ECUACIONES DE RICCATI MEDIANTE GRUPOS DE LIE

Alberto Campos
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional, Bogotá.

Resumen.

Traducción de una comunicación de Daniel Bernoulli. Funciones elementales de Liouville. Ecuaciones de Bessel reducibles a una ecuación de Riccati.

Introducción.

Este ensayo presenta la continuación del estudio de la ecuación llamada de Riccati, en la que el autor está empeñado desde hace algún tiempo. Consta este ensayo de tres apartes.

El primero es la traducción de la comunicación de Daniel Bernoulli (Acta Eruditorum. 1725) en la que muestra cómo resolver la ecuación, llamada de Riccati, cuando ella admite solución expresable mediante funciones elementales. La memoria sigue siendo importante dado que, al parecer, no se conoce otro procedimiento. Lo que expone Valiron, en los años cincuenta del siglo XX, es apenas una variación del procedimiento de Bernoulli.

En el segundo aparte se trae a cuento la concepción de las funciones elementales de Liouville, así como el teorema expuesto por el matemático japonés Michio Kuga sobre la manera de operar con funciones elementales.

Finalmente, se explicitan las indicaciones dadas por Watson para pasar de una ecuación de Bessel a una de Riccati. (En una prepublicación de Markus, nunca publicado, hay explicaciones diferentes). Es esta una relación sorprendente. Uno de los Bernoulli había mostrado (el procedimiento figura en los textos de ecuaciones diferenciales) cómo pasar de una ecuación de Riccati a una diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden. Por otra parte, las ecuaciones de Bessel (ordinaria lineal homogénea de segundo orden) dependen de un parámetro, en general, un número complejo. Para ciertos números naturales bien determinados, la ecuación de Bessel puede ser reducida en una de Riccati (diferencial ordinaria no lineal de primer orden).

Si se aplica el algoritmo de Lie a una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden, hay siempre un grupo de Lie uniparamétrico admitido por la ecuación. La transformación canónica correspondiente lleva la ecuación de segundo orden a una de Riccati. El hecho escueto de la transformación de una ecuación de segundo orden en una de primer orden es un resultado normal en la teoría de Lie que suministra de este modo una explicación: un buen logro de la concepción del matemático noruego.

Daniel BERNOULLI. Solución del problema de RICCATI.

Solución propuesta por Bernoulli en las Actas de Leipzig: Suplemento al tomo VIII p. 73. Acta Eruditorum 473 - 475. Octubre 1725.

El problema propuesto por el esclarecido conde Iacomo Riccati, con un ligero cambio, puede ser reducido a esta más sencilla fórmula

$$ax^m dx + u^2 dx = bdu. \tag{A}$$

Hay que determinar los valores del exponente m para que haya separación de indeterminadas y solución de la ecuación mediante cuadraturas únicamente.

Comienzo por establecer 2 lemas.

Lema Primero. Si la fórmula (A) admite separación de indeterminadas cuando $m = n$, entonces, también la admite cuando $m = \frac{-n}{n+1}$.

Demostración. Si $u = \frac{1}{y}$, y, por lo tanto, $du = -\frac{dy}{y^2}$, entonces la fórmula (A) se cambia en

$$ax^m dx + \frac{dx}{y^2} = -\frac{bdy}{y^2};$$

al multiplicar por y^2 y transponer los términos se obtiene

$$dx + ax^m y^2 dx = -bdy.$$

Sea $x = s_{\frac{1}{m+1}}$, y, por lo tanto, $dx = \dfrac{1}{(m+1)s^{\frac{m}{m+1}}}ds$ Se tendrá

$$\frac{1}{m+1}\frac{ds}{s_{\frac{m}{m+1}}} + \frac{a}{m+1}y^2 ds = -bdy;$$

esta fórmula es semejante a la (A); por ello conduciría a donde se empezó, es manifiesto; así que si $m = n$ hace la fórmula (A) separable, también la hará $m = \dfrac{-n}{n+1}$. C. H. Q. D.

□

Lema Segundo. Si la fórmula (A) admite separación de indeterminadas cuando $m = n$, también la admite cuando $m = -n - 4$.

Demostración. Si

$$u = \frac{-b}{x} + \frac{y}{x^2}.$$

es

$$du = \frac{b}{x^2}dx + \frac{x^2 dy - 2xydx}{x^4} = \frac{b}{x^2}dx + \frac{dy}{x^2} - \frac{2ydx}{x^3}.$$

Entonces la fórmula (A) se transforma en

$$\begin{gathered}
ax^m dx + \left(-\frac{b}{x} + \frac{y}{x^2}\right)^2 dx = b\left(\frac{b}{x^2}dx + \frac{dy}{x^2} - \frac{2ydx}{x^3}\right);\\
ax^m dx + \frac{b^2}{x^2}dx + \frac{y^2}{x^4}dx - \frac{2by}{x^3}dx = \frac{b^2}{x^2}dx + \frac{bdy}{x^2} - \frac{2by}{x^3}dx;\\
ax^m dx + \frac{y^2}{x^4}dx = \frac{bdy}{x^2};
\end{gathered}$$

al multiplicar por x^2, se tendrá

$$ax^{m+2}dx + \frac{y^2}{x^2}dx = bdy.$$

Si en esta última fórmula $x = \frac{1}{s}$, es $dx = \frac{-ds}{s^2}$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{s}\right)^{m+2}\left(-\frac{ds}{s^2}\right)+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{s}\right)^2}\left(-\frac{ds}{s^2}\right) &= bdy, \\ a\frac{(-1)}{s^{m+2+2}}ds - y^2 ds &= bdy, \\ -\frac{a}{s^{m+4}}ds - y^2 ds &= bdy. \end{aligned}$$

Palmariamente, esta fórmula es de nuevo semejante a la fórmula (A) y podría ser transformada en ella; así que si (A) admite separación de indeterminadas cuando $m = n$ la admitirá igualmente cuando $m = -n-4$. C. H. Q. D.

□

Con estos 2 lemas puede obtenerse, sin dificultad, la solución del problema. Con tal fin, considero que al hacer $m = 0$ en la fórmula (A), la separación de las indeterminadas se produzca al dividir por $a + u^2$; así que el primer caso de separabilidad se da para $m = 0$.

Por el segundo lema, se obtiene el otro caso de separabilidad ($= -4$). A su vez, por el primer lema se obtiene un nuevo caso, $m = -\frac{4}{3}$ y por el segundo lema se obtiene $m = -\frac{8}{3}$. Así alternando la aplicación de los 2 lemas indefinidamente se van obteniendo siempre nuevos valores para el exponente m.

Todos están contenidos en la fórmula general

$$m = \frac{-4n}{2n \pm 1}$$

donde n puede ser cualquier entero positivo o negativo. C. H. Q. D.

De lo que precede, se ve claro que el problema de Riccati es curiosísimo y que tiene una particular elegancia al mismo tiempo que utilidad si se lo compara con los ordinariamente propuestos en las otras cuestiones de esta dificilísima materia. Es de admirar, por lo tanto, que hasta ahora no haya aparecido en las Actas de Leipzig ninguna solución para este problema.

Se pueden hacer algunas observaciones respecto a la solución presentada aquí. La fórmula (A) contiene infinitas ocurrencias de separabilidad, pero, en general no hay separabilidad de indeterminadas. Más aún, creo que es casi imposible reducir a un solo caso nuestra fórmula; si de veras, pudiera ser encontrado un tal método particular, de seguro estarían supeditados a éste, infinitos casos más, no de otro modo que como el primer caso, $n = 0$, fue el primero de infinitos otros.

Todos los casos de separabilidad aquí determinados son negativos y están entre límites bastante estrechos, entre -4 y 0, que no pueden ser transgredidos. Si se supone que n sea infinito, entonces, $m = -2$; para que quede bien firme que solo es lícito separar indeterminadas mediante infinitas substituciones en la fórmula (A), reemplazado m por -2, es fácil llegar a lo mismo por otros caminos.

Si en la fórmula $ax^{-2}dx + u^2dx = bdu$, se pone $u = y^{-1}$ (como en el primer lema), entonces $ax^{-2}dx + y^{-2}dx = -by^{-2}dy$, fórmula en la cual es sabido que las indeterminadas admiten separación tanto más cuanto que en cada uno de los términos hay el mismo exponente. Más aún: en el caso $m = -2$ no solo hay separabilidad sino integrabilidad, como no escapa a ninguno de los matemáticos.

Espero que una indagación posterior me permita poner de manifiesto el método de integración en los restantes casos de separabilidad.

Que el problema admitiera solución apenas lo hubiera creído si mi hermano Nicolás (él está igualmente en posesión de la solución) no me lo hubiera explicado.

Es de destacar el caso $m = 0$, en el que la solución de la ecuación depende de la cuadratura del círculo.

Comunicaré en otra ocasión mi solución de este problema para no quitar al ilustre Riccati la ocasión y el deseo de dar la última perfección a su problema.

Hasta aquí la comunicación de Daniel Bernoulli.

Funciones elementales.

En sus estudios sobre la ecuación de Riccati planteó Liouville el problema de la solubilidad en finitos términos, es decir, “la búsqueda de los casos en los que una ecuación de Riccati puede ser integrada en forma finita de modo que la función que así se halla pueda ser expresada explícitamente mediante un número limitado de signos algebraicos, exponenciales y logarítmicos”. En profundos ensayos, Liouville, mediante consideraciones muy diferentes a las de Daniel Bernoulli, volvió a establecer que los términos de la secuencia de

Bernoulli son los únicos para los que la solución de una ecuación de Riccati pueda ser expresada valiéndose de un número finito de funciones elementales. Solución trascendente para la ecuación de Riccati $u_x = u^2 + x^2$ era conocida desde el 3 X 1703 cuando James Bernoulli comunicó a Leibniz la serie apropiada.

Años más tarde, Lie y Klein, inspirados en la perquisición de Galois para las ecuaciones algebraicas, idearon una análoga para las ecuaciones diferenciales, la cual fue realizada ampliamente por Lie.

La cuestión primordial consiste en determinar para una ecuación diferencial cuándo se puede garantizar que exista una solución expresable mediante un número finito de funciones elementales.

Para apreciar mejor el papel de las funciones elementales en la construcción de las soluciones, es conveniente traer a cuento algunas páginas de la exposición de Kuga para una ecuación diferencial ordinaria compleja lineal homogénea de segundo orden.

Sea F un conjunto de funciones conocidas o más generalmente, un conjunto de funciones elementales: racionales, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, funciones expresadas mediante cuadráticas. Se obtienen nuevas funciones a partir de F con los siguientes procedimientos:

1. Las 4 operaciones

$$\begin{gathered} f_1 + f_2, \\ f_1 - f_2, \\ f_1 \cdot f_2, \\ f_1/f_2, \end{gathered}$$

   las combinaciones lineales

$$m_1 f_1 + m_2 f_2;$$

2. la diferenciación

$$f \to \frac{df}{dz},$$

3. la integración

$$f \to \int f(z)dz,$$

4. la exponenciación

$$f(z) \to e^{f(z)}$$

Llámese proceso de tipo L_0 al obtenido al aplicar alguno de los procederes 1., 2., 3. y 4., un número finito de veces.
Las funciones obtenidas de este modo se llaman funciones de tipo L_0 sobre F.
Un proceso de tipo L es una secuencia finita de operaciones como 1., 2., 3., 4. y 5., donde 5. se define así:

5. Resolver ecuaciones algebraicas

$$g^n + f_1 g^{n-1} + f_2 g^{n-2} + \cdots + f_n = 0.$$

Una función obtenida por uno cualquiera de estos procesos se llamará función de tipo L sobre F.
Sea $L(F)$ el conjunto de funciones de tipo L sobre F.

Propiedad 1. $L_0(F) \subset L(F)$.

Sea $\dfrac{d^2w}{dz^2} + P(z)\dfrac{dw}{dz} + Q(z)w = 0 \equiv e = 0$ una ecuación diferencial en la que $P(z)$, $Q(z)$ pertenecen al conjunto F de funciones inicialmente conocidas.
Si todas la soluciones de la ecuación diferencial son del tipo L_0 sobre F, entonces, se dice que la ecuación diferencial es de tipo L_0 sobre F.
Análogamente la ecuación diferencial puede ser de tipo L sobre F.

Teorema 1. *Si una solución no trivial de una ecuación diferencial $e = 0$ es de tipo L_0 sobre F, entonces, todas las soluciones de e=0 son de tipo L_0.*

Sigue válido el teorema si se reemplaza L_0 por L.

Demostración. Sea W_1 la solución no trivial de tipo L_0. Sean

- W una función cualquiera.
- $u = \dfrac{W}{W_1}$

entonces

$$\frac{dW}{dz} = \frac{d(uW_1)}{dz} = \frac{dW_1}{dz}u + W_1\frac{du}{dz}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2W}{dz^2} =& \frac{d^2W_1}{dz^2}u + \frac{dW_1}{dz}\frac{du}{dz} + \frac{dW_1}{dz}\frac{du}{dz} + W_1\frac{d^2u}{dz^2} = \\ =& \frac{d^2W_1}{dz^2}u + 2\frac{dW_1}{dz}\frac{du}{dz} + W_1\frac{d^2u}{dz^2}.\end{aligned}$$

Al reemplazar, en una ecuación diferencial como la indicada antes, se tendrá

$$\begin{aligned}\frac{d^2W}{dz^2} + P\frac{dW}{dz} + QW &= \frac{d^2W_1}{dz^2}u + 2\frac{dW_1}{dz}\frac{du}{dz} + W_1\frac{d^2u}{dz^2} + P\left(\frac{dW_1}{dz}u + W_1\frac{du}{dz}\right) + Q(uW_1) = \\ &= \left(\frac{d^2W_1}{dz^2} + P\frac{dW_1}{dz} + QW_1\right)u + 2\frac{dW_1}{dz}\frac{du}{dz} + W_1\frac{d^2u}{dz^2} + PW_1\frac{du}{dz} = \\ &= W_1\frac{d^2u}{dz^2} + 2\frac{dW_1}{dz}\frac{du}{dz} + PW_1\frac{du}{dz}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, decir que es solución, es equivalente a decir que

$$W_1\frac{d^2u}{dz^2} + \left(2\frac{dW_1}{dz} + PW_1\right)\frac{du}{dz} = 0,$$

o también que

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{2}{W_1}\frac{dW_1}{dz} + P\right)\frac{du}{dz} = 0.$$

La última igualdad es una ecuación diferencial de primer orden respecto de $\frac{du}{dz}$. Puede buscarse una solución por separación de variables.

Sea $\frac{du}{dz} = v$. Entonces, W es una solución, puede expresarse mediante una cadena de bicondicionales

$$\begin{aligned}\frac{i}{v}\frac{dv}{dz} =& 2\left(\frac{-1}{W_1}\frac{dW_1}{dz}\right) - P \Leftrightarrow \log v = -2\log W_1 - \int Pdz + C \\ \Leftrightarrow& \frac{du}{dz} = v = \frac{1}{W_1^2}e^{-\int Pdz + C} \\ \Leftrightarrow& u = \int W_1^{-2}e^{-\int Pdz+C} + C' \Leftrightarrow W = W_1u = W_1\int W_1^{-2}e^{-\int Pdz+C} + C'\end{aligned}$$

Todas las soluciones pueden ser alcanzadas de esta forma.
Si $W1$ es de tipo L_0 sobre F, lo serán todas las otras soluciones de la ecuación diferencial. C. H. Q. D.

$\square$

La exposición del teorema puede ayudar a entender cómo, si una ecuación diferencial admite un grupo, entonces, el algoritmo de Lie permite construir el espacio de sus soluciones.
En las páginas siguientes se hace concreta la relación entre algunas ecuaciones de Bessel y la ecuación de Riccati. No sobra la trascripción de las primeras frases del tratado de Watson.
"La teoría de las funciones de Bessel está estrechamente relacionada con la teoría de un cierto tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden, conocida como ecuación de Riccati. De hecho, una función de Bessel es usualmente definida como una solución particular de una ecuación diferencial lineal de segundo orden (conocida como ecuación de Bessel) la cual es derivada de una ecuación de Riccati gracias a una transformación elemental".

Ecuación de Bessel soluble, según Watson.

Se llama ecuación de Bessel de parámetro b, donde b es un número cualquiera, real o complejo, a la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal homogénea

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - b^2)w = 0 \tag{1}$$

Hay que hacer varias transformaciones para lograr obtener una ecuación cuya integral pueda ser expresable mediante un número finito de funciones elementales. Una primera transformación es la que sigue.
Si

$$w = z{-}1/2v, \qquad z \neq 0, \tag{2}$$

entonces

$$\begin{aligned} w_z =& \frac{dw}{dz} = z^{-1/2}v_z - \frac{1}{2}z^{-3/2}v, \\ w_{zz} =& \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{3}{4}z^{-5/2}v - z^{-3/2}v_z + z^{-1/2}v_{zz}. \end{aligned}$$

Al reemplazar en la ecuación (1), se obtiene

$$\begin{aligned} z^2\left[\frac{3}{4}z^{-5/2}v - z^{-3/2}v_z + z^{-1/2}v_{zz}\right] + z\left[-\frac{1}{2}z^{-3/2}v + z^{-1/2}v_z\right] \\ + \left[z^2 - b^2\right]z^{-1/2}v = \\ = z^{3/2}v_{zz} + \left(\frac{3}{4}z^{-1/2} - \frac{1}{2}z^{-1/2} + z^{3/2} - b^2 z^{-1/2}\right)v = \\ = z^{3/2}v_{zz} + z^{3/2}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{z^{-1/2}}{z^{3/2}} - \frac{b^2}{z^{3/2}}z^{-1/2}\right)v = \\ = z^{3/2}\left[v_{zz} + \left(1 + \frac{1}{4}\frac{1}{z^2} - \frac{b^2}{z^2}\right)v\right] = 0. \end{aligned}$$

De donde

$$v_{zz} + \left(1 + \frac{1}{4}\frac{1}{z^2} - \frac{b^2}{z^2}\right)v = 0. \tag{3}$$

Sobre esta ecuación se hace una transformación de variable

$$z = iy. \tag{4}$$

Se tendrá:

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{dv}{dz} = \frac{dv}{d(iy)} = \frac{1}{i}\frac{dv}{dy} = \frac{v_y}{i}. \\ v_{zz} &= \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dv}{dz}\right) = \frac{1}{i}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{i}\frac{dv}{dy}\right) = -\frac{d^2v}{dy^2} = -v_{yy} \end{aligned}$$

Al reemplazar en (3)

$$\begin{aligned} &-v_{yy} + \left(1 + \frac{1}{4}\frac{1}{z^2} - \frac{b^2}{z^2}\right)v = -v_{yy} + \left[1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{y^2}\right) - b^2\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right]v = \\ &= -v_{yy} + \left(1 - \frac{1}{4y^2} + \frac{b^2}{y^2}\right)v = -v_{yy} + \left(1 + \frac{b^2}{y^2} - \frac{1}{4y^2}\right)v. \end{aligned}$$

Es decir

$$-v_{yy} + \left(1 + \frac{b^2}{y^2} - \frac{1}{4y^2}\right)v = 0. \tag{5}$$

Se puede continuar transformando la ecuación a condición de que el parámetro b sea la mitad de un natural impar, esto es,

$$b = n + \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2} \tag{6}$$

o lo que es igual, cuando $2b$ es un natural impar. Entonces, se tendrá

$$\frac{b^2}{y^2} - \frac{1}{4y^2} = \frac{1}{y^2}\left(b^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{y^2}\left(n^2 + n\right) = \frac{n(n+1)}{y^2}.$$

Entonces, la ecuación (5) es de la forma

$$v_{yy} = \left[c^2 + \frac{n(n+1)}{y^2}\right] v, \tag{7}$$

donde se ha tomado una constante en vez de 1.
Watson hace una tercera transformación, esta vez sobre la función

$$v = uy^{-n} \tag{8}$$

se tiene

$$\begin{aligned} v_y =& \frac{dv}{dy} = y^{-n}u_y - nuy^{-n-1} \\ v_{yy} =& y^{-n}u_{yy} - 2ny^{-n-1}u_y - n(-n-1)uy^{-n-2}. \end{aligned}$$

Al reemplazar en (7) se obtiene

$$y^{-n}u_{yy} - 2ny^{-n-1}u_y - n(-n-1)uy^{-n-2} - c^2uy^{-n} = \frac{n(n+1)}{y^2}uy^{-n}.$$

De donde

$$\begin{aligned} & y^{-n}u_{yy} + (-2ny^{-n-1})u_y - u\left[-n(n+1)y^{-n-2} + c^2y^{-n} + \frac{n(n+1)}{y^2}y^{-n}\right] = \\ & = y^{-n}u_{yy} - 2ny^{-n-1}u_y - c^2uy^{-n} = y^{-n}\left[u_{yy} - \frac{2ny^{-n-1}}{y^{-n}}u_y - \frac{c^2uy^{-n}}{y^{-n}}\right] = 0 \end{aligned}$$

De donde

$$u_{yy} - \frac{2n}{y}u_y - c^2u = 0. \tag{9}$$

Ahora se hace una transformación de variable

$$y = \left(\frac{1}{m}\right) x^m \tag{10}$$

Entonces se tiene $u = u(y) = u(y(x))$. Por lo tanto

$$u_x = u_y y_x \qquad \text{y entonces} \qquad u_y = \frac{u_x}{y_x}$$

$$u_{xx} = u_{yy} y_x^2 + u_y y_{xx} \qquad \text{y entonces} \qquad u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_y y_{xx}}{y_x^2}$$

Por otra parte,

$$\frac{dy}{dx} = y_x = x^{m-1} \qquad\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y_{xx} = (m-1)x^{m-2}$$

Al reemplazar en la ecuación (9) se obtiene paso a paso

$$\begin{aligned}
0 = u_{yy} - 2n\frac{u_y}{y} - c^2u = & \frac{u_{xx} - u_y y_{xx}}{y_x^2} - \frac{2n}{y}\frac{u_x}{y_x} - c^2u = \\
= & \frac{u_{xx} - u_y(m-1)x^{m-2}}{\left(x^{m-1}\right)^2} - \frac{2n}{(x^m/m)}\frac{u_x}{x^{m-1}} - c^2u = \\
= & \frac{u_{xx} - (m-1)u_y x^{m-2}}{x^{2m-2}} - \frac{2mn}{x^m}\frac{u_x}{x^{m-1}} - c^2u = \\
= & \frac{u_{xx}}{x^{2m-2}} - \frac{(m-1)u_y x^{m-2}}{x^{2m-2}} - \frac{2mnu_x}{x^{2m-1}} - c^2u.
\end{aligned}$$

El segundo y tercer término de esta expresión se anulan a condición de escoger convenientemente a m en función de n. En efecto

$$\begin{aligned}
\frac{-(m-1)u_y x^{m-2}}{x^{2m-2}} - \frac{2mnu_x}{x^{2m-1}} = & -(m-1)\frac{u_x}{y_x}\frac{x^{m-2}}{x^{2m-2}} - \frac{2mnu_x}{x^{2m-1}}\frac{x^{-1}}{x^{-1}} = \\
= & \frac{1}{x^{2m-2}}\left[-(m-1)u_x\frac{x^{m-2}}{x^{m-1}} - 2mnu_x x^{-1}\right] = \\
= & \frac{1}{x^{2m-2}}\left[-(m-1)u_x x^{-1} - 2mnu_x x^{-1}\right] = \\
= & \frac{u_x x^{-1}}{x^{2m-2}}\left[-\left(\frac{1}{2n+1} - 1\right) - 2n\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right] = \\
= & \frac{u_x x^{-1}}{x^{2m-2}}\left[\frac{-1+2n+1-2n}{2n+1}\right] \\
= & \frac{u_x x^{-1}}{x^{2m-2}}\frac{1}{2n+1} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Es decir m fue escogido como el inverso de un natural impar, es decir,

$$m = \frac{1}{2n+1}. \tag{11}$$

La ecuación queda así

$$\frac{u_{xx}}{x^{2m-2}} - c^2 u = 0$$

o también

$$u_{xx} - c^2 x^{2m-2} u = 0. \tag{12}$$

Resulta que cuando $m = \dfrac{1}{2n+1}$ se obtiene como exponente

$$2m - 2 = 2\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 2 = \frac{-4n}{2n+1}.$$

La ecuación (1) de Bessel pudo ser transformada en una integrable

$$u_{xx} = c^2 x^{\frac{-4n}{2n+1}} u$$

a condición de restringir los valores del parámetro de Bessel, b, a ciertas familias de valores.

Lo que es interesante es que este exponente coincide con el de la secuencia dada por Bernoulli para los casos en que es soluble la ecuación reducida de Riccati.

Esta demostración la hizo Liouville, quien en 1840 escribía: "Cuando hay restricción a cálculos algebraicos, exponenciales y logarítmicos, los casos de integrabilidad [de la ecuación de Riccati] devienen muy raros. Los indicados responden, como es sabido, a los valores

$$m = \frac{-4n}{2n \pm 1}$$

obtenidos mediante artificios particulares; los métodos empleados no prueban que tales valores sean los únicos posibles".

Bibliografía

[1] CAMPOS, Alberto. *Iniciación en el análisis de ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie.* (Prepublicación 1995). 259 pp.

[2] KUGA. Michio. *Galois' dream. Group theory and differential equations.* (1968 Japanese). 1993. English translators: Susan Addington and Motohico Mulase. Birhäuser. Boston. ix + 150 pp.

[3] LIOUVILLE, Joseph. *Mémoire sur l'équation de Riccati.* Paris. École Polytechnique. Jour XIV 1833. (22 cah). pp 1 - 19.

[4] LIOUVILLE, Joseph. *Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites.* C. R. A. S. París IX 1839. pp. 527 - 530.

[5] LIOUVILLE, Joseph. *Remarques nouvelles sur équation de Riccati.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. VI 1841. pp. 1 - 13. C. R. A. S. París XI 1840. p 729.

[6] MARKUS, Lawrence. *Group theory and differential equations.* Lecture Notes at the University of Minnesota. Minneapolis 1959 - 1960. 227 pp. [Library of University of California at Berkeley. QA 371 M26].

[7] WATSON G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions.* (1922). Second edition. 1966. Cambridge. At the University Press. viii + 804 pp.