

# BICATEGORÍAS DE TANGLES Y LA COHOMOLOGÍA DE KHOVANOV

Stella Huerfano  
Departamento de Matemáticas  
Universidad Nacional de Colombia

Carlos Wilson Rodríguez  
Departamento de Matemáticas  
Universidad Nacional de Colombia

## Resumen.

La Cohomología de Khovanov es un invariante topológico de nudos el cual relaciona la categoría de uno-variedades cerradas planas y sus cobordismos, con la categoría de módulos sobre un anillo  $R$ , donde los morfismos son productos y coproductos definidos sobre el un  $R$ -módulo  $A$ . Esta relación se hace a través de un funtor que se denomina una Topological Quantum Field Theory (TQFT).

## 1 Tangles.

Un **tangle** (o enredo) es el encajamiento de 1-variedades suaves compactas en  $\mathbf{R}^2 \times [0,1]$ , (vease figura 1).

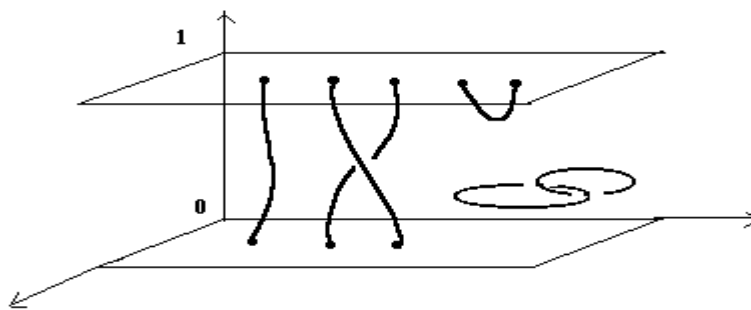


Figura 1

La frontera de un tangle puede ser vacía, o puede ser una colección finita de puntos de la frontera de  $\mathbf{R}^2 \times [0,1]$ . A los puntos que están en  $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$

los llamamos puntos frontera (o puntos finales) inferiores y a los puntos que están en  $\mathbf{R}^2 \times \{1\}$  los llamamos puntos frontera (o puntos finales) superiores. Si el tangle no tiene puntos frontera este es isomorfo a la unión disyunta de círculos en  $\mathbf{R}^3$  y lo denominaremos un **link** (o enlace), (vease Figura 2).



**Figura 2**

Si el link tiene una única componente conexas lo llamaremos un **nudo**, como en la Figura 3.



**Figura 3**

Un tangle se dice orientado si cada componente conexas es una 1-variedad orientada.

Dos tangles  $L$  y  $L'$  se dicen isotópicos si existen una homeomorfismos  $\mathbf{H}_t: \mathbf{R}^2 \times [0,1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \times [0,1]$ , con  $t$  en  $[0,1]$ , que preservan orientación y tal que  $\mathbf{H}_0(L) = L'$  y  $\mathbf{H}_1(L) = L$  y donde  $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{H}_t(\mathbf{x}), t)$  es un homeomorfismo. En otras palabras una isotopía es una aplicación continua que transforma un tangle en otro sin hacer autointersecciones y dejando fijos los puntos frontera.

Un **Diagrama plano** de un tangle  $L$  es la clase de equivalencia bajo isotopía de las proyecciones de  $L$  sobre un plano de tal forma que la proyección no tiene triples intersecciones ni dobles tangencias, como en la Figura 4.

## 1.1 Movimientos de Reidemeister.

**Proposición:** Dos tangles  $L$  y  $L'$  son isotópicos si y solo si sus diagramas planos respectivos  $D$  y  $D'$  se pueden transformar el uno en el otro bajo una

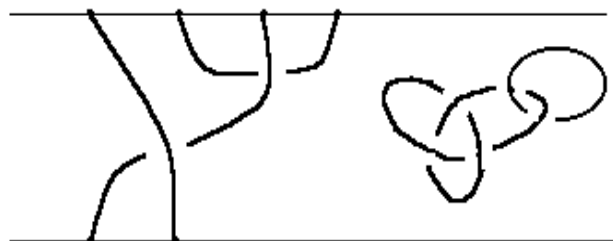


Figura 4

sucesión de movimientos, conocidos como **movimientos de Reidemeister**. Los movimientos de Reidemeister se ilustran en la Figura 5, (ver [Kh1]).

### Movimientos de Reidemeister

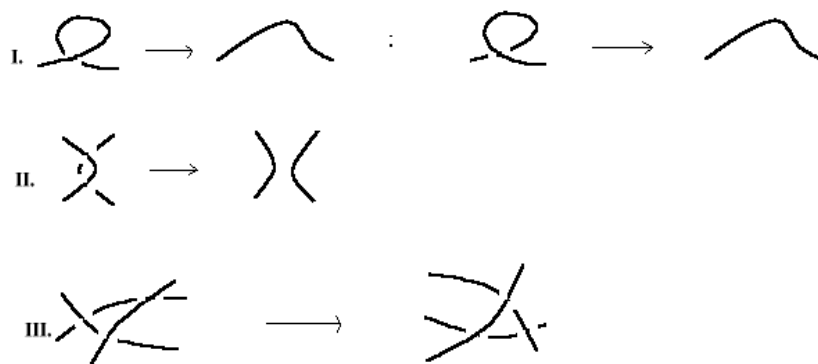


Figura 5

Por ejemplo los dos diagramas en la Figura 6 corresponden a tangles isotópicos.



Figura 6

## 2 Categorías de tangles.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los puntos frontera inferiores y de la misma forma los puntos frontera superiores de un tangle  $L$  están alineados con coordenadas  $\{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (m, 0, 0)\}$  y  $\{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}$ , respectivamente. A estos conjuntos los denotaremos simplemente como  $1, 2, \dots, m$  y  $1, 2, \dots, n$ , respectivamente, (ver Figura 7). De lo anterior se deduce que  $m + n$  es par.

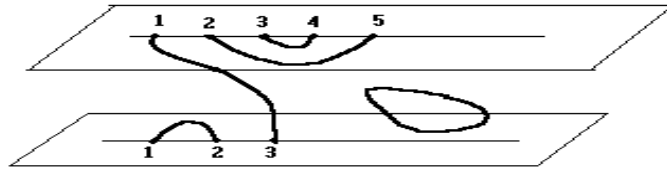


Figura 7

### 2.1 La Categoría de tangles no orientados.

La categoría de los tangles orientados es la categoría donde los objetos son números enteros no negativos y un morfismo  $m \rightarrow n$ , entre los objetos  $m$  y  $n$ , ( $m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$ ), es una clase de isotopía de tangles con  $2m$  puntos finales inferiores y  $2n$  puntos finales superiores.

La composición entre morfismos está dada simplemente por concatenación de tangles. Luego si queremos componer el tangle  $a$  con el tangle  $b$ , para obtener el tangle compuesto  $ba$ , el número de puntos finales superiores de  $a$  debe ser igual al número de puntos finales inferiores de  $b$ . Además para que

esta concatenación siga cumpliendo condiciones de suavidad, la intersección de cada componente conexa del tangle con los planos superior e inferior debe hacerse en forma ortogonal. Así por ejemplo si tenemos los siguientes diagramas, mostrados en la Figura 8:



Figura 8

la composición será como se ve en la Figura 9.

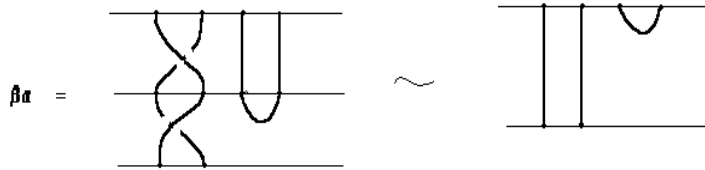


Figura 9

que se tiene aplicando movimientos de Reidemeister y reescalando.

## 2.2 La categoría Temperley-Lieb.

Supongamos que tomamos tangles tales que sus diagramas planos no presentan autointersecciones. A estos los llamaremos **tangles planos**. Es decir un  $(m,n)$ -tangle plano es un encajamiento de  $m+n$  arcos disyuntos y un número finito de círculos. Al conjunto de los  $(m,n)$ -tangles lo denotaremos  $\hat{\mathbf{B}}(m, n)$ . En la Figura 10 se muestra un elemento de  $\hat{\mathbf{B}}(1, 2)$ .

Se define entonces la categoría **Temperley-Lieb** como la categoría cuyos objetos son enteros no negativos y donde un morfismo  $m \rightarrow n$ , entre los objetos  $m$  y  $n$ , ( $m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$ ), es una clase de isotopía de elementos en  $\hat{\mathbf{B}}(m, n)$ . La composición aquí se hace por concatenación como antes.

Ahora sea  $\mathbf{B}(m, n)$  el conjunto de las clases de isotopía de  $\hat{\mathbf{B}}(m, n)$  donde se han removido todos los círculos. La cardinalidad de  $\mathbf{B}(m, n)$  está dada por el  $m+n$  **número de Catalán** que se define como:

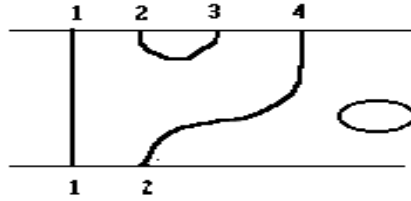


Figura 10

$$\#Catalan = \frac{1}{(m+n)+1} \binom{2(m+n)}{m+n}$$

Por ejemplo la cardinalidad de  $\mathbf{B}(1, 2)$  es 5 y sus diagramas se muestran en la Figura 11.

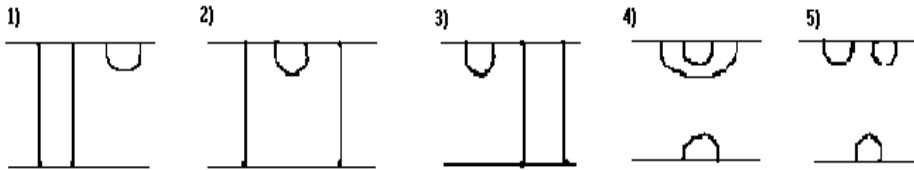


Figura 11

### 2.3 La categoría lineal Temperley-Lieb.

El módulo  $\mathbf{M}(m,n)$  es el módulo generado por  $\mathbf{B}(m,n)$  sobre el anillo  $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ ,  $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$  el anillo de los polinomios con coeficientes enteros y variables  $q$  y  $q^{-1}$ . Con esto se define otra categoría que denominaremos la **cat**egoría lineal **Temperley-Lieb**, donde los objetos siguen siendo enteros no negativos y un morfismo  $m \rightarrow n$ , entre los objetos  $m$  y  $n$ , ( $m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$ ), de la categoría, es un elemento de  $\mathbf{M}(m,n)$ . Para la composición definimos la aplicación  $\mathbf{rm}: \hat{\mathbf{B}}(m,n) \rightarrow \mathbf{B}(m,n)$  que a un  $(m,n)$ -tangle plano  $a$  lo envía en la clase de isotopía de  $a$  sin círculos, luego si  $a \in \mathbf{B}(m,n)$  y  $b \in \mathbf{B}(n,k)$  se define su composición como  $(q+q^{-1})^i \mathbf{rm}(ba)$ , donde  $i$  es el número de círculos en  $ba$ , (ver Figura 12).

En el ejemplo de la Figura 12 la composición de  $a$  y  $b$  está dada por  $(q+q^{-1})^2 \mathbf{rm}(ba)$ .

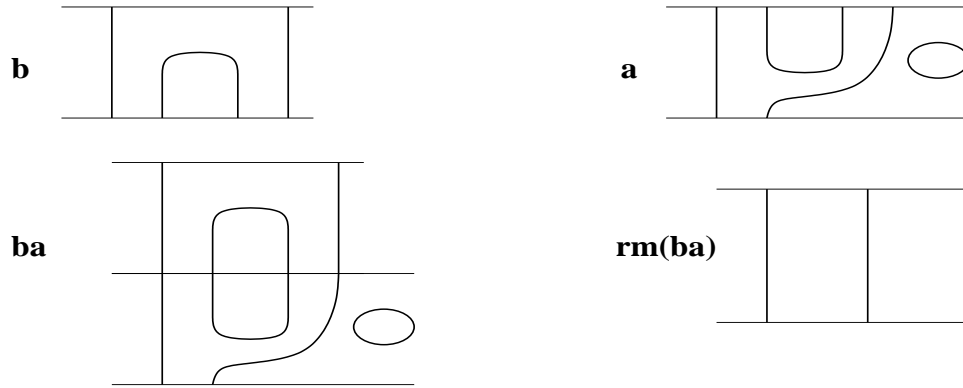


Figura 12

### 2.4 La 2-categoría Temperley-Lieb.

La 2-categoría Temperley-Lieb es la 2-categoría donde los objetos son enteros no negativos, los 1-morfismos entre enteros  $m$  y  $n$  son elementos de  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  y donde los 2-morfismos son clases de isotopía de cobordismos entre  $a$  y  $b$ ,  $a, b \in \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ . Un cobordismo entre los tangles planos  $a$  y  $b$ , ( $a, b \in \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ ), es una superficie suave  $S$  encajada en  $\mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ , donde la frontera inferior es  $S \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) = a$  y la frontera superior es  $S \cap (\mathbf{R}^2 \times \{1\}) = b$ . Las fronteras laterales son segmentos de recta que unen los puntos frontera de  $a$  y  $b$  respectivamente. Sobre un círculo la superficie es simplemente una membrana suave con frontera el círculo. Por ejemplo la Figura 13 muestra un cobordismo entre los (1,2)-tangles planos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$  se dibuja en el plano inferior de la figura y  $\mathbf{b}$  está sobre el plano superior.

La composición de 2-morfismos se define del siguiente modo: Si se tiene un cobordismo admisible  $\mathbf{S}_1$  entre  $a$  y  $b$ , y un cobordismo admisible  $\mathbf{S}_2$  entre  $b$  y  $c$ , la concatenación de  $\mathbf{S}_1$  y  $\mathbf{S}_2$  es un cobordismo entre  $a$  y  $c$ , como se muestra en la Figura 14.

También podemos hacer otro tipo de composición. Sean  $a, b \in \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  y  $c, d \in \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ . Sean,  $\mathbf{S}_1$  un cobordismo entre  $a$  y  $b$ , y  $\mathbf{S}_2$  un cobordismo entre  $c$  y  $d$ , entonces se puede componer  $\mathbf{S}_1$  con  $\mathbf{S}_2$  obteniendo un cobordismo admisible de  $ca$  a  $db$ . En otras palabras podemos hacer pegamientos laterales si los tangles son compatibles para la composición. En la Figura 15 se muestra la composición lateral de los cobordismos  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{S}_2$  y  $\mathbf{S}_3$ , donde al componer los tangles  $a$ ,  $c$  y  $e$ ,  $eca$ , se obtiene una circunferencia y al componer los tangles

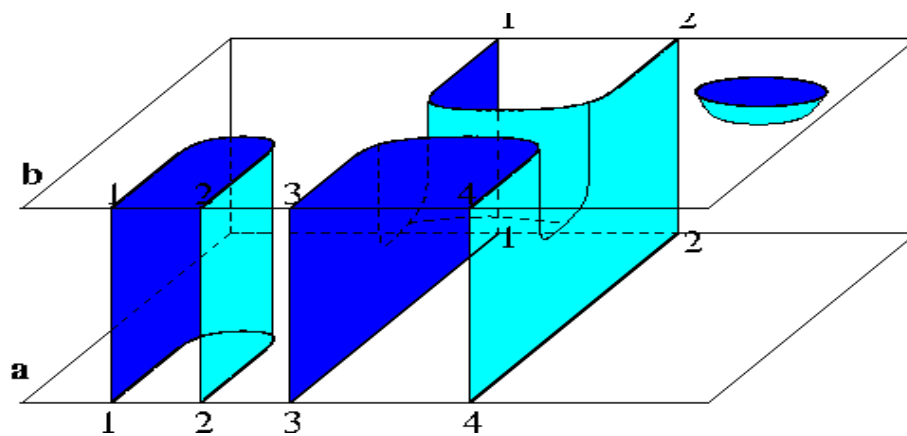


Figura 13

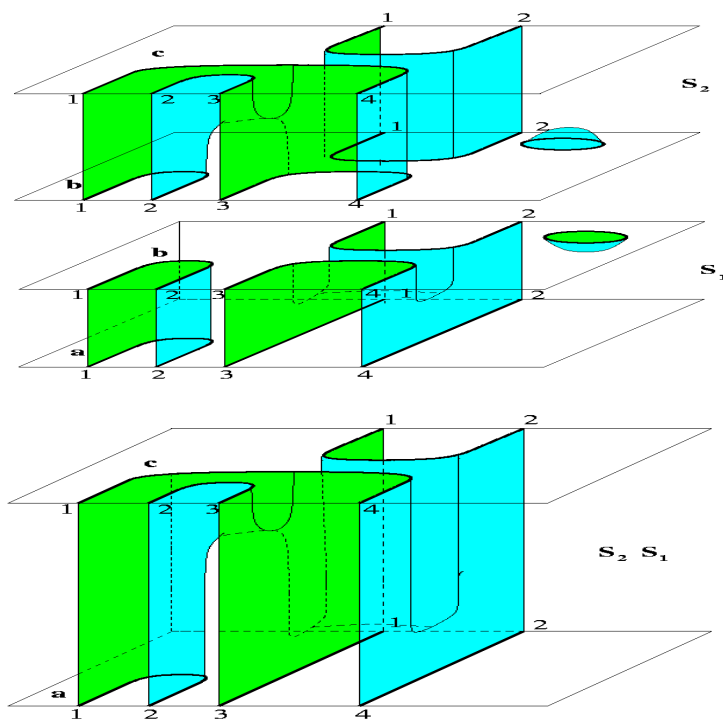


Figura 14



$b, d$  y  $f, fde$ , se obtienen dos circunferencias y entonces la composición de  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$  y  $\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_3\mathbf{S}_2\mathbf{S}_1$ , se puede ver como la figura de pantalón invertido mostrada.

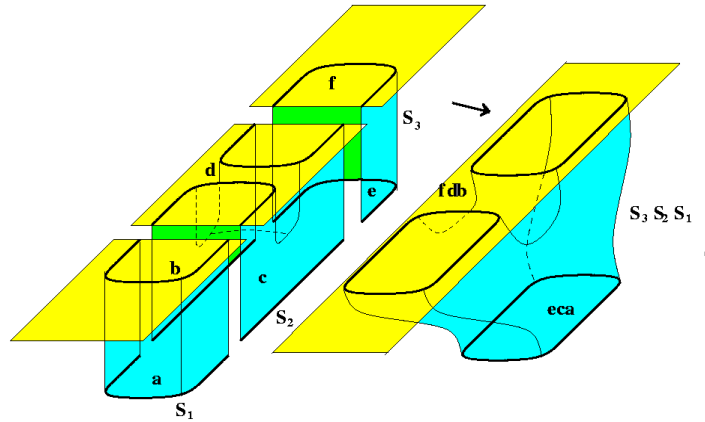


Figura 15

### 2.5 La 2-categoría Euler-Temperley-Leib.

La 2-categoría Euler-Temperley-Leib es la 2-categoría donde los objetos son enteros no negativos, los 1-morfismos son pares  $(a, \mathbf{i})$  donde  $a$  es un 1-morfismo de  $m$  a  $n$  en la 2-categoría Temperley-Leib, y donde  $\mathbf{i}$  es un entero. Un 2-morfismo de  $(a, \mathbf{i})$  a  $(b, \mathbf{j})$ ,  $a, b \in \hat{\mathbf{B}}(m, n)$ , son clases de isotopía de cobordismos  $\mathbf{S}$  entre  $a$  y  $b$ , y donde se tiene que la característica de Euler de  $\mathbf{S}$  es  $\chi(\mathbf{S}) = \mathbf{n} + \mathbf{m} + \mathbf{j} - \mathbf{i}$ . Aquí la composición de 1-morfismos  $(a, \mathbf{i})$  y  $(b, \mathbf{j})$  es simplemente  $(ab, \mathbf{i} + \mathbf{j})$  si  $a$  y  $b$  se pueden componer. La composición de 2-morfismos se hace como antes.

## 3 La cohomología de Khovanov.

### 3.1 Suavizaciones de cruces.

Sea  $\mathbf{L}$  un link orientado y sea  $\mathbf{D}$  un diagrama plano asociado a  $\mathbf{L}$ . Denotemos por  $\mathfrak{N}$  el conjunto de cruces de  $\mathbf{D}$  y sea  $n = |\mathfrak{N}|$  el cardinal de  $\mathfrak{N}$ . Llamaremos a cada cruce  $q$  de  $\mathbf{D}$  positivo o negativo si el cruce luce como en la Figura 16.



Figura 16

Entonces,  $n = n_p + n_m$  donde  $n_p$  es el número de cruces positivos y  $n_m$  es el número de cruces negativos. Por ejemplo en la Figura 17 tenemos un nudo con seis cruces donde especificamos los cruces positivos y los cruces negativos. Aquí  $n_p=4$  y  $n_m=2$ .

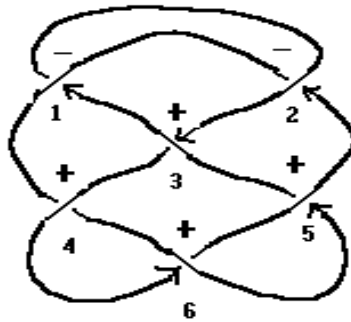


Figura 17

Existen dos posibles suavizaciones de cualquier cruce  $q$  de  $\mathbf{D}$  que denominaremos 0-suavización y 1-suavización según como se establece en la Figura 18.

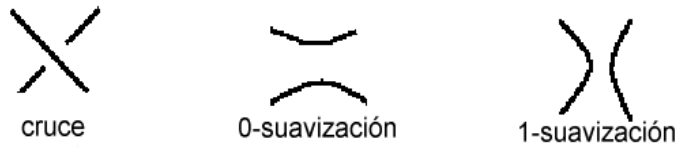


Figura 18

Cada una de las figuras anteriores corresponde al mismo diagrama  $\mathbf{D}$  asociado al link  $\mathbf{L}$  que varía solo en la forma indicada en una vecindad del punto de

cruce  $q$ . Por lo tanto tenemos que para el diagrama  $D$  el número total de posibles suavizaciones de todos los cruces  $q$  es  $2^{|\aleph|}$ . Se hace corresponder estas suavizaciones con los vértices de un cubo  $n$  dimensional, que denotaremos  $C_S(\mathbf{D})$ , y cada suavización individual es simplemente algún conjunto  $C_\alpha$  de curvas homeomorfas a círculos en el plano, donde  $\alpha \in \{0,1\}^\aleph$  ( $\{0,1\}^\aleph$  es el conjunto de las funciones de  $\aleph$  en  $\{0,1\}$ , es decir  $\alpha$  se puede ver como una sucesión de ceros y unos). De la misma forma se hace corresponder a cada arista del cubo con una sucesión  $\xi \in \{0,1,*\}^\aleph$ , donde  $\xi$  tiene exactamente un  $*$ . El  $*$  muestra el lugar donde se reemplaza un cero por un uno.

Cada arista del cubo representa un cobordismo entre los círculos que se forman al realizar una suavización  $C_\alpha$  con los círculos que se forman al realizar la suavización  $C_{\alpha^*}$ , donde  $\alpha^*$  se obtiene al reemplazar un cero por un uno en  $\alpha$  precisamente donde lo muestra la sucesión  $\xi$ . Denotamos este cobordismo como  $S_\xi$ .

$S_\xi$  es un morfismo en la categoría de cobordismos orientados. La **categoría de los cobordismos orientados** es la categoría donde los objetos son uniones de círculos disjuntos y los morfismos son cobordismos entre ellos.

La única diferencia entre una suavización  $C_\alpha$  y una  $C_{\alpha^*}$  es que  $C_{\alpha^*}$  tiene un círculo mas o bien un círculo menos, por lo tanto los cobordismos admisibles entre  $C_\alpha$  y  $C_{\alpha^*}$  solo pueden ser como los que se muestran en la Figura 19. En un cobordismo entre  $C_\alpha$  y  $C_{\alpha^*}$  aparecerá solo una figura de pantalón y en los demás círculos las superficies serán cilindros que representan el morfismo identidad.

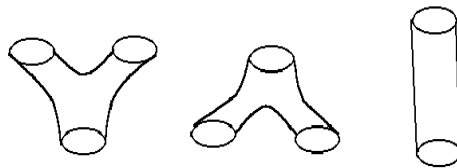


Figura 19

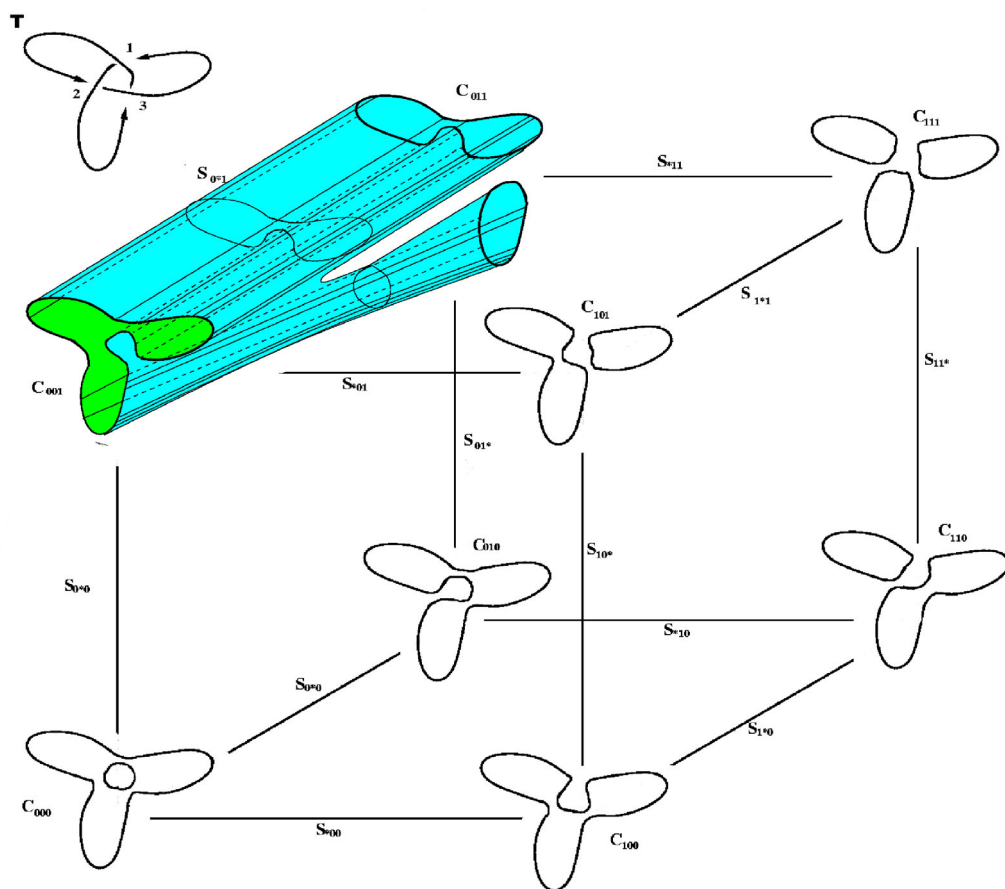


Figura 20

En la Figura 20 se muestra el diagrama del trebol  $T$  considerado con su orientación positiva y se muestra el cubo  $C_S(T)$ , (se muestra también en la figura el cobordismo  $S_{0*1}$ ).

### 3.2 Cubos conmutativos.

Un cubo conmutativo generaliza el concepto de cuadrado conmutativo. Dado un cubo  $n$ -dimensional se asigna un objeto de una categoría a cada vértice del cubo y un morfismo a cada arista, de tal modo que cada cara 2-dimensional del cubo sea un diagrama conmutativo.

Nuestro siguiente paso para la construcción de la cohomología de Khovanov de un Link  $L$  con un diagrama asociado  $\mathbf{D}$  es relacionar al cubo  $\mathbf{C}_S(D)$  con un cubo conmutativo de  $R$ -módulos sobre  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}(\mathbf{D})$ , a través de la TQFT (1+1)-dimensional que se define en 3.5.

### 3.3 Álgebra de Frobenius.

Un álgebra de Frobenius  $A$  es un álgebra conmutativa, asociativa, con unidad y con una aplicación lineal  $tr : A \rightarrow R$ , tal que la forma bilineal  $tr(a \otimes b)$  es no degenerada, en este caso  $R$  es un anillo, (ver [BK], sección 4.3).

### 3.4 El álgebra $\mathbf{A}$ .

Sea  $R = \mathbb{Z}[c]$  el anillo de los polinomios con coeficientes enteros en la variable  $c$  y sea  $\mathbf{A}$  un módulo graduado sobre  $R$  generado por los elementos  $\{\mathbf{1}, \mathbf{X}\}$ . Un módulo graduado  $M$  es un módulo que se puede escribir como la suma directa de una familia de sub-módulos de  $M$  indexados sobre un monoide conmutativo y aditivo,  $M = \bigoplus_i M_i$ .

$\mathbf{A}$  tiene carácter de un álgebra conmutativa con el producto  $\mathbf{m} : \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  definido por:  $\mathbf{m}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{X}) = \mathbf{m}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}) = \mathbf{0}$ .

Además también se puede dotar de una estructura de co-álgebra con el co-producto  $\Delta : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$  de la forma:  $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{X} + \mathbf{X} \otimes \mathbf{1} + c \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}$ ,  $\Delta(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}$ .

El módulo  $\mathbf{A}$  definido anteriormente junto con las operaciones  $\mathbf{m}$  y  $\Delta$ , y la aplicación  $tr(A) \rightarrow R$  definida como  $tr(\mathbf{1}) = 0$  y  $tr(\mathbf{X}) = 1$ , es un álgebra de Frobenius, (ver [Kh1]).

Se asignan ciertas graduaciones a los elementos de  $\mathbf{A}$  y  $R$  por medio de las funciones  $grad : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $grad(\mathbf{1}) = 1$  y  $grad(\mathbf{X}) = -1$ , y  $grad : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $grad(1) = 0$  y  $grad(c) = 2$ . Para  $a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \in \mathbf{A}^{\otimes n}$ ,  $grad(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_i^n grad(a_i)$ .

Por lo tanto se puede ver que el efecto que produce el producto y el coproducto sobre el grado en un elemento es reducirlo en uno, es decir,  $grad(\mathbf{m}) = -1$  y  $grad(\Delta) = -1$ .

### 3.5 Topological Quantum Field Theory.

Una **Topological Quantum Field Theory** (1+1)-dimensional, (o simplemente TQFT (1+1)-dimensional), asigna a cada 1-variedad compacta orientada  $\mathbf{N}$  sin frontera, (es decir a una unión disyunta de círculos), un espacio vectorial de dimensión finita  $\mathbf{V}_N$  sobre un campo  $K$ ,  $K$  de característica cero, (es decir  $K$  contiene un subcampo isomorfo a los racionales). Además una TQFT (1+1)-dimensional asigna a cada 2-variedad con frontera  $\mathbf{S}$  un vector  $\mathbf{v}_S \in \mathbf{V}_{\partial S}$ . Para una TQFT (1+1)-dimensional se usarán las siguientes convenciones:  $\mathbf{V}_\emptyset = K$ ,  $\mathbf{V}_{N^*} = (\mathbf{V}_N)^*$ , donde  $N^*$  es la variedad  $\mathbf{N}$  con la orientación contraria y  $(\mathbf{V}_N)^*$  es el espacio dual de  $\mathbf{V}_N$ , y que  $\mathbf{V}_{N \sqcup Y} = \mathbf{V}_N \otimes \mathbf{V}_Y$ . Así una superficie  $\mathbf{S}$ , con  $\partial \mathbf{S} = N^* \sqcup Y$ , es enviada bajo el functor TQFT (1+1)-dimensional, en una aplicación lineal  $\mathbf{v}_S = \mathbf{V}_N \rightarrow \mathbf{V}_Y$ , (ver [BK] para obtener la axiomática completa).

**Teorema.** Las TQFT (1+1)-dimensionales están en correspondencia uno-a-uno con las álgebras de Frobenius de dimensión finita, (ver [BK], pag. 79).

La Figura 21 muestra la correspondencia entre los morfismos de la categoría de cobordismos y morfismos entre la categoría de los  $R$ -módulos graduados a través de una TQFT (1+1)-dimensional.

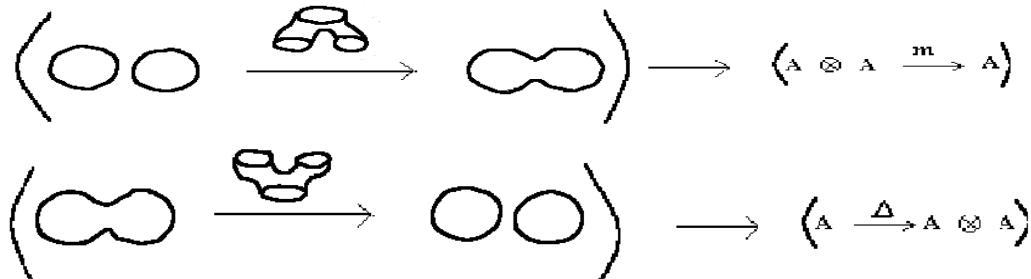


Figura 21

El cubo  $\mathbf{C}_A(\mathbf{D})$  se obtiene a partir del cubo  $\mathbf{C}_S(\mathbf{D})$  reemplazando cada vértice  $C_\alpha$  por un  $R$ -módulo  $\mathbf{A}_\alpha(\mathbf{D}) = \mathbf{A}^{\otimes k} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}^{\otimes k}$  el producto tensorial de  $\mathbf{A}$  consigo mismo  $k$  veces, donde  $k$  es el número de círculos en  $C_\alpha$ . Cada arista  $S_\xi$  del cubo  $\mathbf{C}_S(\mathbf{D})$  se reemplaza por un morfismo de  $R$ -módulos que denotaremos  $d_\xi$ .

Usaremos el símbolo  $\Delta_{ijk}$  para denotar el morfismo  $\mathbf{A}^{\otimes k} \rightarrow \mathbf{A}^{\otimes(k+1)}$  que aplica  $\Delta$  al  $i$ -ésimo factor en  $\mathbf{A}^{\otimes k}$  sobre los factores  $j$ -ésimo y  $k$ -ésimo en  $\mathbf{A}^{\otimes(k+1)}$  y sobre el resto de factores aplica la identidad. Dicho de otra forma, si se numeran los círculos en  $C_\alpha$  y  $C_{\alpha^*}$  y el número de círculos de  $C_{\alpha^*}$  es el número de círculos de  $C_\alpha$  mas uno, se hace corresponder al cobordismo que tiene figura de pantalón invertido el morfismo  $\Delta$  y a los cilindros se hace corresponder la identidad.

De la misma manera  $\mathbf{m}_{ijk}$  es el morfismo  $\mathbf{A}^{\otimes(k+1)} \rightarrow \mathbf{A}^{\otimes k}$  que aplica  $\mathbf{m}$  a los factores  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo en  $\mathbf{A}^{\otimes(k+1)}$  sobre el factor  $k$ -ésimo en  $\mathbf{A}^{\otimes k}$ , esto si el número de círculos de  $C_{\alpha^*}$  es el número de círculos de  $C_\alpha$  menos uno.  $d_\xi$  incluirá solamente a estos tipos de morfismos.

Para el nudo trébol  $\mathbf{T}$  el cubo  $\mathbf{C}_A(\mathbf{D})$  luce como se muestra en la Figura 22.

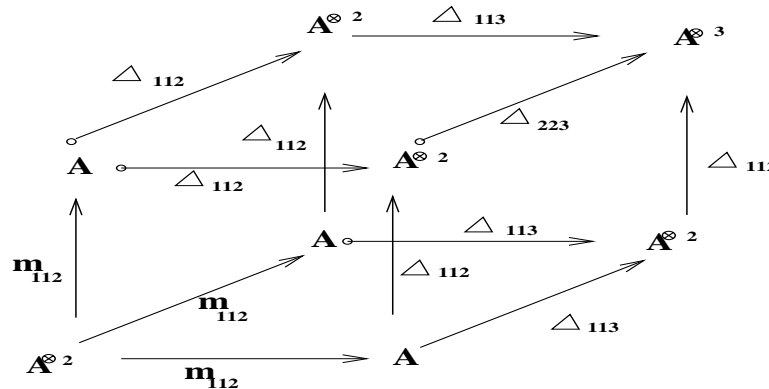


Figura 22

Por lo tanto es natural que se tenga la siguiente proposición:

**Proposición:** El cubo  $n$ -dimensional  $\mathbf{C}_A(\mathbf{D})$  es conmutativo. (vease [Kh1]).

### 3.6 Cadenas complejas

En seguida debemos llevar el cubo  $\mathbf{C}_A(\mathbf{D})$  a una cadena compleja  $C(\mathbf{D})$ . Para ello hacemos  $C^r(\mathbf{D}) := \bigoplus_{\alpha \in \{0,1\}^n, |\alpha|=r} \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{D})$ , donde  $r = |\alpha|$  es el número de 1's que tiene la sucesión  $\alpha$ , y asociamos la aplicación  $d^r : C^r \rightarrow C^{r+1}$ ,  $d^r = \sum_{\xi \in \{0,1,*\}^n} (-1)^\xi d_\xi$ , donde  $(-1)^\xi = -1$  si la sucesión  $\xi$  tiene un número

impar de 1's antes de la posición en la que aparece \*, y  $(-1)^\xi = 1$  si la sucesión  $\xi$  tiene un número par de 1's antes de la posición en la que aparece \*.

**Proposición:**  $(C(\mathbf{D}), d)$  es un complejo, es decir,  $d^2 = 0$ . (ver, [Kh1]).

Sea  $W$  un espacio vectorial graduado,  $W = \bigoplus_m W_m$ , se define la **dimensión graduada** de  $W$  como la serie de potencias:  $\mathbf{qdim}(W) = \sum_m q^m \dim(W_m)$ .

De manera análoga se define la característica de Euler graduada de un complejo  $C(\mathbf{D})$  como:  $\chi(C(\mathbf{D})) = \sum_r (-1)^r q^r \dim_{\mathcal{Q}} \mathbf{H}^r$ , donde  $\mathbf{H}^r$  corresponde al  $r$ -ésimo grupo de homología de  $C(\mathbf{D})$ .

Ahora es necesario hacer cierto cambio en los grados de los elementos de  $C(\mathbf{D})$  con el fin de que al calcular la característica de Euler graduada de la cadena de homología esta coincida con el polinomio de Jones. Para ello si  $W = \bigoplus_m W_m$  es un espacio vectorial graduado con componentes homogéneas  $\{W_m\}$ , se define  $\{l\}$  la operación de cambio de grado en  $W$  tal que  $W\{l\}_m = W_{m-l}$ .

Se define también  $[s]$  como la operación de cambio del orden en una cadena compleja. Si  $C'$  es una cadena compleja  $\dots \rightarrow C^r \rightarrow C^{r+1} \rightarrow \dots$  de espacios vectoriales, entonces la cadena compleja  $C = C'[s]$  es tal que  $C^r = C'^{r-s}$  con todos los grados de las diferenciales cambiados de la misma forma.

Con todo lo anterior formamos ahora la cadena compleja  $\mathbf{CK}(\mathbf{D})$  donde el  $r$ -ésimo grupo de cadena es  $\mathbf{CK}^r(\mathbf{D}) = \bigoplus_{\alpha: r=|\alpha|} \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{D})[r]$ . Finalmente, el complejo que nos interesa es:

$$\mathbf{CKH}(\mathbf{D}) := \mathbf{CK}^r[-n_m] \{n_p - 2n_m\},$$

donde  $n_p$  y  $n_m$  se definieron en 3.1.

La cohomología de Khovanov asociada al diagrama  $\mathbf{D}$  del link  $\mathbf{L}$  es la homología  $\mathbf{H}(\mathbf{D}) := H^r(\mathbf{D})$  del complejo  $\mathbf{CKH}(\mathbf{D})$ .

## 4 Teoremas principales.

Los siguientes teoremas muestran como la cohomología de Khovanov es un invariante isotópico de nudos que permite hacer una mejor clasificación de los nudos. Esta clasificación generaliza al polinomio de Jones (ver [BN]).



**Teorema Princial** (Khovanov) : Las clases de isomorfía de los grupos de homología  $H^r(\mathbf{D})$  son invariantes del link  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{D}$  es un diagrama cualquiera asociado a  $\mathbf{L}$ . (Ver la demostración en [Kh1], sección 5).

De otra parte recordemos que el bracket de Kauffman de la proyección de un Link  $\mathbf{L}$  se define através de las siguientes fórmulas:

$$\langle \text{Diagrama de cruce} \rangle = \langle \text{Diagrama de resolución superior} \rangle - q \langle \text{Diagrama de resolución inferior} \rangle$$

$$\langle \text{Diagrama con un círculo} \rangle = (q + q^{-1}) \langle \text{Diagrama sin círculo} \rangle$$

A partir del bracket de Kauffman definimos el **polinomio de Jones** de  $\mathbf{L}$  como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{L}) = (-1)^{n_m} q^{n_p - 2n_m} \langle \mathbf{L} \rangle$$

**Teorema** (Khovanov): El polinomio de Jones de un Link  $\mathbf{L}$  es la característica de Euler graduada del complejo  $\mathbf{CK}(\mathbf{D})$ , es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{L}) &= \sum_r (-1)^r q^r \dim_Q(\mathbf{CK}^r(\mathbf{D}))[-n_m]\{n_p - 2n_m\} \\ &= \sum_r (-1)^r q^r \dim_Q \mathbf{H}^r. \end{aligned}$$

Para la demostración ver [Kh1].

Para el nudo trébol el esquema de la Figura 23 ejemplifica la construcción. La cadena compleja en este caso está dada por:

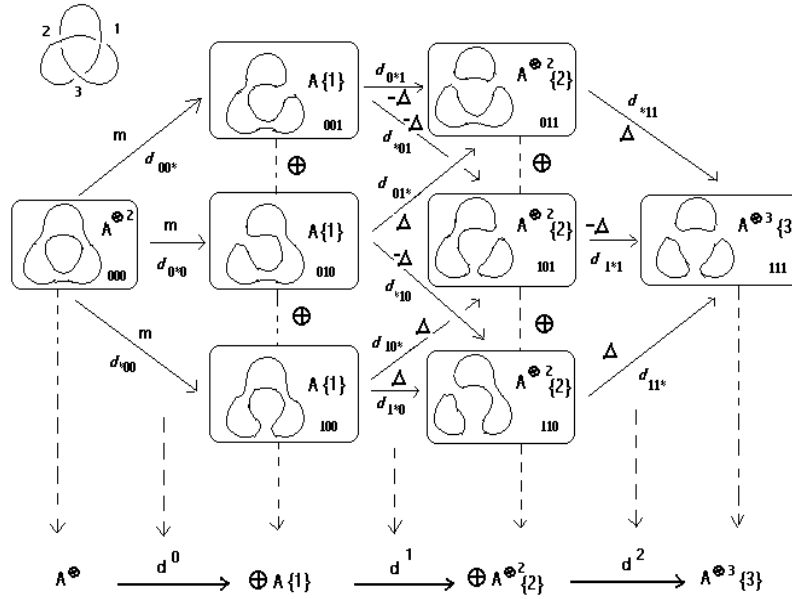


Figura 23

$$\begin{aligned}
 CK^0 &\xrightarrow{d^0 = \sum_{|\xi|=0} (-1)^\xi d_\xi} CK^1 \xrightarrow{d^1 = \sum_{|\xi|=1} (-1)^\xi d_\xi} CK^2 \xrightarrow{d^2 = \sum_{|\xi|=2} (-1)^\xi d_\xi} CK^3 \\
 &= A^{\otimes 2} \xrightarrow{m_{12} + m_{12} + m_{12}} \bigoplus_1^3 A \xrightarrow{-\Delta^{12} - \Delta^{12} + \Delta^{12} - \Delta^{13} + \Delta^{12} + \Delta^{13}} \bigoplus_1^3 A^{\otimes 2} \\
 &\xrightarrow{\Delta^{13} - \Delta^{23} + \Delta^{12}} A^{\otimes 3} = CK \xrightarrow{\substack{[-n_m]\{n_p - 2n_p\} \\ (\text{donde } (n_p, n_m) = (3, 0))}} CKH(\mathbf{T})
 \end{aligned}$$

Se puede ver que el grado del diferencial  $d^r$  es cero, para todo  $r$ , por lo tanto la suma alternada de las dimensiones graduadas de estos grupos de cadena y la suma alternada de los rangos graduados de los grupos de homología son iguales.

Para el nudo trebol  $\mathbf{T}$  la suma alternada de las dimensiones graduadas de los grupos de cadena es

$$(q + q^{-1})^2 - 3q(q + q^{-1}) + 3q^2(q + q^{-1})^2 - q^3(q + q^{-1})^3 = q^{-2} + 1 + q^2 - q^6.$$

Multiplicando esta última expresión por el factor  $(-1)^{n_m} q^{n_p - 2n_m} \frac{1}{(q + q^{-1})}$ , se

obtiene el polinomio de Jones para el trebol:  $\mathbf{J}(\mathbf{D}) = \mathbf{q}^2 + \mathbf{q}^6 - \mathbf{q}^8$ . En este caso  $n_p = 3$  y  $n_m = 0$ .

De esa forma se completa la construcción de la cohomología de Khovanov y se obtiene una herramienta fuerte en vía de la clasificación de nudos, un problema que adquiere cada vez más trascendencia en el ámbito de las ciencias naturales, que se aplican a situaciones reales, como la física y la biología. También, como se muestra en este artículo, se establecen relaciones entre diferentes áreas de la matemática como la teoría de nudos, la topología algebraica, las variedades diferenciables, la combinatoria y otras más.

## Bibliografía

- [A] M.F. Atiyah. *Topological Quantum Field Theories*. I.H.I.S. Publ.,68:175-186, 1998.
- [B] C Blanchet. *Introduction to Quantum Invariants of 3-Manifolds, Topological Quantum Field Theories and Modular Categories*. Summer School on Geometric and Topological Methods for The Quantum Field Theory. Villa de Leyva. Julio de 2001.
- [BK] B. Bakalov, A. Kirillov, Jr. *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*. The American Mathematical Society. USA, 2001.
- [BFK] J. Bernstein, I.B. Frenkel, and M. Khovanov. *A Categorification of The Temperley-Lieb algebra and Schur Quotients of  $U(\mathfrak{sl}_2)$  Via Projective and Zuckerman Functors*. Selecta Math., New Ser., 5:199-241, 1999. ArXiv:math.QA/0002087.
- [BKT] Dror Bar-Natan, David Kazhdan, y Dilan Thurston. *Categorification for the Busy Mathematician*. <http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn/paper/Categorification/>, septiembre 7 2001.
- [BN] Dror Bar-Natan. *On Khovanov's Categorification of the Jones Polynomial*. <http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn/paper/Categorification/> Feb. 28, 2002.
- [FJW] I.B. Frenkel, N Jing, and W. Wang. *Vertex Representations via finite Groups and the McKay Correspondence*. ArXiv:math.QA/9907166, 1999.

- [FK] I.B. Frenkel and M. Khovanov. *Canonical Basis in Tensor Products and Graphical Calculus for  $U(\mathfrak{sl}_2)$* . Duke Math J., 87(3):409-480, 1997.
- [HK] R.S. Huerfano and M. Khovanov. *A Category for the Adjoint Representation*. Journal of Algebra, 246, 514-542 (2002). Elsevier Science, 2001.
- [J1] V. Jones. *A Polynomial Invariant of Knots via Von Neumann Algebra*. Bull. AMS 12,103-111, 1987.
- [J2] V. Jones. *Commuting Transfer Matrices and Link Polynomials*. International Journal of Mathematics, Vol.3, no.2,205-212,1992.
- [K1] L.H. Kauffman. *State Models and the Jones Polynomial*. Topology, 26(3):395-407, 1987.
- [K2] L.H. Kauffman. *On Knots*. Princeton Univ. Press. Princeton, 1987.
- [K3] L.H. Kauffman. *Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds*. Annals of Mathematics Studies, no.134. Princeton Univ. Press. Princeton, 1987.
- [Kh1] M. Khovanov. *A Categorification of The Jones Polynomial*. Duke Math Journal, vol.3, no.101, 2000, 359-426, arXiv math.QA/9908171, 1999.
- [Kh2] M. Khovanov. *A Functor-Valued Invariant of Tangles*. Algebraica and Geometric Topology. v. 2, 665-741 (2002). August 9, 2002.
- [KS] M. Khovanov and Sediel. *Quivers, Floer Homology and Braid Group Action*. Journal of the American Mathematical Society. V. 15, n 1, 203-271.
- [R] D. Rolfsen. *Knots and Links*. Mathematics Lecture Serie. Publish or Perish, 1976.
- [T] V. Turaev. *Quantum Invariants on Knots and 3-Manifolds*, De Gruiter Studies in Mathematics. 18. 1994.
- [W] E. Witten. *Quantum Field Theory and The Jones Polynomial*. Comm. Math. Phys., 121(3):351-399, 1989.