CLASES DE ANILLOS CONMUTATIVOS QUE CARACTERIZAN ALGUNOS AXIOMAS DE SEPARACIÓN

Jesús Antonio Ávila G.
Profesor Depto. de Matemáticas y Estadística
Universidad del Tolima.

1 Introducción.

El origen de la teoría del espectro primo de un anillo se encuentra hacia 1930 en las ideas desarrolladas por Stone, cuando mostró la correspondencia uno a uno entre los retículos Booleanos y los anillos Booleanos (Teorema de Stone), luego toma la forma actual gracias a los trabajos desarrollados por Jacobson y Zariski, entre otros. Uno de los resultados importantes sobre el tema se refiere a que el espectro puede verse como un funtor de la categoría de los anillos conmutativos unitarios a los espacios topológicos, lo cual permite establecer un "diccionario" de propiedades entre los objetos y morfismos de dichas categorías. De esta forma lo que se buscó fue "traducir" ciertas propiedades topológicas supuestas en $Spec(R)$ en propiedades algebraicas del anillo R. Algunas de estas propiedades topológicas han sido estudiadas desde el origen de dicha teoría y han sido incluidas como ejercicios en algunos textos clásicos ([3], [6], [31]) y desarrolladas en parte en [1] y [11].

Ahora bien en la literatura consultada no se encuentra la "traducción" de ciertas propiedades topológicas como compacidad secuencial, conexidad por arcos, regularidad, axiomas de separación entre T_0 y T_1 ([4]). El objetivo de la presente conferencia es mostrar los anillos que caracterizan algunos axiomas de separación, incluyendo los que se encuentran entre T_0 y T_1, pues es bien sabido que los anillos cuyo espectro es T_1 (y T_2), son aquellos donde primos y maximales coinciden, esto significa que imponer esta condición a $Spec(R)$ es muy fuerte, pues claramente esta clase de anillos es "muy pequeña".

2 Preliminares.

2.1 Anillos conmutativos.

Ahora se presenta la forma de definir la topología de Zariski sobre el conjunto de ideales primos propios de un anillo conmutativo unitario y se da una base para dicha topología. Una exposición más detallada de este tema se encuentra en [1], [3] y [11].
Sea R un anillo conmutativo unitario, con $Spec(R)$ se denotará al conjunto de todos los ideales primos propios de R. Paran $E \subseteq R$, se define $V(E) = \{P \in Spec(R)/E \subseteq P\}$, con esto se tienen las siguientes propiedades:

1. $V(0) = Spec(R)$, $V(1) = \emptyset$

2. Si $\{E_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de R, entonces $\bigcap_{i\in I} V(E_i) = V(\bigcup_{i\in I} E_i)$.

3. Si E_1 y E_2 son subconjuntos de R, entonces $V(E_1) \cup V(E_2) = V(< E_1 > \cap < E_2 >) = V(< E_1 >< E_2 >)$.

Al definir $\xi = \{V(E)/E \subseteq R\}$, se tiene por las propiedades anteriores que esta colección satisface los axiomas para subconjuntos cerrados de un espacio topológico, luego si se define $\tau = \{Spec(R) - V(E)/E \subseteq \ R\}$ se tiene que $(Spec(R), \tau)$ es un espacio topológico, llamado espectro primo del anillo R y τ se llama topología de Zariski.
Una base para esta topología está dada por la colección $\beta = X_f/f \in R$ donde $X_f = Spec(R) - V(f)$. Existen relaciones interesantes entre los elementos X_f y propiedades algebraicas del anillo R, pueden consultarse en [11].

2.2 Algunos axiomas de separación.

El estudio de los axiomas de separación más fuertes que T_1, se inició con los trabajos de Uryshon y posteriormente por Freudenthal y Van Est en 1951 ([9]). El desarrollo de los axiomas entre T_0 y T_1, se inició con los trabajos de J. W. T. Young ([30]) y C. T. Yang ([17]), finalmente C. E. Aull y W. J. Thron ([4]), introdujeron nuevos axiomas, dando caracterizaciones equivalentes para algunos de ellos, analizando sus relaciones de inclusión y observando que todos ellos pueden ser descritos en términos del comportamiento de conjuntos derivados de puntos.

Los axiomas de separación usualmente conocidos y sus relaciones de inclusión se observan en Fig.1.

Nota: por conjunto degenerado se entenderá que es vacío ó unitario y $A\Box B$ significará que existe un abierto G, tal que $A \subseteq G$ y $G \cap B = \emptyset$.

T_4	$\Rightarrow$	T_3	$\Rightarrow$	T_3	$\Rightarrow$	T_2	$\Rightarrow$	T_1	$\Rightarrow$	T_0

Fig.1

Donde un espacio topológico (X, t) se dice:

T_0 si y solo si para todo x, $y \in X$, $x \neq y$ se tiene que $x\Box y$ ó $y\Box x$.

T_1 si y solo si para todo x, $y \in X$, $x \neq y$ se tiene que $x\Box y$ ó $y\Box x$.

T_2 si y solo si para todo x, $y \in X$, $x \neq y$ existen abiertos G, H, tales que $x \in G$, $y \notin G$ y $y \in H$, $x \notin H$.

T_3 si y solo si es regular y T_1. Regular significa que para todo $x \in X$ y todo cerrado F de X, con $x \notin F$, existen abiertos disyuntos G, H, tales que $F \subseteq G$ y $x \in H$.

$T_{3/2}$ si y solo si es completamente regular y T_1. Completamente regular significa que para todo $x \in X$ y cualquier subconjunto cerrado F de X, con $x \notin F$, existe una función continua, $f : x \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$.

T_4 si y solo si es normal y T_1. Normal significa que para todo par de subconjuntos cerrados disyuntos F y K de X, existen abiertos disyuntos G, H, tales que $F \subseteq G$ y $K \subseteq H$.

Las definiciones anteriores pueden "visualizarse" en el siguiente diagrama:

Aunque en los textos clásicos solo se presentan los axiomas de la Fig.1, estos no son los únicos, pues en [29] se estudian axiomas entre T_2 y T_1 y en [4] axiomas entre T_0 y T_1. Algunos de estos últimos se presentan en el siguiente diagrama de implicaciones.

T_1	$\Rightarrow$	T_{DD}		$\Rightarrow$		T_D		
		$\Downarrow$						
$\Downarrow$		T_{YS}				$\Downarrow$		
		$\Downarrow$						
T_{FF}	$\Rightarrow$	T_Y	$\Rightarrow$	T_F	$\Rightarrow$	T_{UD}	$\Rightarrow$	T_0

Fig.3

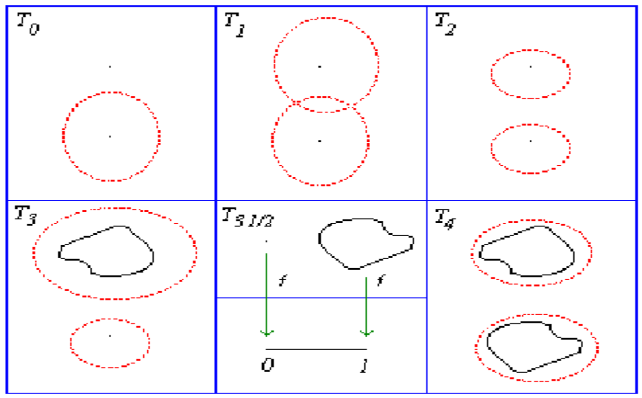

Fig.2

Donde un espacio topológico (X, τ) se dice:
T_{UD} si y solo si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es unión de cerrados disyuntos.
T_D si y solo si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es cerrado.
T_{DD} si y solo si es T_D y para todo x, $y \in X$, $x \neq y$, $x' \cap y' = \emptyset$.
T_F si y solo si para todo $x \in X$ y cualquier subconjunto finito F de X, con $x \notin F$, se tiene que $x \Box F$ ó $F \Box x$.
T_{FF} si y solo si para todo F_1, $F_2 \subseteq X$ finitos y $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, se tiene que $F1 \Box F2$ ó $F2 \Box F1$.
T_Y si y solo si para todo x, $y \in X$, $x \neq y$ se tiene $\overline{x} \cap \overline{y}$ es degenerado.
T_{YS} si y solo si para todo x, $y \in X$, $x \neq y$ se tiene $\overline{x} \cap \overline{y}$ es $\emptyset$ ó $\{x\}$ ó {y}.

3 De nociones topológicas a clases de anillos.

3.1 El funtor *Spec* como mecanismo de traducción.

Ya que el espectro primo de un anillo, $Spec(R)$, se puede ver como un funtor de la categoría de los anillos conmutativos unitarios a los espacios topológicos, se tiene que *Spec* es el mecanismo que nos permite determinar si una clase de anillos caracteriza una propiedad topológica particular, en el siguiente sentido: dada una propiedad topológica P se dice que la clase de anillos C caracteriza dicha propiedad si para todo anillo R, con $R \in C$ se tiene que $Spec(R)$ tiene la propiedad P si y solo si $R \in C$. De esta forma surge naturalmente la pregunta de cual es la traducción de los axiomas de separación, en el "lenguaje algebraico".

Fácilmente se puede observar que para todo anillo R, $Spec(R)$ es T_0.

Ahora en [1] se muestra que $Spec(R)$ es T_1 si y solo si $dimR = 0$ (equivalente a decir que los primos coinciden con los maximales) y en [3] se encuentra propuesto como ejercicio que $Spec(R)$ es T_1 si y solo si es T_2.

Es decir la traducción de las propiedades de la Fig.1 es la clase de todos los anillos y la clase de los anillos de dimensión cero. Lo anterior conduce a que los axiomas entre T_1 y T_4 son condiciones muy fuertes y ser T_0 es una condición muy débil.

Entonces vale la pena preguntarse sobre la traducción de la normalidad, de la regularidad y de los axiomas entre T_0 y T_1.

En [7] expresan que la clase de anillos que caracterizan la propiedad de ser normal son los pm-anillos, definidos como aquellos donde cada primo está contenido en un único maximal. Es decir el diagrama reticular del espectro es como el de la siguiente figura:

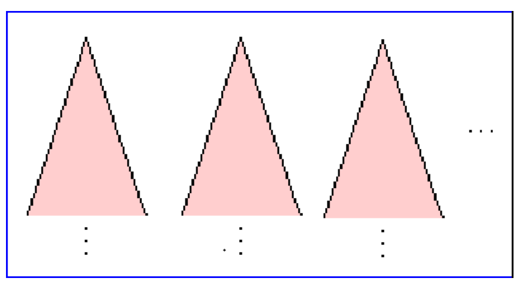

Fig.4

Ejemplos de estos anillos son los de dimensión cero, los dominios de valuación, el anillo de todas las funciones continuas de un espacio topológico en los reales ([7], [13]) y por el siguiente teorema demostrado en [20], se pueden construir $pm-$anillos de cualquier dimensión finita.

Teorema 1 *Dado un conjunto parcialmente ordenado finito X existe un anillo conmutativo unitario R, tal que $Spec(R) \simeq X$ (como conjuntos parcialmente ordenados).*

En la literatura consultada no se encuentran las clases de anillos que caracterización la propiedad de ser regular ó $T_{3/2}$.

Ahora observando el diagrama de la Fig.3, surgen naturalmente las siguientes preguntas:

1. $Spec(R)$ cumple los axiomas de separación entre T_0 y T_1 para todo anillo R?

2. $Spec(R)$ cumple los axiomas de separación entre T_0 y T_1 si y solo si primos y maximales coinciden?

En [5] se muestra que $Spec(Z)$ no es T_D pero sí es T_{UD}, lo cual responde ambas preguntas negativamente. Esto debe conducir necesariamente a clases de anillos diferentes a las ya mencionadas, que caracterizan dichas propiedades. En este mismo trabajo se muestra que la traducción del diagrama de la Fig. 3 es el siguiente:

A_0	$\Rightarrow$	ΔM_t		$\Rightarrow$		Δ		
		$\Downarrow$						
$\Downarrow$		M_t				$\Downarrow$		
		$\Downarrow$						
B	$\Rightarrow$	Ψ_1	$\Rightarrow$	A_1	$\Rightarrow$	?	$\Rightarrow$	A

Fig.5

Donde:

A es la clase de los anillos conmutativos.

A_1 es la clase de los anillos conmutativos R con $dimR \leq 1$.

Ψ_1 es la clase de los anillos R que son $Y-$anillos y $dimR \leq 1$.

Δ es la clase de los $D-$anillos.

M_1 es la clase de los anillos R que son $m-$anillos y $dimR \leq 1$.

ΔM_1 es la clase de los anillos R que son $m-$anillos, $D-$anillos y $dimR \leq 1$.

B es la clase de los anillos R con $dimR = 0$ ó $dimR \leq 1$ y existe a lo más un primo minimal no maximal ó un primo maximal no minimal.

A_0 es la clase de los anillos R con $R = 0$.

Si $Y\Delta$ es la clase de los anillos cuyo espectro es T_{UD} y Y es la clase de los $U-$anillos, se tiene que $Y \neg Y\Delta$.

Los $D-$anillos están definidos como aquellos donde para todo primo P no maximal, la intersección de los primos que lo contienen estrictamente es distinta de P.

Los $Y-$anillos están definidos como aquellos donde para todo par de maximales distintos P y Q, el conjunto de los primos minimales que ambos contienen es degenerado.
Los $m-$anillos están definidos como aquellos donde todo primo contiene un único primo minimal.
Los $U-$anillos están definidos como aquellos donde para todo primo P, el conjunto de primos que lo contienen estrictamente es una familia comaximal.

3.2 Algunas generalidades sobre los $D-$anillos, $Y-$anillos y $U-$anillos.

En la siguiente tabla se presentan algunas generalidades sobre los anillos en cuestión como existencia, cocientes, anillo de fracciones, anillo producto, dimensión. Un desarrollo más formal de estos hechos puede consultarse en [5].

Propiedad	$D-$anillos	$U-$anillos	$Y-$anillos
Existencia	De dimensión 0. Semilocales de dimensión 1. De espectro finito	De dimensión 0 y 1. D. de valuación De funciones. A. cuyo espectro es. un árbol	Locales, DI pm-anillos m-anillos.
Cocientes	Sí	Sí	No siempre[3]
A. de Fracciones	Sí	Sí	?
Producto (finito)	Puede ser[1]	Puede ser[2]	Puede ser[4]
Dimensión	Finita: para todo $n \geq 0$ Infinita: sí.	Infinita: ? Finita: para todo$n \geq 0$	Finita: para todo $n \geq 0$ Infinita: sí.

Tabla 1.

[1] El producto de anillos con espectro finito.
[2,4] El anillo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
[3] Ver [5].

Aunque en la tabla anterior se encuentran algunas propiedades (algebraicas) de los anillos anteriormente definidos, quedan por desarrollar algunos temas de importancia como el estudio de sus espectros, el anillos de polinomios, el anillo de series formales, extensiones de anillo y otras caracterizaciones de dichos anillos.

Bibliogarafía

[1] Ahumada, R.E. El funtor Spec. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 1983.

[2] Arbib, M. and Manes, E. Arrows, Structures and Functors: The Categorical Imperative. Academic Press. New York. 1975.

[3] Atiyah, M.F. y MacDonald, I.G. Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts. 1969.

[4] Aull, C.E. and Thron, W.J. Separations Axioms Between T0 and T1. Indagations Math., 24(1962), 26-37.

[5] Ávila, J.A. Propiedades Topológicas del Espectro Primo de un Anillo Conmutativo Unitario. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 2002.

[6] Bourbaki, N. Algebre Commutative. Hermann. Paris. 1961.

[7] DeMarco, Giuseppe and Orsatti, Adelberto. Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal. Proc. Amer. Math. Soc., 30(1971), 459-466.

[8] Dieudoné, J. Cours de geometrie algebrique. I. PUF. Paris. 1974.

[9] Est, W.T. and Freudenthal, H. Trennung durch stetige Funktionen in Topologischen Raumen. Ind. Math., 13(1951), 359-368.

[10] Faith, C. Algebra I: Rings, Modules and Categories. Springer-Verlag. New York. 1981.

[11] Fernández, James S. The Prime Spectrum of a Ring: A Survey. MSC. Thesis, Florida Atlantic University. Boca Ratón. 1991.

[12] Gilmer, R. Multiplicative Ideal Theory. Marcel Dekker. New York. 1972.

[13] Gillman, L. and Jerison, M. Rings of Continuous Functions. Van Nostrand. New Jersey. 1962.

[14] Grothendiek, A. Elements de geometrie algebrique. Le langage de schemas. IHES, Pub. Math. No. 4. París. 1960.

[15] Henriksen, M. and Jerison, M. The Space of Minimal Prime Ideals of a Commutative Rings. Trans. Amer. Math. Soc., 115(1965), 110-130.

[16] Hochster, M. Prime Ideal Structure in Commutative Rings. Trans. Amer. Math. Soc., 142(1969), 43-60.

[17] Kelley, J.L. General Topology. Springer-Verlag. New York 1955.

[18] Larson, R.E. Minimal T0-spaces and Minimal TD-spaces. Pacific Journal of Mathematics. Vol. 31, No. 2 (1969), 451-458.

[19] Lezama, O. y Villamarín, E. Anillos, Módulos y Categorías. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 1994.

[20] Lewis, W.J. The Spectrum of a Ring as a Partially Ordered Set. Journal of Algebra, 25(1973), 419-434.

[21] Lewis, W.J. and Ohm, J. The Ordering of Spec(R). Can. J. Math., Vol. XXVIII, No. 3(1976), 820-835.

[22] McCoy, N.H. Prime Ideals in General Rings. AMS. 1948.

[23] Mitchell, B. Theory of Categories. Academic Press. New York. 1965.

[24] Munkres, J.R. Topology a First Course. Prentice-Hall. New Jersey. 1975.

[25] Simmons, H. Reticulated Rings. Jornal of Algebra. 66(1980), 169-192.

[26] Sommerset, D.W.B. Minimal Primal Ideals in Rings and Banach Algebras. Journal of Pure and Applied Algebra, 144(1999), 67-89.

[27] Spindler, K.H. Abstract Algebra with Applications (I y II). Marcel Dekker. New York. 1994.

[28] Tianming, H. The Spectrum of a Noetherian Ring. Journal of Mathematical Research an Exposition, V. 10, No. 02, Mayo 1990.

[29] Wilansky, A. Between T1 and T2. American Mathematical Monthly, 74(1967), 261-266.

[30] Young, J.W.T. A Note on Separation Axioms and their Applications en the Theory of a Locally Connected Topological Space. Bull. Amer. Math. Soc., 49(1943), 383-385.

[31] Zariski, O. and Samuel, P. Commutative Algebra. Van Nostrand. New York. 1958.