Cúbicas de apolonio, como una aplicación de la teoría de grupos

Myriam Acevedo
Matemática Universidad Nacional
Bogotá D.C, Colombia

Luz Zea
Matemática Universidad Nacional
Bogotá D.C, Colombia

Introducción

El tema central de este trabajo es el estudio de las cúbicas de Apolonio desde perspectivas más generales que las clásicas, considerando elementos de la geometría algebraica y de la teoría de grupos.

En la primera parte se discuten nociones básicas sobre el plano proyectivo y las curvas algebraicas planas. A continuación se centra la discusión en las curvas cúbicas, mediante la definición de una ley de composición sobre los puntos de estas curvas, la cual induce una ley de grupo que permite posteriormente describir propiedades y comportamientos de estas curvas.

En la segunda parte se usa la teoría básica presentada para estudiar las cúbicas de Apolonio, se discuten y caracterizan las ecuaciones de las cúbicas y se presentan algunas propiedades generales de las cúbicas. Finalmente se analizan casos particulares de estas curvas: cúbicas singulares y cúbicas reducibles;

Cabe anotar que gran parte de la discusión llevada a cabo en este trabajo se complementa y se ilustra con gráficas para cada uno de los casos.

Existe un programa de computador, el cual permite construir gráficas para cúbicas de Apolonio.

Toda la discusión gira en torno al siguiente problema , tomado de [5].

Problema 1. *Dados dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en el mismo plano, determinar el lugar geométrico de los puntos P que cumplen la siguiente* *propiedad: los ángulos* $\sphericalangle(APB)$ *y* $\sphericalangle(CPD)$ *son congruentes o son suplementarios.*

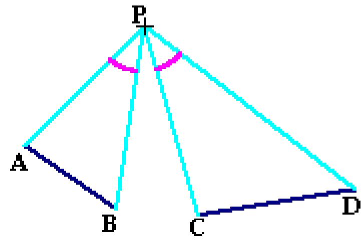

Figura: 1

Este lugar geométrico está formado por dos cúbicas con interesantes propiedades algebraicas y geométricas. Estas dos curvas pasan por los puntos fijos A, B, C y D y se llaman cúbicas de Apolonio.

Si $B = C$ y A, B y D están alineados se encuentra el purpura"círculo de Apolonio". Para ver las propiedades de estas cúbicas se necesitan algunos conceptos de geometrá algebraica, que se explican a continuación:

1. Plano Proyectivo

Definición 1. *Dado un cuerpo* K*, el conjunto* K^n *de* n*-tuplas de* K*, se llama el* n*-espacio afín sobre* K*. Sus elementos se llaman puntos.*

Considérense todas las $(n+1)$-uplas de puntos del $(n+1)$-espacio afín K^{n+1}, en las que $X_{n+1} \neq 0$ y la siguiente correspondencia:

El punto $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y la $(n+1)$-upla $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ se corresponden si y sólo si

$$x_i = X_i/X_{n+1} \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Así, a una $(n+1)$-upla $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ corresponde un único punto. Pero a un punto en K^n corresponden infinitas $(n+1)$-uplas.

Si $X_{n+1} = 0$ y $X_1, X_2, \ldots, X_n$ no son todas nulas, la $(n+1)$-upla $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ se denomina punto en el infinito, o, punto impropio.

El conjunto formado por todas las $(n+1)$-uplas $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ donde $X_{n+1} \neq 0$, y por todos los puntos impropios, se llama n-espacio proyectivo y se notará P_n.

La $(n+1)$-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ no es elemento del n-espacio proyectivo.

Cuando $n = 2$, se obtiene el plano proyectivo P_2. En adelante, en la mayoría de los casos, se usará la notación (X, Y, Z) en lugar de (X_1, X_2, X_3) para las triplas en el plano proyectivo, y (x, y) en lugar de (x_1, x_2) para las parejas en el plano afín.

El conjunto formado por todos los puntos impropios, en el plano proyectivo, es la recta en el infinito, la cual se notará L_∞, determinada por la ecuación $Z = 0$.

Se puede establecer una correspondencia entre polinomios homogéneos del plano proyectivo y polinomios del plano afín, de la siguiente manera:

Dado $F(X, Y, Z) \in K[X, Y, Z]$ homogéneo de grado n se define $f(x, y) = F(x, y, 1)$, y dado $g(x, y) \in K[x, y]$ de grado n, sea $G(X, Y, Z) = Z^n g(X/Z, Y/Z)$. Estas dos correspondencias $F \to f, g \to G$ conservan el grado del poli no mio, y la segunda satisface que $G(X, Y, Z)$ es homogéneo de grado n.

Ejemplo 1. *Considérese la recta $y = mx + b$ en $\mathbb{R}^2$, que corresponde en el plano proyectivo a la recta $Y = mX + bZ$.*

Si $Z = 0$, $Y = mX$, luego los puntos de intersección de la recta con L_∞ son de la forma $(X, mX, 0)$ y,

$$\{(X, Y, Z) \in P_2 \quad | \quad Y = mX + bZ\} \bigcap L_\infty = \{(1, m, 0)\}.$$

Esto significa que en el plano proyectivo, todas las rectas con la misma pendiente, pasan por el mismo punto en el infinito.

2. Curvas Algebraicas Planas

Sea $F(X, Y, Z) \in K[X, Y, Z]$, un polinomio homogéneo, irreducible de grado n. K algebraicamente cerrado y de característica cero.

El conjunto de los puntos que satisfacen la ecuación $F(X,Y,Z) = 0$, se denomina curva algebraica irreducible.

Si P, Q en P_2, corresponden al mismo punto en el plano afín, y P satisface la ecuación $F(X,Y,Z) = 0$ entonces Q satisface la ecuación. P, Q se cuentan como un solo punto en la definición de curva algebraica irreducible.

Si $F(X,Y,Z) = 0$ es la ecuación de una curva $\mathbf{C}$, que se factoriza como

$$F(X,Y,Z) = F_1(X,Y,Z)^{m_1} F_2(X,Y,Z)^{m_2} \dots F_r(X,Y,Z)^{m_r}$$

el con jun to de curvas irreducibles $C_1, C_2, \dots, C_r$, cuyas ecuaciones son

$$F_1(X,Y,Z) = 0, F_2(X,Y,Z) = 0, \dots, F_r(X,Y,Z) = 0,$$

se llaman componentes de $\mathbf{C}$ y m_i se llama la multiplicidad de la componente F_i $(i = 1, \dots, r)$.

Teorema 1. *Si $f(x,y) \in K[x,y]$ es un polinomio homogéneo de grado n, la curva $f(x,y) = 0$ tiene como componentes n rectas que pasan por el origen.*

El teorema anterior se puede expresar en la siguiente forma:

Una ecuación homogénea en dos variables de grado n tiene un único conjunto de n ceros.

En el plano afín la ecuación de la tangente a la curva $f(x,y) = 0$ en el punto (x_1, y_1) se escribe

$$(x - x_1) f_x(x_1, y_1) + (y - y_1) f_y(x_1, y_1) = 0.$$

En el plano proyectivo la ecuación de la tangente a la curva $F(X,Y,Z) = 0$ en el punto (X_1, Y_1, Z_1) se escribe

$$X F_X(X_1, Y_1, Z_1) + Y F_Y(X_1, Y_1, Z_1) + Z F_Z(X_1, Y_1, Z_1) = 0.$$

Se llaman asíntotas de una curva algebraica, a las rectas tangentes a la curva en los puntos de intersección de esta con L_∞.

Un punto de inflexión de una curva $\mathbf{C}$ es un punto no singular de $\mathbf{C}$ en el cual la recta tangente tiene tres o más intersecciones con $\mathbf{C}$.

Ejemplo 2. *La curva* $x^4 - y^4 + x^2y + 2x^2 - 1 = 0$ *se interseca con* L_∞ *en los puntos* $(1,1,0), (1,-1,0), (1,i,0)$ *y* $(1,-i,0)$ *y las ecuaciones de las correspondientes asíntotas son:*

$$
\begin{aligned}
4X - 4Y + Z &= 0,\\
4X + 4Y - Z &= 0,\\
4X + 4iY + iZ &= 0,\\
4X - 4iY - iZ &= 0.
\end{aligned}
$$

Teorema 2. *Si f(x,y) no tiene términos de grado menor que r y tiene algunos términos de grado r, entonces el origen es un punto de multiplicidad r de f(x,y)=0 y la curva definida igualando a cero los términos de grado r tiene como componentes las tangentes a f(x,y) en el origen.*

Ejemplo 3. $f(x,y) = x^3 - x^2 + y^2 = 0$

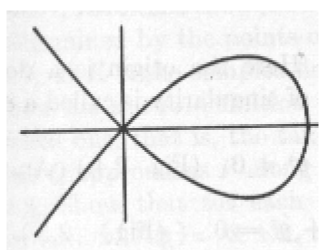

Figura: 2

Como $x^3 - x^2 + y^2$ *no tiene términos de grado menor que dos, entonces el origen* $(0,0)$ *es un punto de multiplicidad dos de* $x^3 - x^2 + y^2 = 0$*, es decir, un punto doble, y la curva definida por* $-x^2 + y^2 = 0$ *tiene como componentes las tangentes a* $f(x,y)$ *en el origen.*
Como $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = 0$*, entonces las componentes son las rectas* $y - x = 0$ *y* $y + x = 0$*.*

Teorema 3 (Teorema de Bezout). *Dos curvas algebraicas sin componente común, de órdenes m y n, tienen mn puntos comunes.*

3. Curvas Cúbicas

Existe una ley de composición que asigna a cada par de puntos sobre la cúbica un tercer punto de la siguiente manera:

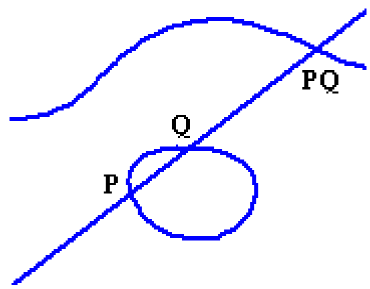

Figura: 3

Trácese la recta que une los puntos P y Q; por el teorema de Bezout esta recta se interseca con la cúbica en un tercer punto PQ. Si $P = Q$

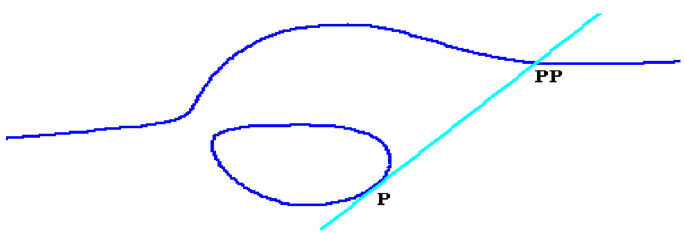

Figura: 4

se traza la recta tangente al punto P, habrá en este punto dos intersecciones con la curva; el tercer punto de intersección de esta recta tangente con la curva será el punto PP.

La ley que asocia a cada par (P, Q) *el punto* PQ *se llama la ley de composición cuerda tangente.*

Nótese que esta ley de composición satisface la propiedad conmutativa $PQ = QP$, pero no induce una estructura de grupo.

A pesar de que esta ley no induce una estructura de grupo la intención es usarla para construir una nueva ley que sí la induzca. Con la selección de un punto fijo O y la ley de composición cuerda tangente PQ se puede definir una ley de grupo de la siguiente manera:

Dados los puntos P, Q y el punto fijo O, primero se encuentra el punto PQ, y luego se traza la recta que une a los puntos PQ y O. El punto de intersección de esta recta con la curva se nota $P+Q$. Con la notación de la ley cuerda tangente se tiene

$$P+Q=O(PQ)$$

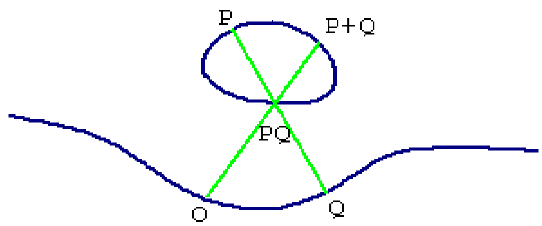

Figura: 5

Las propiedades que satisface esta nueva ley son las siguientes:

La propiedad conmutativa $P+Q=Q+P$ puesto que $PQ=QP$, el punto fijo O actúa como elemento neutro, para un punto P, existe $-P$ y es igual a $P(OO)$, además se cumple la propiedad asociativa.

Por tanto $P+Q$ es una ley de grupo abeliano.

Para las consideraciones que se harán acerca de la cúbica, el punto seleccionado como elemento neutro debe ser un punto de inflexión.

Proposición 1. *Si O elemento neutro para la ley de grupo sobre la cúbica es un punto de inflexión, se tiene que para cualesquiera P,Q,R que pertenecen a la cúbica $P+Q+R=O$ si y sólo si P,Q,R están sobre la misma recta.*

4. Cúbicas de Apolonio

Para determinar las ecuaciones considérese inicialmente el siguiente problema:

Dados un segmento fijo $\overline{AB}$ y la medida θ de un ángulo, determinar el lugar geométrico de los puntos X que satisfacen que la medida del ángulo $\sphericalangle AXB$ es θ.

$$\langle X, X\rangle - \big\langle X, (A+B)\big\rangle + \langle A, B\rangle = \pm\cot\theta\big(\big\langle X, J(B-A)\big\rangle - \langle A, JB\rangle\big)$$

El lugar geométrico de los puntos X, dado un segmento fijo $\overline{CD}$ y la medida θ del ángulo $\sphericalangle CXD$, corresponde a las ecuaciones:

$$\langle X, X\rangle - \big\langle X, (C+D)\big\rangle + \langle C, D\rangle = \pm\cot\theta\big(\big\langle X, J(D-C)\big\rangle - \langle C, JD\rangle\big)$$

Eliminando $\cot\theta$ se encuentra las ecuaciones de las cúbicas, estas son:

$$\begin{aligned}&\big(\langle X, X\rangle - \big\langle X, (A+B)\big\rangle + \langle A, B\rangle\big)\big(\big\langle X, J(D-C)\big\rangle - \langle C, JD\rangle\big)\\ &\quad - \big(\big\langle X, J(B-A)\big\rangle - \langle A, JB\rangle\big)\big(\langle X, X\rangle - \big\langle X, (C+D)\big\rangle + \langle C, D\rangle\big) = 0\end{aligned} \tag{4.0.1}$$

$$\begin{aligned}&\big(\langle X, X\rangle - \big\langle X, (A+B)\big\rangle + \langle A, B\rangle\big)\big(\big\langle X, J(D-C)\big\rangle - \langle C, JD\rangle\big)\\ &\quad + \big(\big\langle X, J(B-A)\big\rangle - \langle A, JB\rangle\big)\big(\langle X, X\rangle - \big\langle X, (C+D)\big\rangle + \langle C, D\rangle\big) = 0\end{aligned} \tag{4.0.2}$$

Nótese que las ecuaciones

$$\langle X, X\rangle - \big\langle X, (A+B)\big\rangle + \langle A, B\rangle = 0$$
$$\langle X, X\rangle - \big\langle X, (C+D)\big\rangle + \langle C, D\rangle = 0$$

representan, respectivamente, las circunferencias con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Nótese también que el par de ecuaciones

$$\big\langle X, J(B-A)\big\rangle - \langle A, JB\rangle = 0,$$
$$\big\langle X, J(D-C)\big\rangle - \langle C, JD\rangle = 0,$$

corresponden a dos rectas que contienen, respectivamente, a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Proposición 2. *Las cúbicas que resuelven el problema, tienen los pun tos A, B, C y D en común. Además, si las circunferencias con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersecan, entonces sus intersecciones son comunes a ambas cúbicas (puntos F y G en la gráfica). Lo mismo es cierto para el punto de intersección de las rectas que pasan por los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (punto E en la gráfica).*

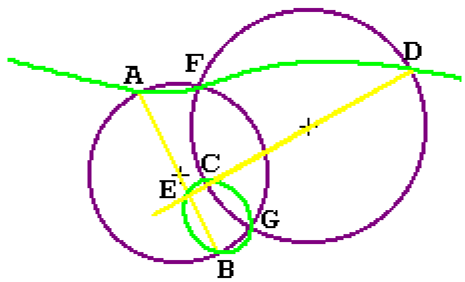

Figura: 6

Escribiendo la ecuación (1) en la forma

$$f(x_1, x_2) = k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_1^2 + k_4 x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2)(k_6 x_1 + k_7 x_2) = 0 \quad (4.0.3)$$

y comparando coeficientes se determinan los $k_i,\ i = 0, \ldots, 7$ en esta ecuación.

Analizando los coeficientes $k_i,\ i = 0, \ldots, 7$, se observa que:

Dados cuatro puntos A, B, C y D y tomados los tres posibles pares de segmentos $(\overline{AB}, \overline{CD})(\overline{AC}, \overline{BD})(\overline{BC}, \overline{AD})$ si se resuelve el problema para cada par de ellos, se encuentran en total no seis sino tres curvas cúbicas diferentes.

El conjunto de tres cúbicas diferentes, asociado a los cuatro puntos A, B, C y D se llama *configuración de Apolonio*.

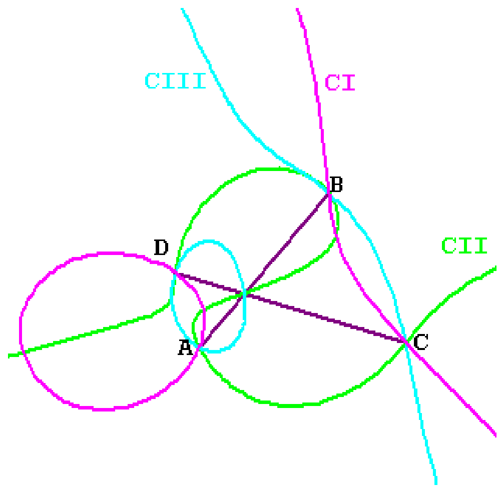

Figura: 7

Las tres cúbicas de la proposición que se ilustran en la figura, notadas CI, CII y $CIII$ se llaman cúbicas de Apolonio o cúbicas isópticas. Cada una describe el lugar geométrico de los puntos desde donde se ven dos pares de segmentos bajo ángulos iguales.

Se usa el símbolo $AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$ para ecpecificar la cúbica CII.
En general las cúbicas de Apolonio pueden tener una o dos componentes.

La ecuación (3) en P_2 se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, X_3) =& k_0 X^3 + k_1 X_1 X_3^2 + k_2 X_2 X_3^2 + k_3 X_1^2 X_3 + k_4 X_2^2 X_3 + k_5 X_1 X_2 X_3 \\ &+ (X_1^2 + X_2^2)(k_6 X_1 + k_7 X_2) = 0 \end{aligned} \tag{4.0.4}$$

Los puntos de intersección de esta cúbica con L_∞, en el plano complejo proyectivo resultan de considerar $X_3 = 0$ en (4), así

$$(X_1^2 + X_2^2)(k_6 X_1 + k_7 X_2) = 0$$

y de aquí se obtienen los puntos $(1, \pm i, 0), (-k_7, k_6, 0)$.

Los puntos $I = (1, i, 0)$ e $I' = (1, -i, 0)$ se llaman puntos cíclicos.
La asíntota a la curva en el plano real proyectivo es:

$$X_1(k_7^2 k_6 + k_6^3) + X_2(k_6^2 k_7 + k_7^3) + X_3(k_3 k_7^2 + k_4 k_6^2 - k_5 k_6 k_7) = 0.$$

luego la ecuación de la asíntota en el plano afín resulta ser

$$x_1(k_7^2 k_6 + k_6^3) + x_2(k_6^2 k_7 + k_7^3) + (k_3 k_7^2 + k_4 k_6^2 - k_5 k_6 k_7) = 0.$$

De las consideraciones anteriores se deducen los siguientes teoremas referidos a las propiedades mas importantes de las cúbicas.

Teorema 4. *Las tangentes en los puntos A, D de la cúbica isóptica se intersecan en el punto $P(AD)$ de la cúbica. Las tangentes en los puntos B, C de la cúbica isóptica se intersecan en el punto $P(BC)$ de la cúbica.*

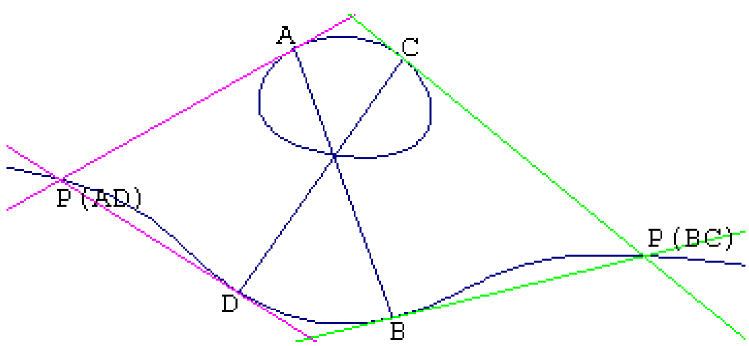

Figura: 8

Si O es un punto de inflexión hay a lo más tres puntos diferentes que tienen una tangente la cual pasa por O. Sean estos O_1, O_2, O_3, los cuales satisfacen $2O_i = O$.

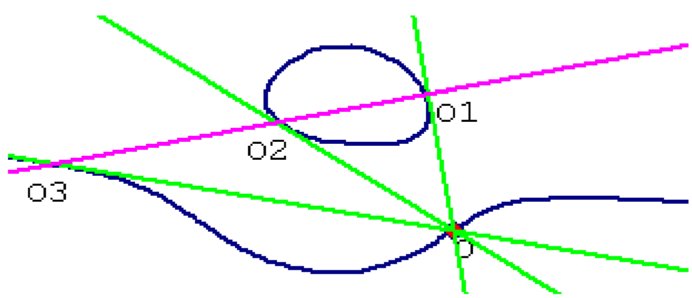

Figura: 9

Teorema 5. *Los cuatro puntos A, B, C y D que definen la cúbica $AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$ satisfacen las ecuaciones*

$$C = B + O_i \qquad\qquad D = A + O_i$$

donde O_i es uno de los (a lo más) tres puntos sobre la cúbica que satisfacen $2O_i = O$.

Denótese por O_1 el punto dado por el teorema. Para cualquier punto P sobre la cúbica c, se nota por P^* el punto $P^* = P + O_1$.

Así, dados A, B sobre la cúbica $AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$, los otros dos puntos $D = A^*$ y $C = B^*$ están unívocamente definidos mediante la ley de grupo definida sobre la cúbica.

Teorema 6 (Cuerda tangente). *Dada la cúbica $c = AP[\overline{AA^*}, \overline{BB^*}]$ el ángulo entre el segmento $\overline{AB}$ y la tangente a la curva c en A, es congruente (o suplementario) con el ángulo con vértice en A y lados $\overline{AA^*}$ y $\overline{AB^*}$. $\overline{A^*B^*}$ se llama el segmento conjugado de $\overline{AB}$.*

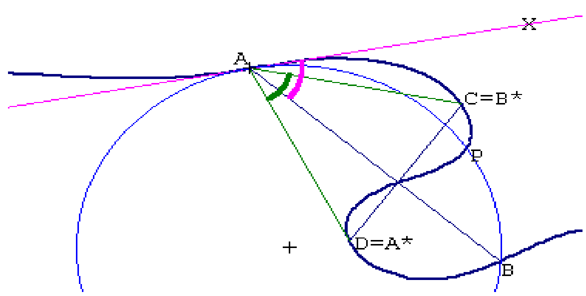

Figura: 10

Proposición 3. *Sea $c = AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$ una cúbica de Apolonio irreducible, sean E y F los puntos de intersección de los segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}$ y $\overline{AC}, \overline{BD}$ respectivamente. Las cuatro circunferencias que pasan por los puntos $\{A, B, F\}$, $\{C, D, F\}, \{E, A, C\}$ y $\{E, B, D\}$ se intersecan en un punto H que pertenece a la cúbica $AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$, este punto se llama el punto de Miquel y es precisamente el punto real por el cual pasa la asíntota.*

H se llama el centro de la cúbica de Apolonio.

Teorema 7 (Van Rees). *Sean A, B, C y D cuatro puntos en el plano, tales que la cúbica $c = AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$ sea irreducible. Sea O un punto de inflexión, y el elemento neutro de la ley de grupo definida sobre c. Entonces para cualquier par de puntos X, Y de c, los puntos $W = Y^*$ y $V = X^*$ sobre c están unívocamente definidos y la cúbica $AP[\overline{XV}, \overline{YW}]$ coincide con $AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$.*

Proposición 4. *Si la cúbica $c = AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$ tiene dos componentes, entonces para cada punto P sobre c los ángulos bajo los cuales se ven las dos componentes son congruentes o suplementarios.*

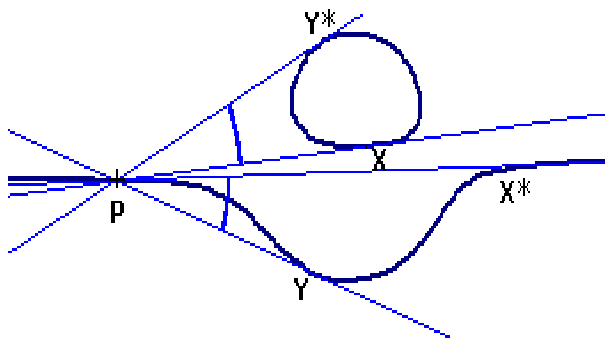

Figura: 11

5. Cúbicas de Apolonio Singulares

Si $A = D = (0,0)$ la ecuación (3) de la cúbica se transforma en

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\big[(b_2+c_2)x - (b_1+c_1)y\big] - (b_1c_2+c_1b_2)(x^2-y^2) + (b_1c_1-b_2c_2)xy = 0 \qquad (5.0.5)$$

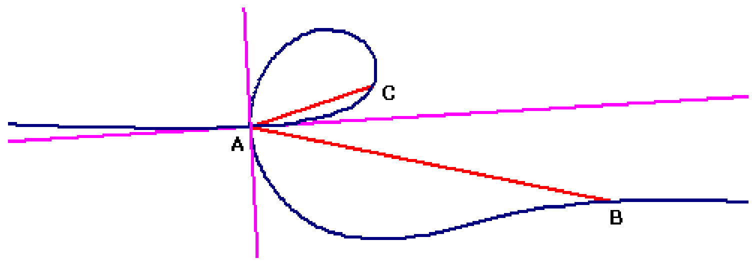

Figura: 12

La figura sugiere tomar el eje x como el bisector del ángulo $\sphericalangle CAB$.
El origen $A = (0,0)$ es un punto de multiplicidad dos, es decir, un punto singular de $f(x,y) = 0$, y las componentes de la curva

$$-(b_1c_2 + c_1b_2)(x^2 - y^2) + (b_1c_1 - b_2c_2)xy = 0$$

son las tangentes a $f(x,y)$ en el origen.

Proposición 5. *La cúbica de Apolonio irreducible c de los dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tiene un punto singular A y las tangentes en el punto son ortogonales y bisecan el ángulo $\sphericalangle CAB$. Además c es también la cúbica que corresponde a todos los pares de segmentos $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$ tales que B' y C' están sobre c y el ángulo $\sphericalangle C'AB'$ es bisecado por las tangentes en A.*

Usando la proposición es posible encontrar otros dos segmentos, para los cuales una de las cúbicas de Apolonio es c. En efecto, desde el punto P de c se ve a los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ bajo ángulos congruentes o suplementarios

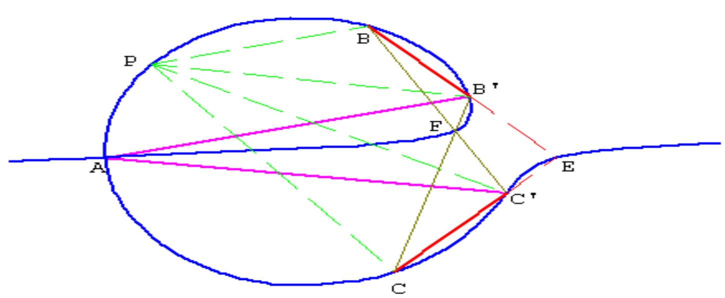

Figura: 13

El siguiente teorema afirma que las cúbicas de Apolonio singulares (irreducibles) tienen un punto común que es singular y determina algebraicamente la cúbica.

Teorema 8. *Sea $c = AP[\overline{BB^*}, \overline{CC^*}]$ una cúbica de Apolonio singular y sea S el punto singular de c. Entonces $c = AP[\overline{SS}, \overline{BB^*}]$.*

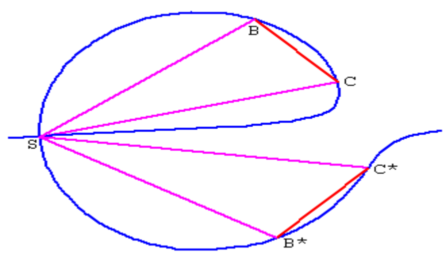

Figura: 14

La cúbica irreducible singular $AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$ puede también ser caracterizada geométricamente, como se ilustra en el siguiente teorema.

Teorema 9. *La cúbica irreducible $c = AP[\overline{AD}, \overline{BC}]$ es singular precisamente cuando los segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AC}, \overline{BD}$ son tangentes a la misma circunferencia. En este caso el centro S de la circunferencia coincide con el punto doble de la cúbica y $c = AP[\overline{SS}, \overline{AA^*}]$.*

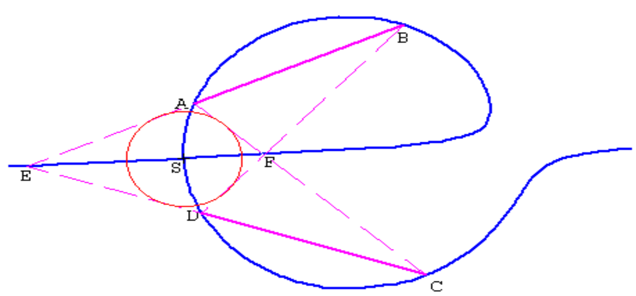

Figura: 15

6. Cúbicas de Apolonio Reducibles

Para lugares especiales de los puntos A, B, C y D se obtienen cúbicas reducibles, es decir, cúbicas cuyas ecuaciones tienen como componentes a una cónica c y una recta l. Se puede hacer una lista de todas las posibles descomposiciones. La clasificación es el resultado de considerar la localización de los puntos cíclicos I, I' que pertenecen a cada cúbica de Apolonio.

Caso 1:Cuando I, I' pertenecen a la recta l, entonces la recta l coincide con la recta en el infinito L_∞. Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen la misma medida, son paralelos y c es una hipérbola equilátera.

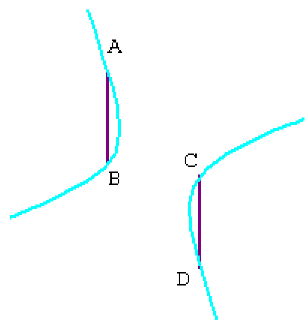

Figura: 16

La hipérbola degenera en dos rectas ortogonales cuando los segmentos tienen la misma medida y están sobre la recta l.

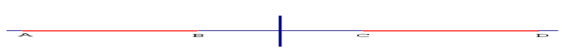

Figura: 17

O cuando los segmentos están en los lados opuestos de un rombo.

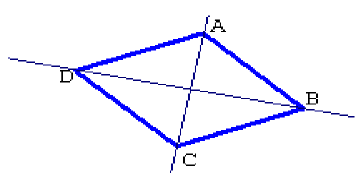

Figura: 18

Caso 2:Cuando I, I' pertenecen a la cónica c, entonces la cónica es una circunferencia y la recta l pasa por el centro de la circunferencia. A su vez, surgen tres posibilidades:

A.Los cuatro puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia c y no a la recta l. Entonces se tiene la configuración de la figura. En este caso la recta l pasa por el centro de la circunferencia y los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son simétricos con respecto a l.

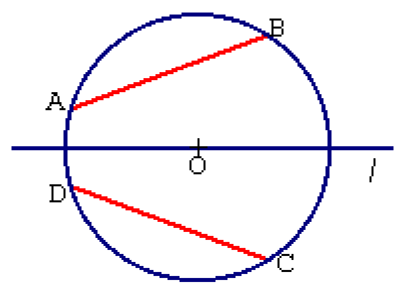

Figura: 19

B.Los cuatro puntos A, B, C y D pertenecen a la recta l y no a la circunferencia c. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son congruentes y están sobre la misma línea. Este caso resulta ser una generalización del clásico círculo de Apolonio y corresponde a éste cuando $B = C$.

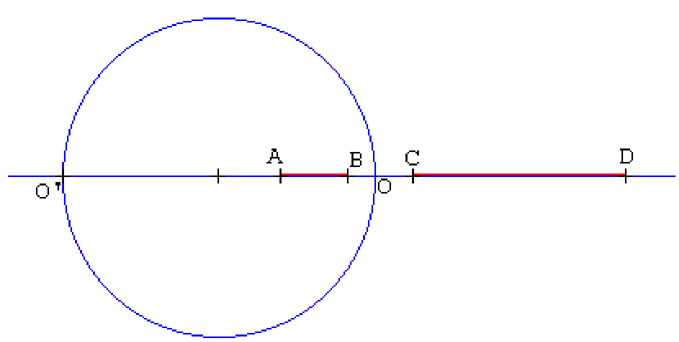

Figura: 20

C.En este caso los dos puntos A, D pertenecen a la circunferencia c y los otros dos puntos B, C pertenecen a la recta l. Los extremos D y A de los segmentos, son simétricos con respecto a l.

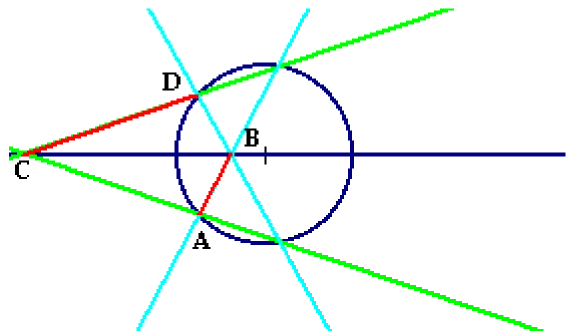

Figura: 21

Bibliografía

[1] Howard Eves,*An introduction to the History of Mathematics*, Rinehart and company, New York, 1959.

[2] William Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, W.A. Benjamin, London, 1969.

[3] Dale Husemoller, *Elliptic Curves*, Springer Verlag, New York, 1987.

[4] Edwin E. Moise, & Floyd Downs, *Geometría Moderna*, Traducido por García Matiano, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, E.U.A., 1986.

[5] Paris Pamfilos, & Apostolos Thoma, *Apollonian Cubics: An Application of Group Theory to a Problem in Euclidean Geometry*, Mathematics Magazine, **72** (1999), 356-365.

[6] Rey J. Pastor, & Luis A Santaló,& Manuel Balanzat, *Geometría Analítica*, Kapelusz, Buenos Aires, 1955.

[7] Miles Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, London Mathematical Society Student Texts 12, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[8] Robert J. Walker,*Algebraic Curves*, Dover, New York, 1950.