunto ordenado E, puede sumergirse en un retículo completo T de modo que el supremo y el ínfimo se* *conserven”*

(El mejor ejemplo es el conjunto de los números reales. Es un retículo condicionalmente completo. Tiene un subconjunto, los números racionales, que no es completo, es totalmente ordenado y por tanto retículo. Faltan los dos puntos en el infinito $+\infty$ y $-\infty$ para que de los reales podamos obtener un ejemplo del teorema de MacNeille.) Así tenemos una generalización del trabajo de Dedekind sobre números reales, generalización en el lenguaje de la teoría de retículos. Ver [3]

Bibliografía

[1] Gratzer, G., *General Lattice Theory.*, Segunda edición, Birkhamher Verlag, Basel. Boston. Berlin, 2003

[2] Veblen, J., Young, J.W., *Proyective Geometry, I y II.*, Blaisdell Publishing Company, New York. Toronto. London , 1938,1946.

[3] Dubreil-Jacotin, M.L., *Lecciones de Álgebra Moderna.*, Editorial Reverté, Barcelona-Buenos Aires-Mexico, MCMLXV.