FELIX KLEIN Y EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA

Joaquín Luna Torres
Universidad de Cartagena
Cartagena D.T., Colombia
jlunator@aolpremium.com

Yolima Álvarez Polo
Universidad Distrital
Bogotá D.C, Colombia
yolialv@eudoramail.com

Resumen

En este escrito se presentan algunos aspectos geométricos a la manera de Felix Klein, trabajando con la métrica Euclidiana.

1. Introducción

En la primera parte de los **Elementos** de Euclides se afirma que dos figuras situadas en el mismo plano son iguales si y solo si es posible hacer que una figura coincida con la otra por medio de traslaciones, rotaciones y reflexiones en rectas. Por consiguiente en dicha primera parte de los **Elementos** se estudian aquellas propiedades de las figuras de un plano que son invariantes respecto a las llamadas **isometrías** del plano.

Como la compuesta de dos isometrías planares cualesquiera es una isometría planar y, así mismo, la inversa de una isometría planar también es una isometría planar, se concluye que el conjunto de todas las isometrías del plano forman un grupo de transformaciones, y podemos considerar la **geometría métrica euclidiana plana** como el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano que son invariantes respecto al grupo de isometrías planares. Propiedades tales como: longitud, área, congruencia, punto medio, paralelismo, perpendicularidad, colinealidad de puntos y concurrencia de rectas, están entre dichos invariantes y son las propiedades estudiadas en la geometría métrica euclidiana plana.

La geometría euclidiana plana no trata únicamente de las propiedades de las figuras de un plano que son invariantes bajo las isometrías planares, pues en partes posteriores de los **Elementos** se estudian figuras **semejantes** que nos hacen interesar por las propiedades de figuras que permanecen invariantes respecto a las semejanzas del plano. Estas transformaciones están compuestas por las traslaciones, rotaciones, reflexiones en rectas y homotecias del plano. Ahora bien, la compuesta de dos semejanzas planares es también una semejanza planar y la inversa de una semejanza planar es también una semejanza planar. Se deduce entonces que el conjunto de todas las semejanzas planares constituye un grupo de transformaciones, y podemos considerar a la **geometría plana de la semejanza**, o **geometría equiforme plana**, como el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano que son invariantes para el grupo de semejanzas planares. Pero, en este grupo ampliado, propiedades tales como la longitud, área y congruencia no son ya invariantes y, por tanto, dejan de ser materia de estudio; pero otras propiedades, como punto medio, paralelismo, perpendicularidad, colinealidad de puntos y concurrencia de rectas siguen siendo invariantes y, en consecuencia, son objeto de estudio de esta geometría.

Por consiguiente, la geometría plana euclidiana es realmente una combinación de dos geometrías más básicas, como son la geometría métrica plana euclidiana y la geometría plana equiforme, siendo cada una de ellas la teoría de los invariantes de un cierto grupo de transformaciones.

La geometría proyectiva plana es el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano que permanecen invariantes cuando dichas figuras son sometidas a las transformaciones proyectivas, siendo una transformación de esta naturaleza una composición de perspectividades. Es evidente que la compuesta de dos transformaciones proyectivas es nuevamente una transformación proyectiva, así como lo es también la inversa de una transformación de dicha clase; por consiguiente, el conjunto de todas las transformaciones proyectivas constituye un grupo de transformaciones. La **geometría proyectiva plana** se puede describir entonces como la teoría de las invariantes de este grupo particular de transformaciones. De las propiedades mencionadas previamente, solo la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas permanecen invariantes. Un invariante importante de este grupo de transformaciones es la relación anarmónica de cuatro puntos colineales y este invariante desempeña un papel capital en el estudio de la geometría proyectiva. Como una sección cónica de un tipo puede ser proyectada en una cónica de cualquier otro tipo, la geometría proyectiva plana (a diferencia de la geometría euclidiana plana), no estudia las elipses, parábolas e hipérbolas como curvas distintas.

El conjunto de todas las transformaciones proyectivas de un plano que convierten en sí misma a cierta recta del plano, (llamada **recta en el infinito**), constituye un grupo de transformaciones. El estudio de las propiedades de las figuras de un plano que son invariantes ante las transformaciones de este grupo se conoce con el nombre de **geometría afín plana**. El conjunto de todas las transformaciones proyectivas de un plano que convierten en sí misma a una recta fija y que convierten en sí mismo a un punto fijo no situado en aquella, contituye también un grupo de transformaciones. El estudio de propiedades de figuras de un plano que son invariantes respecto de las transformaciones de este grupo se conoce como **geometría centroafín** (o **afinocéntrica**) **plana**.

Todas las geometrías descritas anteriormente son geometrías **planas**, pero pueden efectuarse estudios semejantes en el espacio tridimensional o en cualquier espacio de más de tres dimensiones, es decir, de orden superior, siendo cada una de estas geometrías multidimensionales la teoría de las invariantes de un cierto grupo de transformaciones. Así mismo, en todas las geometrías precedentes se han considerado las figuras, sobre las que se aplican las transformaciones de un cierto grupo de transformaciones, como formadas por puntos. De ahí que todas las geometrías anteriores sean ejemplos de las geometrías **puntuales**. Hay geometrías en las que se eligen como elementos fundamentales entidades distintas de los puntos, y los geómetras han estudiado muchas de ellas, tales como la geometría lineal (o tangencial), la geometría circular y la geometría esférica. Pero todas éstas, como las geometrías puntuales ya mencionadas, pueden ser consideradas como las teorías de las invariantes de ciertos grupos de transformaciones.

2. Hacia la noción matemática de transformación

En 1639, dos años después de la **Géométrie**, de Descartes, circuló entre los entendidos, un proyecto en borrador, firmado por Gérard Desargues, ingeniero, matemático y arquitecto francés, en el que se ensayaba presentar la perspectiva, usada en particular por los grandes pintores de la época, como un medio para hacer geometría. Por entonces, solo Pascal pudo hacer una contribución más, al enunciar, en 1640, el teorema del hexagrama místico, uno de los grandes teoremas que dejó a la matemática, a partir del cual, según se dice, podía explicar toda la geometría que concerniera a las secciones cónicas.

En el siglo XVIII, Euler se dió cuenta de un hecho importante que enunció así :

> Un desplazamiento plano es una rotación, o una translación, o una translación seguida de una simetría. [1]

[1]A. Campos, **Axiomática y Geometría, desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki**, Bogotá, 1994, pag. 296.

Habría que esperar, sin embargo, hasta la que llama Bourbaki "edad de oro de la geometría" elemental (apuntalada por dos grandes sucesos: La aparición de la **Géomtríe descriptive** de Gaspard Monge en 1795 y la propuesta del **Programa de Erlangen** de Felix Klein en 1872) para que las ideas de los precursores, Desargues y Pascal, se convirtieran en la geometría proyectiva. Durante muchos años la obra más importante, dentro de esta tendencia, fue **Traité des propriétés projectives de figures** de Jean Victor Poncelet,

> ... Uno de los procedimientos sistemáticos de demostración, empleado hasta la saciedad, consiste en reducir mediante una proyección las propiedades de las cónicas a las de la circunferencia (método que había sido empleado ocasionalmente por Desargues y Pascal); y para poder pasar incluso de una cuádrica a una esfera, inventa el primer ejemplo de transformación proyectiva en el espacio,... [2]

Otro aporte importante fue el de August Ferdinand Möbius, con su obra **Barycentrische Calcul**, 1827, donde muestra que la transformación homográfica comprende como casos particulares a los desplazamientos, las similitudes y las afinidades. En 1837, el geómetra francés Michel Chasles publicó su obra **Aperçu Historique sur l'origineet le déveloment des méthodes en géométrie**. Una de las afirmaciones más destacadas de Chasles, citada por Bourbaki, es

> Hoy día todo el mundo puede presentarse, tomar una verdad conocida cualquiera, y someterla a los distintos principios generales de transformación, obteniendo a partir de ella otras verdades diferentes o más generales, y éstas a su vez serán susceptibles de parecidas operaciones, de tal modo que se podrá multiplicar, casi hasta el infinito, el número de las nuevas verdades deducidas de la primera... [3]

3. El "programa de Erlangen" de Klein

El programa presentado por Klein en 1872, al entrar a formar parte de la Facultad de Filosofía y del Senado de la Universidad de Erlangen, se titulaba **Vergleichende Betrachtungen über neue geometrische Foeschungen** (**Consideraciones comparativas de las nuevas investigaciones geométricas**).

[2] N. Bourbaki, **Elementos de historia de las matemáticas**, Alianza Editorial, 1976, pag. 185.

[3] N. Bourbaki, **Op. Cit.**, pag. 187.

En él Klein avanza respecto a Poncelet, quien había formalizado en la noción de transformacón en geometría.

> A partir, sobre todo, de 1850, aproximadamente, las ideas de grupo y de invariante, formuladas finalmente de un modo preciso, van ocupando poco a poco la escena, y se pone de manifiesto que los teoremas dela geometría clásica no son otra cosa que la expresión de relaciones idénticas entre invariantes o covariantes del grupo de semejanzas... (Por ejemplo, los primeros miembros de las ecuaciones de las tres alturas de un triángulo son covariantes de los tres vértices del triángulo para el grupo de las semejanzas, y el teorema que afirma que estas tres alturas tienen un punto común equivale a decir que los tres covariantes en cuestión son linealmente dependientes). [4]

Transcribimos, a continuación, algunas aseveraciones que constituyen la substancia del programa, según A. Campos:

> Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por naturaleza, estas propiedades son, en efecto, independientes de la situación ocupada en el espacio por la figura considerada, de sumagnitud absoluta, y en fin también del sentido en el que sus partes están dispuestas. ... Los deplazamientos del espacio, sus transformaciones con similitud y por simetrías no alteran, pues, las propiedades de las figuras, ni tampoco las transformaciones compuestas de las precedentes. Llamamos grupo principal de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones. Las propiedades geométricas no son alteradas por las transformaciones del grupo principal. La recíproca es igualmente verdadera: las propiedades geométricas son caracterizadas por su invariación relativamente a las transformaciones del grupo principal. Hagamos abstracción de la figura material que, desde el punto de vista matemático, no es esencial, y no vemos en el espacio más que unaa multiplicidad de varias dimensiones... Por analogía con las transformaciones del epacio, podemos hablar de transformaciones de la multiplicidad; ellas forman también un grupo... Como generalización de la geometría (de Euclides) se pone entonces una cuestión general: dados una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, estudiar sus elementos desde el punto de vista de las propiedades que no son alteradas por las

[4] N. Bourbaki, **Op. Cit.**, pag. 186.

> transformaciones del grupo. O también: dada una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, desarrollar la teoría de los invariantes relativos a este grupo [5]

Las últimas afirmaciones son las más citadas cuando se quiere acentuar la esencia del programa de Klein. Están extractadas del primer parágrafo. Klein no deja de mencionar las multiplicidades (que en el lenguaje actual son las variedades) de un número cualquiera de dimensiones, ni el hecho capital de que el grupo de transformaciones se escoge arbitrariamente, lo que lo hace bastante general. En el parágrafo 3 aparece esta otra afirmación, que varios geómetras ya habían presentido:

> La geometría proyectiva no nació de veras sino cuando se volvió costumbre considerar como enteramente idénticas a la figura primitiva y a todas aquellas que se obtienen de ella por proyección; y, enunciar las propiedades proyectivas de tal manera que se ponga en evidencia su independencia respecto a las modificaciones causadas por la proyección. Esto era lo mismo que tomar como base de consideraciones, el grupo de las transformaciones proyectivas; se encontraba así creada la diferencia entre las geometrias proyectiva y ordinaria. [6]

En resumen, Apolonio hizo la teoría de los lugares sólidos; Descartes y Fermat crearon el lenguajes matemático para estudiar lugares planos, sólidos y diferentes tipos de curvas; Poncelet introduce la noción matemática de transformación en geometría; Galois introduce la noción matemática de grupo y Klein muestra que la esencia de la geometría está en la estructura del grupo de transformaciones.

4. Geometría plana al estilo de Klein

Euclides basaba sus demostraciones de congruencia en un postulado que decía que

> cosas que coinciden una con la otra son iguales entre sí [7]

[5] A. Campos, **Op. Cit.**, pag. 299.
[6] A. Campos, **Op. Cit.**, pag. 300.
[7] Euclides, **Elementos, Libro I, Nociones comunes**, Ed. Aguilar.

lo que no es adecuado para justificar lo que él hizo, no obstante, las ideas de movimiento y de superposición están implícitas en sus demostraciones de congruencia. Es posible, como lo hizo Klein, formular en términos precisos los **movimientos rígidos o isometrías** del plano:

Recordemos en primer lugar que

Definición 4.1. *Una métrica o distancia en* $\mathbb{R}^2$ *es una función*

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

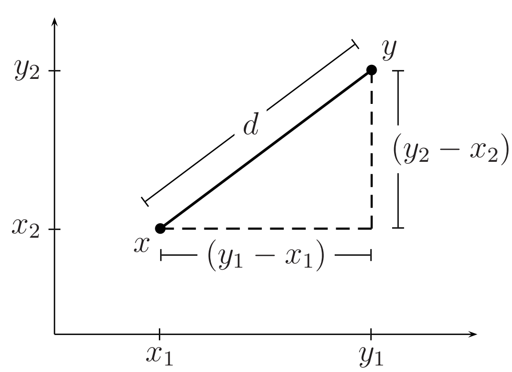
con las siguientes propiedades

(M_1) $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$.

(M_2) $d(x, y) = d(y, x)$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^2$.

(M_2) $d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$, *para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.

La métrica usual o euclidiana en $\mathbb{R}^2$ es la que se obtiene a partir del Teorema de Pitágoras:



$$d = d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} := ||x - y||.$$

Presentamos ahora los movimientos del plano que conservan distancias euclidianas, y por lo tanto el tamaño de las figuras geométricas

Definición 4.2. *Una isometría del plano es una función*

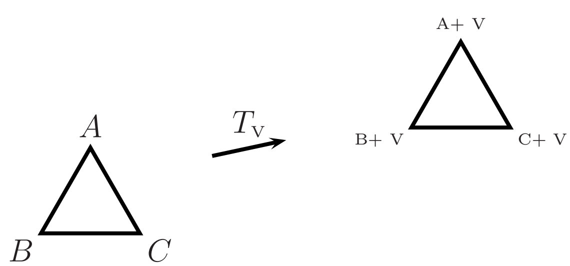
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

que preserva distancias , esto es para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$ *se cumple que*

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y); \text{ es decir, } ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||.$$

Presentamos algunas de las isometrías del plano (las más usuales en geometría elemental) en los ejemplos que siguen

Ejemplo 4.1. *Las* **Traslaciones** T_V*, donde* $V = (a, b)$ *es un punto dado de* $\mathbb{R}^2$*. Se caracterizan porque desplazan a cada punto* (x, y) *del plano hasta el punto* $(x + a, y + b)$*.*

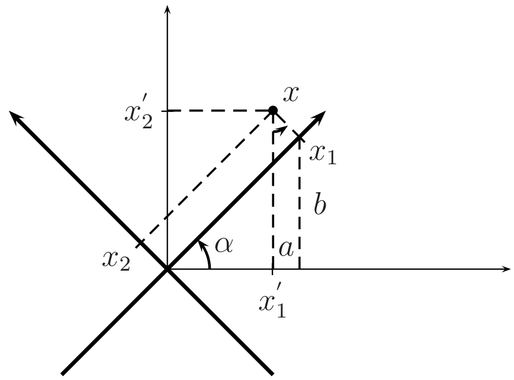


Naturalmente, las traslaciones son isometrías puesto que

$$||T_V(x) - T_V(y)|| = ||(x + V) - (y + V)|| = ||x - y||.$$

También es facil deducir que la compuesta de dos traslaciones es otra traslación, que T_0 es la función idéntica y que T_{-V} es la traslación opuesta (inversa) de T_V; en otras palabras: **las traslaciones forman un grupo.**

Ejemplo 4.2. *Las* **rotaciones** r_α *con centro en el orígen de coordenadas. Todo el plano gira según un ángulo dado* α*, por lo tanto es suficiente el cambio de coordenadas correspondiente ya que los ejes también giran.*



Para α en el orígen tenemos que

$$sen\ \ \alpha = \frac{b}{x_1}; \quad \cos\alpha = \frac{x_1^{'} + a}{x_1}$$

de donde

$$b = x_1 sen\ \ \alpha; \quad x_1^{'} = -a + x_1 \cos\alpha.$$

Ahora en el punto x tenemos

$$sen\ \ \alpha = \frac{a}{x_2}; \quad \cos\alpha = \frac{x_2^{'} - b}{x_2}$$

de donde

$$a = x_2 sen\ \ \alpha; \quad x_2^{'} = b + x_2 \cos\alpha.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= x_1 \cos\alpha - x_2 sen\ \ \alpha \\ x_2{}^{'} &= x_1 sen\ \ \alpha + x_2 \cos\alpha \end{aligned}$$

que se puede escribir

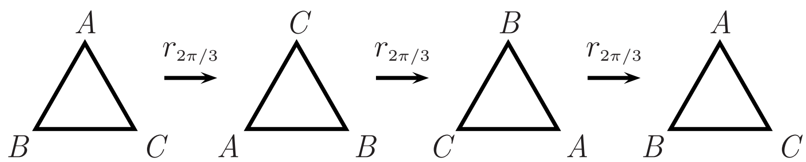
$$\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2{}^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\ \ \alpha \\ sen\ \ \alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Además obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\ \ \alpha \\ -sen\ \ \alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \end{bmatrix}.$$

Esto implica que las rotaciones alrededor de un punto, $r_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ también forman un grupo, con elemento neutro $r_0 = I_{2\times 2}$.

Ejemplo 4.3. *Observemos las rotaciones que dejan invariante un triángulo equilátero: esto es, rotaciones para* $\alpha = \frac{2\pi}{3}$



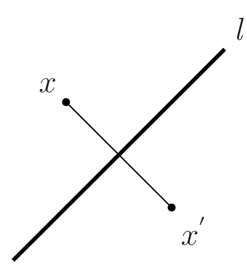
Estas rotaciones son isometrías (observe que las matrices que las representan tienen determinante igual a uno) y forman un grupo cíclico con tres elementos:

$$r_{2\pi/3}, \quad r^2_{2\pi/3}, \quad r^3_{2\pi/3} = id.$$

Cuando el triángulo no es equilátero el grupo se reduce drásticamente.

Es claro que cada polígono tiene asociado un grupo de rotaciones que lo deja invariante, el cual depende de las isometrías que tenga dicho polígono.

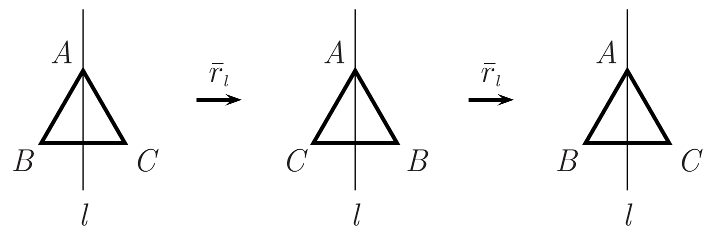
Ejemplo 4.4. *Las reflexiones $\bar{r}_l$ con respecto a rectas l del plano. Un punto x' es la imágen de un punto x por una reflexión en una recta l (el eje de simetría) si l es perpendicular y biseca al segmento $\overline{xx'}$.*



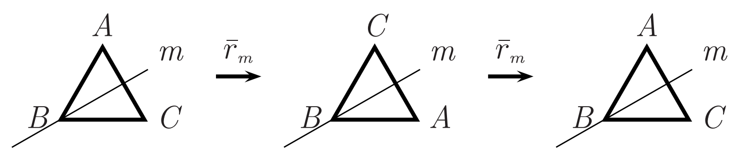
Toda reflexión en una recta es su propia inversa y por lo tanto forma un grupo de orden dos.

Ejemplo 4.5. *Observemos las reflexiones que dejan invariante a un triángulo equilatero. Los ejes de simetría son las mediatrices de cada uno de sus lados:*

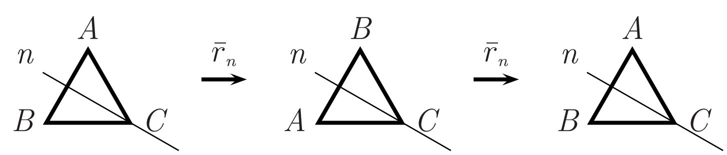
Tenemos, en primer lugar, las reflexiones que dejan fijo al vértice A e intercambian los vértices B y C:



En segundo lugar tenemos la reflexión que deja fijo al vértice B e intercambia a C con A:



Finalmente tenemos la reflexión que deja fijo al vértice C e intercambia a B con A:



5. Observaciones finales

Aquí aparecen algunas anotaciones que consideramos importantes para el estudio de la geometría en el ambiente de los grupos de transformaciones:

1. La composición de movimientos, como se sugiere en [4][pag. 32], nos muestra que tanto las rotaciones como las reflexiones pueden hacerse en cualquier punto o respecto a cualquier recta sin que se alteren los grupos asociados. Aquí es fundamental el uso de la conjugación en el grupo correspondiente.

2. Obsérvese que se puede trabajar simultáneamente con varios grupos; por una parte, las isometrías del plano forman un grupo, y por otra, cada figura conlleva un grupo que la deja invariante (por ejemplo, el grupo diédrico D_3 del triángulo equilátero que tiene seis elementos: tres rotaciones y tres reflexiones). Naturalmente, cuando se cambia de figura este último grupo también cambia y depende del número de sus lados y de sus simetrías. Vale la pena preguntarse si cada uno de estos grupos caracteriza completamente a una figura determinada. Nótese que el grupo que deja invariante a una circunferencia es un caso límite.

3. En estas notas hemos trabajado con la métrica euclidiana del plano. Cuando se cambia la métrica por otra que no sea equivalente a ella, podemos estudiar otras geometrías planas; como sucede por ejemplo cuando se trabaja con una métrica hiperbólica. Estas observaciones también valen en dimensiones superiores.

4. Otro capítulo de la geometría euclidiana plana es el de la semejanza. Para su estudio en el grupo de movimientos se incluyen las dilataciones y contracciones (se suele utilizar el grupo afín). Como es de esperarse, el uso de otros grupos, como el grupo proyectivo, enriquecen el estudio de la geometría tanto en el plano como en dimensiones superiores. En la práctica se parte del grupo $Aut(E)$ de los automorfismos del espacio E en el que se quiere trabajar y se seleccionan subgrupos apropiados de acuerdo con las características de la geometría que necesitemos estudiar.

Bibliografía

[1] N. Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Editorial, 1976.

[2] A. Campos,*Axiomática y Geometría, desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, Bogotá, 1994.

[3] Euclides, *Elementos*, **Libro I**, Aguilar, 1979.

[4] C. Ochoa, *Momento Geométrico*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, 1998.

[5] I. M. Yaglom, *Geometric Transformations I*, The Mathematical Association of America 8, 1962.