EL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL SEGÚN GIUSSEPPE PEANO

Carlos Julio Luque Arias[1]
Profesor del Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional

Resumen.

Se presentan dos versiones de los axiomas de Peano, de ellos se deducen las propiedades fundamentales de las operaciones y del orden entre números naturales, y se muestran varias representaciones de ellos.

1 Introducción.

A la pregunta ¿Qué es un número natural? se le pueden dar varios tipos de respuesta: decir simplemente que, es un número de los que se utilizan para contar, y salir olímpicamente por la tangente!

O podemos discutir con Russell, si las palabras que designan un número natural son sustantivos, o adjetivos o ambas cosas, por ejemplo en la frase

*Ese conjunto tiene **tres** elementos*

Se usa como adjetivo, pero en la frase

$$3 + 5 = 8$$

3 es un sustantivo,

Frege y Russell propusieron que lo mejor es definir **tres** como un adjetivo, es decir precisar qué significa que un conjunto tenga 3 elementos y luego definir el sustantivo en términos del adjetivo, de la siguiente forma: Decimos que un conjunto S tiene 3 elementos si y sólo si

[1] Grupo MUSA.E1. Universidad Sergio Arboleda

$$\exists(x, y, z \in S) \text{ tales que } \ ((x \neq y, y \neq z, x \neq z) \text{ y } \\ (\forall w \in S)(w = x \text{ ó } w = y \text{ ó } w = z).$$

o de forma equivalente si y sólo si:

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)\{x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge \\ y \neq z \wedge (\forall w)[w \in S \rightarrow w = x \vee w = y \vee w = z]\}$$

A pesar de lo intrincado de la notación, la fórmula dice que en S existen tres elementos diferentes y sólo tres, sin embargo Henri Poincarè no estuvo de acuerdo con ella, objetando que para escribirla es necesario saber de antemano lo que significa tres para contar las variables que colocamos en la fórmula; es decir que es necesaria la noción intuitiva aritmética de 3, para que la definición lógica dada tenga sentido; si alguien no supiera contar y no supiera que el conjunto $\{x, y, z\}$ tiene tres elementos, no sabría si la definición es correcta o no.

Russell, por su parte, replicó que no estaba interesado en si las nociones lógicas son *psicológicamente* anteriores a las nociones aritméticas, sino en un sentido estrictamente lógico, la aritmética es reducible a la lógica y la teoría de conjuntos, su definición es buena en el lenguaje de la lógica y la teoría de conjuntos, pues la definición dada caracteriza la propiedad de tener tres elementos.

Como vemos la discusión puede alargarse y profundizarse, sobre todo si acudimos a la opinión de los filósofos[2] .

En 1889 Giuseppe Peano, como un Alejandro Magno de los nuevos tiempos, deshace el nudo gordiano de esta discusión y de un sablazo lógico decide que no le interesa *qué es* un número natural, sino la manera como ellos se relacionan entre sí, son las reglas del juego de sus interacciones las que determinan su naturaleza, no los objetos en sí.

Como en el juego del ajedrez no tiene sentido la pregunta de cual es el verdadero sentido de la reina o cual es su aspecto real, sino cual es su naturaleza

[2]FREGE , G., *Los fundamentos de la Aritmética*, UNAM, 1972. RUSSELL, B., *Introducción a la filosofía matemática*, Ediciones Paidos, 1988.

dentro del juego, y sólo allí tiene existencia; está definida por la manera como ella se mueve, de manera que podemos jugar con una reina deforme, o una muy bella, o incluso podemos jugar sin fichas, abstraerlas y jugar a ciegas.

Este punto de vista, tan antiguo como Eudoxo o Euclides, conocido como el método axiomático, conduce a determinar cuales son las reglas del juego que definen la naturaleza de los números naturales; esto es, un sistema axiomático para los números naturales.

Euclides en el año 300 a.C, e incluso antes Eudoxo, presentaron la geometría como un conjunto de proposiciones que se deducen de unas fundamentales llamados *axiomas*, mediante una forma preestablecida de razonar.

Arquímedes hizo lo mismo con la mecánica teórica, mejorada posteriormente por Isaac Newton en sus *Principia Matemática* de 1686 y perfeccionada por Lagrange en su *Mecánica Analítica* de 1788.

En las presentaciones axiomáticas se parte de unos términos no definidos, se enuncian unas relaciones entre ellos, que aceptamos como ciertas (los Axiomas), estos no tienen que ser evidentes o universalmente aceptados; se presume una forma correcta de razonar, usualmente la lógica bivalente clásica, y con esto se deducen otras afirmaciones que llamamos teoremas. Los teoremas son ciertos en la medida de que los axiomas lo sean y que los razonamientos sean correctos.

La axiomática no se ocupa de explicar la naturaleza de los objetos matemáticos que forman parte de la teoría, sino las propiedades y las relaciones entre ellos,

En particular la Axiomática de Peano no se pregunta por el significado de lo qué es un número natural, supone que existe y pretende encontrar un sistema simple de axiomas que caractericen a los números naturales y nos permitan deducir a partir de ellos *todas*[3] las propiedades de los números naturales, utilizando las reglas de la lógica.

La propuesta de Peano de 1889 no fue la única, ni la primera[4] , pero si la

[3]En 1931 Kurt Gödel demostró que no existe una teoría matemática que sea consistente, incluya la aritmética y sea completa en el sentido de que toda afirmación formulada en términos de la teoría sea demostrable o refutable.

[4]En 1881 Charles S Peirce publicó el artículo *On the logic of Number*en el American Journal of Mathematical 4(1881),85-95., donde aparece una versión axiomática de los números naturales.

que más rápido se popularizó.

Mientras Peano se interesaba por axiomatizar la Aritmética, Hilbert proponía en su libro *Grundlagen der Geometrie* de 1899, una axiomatización para la geometría, que no dependía de lo que significaran los términos: punto, recta, etc.

2 La Axiomática de Peano.

En 1889, Peano publicó un pequeño libro, escrito en latín, titulado *Arithmetices principia*; es la primera versión suya de una axiomatización de las matemáticas en un lenguaje simbólico, en él aparecieron por primera vez sus famosos axiomas.

En el libro usa la lógica de Boole y Schöder y C. S. Pierce estableciendo una analogía entre operaciones geométricas y algebraicas con las operaciones de la lógica e introduce innovaciones: por ejemplo, usa diferentes símbolos para las operaciones lógicas y matemáticas, distingue entre las proposiciones categóricas y las condicionales, formula una teoría de cuantificación (Frege ya había avanzado en estas direcciones, pero Peano no conocía su trabajo) y fija prácticamente toda su simbología; esta es más manejable que la de Frege, y se hizo popular entre los matemáticos, junto con algunas modificaciones realizadas por Whitehead y Russell, se convirtió en el lenguaje común de la lógica matemática.

En la parte aritmética reconoce los aportes de Dedekind y Grassmann. Su trabajo influyó en Hilbert en su formulación de la geometría y en Whitehead y Russel en su tratamiento de la lógica matemática.

En teoría, el libro consiste de un prefacio y 10 secciones:

1. Números y adición
2. Sustracción
3. Máximos y mínimos
4. Multiplicación
5. Potenciación

6. División
7. Teoremas varios
8. Razones de números
9. Sistemas de racionales e irracionales
10. Sistemas de cantidades.

La primera sección es tratada con cierto nivel de detalle, la segunda, cuarta, quinta y sexta sólo dan explicaciones y definiciones omitiendo los teoremas, las otras las deja de lado. Sus estudiantes completaron la tarea, (como debe ser!). Una versión alemana de Edmund Landau[5] tiene todos los detalles.

Las demostraciones son una lista de fórmulas, cada una relacionada con la siguiente, pero no pruebas formales, puesto que no enuncia reglas de inferencia.

La noción del condicional $a \supset b$ que Peano interpreta como "de a se deduce b ", permanece vaga en el texto y no usa valores de verdad.

Inicialmente presenta una lista de las nociones aritméticas iniciales (que él llama explicaciones): número, uno, sucesor y "es igual a ", para cada una de ellas dice respectivamente:

El signo N significa *número* (entero positivo). El signo 1 significa *Unidad* El signo $x+1$ significa el *sucesor* de x o x más 1 El signo $=$ significa "*igual a*".

En seguida formula nueve axiomas, que relacionan estas nociones:

1. $1 \in N$
2. $x \in N \supset x = x$
3. $x, y \in N \supset x = y. = .y = x.$
4. $x, y, z \in N \supset x = y.y = z \supset x = z.$
5. $x = y.y \in N \supset x \in N$

[5]LANDAU, E., *Foundations of Analisys*, The Arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers. Chelsea Publishing Company, New York, 1966.

6. $x \in N \supset x + 1 \in N$
7. $x, y \in N \supset x = y. = .x + 1 = y + 1.$
8. $x \in N \supset x + 1 - = 1.$
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N.x \in k \supset x + 1 \in k :: \supset N = k$

Los axiomas 2, 3, 4 y 5, que se refieren a la igualdad, y pertenecen a lógica fundamental, los restantes cinco axiomas son conocidos como "los axiomas de Peano".

El axioma 6 establece que para cada número natural existe un sucesor en los números naturales y el axioma 7 afirma que el sucesor de cada número natural es único y que dos números distintos tienen diferente sucesor. En lenguaje moderno diríamos que la relación "ser sucesor de" es una función inyectiva.

El axioma 9, es una traducción del principio de inducción matemática, está formulado en términos de clases y contiene una clase variable "k" e incluye también una clase de todas las clases, K.

A continuación, comienza a introducir nuevos términos en la teoría; es decir, a hacer definiciones; por ejemplo define el número $2 = 1 + 1$ y demuestra que $2 \in N$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} P1 \supset 1 \in N \\ 1[x](P6) \supset 1 \in N \supset 1 + 1 \in N \\ (1)(2) \supset 1 + 1 \in N \\ P10 \supset 2 = 1 + 1 \in N \\ (4).(3).(2, 1 + 1)[x, y](P5) \supset 2 \in N \end{array}$$

que podemos parafrasear:

Del primer axioma podemos concluir que $1 \in N$	(1)
Si aplicamos el axioma 6 reemplazando x por 1, concluimos que $1 + 1 \in N$	(2)
De (1) y (2) concluimos que $1 + 1 \in N$	(3)
Por la definición[6] de 2 inferimos que $2 = 1 + 1 \in N$	(4)
De (4), (3) y de aplicar el axioma 5 a (2, 1 + 1) como $[x, y]$ concluimos que $2 \in N$.	(5)

Luego introduce la adición, multiplicación y potenciación como definiciones; para la adición expresa:

$$x, y \in N \supset x + (y + 1) = (x + y) + 1$$

Esto significa que si x, y son números y si $(x + y)$ es un número, $(x + y) + 1$ existe y es un número, definimos $x + (y + 1)$ como el sucesor de $(x + y)$.

En la proposición 19 demuestra que

$x, y \in N \supset (x + y) \in N$

La proposición 22 afirma que

$$x, y, z \in N \supset x = y \text{ implica que } x + z = y + z$$

En la segunda sección introduce los símbolos - , ¡ y ¿ y define la sustracción pero no enuncia teorema alguno.

La multiplicación la define, en la cuarta sección, en dos pasos:

1. $x \in N \supset x \times 1 = x$
2. $x, y \in N \supset x \times (y + 1) = x \times y + x$

y lo propio hace con la potenciación:

1. $x \in N \supset x^1 = x$
2. $x, y \in N \supset x^{y+1} = x^y \times x$

Como vemos estas definiciones son recursivas, en el sentido de que se define para un primer número y luego se define para el sucesor de un número cualquiera con base en el número; pero no hay justificación para este tipo de definiciones en el sistema de Peano, pues su criterio de definición es que el lado derecho de una ecuación de definición es un "agregado de signos que tienen un significado" y tampoco afirmó que estas definiciones fueran eliminables o deducibles de la teoría[7]

[7]El sistema propuesto por Dedekind en 1888 si tiene un teorema (el 126) que permite justificar las definiciones recursivas.

3 Algunos teoremas de la aritmética de Peano. (La versión de Edmund Landau).

De los axiomas de Peano se pueden deducir las propiedades más conocidas de los números naturales; una presentación inicial aparece en el libro de Landau[8] , que seguiremos en esencia, modificando un poco la notación.

Landau propone que los axiomas lógicos sean independientes de los de la aritmética y para esta, trabaja con los siguientes axiomas:

A–1. 1 es un número natural

A–2. Para cada x existe exactamente un número natural, llamado el sucesor de x, que el nota x' (y que nosotros notaremos x^+).

A–3. Para todo x se tiene que $x^+ \neq 1$.

A–4. Si $x^+ \neq y^+$ entonces $x \neq y$.

A–5. Si un subconjunto A de los números naturales tiene las siguientes propiedades:

I. 1 pertenece a A

II. Si x pertenece a A entonces x^+ pertenece a A

Entonces A tiene a todos los números naturales.

Usando estos axiomas demuestra:

Teorema 1. *Sí $x \neq y$ entonces $x^+ \neq y^+$.*

Demostración. Supongamos que $x^+ = y^+$, entonces por el axioma 4 se tendría que $x = y$, lo cual contradice la hipótesis de que $x \neq y$, por tanto el teorema queda demostrado. □

Teorema 2. $x^+ \neq x$.

[8]LANDAU, E., *Foundations of Analisys*, The Arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers. Chelsea Publishing Company, New York, 1966.

Demostración. Sea M el conjunto de todos los x para los cuales es cierta la afirmación.

I) Por los axiomas 1 y 3 se tiene que $1^+ \neq 1$; por consiguiente, 1 pertenece a M.

II) Si x pertenece a M, entonces $x^+ \neq x$, y aplicando el teorema 1 se tiene que $(x^+)^+ \neq x^+$, por lo que x^+ pertenece a M.

Por el axioma 5, M contiene todos los números naturales, es decir que tenemos que para todo x, $x^+ \neq x$.

□

Teorema 3. *Si $x \neq 1$ existe un (y por consiguiente, por axioma 4, exactamente uno) u tal que $x = u^+$.*

Demostración. Sea M el conjunto consistente de el número 1, y de todos aquellos x para los cuales existe tal u. (por el axioma 3, para cualquier x se tiene que $x \neq 1$).

I. 1 pertenece a M.

II. Si x pertenece a M, entonces, con u denotando al número x, se tiene que $x^+ = u^+$, de modo que x^+ pertenece a M.

Por el axioma 5, M contiene a todos los números naturales; entonces, para cada $x \neq 1$, existe un u tal que $x = u^+$. □

Teorema 4. *Y a la vez* ***definición 1****: A cada par de números x,y, asignamos un único número natural, llamado $x + y$, tal que:*

1. *$x + 1 = x^+$ para todo x*
2. *$x + y^+ = (x + y)^+$ para cada x y cada y.*

$x + y$ es llamado la suma *de x y de y, o el número obtenido por la adición de y a x.*

Demostración.

A) Primero mostraremos que para cada x fijo existe a lo más una posibilidad de definir $x+y$ para todo y de tal manera que $x+1 = x^+$ y $x+y^+ = (x+y)^+$.

Sean a_y y b_y definidos para todo y, de forma que

$$a_1 = x^+, b_1 = x^+, a_y^+ = (a_y)^+, b_y^+ = (b_y)^+.$$

Sea M el conjunto de todos los y para los cuales $a_y = b_y$.

I. $a_1 = x^+ = b_1$; por tanto 1 pertenece a M.

II. Si y pertenece a M, entonces $a_y = b_y$, luego por el axioma 2, $(a_y)^+ = (b_y)^+$, por consiguiente $a_y^+ = (a_y)^+ = b_y^+ = (b_y)^+$; así que y^+ pertenece a M.

Por tanto, M es el conjunto de todos los números naturales; es decir, que para cada y tenemos $a_y = b_y$.

B) Ahora debemos mostrar que para cada x es posible definir $x+y$ para todo y, de tal manera que $x+1 = x^+$ y $x+y^+ = (x+y)^+$.

Sea M el conjunto de todos los x para los cuales es esto posible (de exactamente una manera, por A).

I. Para $x = 1$, el número $x+y = y^+$ como se esperaba, puesto que

$$x+1 = 1^+ = x^+$$

$$x+y^+ = (y^+)^+ = (x+y)^+;$$

por tanto, 1 pertenece a M.

II. Sea x que pertenece a M, tal que exista un $x+y$ para todo y.

Entonces el número

$$x^+ + y = (x+y)^+$$

es el número requerido para el numero x^+, pues

$$x^+ + 1 = (x+1)^+ = (x^+)^+$$

y

$$\begin{aligned} x^+ + y^+ &= (x+y^+)^+ \\ &= ((x+y)^+)^+ \\ &= (x^+ + y)^+, \end{aligned}$$

por tanto x^+ pertenece a M, y M contiene todos los números x.

□

Teorema 5 (Ley asociativa de la adición).

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

Demostración. Fijemos x y y, y denotemos por M el conjunto de todos los z para los cuales la afirmación del teorema es cierta.

I) $(x+y)+1 = (x+y)^+ = x+y^+ = x+(y+1)$, por tanto 1 pertenece a M.

II) Sea z un elemento de M, entonces

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

luego

$$\begin{aligned} (x+y)+z^+ &= ((x+y)+z)^+ \\ &= (x+(y+z))^+ \\ &= x+(y+z)^+ \\ &= x+(y+z^+), \end{aligned}$$

por lo cual z^+ pertenece a M.

De esta manera la afirmación es válida para todo z.

$\square$

Teorema 6 (Ley conmutativa de la adición).

$$(x+y) = (y+x)$$

Demostración. Fijemos y, y sea M el conjunto de todos los x para los cuales la afirmación es verdadera.

I) Tenemos que $y+1 = y^+$, y por la construcción hecha en la prueba del teorema 4, $1+y = y^+$, luego $1+y = y+1$, por lo que 1 pertenece a M.

II) Si x pertenece a M, entonces $x+y = y+x$, por consiguiente

$$(x+y)^+ = (y+x)^+ = y+x^+.$$

Por la construcción hecha en la prueba del teorema 4, tenemos que

$$x^+ + y = (x+y)^+$$

de donde

$$x^+ + y = y + x^+$$

así que x^+ pertenece a M.

La afirmación por tanto es válida para todo x.

$\square$

Teorema 7.

$$y \neq x+y.$$

Demostración. Fijemos x, y sea M el conjunto de todos los y para los cuales la afirmación es valida.

I) $1 \neq x^+$, es decir $1 \neq x + 1$, luego 1 pertenece a M.

II) Si y pertenece a M, entonces

$$y \neq x + y$$

de donde

$$y^+ \neq (x + y)^+$$

es decir que

$$y^+ \neq x + y^+,$$

lo que conlleva a que y^+ pertenezca a M y por consiguiente la afirmación es válida para todo y.

□

Teorema 8. *Si $y \neq z$ entonces $x + y \neq x + z$.*

Demostración. Consideremos un y fijo, y un z fijo tal que $y \neq z$, y sea M el conjunto de todos los x para los cuales $x + y \neq x + z$.

I) $y^+ \neq z^+$, luego $1 + y \neq 1 + z$, por lo tanto 1 pertenece a M.

II) Si x pertenece a M, entonces $x + y \neq x + z$, de donde $(x + y)^+ \neq (x + z)^+$, o sea

$$x^+ + y \neq x^+ + z,$$

luego x^+ pertenece a M.

Por consiguiente la afirmación es verdadera para todo x. □

Teorema 9. *Dados números naturales x y y sólo sucede uno de los siguientes casos:*

1. *$x = y$.*
2. *Existe un u (exactamente uno, por el teorema 8) tal que $x = y + u$*
3. *Existe un v (exactamente uno, por teorema 8) tal que $y = x + v$.*

Demostración.

I) Por el teorema 7, los casos 1) y 2) son incompatibles. Similarmente, 1) y 3) son incompatibles. La incompatibilidad de 2) y 3) también se sigue del teorema 7; por otra parte, deberíamos tener que

$$x = y + u = (x + v) + u = x + (v + u) = (v + u) + x.$$

Por consiguiente podemos tener a lo sumo uno de los casos 1), 2) y 3).

II) Sea x fijo, y sea M el conjunto de todos los y para los cuales uno (por A, exactamente uno) de los casos 1), 2) y 3) se tiene.

I) Para $y = 1$, tenemos por el teorema 3 que ó $x = 1 = y$ (caso 1) o

$$x = u+ = 1 + u = y + u \text{ (caso 2).}$$

Por tanto 1 pertenece a M.

II) Sea y que pertenece a M. entonces ó ((caso1) para y) $x = y$ de donde

$$y^+ = y + 1 = x + 1 \text{ ((caso 3) para } y^+)$$

o ((caso2) para y)

$$x = y + u,$$

de donde si $u = 1$, entonces

$$x = y + 1 = y^+ \text{ ((caso 1) para } y^+)$$

pero si $u \neq 1$, entonces por el teorema 3,

$$u = w^+ = 1 + w$$

$x = y+(1+w) = (y+1)+w = y^+ + w$ ((caso 2) para y^+)

o ((caso 3) para y)

$$y = x + v$$

por lo cual

$$y^+ = (x + v)^+ = x + v^+ \text{ ((caso 3) para } y^+).$$

En cualquier caso, y^+ pertenece a M.

Por consiguiente siempre tenemos uno de los casos 1), 2) y 3).

□

Orden en los números naturales

Definición 2. Si $x = y + u$ entonces $x > y$. ($>$ léase "es mayor que")

Definición 3. Sí $y = x + v$ entonces$x < y$. ($<$ léase "es menor que")

Teorema 10. *Para cualesquiera x, y dados, tiene exactamente uno de los casos.*

$$x = y, x > y, x < y$$

Demostración. Por el teorema 9, la definición 2 y la definición 3. □

Teorema 11. *Sí $x > y$ entonces $y < x$.*

Demostración. Ambas afirmaciones significan que $x = y + u$ para algún u conveniente. □

Teorema 12. *Sí $x < y$ entonces $y > x$.*

Demostración. Ambas afirmaciones significan que $y = x + v$, para algún v adecuado. □

Definición 4. $x \geq y$ Significa $x > y$ o $x = y$. (léase "mayor o igual que")

Definición 5. $x \leq y$ Significa $x < y$ o $x = y$. (léase "mayor o igual que").

Teorema 13. *Sí $x \geq y$ entonces $y \leq x$.*

Demostración. Por el teorema 11. □

Teorema 14. *Sí $x \leq y$ entonces $y \geq x$.*

Demostración. Por el teorema 12. □

Teorema 15 (Transitividad del orden). *Sí $x < y, y < z$, entonces $x < z$.*

Demostración. [9]

Eligiendo v, w de manera adecuada, tenemos que

$$y = x + v, z = y + w$$

de donde

$$z = (x + v) + w = x + (v + w),$$

lo que significa que

$$x < z.$$

□

Teorema 16. *Sí $x \leq y, y \leq z$, o $x < y, y \leq z$, entonces $x < z$.*

Demostración. Obviamente si en la hipótesis hay una igualdad de signos; obtenemos la conclusión o si no aplicamos el teorema 15.

□

Teorema 17. *Sí $x \leq y, y \leq z$, entonces $x \leq z$.*

[9]En este punto Landau comenta: "Si $x > y$ y $y > z$, entonces $x > z$, de donde $z < y$ y $y < x$ entonces $z < x$. Pero en lo que sigue, no apuntaremos tales declaraciones que se obtienen de una lectura trivial en reverso de las formulas presentadas."

Demostración. Obvio, o en la hipótesis valen dos igualdades de signos; o aplicamos el teorema 16.

□

Teorema 18. $x + y > x$.

Demostración.

$$x + y = x + y.$$

□

Teorema 19. *Sí $x > y$, o $x < y$, entonces $x + z > y + z$, o $x + z < y + z$, respectivamente.*

Demostración.

1. Si $x > y$, entonces

$$x = y + u,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} x + z &= (y + u) + z \\ &= (u + y) + z \\ &= u + (y + z) \\ &= (y + z) + u, \end{aligned}$$

luego

$$x + z > y + z.$$

2. Si $x = y$, entonces, claramente $x + z = y + z$.

3. Si $x < y$, entonces $y > x$, de donde, por 1), $y + z > x + z$, $x + z < y + z$

□

Teorema 20. *Sí $x + z > y + z$, o $x + z < y + z$, entonces $x > y$, o $x < y$, respectivamente.*

Demostración. Se sigue del teorema 19, puesto que los tres casos son mutuamente exclusivos y exhaustivos con todas las posibilidades. □

Teorema 21. *Sí* $x > y, z > u$, *entonces* $x + z > y + u$.

Demostración. Por el teorema 19, tenemos que

$$x + z > y + z$$

y

$$y + z = z + y > u + y = y + u$$

de donde

$$x + z > y + u.$$

□

Teorema 22. *Sí* $x \geq y, z > u$, *o* $x > y, z \geq u$, *entonces* $x + z > y + u$.

Demostración. Se sigue del teorema 19 si en la hipótesis hay una igualdad de signos, si no aplicamos el teorema 21. □

Teorema 23. *Sí* $x \geq y, z \geq u$, *entonces* $x + z \geq y + u$.

Demostración. Es obvio si en la hipótesis hay dos igualdades de signos, si no aplicamos el teorema 22. □

Teorema 24. $x \geq 1$.

Demostración. O $x = 1$ o $x = u^+ = u + 1 > 1$ □

Teorema 25. *Sí* $y > x$ *entonces* $y \geq x + 1$

Demostración. $y = x + u, u \geq 1$, de donde $y \geq x + 1$. □

Teorema 26. *Sí* $y < x + 1$, *entonces* $y \leq x$.

Demostración. Supongamos que $y > x$, entonces por el teorema 25, $y \geq x+1$.

□

Teorema 27. *En cada conjunto no vacío de números naturales existe un* mínimo *(es decir, uno que es menor que cualquier otro número del conjunto).*

Demostración. Sea R el conjunto dado, y sea M el conjunto de todos los x tales que son $x \leq y$ para todo y de R.

Por el teorema 24, el conjunto M contiene el número 1. No todo x pertenece a M; en realidad, para cada y de R el número $y+1$ no pertenece a M, puesto que $y+1 > y$.

Por consiguiente hay un m en M tal que $m+1$ no pertenece a M; por otra parte, todo numero natural tendría que pertenecer a M, por axioma 5.

De este m podemos afirmar que es $m \leq n$ para todo n de R y que este pertenece a R.

Lo ultimo se establece por un argumento indirecto, como sigue: Si m no perteneciera a R, entonces para cada n de R tendríamos $m < n$, de donde, por el teorema 25, $m+1 \leq n$; así $m+1$ pertenecería a M, contradiciendo la condición con la cual m fue introducida. □

Teorema 28. *Y al mismo tiempo* ***Definición 6:*** *A cada par de números x, y de exactamente una manera un número natural llamado $x * y$ (léase "veces", sin embargo, el símbolo $*$ habitualmente se omite), tal que*

1. $x + 1 = x$ *para todo* x.
2. $x * y^{+} = x * y + x$ *para todo* x *y todo* y.

$x{*}y$ es llamado el producto de x y y, o el número obtenido de la multiplicación de x por y.

Demostración. (mutatis, mutandis, palabra por palabra igual que el teorema 4):

A) Primero tenemos que mostrar que para cada x fijo hay a lo más una posibilidad de definir $x{*}y$ para todo y de tal manera que $x{*}1 = xyxy^{+} = xy + x$ para todo y.

   Sean a_y y b_y definidos para todo y, tal que $a_1 = x$, $b_1 = x$, $a_y^{+} = a_y + x$, $b_y^{+} = b_y + x$ para todo y.

   Sea M el conjunto de todos los y para los cuales $a_y = b_y$.

   I) $a_1 = x = b_1$; de donde 1 pertenece a M.

II) Si y pertenece a M, entonces $a_y = b_y$, de donde

$$a_y^+ = a_y + x = b_y + x = b_y^+,$$

o sea que y^+ pertenece a M.

Luego M es el conjunto de todos los números naturales; es decir que para todo y tenemos $a_y = b_y$.

B) Ahora debemos mostrar que para cada x, es posible definir xy para todo y de tal manera que $x1 = x$ y $xy^+ = xy + x$ para todo y.

Sea M el conjunto de todos los x para los cuales esto es posible (de exactamente una manera, por A).

I) Para $x = 1$, el número

$$xy = y$$

como se esperaba, puesto que

$$x1 = 1 = x,$$

y

$$xy^+ = y^+ = y + 1 = xy + x.$$

Por lo tanto 1 pertenece a M.

II) Sea x que pertenece a M, de manera que exista un xy para todo y. Entonces el número

$$x^+y = xy + y$$

es el número requerido para x^+, pues

$$x^+1 = x1 + 1 = x + 1 = x^+$$

y

$$\begin{aligned} x^+y^+ &= xy^+ + y^+ \\ &= (xy + x) + y^+ \\ &= xy + (x + y^+) \\ &= xy + (x + y)^+ \\ &= xy + (x^+ + y) \\ &= xy + (y + x+) \\ &= (xy + y) + x^+ \\ &= x^+y + x^+. \end{aligned}$$

Por lo tanto x^+ pertenece a M y de esta manera M contiene a todos los x.

□

Teorema 29 (Ley conmutativa de la multiplicación). $xy = yx$.

Demostración. Fijemos y, y sea M el conjunto de todos los x para los cuales la afirmación es valida.

I) Tenemos $y1 = y$ y además, por la construcción hecha en la prueba del teorema 28, $1y = y$, de donde $1y = y1$, así que 1 pertenece a M.

II) Si x pertenece a M, entonces $xy = yx$, de donde

$$xy + y = yx + y = yx^+$$

Por la construcción hecha en la prueba del teorema 28, tenemos que

$$x^+y = xy + y$$

de donde

$$x^+y = yx^+$$

y en consecuencia x^+ pertenece a M. La afirmación es verdadera para todo x.

□

Teorema 30 (Ley distributiva).

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Demostración. [10]

Fijemos x y y, y sea M el conjunto de todos los z para los cuales la afirmación es verdadera.

I) $x(y + 1) = xy^+ = xy + x = xy + x1$; por lo que 1 pertenece a M.

II) Si z pertenece a M, entonces

$$x(y + z) = xy + xz$$

luego

$$\begin{aligned} x(y + z^+) &= x((y + z)^+) \\ &= x(y + z) + x \\ &= xy + (xz + x) \\ &= xy + xz^+, \end{aligned}$$

así que z^+ pertenece a M. Por consiguiente, la afirmación es siempre verdadera.

□

Teorema 31 (Ley asociativa de la multiplicación). $(xy)z = x(yz)$.

Demostración. Fijo x y y, y sea M el conjunto de todos los z para los cuales la afirmación es verdadera.

I) $(xy)1 = xy = x(y1)$; por lo que 1 pertenece a M.

[10] Landau comenta: "La fórmula $(y + z)x = yx + zx$, la cual resulta de los teoremas 30 y 29, y otras similares, no es necesario formularlas específicamente como un teorema".

II) Sea z que pertenece a M. Entonces

$$(xy)z = x(yz)$$

y por consiguiente usando el teorema 30,

$$\begin{aligned} (xy)z^{+} &= (xy)z + xy \\ &= x(yz) + xy \\ &= x(yz + y) \\ &= x(yz+). \end{aligned}$$

Así que z^{+} pertenece a M y por lo tanto, M contiene todos los números naturales.

□

Teorema 32. *Si $x > y$,o $x = y$,o $x < y$, entonces $xz > yz, xz = yz$, o $xz < yz$, respectivamente.*

Demostración.

1. Si $x > y$ entonces $x = y + u$, y

$$xz = (y + u)z = yz + uz > yz$$

2. Si $x = y$ entonces claramente $xz = yz$.
3. Si $x < y$ entonces $y > x$, y por 1), $yz > xz$, $xz < yz$.

□

Teorema 33. *Si $xz > yz, xz = yz$, o $xz < yz, x > y, x = y$, o $x < y$, entonces $x > y$,, o $x = y$, o $x < y$ respectivamente.*

Demostración. Se sigue del teorema 32, puesto que los tres casos, son mutuamente exclusivas y agotan todas las posibilidades. □

Teorema 34. *Si* $x > y, z > u$, *entonces* $xz > yu$.

Demostración. Por el teorema 32, tenemos $xz > yz$ y $yz = zy > uy = yu$, luego $xz > yu$. □

Teorema 35. *Si* $x \geq y, z > u$ *o* $x > y, z \geq u$, *entonces* $xz > yu$.

Demostración. Se sigue del teorema 32 si en la hipótesis hay una igualdad de signos; si no se sigue del teorema 34. □

Teorema 36. *Si* $x \geq y, z \geq u$ *entonces* $xz \geq yu$.

Demostración. Obvio, si en la hipótesis hay dos igualdades de signos; si no, se sigue del teorema 35. □

4 El 0 también es un número natural.

En 1.898 Peano cambió los axiomas iniciales incluyendo como primer elemento al cero, sin embargo esto no introduce modificaciones sustanciales. Presentaremos enseguida, algunos esbozos de una versión axiomática de los números naturales que comienza con el 0. Usamos como términos sin definición: número natural, cero y sucesor.

Axiomas

1. 0 es un número natural.
2. El sucesor de cualquier número natural n es un número natural n^+.
3. 0 no es el sucesor de número alguno. (0 es el primer número natural).
4. Dos números naturales diferentes no tienen nunca el mismo sucesor, es decir que si $k \neq n$ entonces $k^+ \neq n^+$.
5. Si P es una propiedad tal que:

   a. 0 tiene la propiedad P

b. Siempre que un número n tiene la propiedad P implica que su sucesor n^+ también tiene la propiedad P, entonces todo número natural tiene la propiedad P.

El axioma 5 es el que da sustento lógico[11] al método de inducción matemática que se utiliza para probar las regularidades encontradas al trabajar con números naturales.

Notemos la variación en el axioma 5, con respecto a nuestra primera versión; en ella se refiere a un subconjunto de los números naturales, en esta se refiere a una propiedad, en el sentido de una proposición acerca de números naturales. El conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es verdadero}\}$$

es el conjunto de todos los elementos de $\mathbb{N}$ que satisfacen la propiedad P. Si una propiedad satisface las condiciones del axioma 5 entonces

$$0 \in \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es verdadero}\}$$

y el sucesor de cada elemento de

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es verdadero}\}$$

también está en

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es verdadero}\}$$

y por lo tanto

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es verdadero}\} = \mathbb{N}.$$

Y si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$, definimos la propiedad $P(n)$ como $n \in S$, o sea la propiedad P es "pertenecer a S", esta posibilidad está cubierta por el axioma 5.

También debemos notar que los 5 axiomas son necesarios para describir el conjunto de los números naturales que conocemos; por ejemplo, si definimos que el sucesor de 0 sea el mismo 0, el conjunto $\{0\}$ cumple los axiomas 1 y

[11] MUÑOZ, J., Introducción a la teoría de conjuntos. Universidad Nacional, 1983, p.p. 141-185.

2; si definimos como sucesor de un número, el número que está a la derecha de él en el conjunto:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 3\}$$

este cumple los axiomas 1, 2 y 3; por ello, es necesario el axioma 4, para impedir ciclos de dos o más elementos.

Pero es posible que con el proceso de pasar al siguiente no consigamos todos los naturales a partir del primero, por ejemplo si $\mathbb{N}$ es la secuencia infinita $0, 1, 2 \ldots$ y X es un elemento aislado X que sea su propio sucesor, conseguimos un conjunto que cumple los 4 primeros axiomas, pero no es el conjunto de los números naturales, por esto debemos incluir el axioma 5.

De manera completamente análoga a la desarrollada anteriormente, definimos las operaciones entre números naturales y hacemos las demostraciones por inducción de sus propiedades. Mostramos enseguida algunos ejemplos, de definiciones y demostraciones pero no seremos exhaustivos puesto que en la presentación anterior lo fuimos y el método de demostración se repite de forma monótona.

Operaciones entre Números Naturales

La operación **adición**[12] entre números naturales se define por recurrencia[13] de la siguiente forma: Para cualesquier número naturales n y k

i. $n + 0 = n$

ii. $n + k^+ = (n + k)^+$.

Esta operación cumple; por ejemplo, con la **propiedad modulativa** que enunciamos así:

Para todo número natural se cumple que

$$n + 0 = 0 + n = n$$

[12]RUBIANO G, GORDILLO J, JIMENEZ R. *Teoría de Números para Principiantes*. Universidad Nacional.

[13]NEWMAN J; *Sigma el Mundo de las Matemáticas*, Grijalbo, 1997, Vol 5, Pag 7- 22.

Demostración. De la definición de suma se tiene que $n + 0 = n$. Demostraremos por inducción que para todo n, se tiene que $0 + n = n$.

i. Para $n = 0$, tenemos que $0 + 0 = 0$, por la definición.

ii. Suponemos válido que $0+k = k$, para todo número natural k y debemos demostrar que se cumple para su sucesor k^+. Pero esto también es inmediato de la segunda parte de la definición de la suma puesto que

$$0 + k^+ = (0 + k)^+ = k^+$$

Por lo tanto la afirmación es válida para todo número natural n.

También demostraremos que cumple **la propiedad conmutativa** pero para ello requerimos un resultado previo que llamamos □

Lema 1. *Para todo n y k números naturales se cumple que:*

$$k^+ + n = (k + n)^+$$

Demostración. Hacemos inducción sobre n. Para $n = 0$

$$k^+ + 0 = (k + 0)^+$$

por la propiedad modulativa de la adición.

Supongamos que la igualdad es válida para $n = m$ y demostrémosla para m^+, es decir debemos probar que $k^+ + m^+ = (k + m+)^+$.

Partamos de:

$$\begin{aligned} k^+ + m^+ &= (k^+ + m)^+ \text{ por la definición de adición} \\ &= (k + m)^+)^+ \text{ por la hipótesis de inducción} \\ &= (k + m^+)^+ \text{ por la definición de adición} \end{aligned}$$

que es lo que debíamos demostrar.

□

Propiedad conmutativa de la adición

Para todo m, n números naturales se tiene que

$$m + n = n + m$$

Demostración. Hagamos inducción sobre m:

i. Para $m = 0$, por ser 0 el módulo de la adición, tenemos que $0 + n = n = n + 0$.

ii. Suponemos que para $m = k$ se tiene que $k + n = n + k$, debemos probar que $k^+ + n = n + k^+$, pero esto es cierto puesto que:

$$\begin{aligned} k^+ + n &= (k+n)^+ \text{ por el teorema anterior} \\ &= (n+k)^+ \text{ por la hipótesis de inducción} \\ &= n + k^+ \text{ por la definición de adición} \end{aligned}$$

La última igualdad termina la prueba. □

De forma similar podemos probar[14] cada uno de los teoremas enunciados anteriormente, pero sólo queríamos mostrar que la inclusión del 0 no modifica de manera sustancial los razonamientos.

La multiplicación de Números Naturales también admite una definición por recurrencia de la siguiente forma:

i. $n.0 = 0$

ii. $n.k^+ = n.k + n$.

Para cualesquier número naturales n y k.

Si definimos por recurrencia **la potenciación de números naturales** por las fórmulas:

i. $a^0 = 1$

[14] LUQUE, C., MORA, L., PAEZ, J.,*Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir.* Editorial Antropos, Universidad Pedagógica Nacional, 2002, p.p. 216-227.

ii. $a^{n^+} = a^n.a$

podemos demostrar, por ejemplo, que:
$a^{n+m} = a^n a^m$

Demostración. Haciendo inducción sobre n.

i. Verificamos que se cumple para $n = 0$.

$$a0 + m = a^0.a^m$$

Por la propiedad modulativa de la adición y definición de potenciación,

$$a^m = 1.a^m$$

y por la propiedad modulativa de la multiplicación,

$$a^m = a^m$$

ii. Supongamos que se cumple para $n = k$
$a^k + m = a^k.am$
debemos demostrar que se cumple para k^+.

$$\begin{aligned} a^{k^++} &= a^{k+m^+} \\ &= a^{(k+m)}.a \\ &= a^k.a^m.a \\ &= a^k.a.a^m \\ &= a^{k^+}.a^m \end{aligned}$$

Y así concluimos que la propiedad se cumple para todo número natural. □

El orden en los números naturales lo definimos usando la adición diciendo que entre dos números naturales a y b, *a es menor o igual que b*, o también que *b es mayor o igual que a*

$$a \leq b \text{ si y sólo si existe un número natural } c \text{ tal que } a + c = b.$$

Esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva y cumple las propiedades de monotonía mencionadas anteriormente

Utilizando las mismas herramientas podemos continuar reiterando operaciones y definir, por ejemplo una **repotenciación**, mediante las fórmulas:

1. ${}^{1}a = a$
2. ${}^{n^+}a = ({}^{n}a)^a$

y luego reiterarla, etc.

5 Otras representaciones de los números naturales.

Hemos construido un conjunto de números naturales, a saber

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Nos preguntamos ahora si existen otros conjuntos que también satisfagan los axiomas de Peano.

Por ejemplo, hemos puesto el símbolo 0[15] , para representar al primer número natural, pero este puede escogerse de manera arbitraria, digamos con la letra S; con el axioma 2 construimos el sucesor de S y lo notamos S^+, y el sucesor de S^+ que notamos $(S^+)^+$ y así sucesivamente, $((S^+)^+)^+$, etc., y obtenemos el conjunto:

$$\mathbb{N} = \{S, S^+, (S^+)^+, ((S^+)^+)^+, \ldots\}$$

Si insistimos en que $S = 0$, entonces $0^+ = 1$, $(0^+)^+ = 1^+ = 2$, etc., y regresamos a:

[15] O equivalentemente el símbolo 1

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Pero, podemos iniciar en $S = 8$ y continuar con 11, y luego 14, **y así sucesivamente ...** , hasta obtener:

$$S = \{8, 11, 14, 17, \dots\}$$

Este conjunto satisface las siguientes condiciones:

1. $8 \in S$
2. 8 no es sucesor de ningún número en S
3. Todo número de S tiene un solo sucesor
4. Cada número es sucesor de sólo un número de S
5. Si $A \subseteq S$, es tal que $8 \in A$ y cada vez que $k \in A$, $k^+ \in A$ entonces $A = S$.

La adición en S la definimos de la misma forma que en $\mathbb{N}$ como:

i. $n + 8 = n$

ii. $n + k^+ = (n + k)^+$.

Para cualesquier número n y $k \in S$.

La propiedad modulativa de la suma se demuestra de forma completamente análoga a como ya se hizo:

Para todo número en S se cumple que

$$n + 8 = 8 + n = n$$

Demostración. De la definición de suma se tiene que $n + 8 = n$. Demostraremos por inducción que para todo $n \in S$, se tiene que $8 + n = n$.

i. Para $n = 8$, tenemos que $8 + 8 = 8$, por la definición.

ii. Suponemos válido que $8 + k = k$, para todo número $k \in S$ y debemos demostrar que se cumple para su sucesor k^+. Pero esto también es inmediato de la segunda parte de la definición de la suma puesto que $8 + k^+ = (8 + k)^+ = k^+$. Por lo tanto la afirmación es válida para todo número $n \in S$.

Como vemos no estamos haciendo nada nuevo, el símbolo 0 podemos reemplazarlo por el símbolo 8, o por cualquier otro pero todo sigue esencialmente igual. $\square$

Tendremos resultados aparentemente curiosos como

$$11 + 8 = 11, 14 + 17 = 23, \text{ etc.}$$

Pero si cambiamos de nuevo los nombres de los números, haciendo:

$$8 = 0', 11 = 1', 14 = 2', 17 = 3', 20 = 4', 23 = 5', \text{ etc.}$$

Volvemos a la normalidad

$$1' + 0' = 1', 2' + 3' = 5', \text{ etc.}$$

Naturalmente la forma para hacer la secuencia anterior, se puede ampliar, usando una función inyectiva cualquiera[16] .

Ejemplos:

1. Toda **progresión aritmética** con término inicial a y diferencia d

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

donde a y d son números naturales arbitrarios, forma una representación de los números naturales. El n-ésimo término de la sucesión es:

$$a_n = a + d(n - 1)$$

[16]TAKAHASHI, A., *Las nociones matemáticas* IV, 5. Giusseppe Peano (La axiomática). Boletín de Matemáticas. Vol VI, No 5, p. p. 33-45, Octubre 1972.

El conjunto P de los números pares es un caso particular de este; en este caso, la suma definida por recursión como indicamos arriba, tiene los mismos resultados que en $\mathbb{N}$.

2. Toda **progresión geométrica** con término inicial a y razón d

$$a, ad, ad^2, ad^3, ad^4, \ldots$$

donde a y d son números arbitrarios, forma una representación de $\mathbb{N}$. El n-ésimo término de la sucesión es:

$$a_n = ad(n-1)$$

3. Toda **sucesión por recurrencia** que se construya a partir de dos números arbitrarios digamos a y b por una combinación de operaciones de ellos, que resulte una función inyectiva, es una representación de $\mathbb{N}$. Una de las más célebres es la sucesión de Fibonacci que comienza con 0 y 1 y cada término se construye con la suma de los dos términos anteriores, es decir:

$$F = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$$

4. La **sucesión de las sumas parciales** de cada una de las sucesiones anteriores conocida como una *serie*, también forma una representación de N.

5. Los *números enteros* también pueden ser colocados en sucesión, comenzando por el 0, de la siguiente forma:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots$$

el sucesor del n-ésimo número es

$$\begin{aligned} f: \quad & Z \to N \\ & z \mapsto \begin{cases} -2z & \text{si } z \leq 0 \\ 2z-1 & \text{si } z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

cuya inversa es:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}: \quad & N \to Z \\
& n \mapsto \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } \ n \text{ es impar} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Con la ayuda de esta función podemos copiar la operación suma de los números naturales para definir una nueva operación $\oplus$ entre números enteros que hace las dos estructuras isomorfas:

$$z \oplus w = f^{-1}(f(z) + f(w))$$

explícitamente

$$
z \oplus w = \begin{cases} z + w & \text{si } z \leq 0 \text{ y } w \leq 0 \\ 1 - z - w & \text{si } z > 0 \text{ y } w > 0 \\ z - w & \text{si } z > 0 \text{ y } w \leq 0 \\ w - z & \text{si } z \leq 0 \text{ y } w > 0 \end{cases}
$$

donde $+$ y $-$ representan la suma y la resta usual de números enteros. También podemos copiar la multiplicación de números naturales para definir una nueva multiplicación de números enteros:

$$z \otimes w = f^{-1}(f(z) \times f(w))$$

que de manera explícita es:

$$
z \oplus w = \begin{cases} -2z \times w & \text{si } z \leq 0 \text{ y } w \leq 0 \\ 2z \times w - (z + w) + 1 & \text{si } z > 0 \text{ y } w > 0 \\ 2z \times w - w & \text{si } z > 0 \text{ y } w \leq 0 \\ 2zw - z & \text{si } z \leq 0 \text{ y } w > 0 \end{cases}
$$

donde $\times$, $+$ y $-$ representan las operaciones usuales entre números enteros.

6. En la sucesión **armónica**

$$A = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

Podemos definir **la adición** de dos elementos de la manera como algunos niños adicionan fracciones en la escuela:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

y obtener una representación de los números naturales.

donde $\times$, $+$ y $-$ representan las operaciones usuales entre números enteros.

7. En la sucesión **armónica**

$$A = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Podemos definir **la adición** de dos elementos de la manera como algunos niños adicionan fracciones en la escuela:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

y obtener una representación de los números naturales.

6 La teoría de conjuntos y los axiomas de Peano.

Hasta aquí hemos presentado dos versiones axiomáticas de los números naturales, la existencia de ellas no significa que la teoría de los números naturales no se pueda deducir de otros sistemas de axiomas, e incluso de otras teorías donde se parta de otros conceptos no definidos y de axiomas diferentes, un ejemplo de esto es la teoría de conjuntos.

6.1 Los axiomas de la teoría de conjuntos.

Como sucede con casi todo en matemáticas, la axiomatización de la teoría de conjuntos tampoco es única, elegiremos la versión de Sérmelo[17] por ser la más popular.

En ella se usan tres nociones primitivas: conjunto, elemento y la relación de pertenencia $\in$, y además una colección de objetos abstractos B; los objetos se representan mediante letras, y la igualdad $a = b$ significa que los símbolos a y b designan la misma cosa.

Los axiomas son:

1. **Axioma de Extensionalidad:** Dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos, en símbolos:

$$\forall x, y(\forall z((z \in x) \rightarrow (z \in y)) \rightarrow (x = y))$$

2. **Axioma del conjunto vacío:** Existe un conjunto sin elementos

$$\exists x(\forall z(\neq (z \in x)))$$

3. **Esquema axiomático de separación:** A todo conjunto a y a toda condición $p(x)$ corresponde un conjunto b cuyos elementos son precisamente los x de a para los cuales se cumple $p(x)$.

4. **Axioma de pares no ordenados:** Si x e y son conjuntos, el par (no ordenado) $\{x, y\}$ es un conjunto.

$$\forall x, y \exists z \forall w((w \in z) \leftrightarrow (w = x) \vee (w = y))$$

5. **Axioma de la unión:** Sea x un conjunto de conjuntos, la unión de todos sus miembros es un conjunto.

$$\forall x, y, z((z \in y) \leftrightarrow \exists w((z \in w) \wedge (w \in x)))$$

[17]Propuesto por E. ZERMELO en 1908, y modificada por A. FRAENKEL y T. SKOLEM en 1922, para adecuarla a la aritmética ordinal transfinita.

6. **Axioma del infinito:** Existe un conjunto x que contiene al conjunto vacío y es tal que si y pertenece a x entonces la unión de y y el conjunto $\{y\}$ también pertenece a x. Este axioma garantiza la existencia de conjuntos infinitos.

$$\exists x((\emptyset \in y) \wedge (\forall y(y \in x) \rightarrow (y \cup \{y\} \in x)))$$

7. **Axioma del conjunto potencia:** Para cada conjunto x existe un conjunto y de subconjuntos de x, la cardinalidad de y es mayor que la de x, con esto se pueden construir conjuntos de cardinalidad cada vez mayor.

$$\forall x \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow (z \subset x))$$

8. **Axioma de elección:** Para toda familia de conjuntos no vacíos y disyuntos, existe una función que permite escoger un solo elemento de cada conjunto de manera que se pueda formar un nuevo conjunto.

6.2 Los números naturales.

Para construir el conjunto de los números naturales, el axioma 2 nos permite iniciar con el conjunto vacío, que por no tener elementos es un buen candidato a representar al primer número natural:

$$0 = \emptyset$$

también es natural pensar que el sucesor de 0 sea

$$\{\emptyset\}$$

pues este es un conjunto con 1 elemento.

Para construir el sucesor de 1 tenemos varias opciones; por ejemplo, podemos compartir con Zermelo la idea de que:

$$2 = \{1\} = \{\{\emptyset\}\}$$

y que en general el sucesor de n sea

$$n+1=\{n\}$$

O sea, que n es 0 encerrado con n pares de corchetes. Esta idea funciona bien con conjuntos finitos, pero presenta problemas en los conjuntos infinitos[18] .

Otra opción propuesta por J Von Neumann, basado en una idea de Frege, y que está en el axioma 5, define cada número natural como el conjunto de los números naturales menores que él, es decir:

$$0=\emptyset$$
$$1=\{\emptyset\}=\{\emptyset\}$$
$$2=\{0,1\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$
$$3=\{0,1,2\}\ldots \text{ etc.}$$

En esta versión el número natural n es un conjunto que tiene exactamente n elementos; en la versión de Zermelo, el número natural n tiene un elemento, salvo el 0.

En general, el sucesor de un conjunto x es

$$x^{+}=x\cup\{x\}$$

reflejando la idea, de que el sucesor de un número natural es otro número con una unidad más, o sea que el sucesor de un conjunto es otro conjunto con un elemento más. Con esto obtenemos el conjunto:

$$\mathbb{N}=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},...\}$$

Un conjunto A lo llamamos **inductivo** si $\emptyset\in A$ y el sucesor de todo elemento de él también pertenece a él. La existencia de al menos un conjunto inductivo lo garantiza el axioma 5. Un conjunto x lo llamamos un **número natural** si pertenece a todo conjunto inductivo, esto significa que el conjunto de los números naturales es el más pequeño de los conjuntos inductivos. Una

[18]SMULLYAN R, FITTING M. *Set theory and the continuum problem.* Clarendon Press, Oxford. 1996. p. 29.

forma de construir el más pequeño de los conjuntos inductivos es hacer la intersección de todos ellos, por axioma esta colección es no vacía, y mostrar que él es un conjunto inductivo. Veamos que el conjunto de los números naturales así construido satisface los axiomas de Peano: Los axiomas 1 y 2 se cumplen por la definición de conjunto inductivo, el axioma 5 se tiene por ser $\mathbb{N}$ el menor conjunto inductivo; puesto que, si $S \subseteq \mathbb{N}$ y satisface que $0 \in S$ y $\forall n(n \in S \rightarrow n^+ \in S)$ entonces S es inductivo, como $\mathbb{N}$ es el menor entonces $\mathbb{N} \subseteq S$, o sea que $\mathbb{N} = S$.

El axioma 3 se tiene de que $n \notin \emptyset$, y para todo $n \in S$ se cumple que $n \in n^+$, lo que significa que $\emptyset \neq n^+$ y por lo tanto no existe un número natural del que 0 sea el sucesor.

La prueba de que se cumple el axioma 3 tiene un poco más detalle y se encuentra en Muñoz[19]

7 Los números naturales en otros contextos.

Los axiomas de Peano son útiles también para formular la idea de número natural en contextos diferentes a la teoría de conjuntos, por ejemplo en teoría de Categorías, se define un objeto número natural (Lawvere 1964) en un topos T como un objeto N y dos morfismos

$$1 \xrightarrow{O} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$$

tal que, para cualquier diagrama

$$1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{u} X$$

existe un único morfismo

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "O"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "f"'] \\
& X \arrow[r, "u"] & X
\end{tikzcd}$$

[19]MUÑOZ, J, M., *Introducción a la teoría de conjuntos*, Universidad Nacional de Colombia, 4 edición, 2002, p. 137.

Bibliografía.

[1] FREGE , G., *Los fundamentos de la Aritmética*, UNAM, 1972.

[2] RUSSELL, B., *Introducción a la filosofía matemática*, Ediciones Paidos, 1988.

[3] PEIRCE, C, S., *On the logic of Number*, American Journal of Mathematical 4(1881),85-95.

[4] PEANO, G., *Arithmetices principia*.

[5] LANDAU, E., *Foundations of Analisys, The Arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers.* Chelsea Publishing Company, New York, 1966.

[6] DEDEKIND, R., *¿Qué son y para que sirven los números?* Alianza editorial, 1998.

[7] MUÑOZ, J., Introducción a la teoría de conjuntos. Universidad Nacional, 1983,

[8] DEVLIN, K., The Joy of sets, Springer, 1993.

[9] SUPPES, P., Teoría axiomática de conjuntos, Norma, 1968.

[10] SMULLYAN R, FITTING M. *Set theory and the continuum problem.* Clarendon Press, Oxford. 1996.

[11] RUBIANO G, GORDILLO J, JIMENEZ R. *Teoría de Números para Principiantes*. Universidad Nacional de Colombia, 1999.

[12] NEWMAN J; Sigma el Mundo de las Matemáticas, Grijalbo, 1997, Vol 5.

[13] LUQUE, C., MORA, L., PAEZ, J., Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir. Editorial Antropos, Universidad Pedagógica Nacional, 2002.

[14] TAKAHASHI, A., Las nociones matemáticas IV, 5. Giusseppe Peano (La axiomática). Boletín de Matemáticas. Vol VI, No 5, p. p. 33-45, Octubre 1972.

[15] GOLDBLATT, R., *Topoi, The categorical análisis of Logic*, North Holland, 1984.

[16] BIRKHOFF, G., BARTEE, TH., *Modern Applied Álgebra*; McGrawHill, 1.970.

[17] GOLDSTERN, M., JUDAH, H., *The Inconpletenes Phenomenon.* (1995).