EL CONCEPTO DE NÚMERO SEGÚN BERTRAND RUSSELL[1]

Joaquín Luna Torres
Escuela de Matemáticas.
Universidad Sergio Arboleda.
jlunator@latino.net.co

1 Datos biográficos de B. Russell.

El 18 de Mayo de 1872 nació en Trellech, en el seno de una famlia aristocrática inglesa, Bertrand Arthur William Russell. Sometido a un afectuoso pero severo régimen de vida, fue educado en un clima austero en el que se combinaron puritanismo, liberalismo y tradiciones escosesas, aparte de una orientación germana en la misma, dado que los liberales ingleses de entonces se inclinaban más por Alemania que por Francia, hasta el punto de que Russell conoció pronto el alemán tan bien como su propio idioma. El carácter introvertido de la familia paterna lo atemperó con el espíritu abierto y alegre heredado de los Stanley.
Inició sus estudios de geometría a los 11 años de edad,

> Las matemáticas eran lo que más me gustaba. Mi primera lección de matemáticas la obtuve de mi hermano Frank, quien me inició en Euclides y me pareció la cosa más bonita que hubiera visto en mi vida. Hasta entonces no sabía que existía en el mundo algo tan bonito. Pero también recuerdo que mi primera clase fue una desilusión porque me dijo:
>
> ≪Ahora empezamos con los axiomas≫. Yo dije:≪¿Qué son ellos?≫, y me dijo: ≪Ah, son cosas que tienes que admitir, aunque no las podemos probar≫. Así que dije :≪¿Por qué las debo admitir si no las puedo probar?≫ y me dijo: ≪Bueno, si no lo haces no podemos seguir adelante≫. Yo quería ver cómo iba a seguir, así que lo admití *pro tem* [2]

[1]Este trabajo es un avance del proyecto de investigación *Fundamentos matemáticos de la didáctica matemática*, auspiciado por Colciencias y la U. Sergio Arboleda.

[2]B Russell, *The future of science with a ≪self-portraid≫ of the author*, New York, 1959.

A pesar de su terrible insatisfacción por el hecho de tener que aceptar los axiomas como si fueran verdades sin tener prueba alguna, se encontraba fascinado por las demostracioes geométricas. Desde entonces se interesó por la validez de los fundamentos de la geometría hasta la edad de treinta y ocho años.

Posiblemente, la primera lectura filosófica de Russell fue *El sentido común de las ciencias exactas* escrita por William Clifford (1885). Allí comprendió cómo era posible que las geometrías no euclidianas fueran lógicamente consistentes e independientes de la euclidiana. Clifford consideraba que la naturaleza de la noción de número era independiente del proceso de contar, idea que no provocó una respuesta inmediata en Russell, pues este la vino a desarrollar en 1903 cuando publicó *Los principios de las matemáticas*.

A los 18 años ingresó en el Trinity College de Cambridge, que contó con nombres tan famosos como Moore, Whitehead y Ramsey. Tuvo como profesores de filosofía a Ward, Stout y Sidgwick. Allí encontró el ambiente intelectual libre que había extrañado por tantos años y que lo convertiría en un escéptico rebelde y apasionado, admirado y criticado por sus colegas.

Permaneció convencido que la única manera de obtener cualquier tipo de conocimiento cierto era a través del estudio de las matemáticas. El ambiente intelectual de Cambridge lo mareó; podía dar a conocer sus ideas sin señal alguna de rechazo o perjuicio.

Desgraciadamente, la burocracia envuelta en el estudio de las matemáticas lo asquearon. La descripción de una clase típica sugería que los estudiantes pasaban la clase completa escribiendo respuestas a preguntas escritas y resolviendo problemas tediosos. La única excepción eran las clases de Whitehead.

Decidió escribir su tesis de beca en la Universidad de Cambridge (bajo fuerte influencia neohegeliana) *Un ensayo sobre los fundamentos de la geometría*. El libro estaba dirigido en primer plano a filósofos y no a matemáticos. El tema central del libro era la epistemología. El propósito de Russell era establecer qué conocimiento geométrico se requería lógicamente para una ciencia del espacio y qué conocimiento era lógicamente necesario para la posibilidad de la experiencia.

A finales de 1896, cuando viajó a Estados Unidos, conoció las matemáticas alemanas. Pronto adoptó el punto de vista de que la escolaridad germana era muy superior a la británica, no únicamente en matemáticas, sino que casi cualquier otra disciplina.

De regreso a Inglaterra cuando escribió una reseña del libro de Hannequin, *La hipótesis de los átomos*, Russell conoció las traducciones francesas de la obra de Cantor publicadas en el *Acta Mathematica*. El primer encuentro con la teoría de los números transfinitos de Cantor le dejó una imagen muy negativa de las ideas cantorianas.

No obstante, cuando leyó nuevamente a Cantor a mediados de 1899, Russell adoptó la conceptualización de Cantor y usó algunos de sus resultados.

Russell estaba convencido de que las ideas cantorianas eran fundamentales para una explicación consistente de los principios del cálculo y la teoría de los irracionales, pero

> no me puedo persuadir de que la teoría [de Cantor] resuelve algunas dificultades filosóficas del infinito, o convierte a la antinomia del número infinito en algo un poco menos formidable.

En resumen, hubo importantes cambios entre sus manuscritos de 1900, terminados un par de semanas antes de que asistiera al primer congreso internacional de filosofía: en donde conoció a Peano y donde se dio cuenta de la importancia de la lógica matemática. A pesar de que seguía dudando del fundamento filosófico de la teoría de Cantor, empleó sus ideas para explicar la naturaleza compleja de ciertos conocimientos matemáticos básicos tales como los de «orden», «sucesiones», «continuidad» e «infinitud».

Posteriormente comenzó la composición de *Los principios de las matemáticas* a finales de 1900. Realmente, durante este año escribió las etapas III, IV, V y VI del libro. El resto lo desarrolló entre 1901 y 1902.

Russell presentó en Mayo de 1901, por primera vez, un argumento relacionado con su «contradicción» de la clase de todas las clases que no son miembros de sí misma. En esa época empezó a tratar inconsisitencias matemáticas en el trabajo de Cantor como contradicciones en lugar de falacias o errores.

Posteriormente se dedica, con Whitehead, a su obra cumbre *Principia Mathematica*.

Si a Russell le llevó a Cambridge su interés por la matemática, pronto derivó hacia los temas sociológicos, habiendo influido mucho en este cambio el filosofo McTaggart. Permaneció en el Trinity College de 1.890 a 1.894. Se doctoró en filosofía en 1.895, y de 1.910 a 1.916 estuvo en la Universidad de Cambridge como profesor.

Escritor fecundo (su primera obra apareció en 1.896, y hasta 1.946 puede decirse que prácticamente publicó un libro cada año), también fue conferenciante, publicista y ejerció la docencia en multitud de instituciones y univer-

sidades.
En su evolución filosófica -muy compleja dada la inquietud de su espíritu, que le llevó a adentrase en los terrenos más diversos-, tuvo una fase de clara influencia matemática. Considerabaa que la matemática era el ideal del saber, influjo heredado en parte de Platón, de quien entonces era partidario. A esta fase corresponden sus célebres obras *Los principios de la matemática* y la *Principia Mathematica*, esta última en colaboración con Whitehead.
Después Russell va derivando hacia el positivismo. En su realismo se aleja de Platón para acercarse a David Hume.
En realidad, pese a los cambios que se le atribuyen, puede decirse que el único que tuvo fue el que le hizo pasar del idealismo al realismo. Al dejar a un lado el primero -en el que estuvo influido por Bradley-, encontró en el segundo a G. E. Moore y a Peano, con quien estuvo en contacto en 1900 y cuyo influjo fue grande en él.
Aparte de las cuestiones de filosofía de las matemáticas, Russell se adentró también en los dominios de los temas histórico-sociales. Siguió en ellos el liberalismo típico de la tradición filosófico-política inglesa, si bien atenúa su tendencia al radicalismo filosófico decimonónico con el concepto que tiene de la sociedad de masas, lo que le lleva a conjugar socialismo e individualismo, pesimismo y progresismo, libertad y orden. Es también muy importante en este aspecto su tesis sobre la influencia ejercida en la ciencia por los fenómenos histórico-sociales. Sostiene Russell que los saberes formales (por ejemplo la lógica y las matemáticas) están menos sujetos a la evolución histórico-social que los que se consideran menos formales (por ejemplo, metafísica, religión o sociología).

2 Sobre el pensamiento de Russell.

Siguiendo a José Barrio Gutierrez, autor del prólogo de [1], presentamos a continuación una breve exposición del pensamiento de Russell en las diferentes materias abordadas a lo largo de sus obras:
En el campo psicológico, Russell sostiene que los fenómenos fisiológicos y psíquicos están generalmente ligados. Es más: aquellos dependen de estos. La teoría de Russell, que niega el alma sustancial, sostiene que no existe materia o espíritu. Simplemente, datos sensibles que se agrupan obedeciendo a determinadas leyes. Cuando los datos sensibles de los diferentes objetos se observan desde un punto de vista único constituyen el espíritu. Los datos

sensibles de los distintos observadores constituyen la materia. Tienen ambos - espíritu y materia- leyes diferentes. Y lo psíquico obedece al determinismo "mnémico" , que tiene su origen probablemente en el determinismo del tejido nervioso. Toda la teoría psicológica de Russell está comprendida en su obra *Análisis de la mente*.

En el terreno moral, Russell considera que las ciencias de la naturaleza, de las que se nutre el saber, son también base de toda actividad ética. Partidiario del pesimismo antropológico, motivado en parte por la deficiente estructura de la sociedad, introduce algunas atenuaciones en su concepto peyorativo del ser humano. El hombre, al que estima parte insignificante de la naturaleza considerado en el orden del ser, adquiere un pleno significado en el orden de los valores, en el cual trasciende la naturaleza. En la moral de Russell, el hombre, libre de escoger un ideal, debe cifrarlo en una "buena vida", cuyo motor es un amor efectivo, que se ayuda del saber. Admite que las reglas prácticas son necesarias para regular la vida, pero estima que estas suelen apoyarsed en bases falsas de creencias supersticiosas. Considera que la felicidad se obtiene con el perfeccionamiento del individuo, y este se consigue vigorizando el ánimo por la educación y desterrando el temor.

En el campo filosófico, Russell pertenece a la escuela neorrealista. Para él, la filosofía debe basarse en las ciencias de la naturaleza - ya hemos visto que las considera las fuentes del saber-. Es decir, ha de ser científica, descartando todo cuanto pueda ser misticismo o romanticismo. Más aún, considera la filosofía como la que, planteando cuestiones aún no abordadas por la ciencia, preparan el camino para que lleguen a serlo. La filosofía, más que resolver problemas -competencia de la ciencia -, debe plantearlos. Su labor tiene por objeto esclarecer las exposiciones y conceptos de la ciencia. Es, pues, su tarea más crítica que otra cosa.

Más tarde, Bertrand Russell se declararía agnóstico, profesando que la ciencia es el único camino para hallar la verdad, adentrándose en la línea de Mill y de Hume, es decir, dentro de la tradición positivista y empirista.

Russell, que sigue sobre todo el camino de Moore, niega la existencia de las relaciones internas. Solo se dan las externas, añadidas a las cosas existentes, y, por serlo, aquellas no dependen de estas. Rechaza así la teoría y principales consecuencias de Bradley. Y admite el pluralismo. Hace este que el mundo esté compuesto de infinidad de átomos ligados por relaciones externas independientes entre sí. De aquí pasó Bertrand Russell a la teoría de los datos sensibles, ya expuesta, y, por ende, al atomismo lógico.

Se pronuncia a favor del realismo inmediato, realismo que se funda en que

lo conocido no está en el campo de la conciencia, sino fuera de ella, y es diferente del sujeto, en tanto que ese idealismo que rechaza nos dice que solo es posible conocer el contenido de la conciencia, es decir, las ideas. Para Russell, la materia -real- no es accesible al conocimiento de modo directo; es conocida esta por los datos sensibles, que enlazan entre sí de una manera lógica.
La aplicación del pluralismo fue muy importante para la teoría del conocimiento, y Russell llegó a él estudiando a Leibniz, estudios que expone en la lógica matemática y en los que parece considerar que el análisis lógico despejaba las mayores incógnitas de la teoría del conocimiento. Es muy conocida su tesis de que la lógica es base de toda filosofía, y dentro de esta dirección hay que situar su ya citado atomismo lógico.
De Russell han dicho sus críticos que, pese a su gran inteligencia, no ha conseguido evitar las contradicciones ni permitido encontrar una constante en toda su obra. Y a esta imputación ha contestado Russell:
" No me avergüenzo de haber cambiado en mis opiniones. ¿ Qué físico activo desde 1900 podría soñar en vanagloriarse de que no hayan cambiado sus opiniones? "
Trabajador infatigable que profundizó en todos los caminos que le sugirió la inquietud de su espíritu, inquietud que ya le hacía escribir en la prisión de Brixton, en 1918:
" Me gustaría estar situado en la orilla del mundo y mirar más allá de la oscuridad y ver un poco más de lo que los otros hayan visto de las extrañas formas del misterio que habitan en lo desconocido... Deseo traer luego al mundo de los hombres una muestra de la nueva sabiduría. Hay una pequeña sabiduría en el mundo: Heráclito, Spinoza, y una palabra aquí y allá. Deseo añadir algo a esto, por poco que sea..."
Resumiendo, podríamos decir que como matemático, Bertrand Russell fué, ante todo, un lógico renovador de la lógica formal y promotor de la logística e influyó notablemente sobre el positivismo lógico del Círculo de Viena; como filósofo, se preocupó por la teoría del conocimiento; y como político, defendió el individualismo.
Filósofo muy discutido y leído, que ha influido notablemente en el curso de la filosofía moderna, este apasionado escéptico - como lo definió Alan Wood -, que por su enorme labor recibió el Premio Nobel en 1950, escribió de sí mismo:
" Me gustaría morir mientras todavía puedo trabajar, conociendo que otros pueden conseguir lo que yo no podré ya hacer y satisfecho de pensar que he

dejado hecho cuanto me ha sido posible."

3 El concepto de número en B. Russell.

Muchos autores sostienen que tanto el concepto de número como los números en particulares son indefinibles, pero Russell, siguiendo a Peano y a Padoa, recuerda que la *definibilidad* es una palabra que en matemáticas tiene un sentido preciso con respecto a una serie de nociones previamente establecidas:

> Dada cualquier serie de nociones, un término es definible mediante ellas cuando, y solo cuando, es el único término que tiene con alguna de ellas una cierta relación que por sí misma es una de las citadas nociones. [3]

A diferencia de Peano y sus discípulos, Russell sostiene que

> Toda la matemática pura (incluyendo la Geometría e incluso la Dinámica racional), contienen un solo conjunto de indefinibles, es decir, los conceptos lógicos fundamentales discutidos en la parte I (de esta obra)[4]

Para Russell, todos los conceptos indefinibles de la matemática pura son de este tipo y también afirma que la presencia de culquier otro indefinible indica que el problema corresponde a la matemática aplicada. De los tres tipos de definición admitidos por Peano: La definición nominal, la definición por postulados y la definición por abstracción [5], solo acepta la nominal.
Hagamos una disquisición breve sobre estos tipos de definición: en primer lugar, Russell admite que los números son aplicables esencialmente a las **clases** (particularmente a los conjuntos). Si bien es cierto que cuando un número es finito, sus elementos pueden enumerarse para formar el número dado y además pueden contarse uno por uno sin hacer mención del concepto de clase, también lo es que todas las colecciones finitas forman clases, así que, en últimas, lo que resulta es el número de una clase. Ahora bien, cuando el número es infinito no siempre es posible enumerar sus elementos y, en consecuencia, debemos acudir a alguna propiedad común en virtud de la

[3]B Russell, *The Principles of Mathematics*, pág. 111
[4]Se refiere a la primera parte de *The Principles of Mathematics*
[5]Burali-Forti *Sur les différentes définitions du nombre réel*, Congrès, III, pág. 294

cual forman una clase. Esta consideración es la que ha hecho posible buena parte de la teoría del infinito ya que nos libera de la necesidad de enumerar los individuos cuyo número se desea considerar. Pero aquí se presenta un problema. ¿En qué condiciones podemos asegurar que dos clases tienen el mismo número?. La respuesta clásica es **que tienen el mismo número cuando entre sus elementos hay una correspondencia biunívoca**. Al respecto, Russell afirma

> Dos clases tienen el mismo número cuando entre sus términos hay una relación uno a uno, de modo que a un término cualquiera de una clase corresponda un término y solo uno de la otra. Esto requiere que exista una relación uno a uno cuyo dominio sea una clase y cuyo dominio recíproco sea la otra. [6]

Recordemos que **una relación de una clase X en otra clase Y es uno a uno**

1. Si tanto x como x' se relacionan con y, entonces $x = x'$.
2. Si x se relaciona con y y también x se relacione con y', necesariamente $y = y'$.

Es interesante notar que de esta manera es posible definir, sin la noción de unidad, lo que se entiende por una relación uno a uno. Pero, para incluir el caso en que las clases no tengan elementos, Russell propone modificar ligeramente la definición anterior de la manera que sigue:

> Dos clases tienen el mismo número cuando, y solo cuando, existe una relación uno a uno cuyo dominio incluye a la primera clase, y que es tal que la clase de los correlacionados de los términos de la primera clase es idéntica con la otra clase [7]

De esta noción se deriva, naturalmente, que dos clases vacías tienen siempre el mismo número de términos. Cuando dos clases tienen el mismo número, se dicen **semejantes**. En apariencia es completamente innecesario acudir a una definición para expresar lo que se entiende cuando se afirma que dos clases tienen el mismo número, pues bastaría con **contar** ambas clases. No obstante, cuando queremos precisar lo que significa contar

[6] Op. cit. pág. 113
[7] Op. cit. pág 113

> Corrientemente solo conseguimos respuestas psicológicas irrelevantes, como la de que contar consiste en actos sucesivos de atención. Para contar hasta 10, supongo que se requieren 10 actos de atención... En realidad contar tiene un significado exacto que no es psicológico. Pero este significado es sumamente complejo; solamente es aplicable a clases bien ordenadas, que no son todas las clases; y solo da el número de la clase cuando este número es finito -un caso raro y excepcional-. [8]

De la definición arriba anotada se sigue que la relación de semejanza entre clases es en realidad una relación de equivalencia: es reflexiva, simétrica y transitiva. Estas tres propiedades condujeron a Peano a indicar que cuando se tiene la relación entre dos términos, estos dos términos tienen una cierta **propiedad común** y viceversa. Esta es la definición de número por abstacción. Russell afirma

> Pero esta definición por abstracción, y en general el proceso empleado en tal definición, adolece de un defecto formal absolutamente fatal: no muestra que solo un objeto satisfaga la defiición. Asi, en lugar de obtener *una* propiedad común para clases semejantes, que es *el* número de las clases en cuestión, obtenemos una *clase* de tales propiedades, sin ninguna manera de decidir cuantos términos contiene esta clase. [9]

Una consecuencia de esta observación es que cada clase puede tener varios números y la definición es inconsistente cuando habla de **el** número de la clase, lo que, desde un punto de vista lógico, invalida la definición por abstracción, ya que puede suceder que existan muchos predicados comunes a una cierta colección de objetos y a ninguna otra.
La segunda opción: la definición por postulados, al decir de Russell, convierte a la aritmética en una ciencia independiente en lugar de considerarla, como él lo hace, en un mero desarrollo de la lógica general.
Para salir de la encrusijada, Russell nos dice

> En resumen: Matemáticamente, un número no es otra cosa que una clase de clases semejantes: esta definición nos permite la

[8]Op. cit. pág. 114
[9]Op. cit. pág. 114

> deducción de todas las propiedades usuales de los números, ya sean finitos o infinitos, y es la única que es posible (hasta donde conozco) expresar en términos de los conceptos fundamentales de la lógica general. [10]

Es facil concluir que

- Russell presenta toda la teoría de los números cardinales como una rama especial de la lógica.
- Encuentra contradicciones fundamentales en la definición por abstracción mostrando que la consideración de un número como una clase de clases conduce a una paradoja completamente indefendible: Un concepto-clase no es en sí mismo una colección, sino una propiedad mediante la cual se define una colección.
- Su meta respecto al planteamiento de Peano fue la de probar, de acuerdo con la lógica general, que existe un significado constante que satisface sus cinco postulados y que este significado constante debe llamarse *número cardinal finito*.

Bibliografía.

[1] Bertrand Russell *Obras completas II: Ciencia y filosofía 1897-1919*, Aguilar, 1973.

[2] Bertrand Russell *The Principles of Mathematics*, George Allen & Unwen, Ninth impression 1972.

[3] Bertrand Russell *Introducción a la Filosofía Matemática*, Paidos Studio básica, Barcelona, 1988.

[4] Bertrand Russell *La evolución de mi pensamiento filosófico*, Alianza Editorial, Madrid, 1976.

[5] Alejandro Garciadiego Dantan *Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos*, Alianza Universidad, 1992.

[10] Op. cit. pág. 116