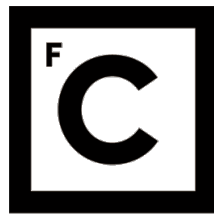


UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS



**Ciências**  
**ULisboa**

## **Estudo Crítico dos Valores de Prova**

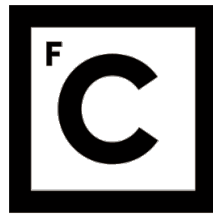
**Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional**  
Probabilidade e Estatística

Paulo José Figueira Semblano

Tese orientada por:  
Professor Doutor Dinis Duarte Ferreira Pestana  
Professora Doutora Maria de Fátima Almeida Brilhante  
Professor Doutor Fernando José Araújo Correia da Ponte Sequeira

Documento especialmente elaborado para a obtenção do grau de doutor





**Ciências  
ULisboa**

## **Estudo Crítico dos Valores de Prova**

**Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional**  
Probabilidade e Estatística

Paulo José Figueira Semblano

Tese orientada por:

Professor Doutor Dinis Duarte Ferreira Pestana  
Professora Doutora Maria de Fátima Almeida Brilhante  
Professor Doutor Fernando José Araújo Correia da Ponte Sequeira

Júri:

Presidente:

- Professor Doutor Luís Eduardo Neves Gouveia

Vogais:

- Professora Doutora Maria de Fátima Almeida Brilhante
- Professora Doutora Sandra Maria da Silva Figueiredo Aleixo
- Professor Doutor Rui Filipe Vargas de Sousa Santos
- Professora Doutora Maria Manuela Costa Neves Figueiredo
- Professora Doutora Maria Isabel Fraga Alves
- Professora Doutora Patrícia Cortés de Zea Bermudez

Documento especialmente elaborado para a obtenção do grau de doutor

Caixa Geral de Depósitos e FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Portugal.



## Resumo

No empreendimento coletivo que é a Ciência é frequente ser necessário harmonizar resultados contraditórios, ou extrair conclusões de experiências independentes que em si mesmo são inconclusivas, nomeadamente devido ao pequeno tamanho das amostras. Daí a construção de valores de prova combinados em meta análise, que é simples e elegante quando se assume que todos eles foram obtidos sob validade da hipótese nula — pelo que serão observações independentes e identicamente distribuídas de Uniformes padrão. Mas esta assunção é irrealista, pelo que a investigação de significância usando valores de prova levou a controvérsias que geraram novos conceitos dinamizadores, tais como valores de prova aleatórios e valores de prova generalizados.

Mais recentemente, no estudo crítico de erros metodológicos (ingénuos ou fraudulentos) em que há a substituição de valores pouco convenientes por outros obtidos por repetição de experiências até se obter um valor de prova conveniente, Brilhante *et al.* (2015a) introduziram o conceito de valores de prova problemáticos (*messy p-values*).

Nesta tese apresentamos resultados sobre uniformidade e desvios da uniformidade, modelos para valores de prova problemáticos — a que chamamos modelos de Mendel por a controvérsia de Mendel-Fisher ser um caso célebre em que se suspeita dessa prática de repetir experiências para reportar o resultado mais conveniente. Discute-se também a percentagem de valores de prova problemáticos na totalidade dos valores de prova reportados, uma questão que tem largo grau de indecidibilidade, e recorreremos a estudos de simulação para suplementar a dificuldade de obtenção de resultados analíticos.

**Palavras-chave:** meta análise, valores de prova problemáticos, valores de prova generalizados, variáveis aleatórias Mendel.



## Abstract

Building scientific knowledge is a collective endeavour, and it is often necessary to harmonize contradictory evidence or to extract evidence pooling inconclusive evidence from independent experiments using small samples. Combining  $p$ -values is rather simple under the naive assumption that all the individually reported  $p$ -values are uniform, in other words they have been obtained under validity of the null hypothesis. This is seldom true, and the controversy it generated is at the origin of new concepts such as random and generalized  $p$ -values.

Recently Brilhante *et al.* (2015a) introduced the concept of messy  $p$ -values, i.e. reported  $p$ -values that are extrema of independent random variables, since the first time the experimenter performed the experiment he obtained what he considered an inconvenient  $p$ -value, and repeated the experiment until he obtained a  $p$ -value that suited his interests (and therefore is the minimum [or the maximum] of the observed genuinely uniform  $p$ -values).

In this thesis we develop models for the mixture of genuine and of messy  $p$ -values, that we shall call Mendel models, since they are at the core of the Mendel-Fisher controversy. We discuss estimation methods to evaluate the proportion of messy  $p$ -values in the context of combining  $p$ -values in meta analysis, and add to our analytic results with a simulation study.

**Keywords:** meta analysis, messy  $p$ -values, random and generalized  $p$ -values, Mendel random variables, departures from uniformity.





## Agradecimentos

A finalização de um trabalho desta natureza constitui uma etapa importante de um percurso que, de alguma forma, dá continuidade a trabalho realizado por outros investigadores. Um percurso que teve origem numa *semente* que ao longo do tempo foi regada, cuidada e guiada com engenho e sabedoria. Agradeço por isso aos meus orientadores:

- Ao Professor Doutor Dinis Pestana, responsável por me lançar neste empreendimento, incansável no seu apoio. Um dos professores que mais contribuiu para a minha formação académica e que me ajudou a crescer enquanto indivíduo. Obrigado pelo conhecimento que ao longo dos anos me foi transmitindo, pelo exemplo, pela amizade e pela boa disposição.
- Ao Professor Doutor Fernando Sequeira, companhia semanal que me cedeu um espaço de trabalho no seu gabinete, sempre disponível para esclarecer dúvidas, que muito me ajudou neste *regresso* à faculdade e ao estudo da Estatística. Obrigado pela partilha, pela amizade e pelo companheirismo, indispensáveis para realizar este trabalho.
- À Professora Doutora Maria de Fátima Brilhante, a distância que separa Lisboa de Ponta Delgada nunca foi um obstáculo, sempre pronta a ajudar, dando exemplos, sugestões e correções. O seu apoio foi determinante para conseguir terminar este trabalho dentro do prazo. Obrigado pelo exemplo, pelo incentivo e pela atenção que me dedicou ao longo destes anos.

Conciliar o estudo com um trabalho a tempo inteiro é difícil e exigente. Neste caso, foi possível porque o tempo se encarregou de levar da memória uma tormenta semelhante passada durante o trabalho de mestrado e, sobretudo, porque recebi desde cedo o apoio e incentivo da minha família, dos meus colegas e dos amigos mais próximos. Agradeço:

- À Laximi, que tem tido a paciência de me aturar, inventando formas de desdobrar e organizar o tempo para conseguirmos conciliar um trabalho intenso e uma vida familiar cheia de bons momentos para partilhar.

- À Marta e ao Bernardo, pela compreensão, pelo carinho e pelo exemplo de dedicação a todas as atividades em que se envolvem, não esquecendo as acrobacias, os malabarismos e os momentos de loucura que animam os nossos serões em família.
- A toda a família que muito contribuiu para a minha formação, pelo carinho que partilharam, pelas histórias que me ajudaram a crescer... Deixo um agradecimento especial à minha mãe, aos meus irmãos, ao meu pai, aos meus avós, ao Álvaro, à Cândida e aos meus sobrinhos.
- À Cristina e à Fedra, com quem trabalhei de um modo mais próximo durante estes últimos anos, por terem suportado momentos de menor disponibilidade da minha parte, sem deixarem de me apoiar com ânimo, incentivo e conselhos constantes.
- A todos os meus colegas, nomeadamente àqueles que têm acompanhado o meu percurso e com quem tenho tido o prazer de partilhar grande parte dos meus dias.
- Aos meus amigos pela amizade e pelo companheirismo. Nomeadamente, às Catarinas, ao Cisco, à Vanda, à Pamela, à Rita, ao Nuno, à Ritinha, à Gabi, à Beatriz, ao Francisco, ao Nelito e à Margarida.
- Aos professores que marcaram a minha formação académica, não poderia deixar de expressar os meus sinceros agradecimentos. Muitos deixaram de ser professores e passaram a ser amigos.
- A todos os que estiveram mais diretamente envolvidos neste trabalho ou que de forma indireta contribuíram para fosse possível concretizá-lo.

Esta tese não teria sido possível sem o apoio da Caixa Geral de Depósitos, que suportou financeiramente este trabalho, através do pagamento das propinas e que me proporcionou as condições necessárias para conseguir conciliar os desafios de um trabalho a tempo inteiro na Direção de Marketing, com o trabalho realizado nesta tese. Por isso uma palavra de apreço para todos os que ao longo deste período contribuíram para que tudo isto se concretizasse, nomeadamente ao Armando, ao Filipe, à Isabel, ao Rui e à Alexandra.

Uma última palavra de agradecimento para a FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Portugal, que financiou este trabalho através do projeto UID/MAT/00006/2013.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Uma controvérsia . . . . .	4
1.2 O problema . . . . .	6
1.3 O modelo A, o modelo B e a família Mendel( $m$ ) . . . . .	8
1.4 A família Mendel( $r; p, q$ ) . . . . .	10
1.5 Organização da tese . . . . .	11
<b>2 A distribuição Uniforme e colegas</b>	<b>13</b>
2.1 Variáveis aleatórias Beta e BetaBoop . . . . .	14
2.2 Variáveis de Mendel . . . . .	20
2.3 Uniformidade e independência . . . . .	22
2.4 Variáveis de Mendel e dinâmica populacional . . . . .	25
2.4.1 Modelo de Verhulst e extensões . . . . .	25
2.4.2 Extensões Mendelianas do modelo de Verhulst . . . . .	29
<b>3 Os valores de prova generalizados, os valores de prova aleatórios e os valores de prova problemáticos</b>	<b>33</b>
3.1 Valores de prova generalizados . . . . .	35

3.2	Valores de prova aleatórios . . . . .	39
<b>4</b>	<b>A família Mendel(<math>m</math>) de misturas de Uniforme com Beta(2,1) ou Beta(1,2)</b>	<b>43</b>
4.1	Definição . . . . .	43
4.2	Momentos e outras propriedades . . . . .	46
4.3	Estimação do parâmetro $m$ . . . . .	50
4.3.1	Método dos momentos ( $\tilde{m}_M$ ) . . . . .	51
4.3.2	Método de máxima verosimilhança ( $\tilde{m}_{ML}$ ) . . . . .	52
4.3.3	Método dos mínimos quadrados ( $\tilde{m}_{LS}$ ) . . . . .	53
4.3.4	Método do espaçamento máximo ( $\tilde{m}_{MSp}$ ) . . . . .	53
4.3.5	Método dos momentos probabilisticamente ponderados ( $\tilde{m}_{PWM}$ ) . . . . .	55
4.4	Estudo por simulação . . . . .	55
4.4.1	Esquema de simulação pontual . . . . .	56
4.4.2	Resultados da estimação pontual . . . . .	57
4.4.3	Esquema de simulação bootstrap . . . . .	61
4.4.4	Resultados da simulação bootstrap . . . . .	62
4.5	Resumo dos resultados . . . . .	73
<b>5</b>	<b>A família Mendel(<math>r; p, q</math>) de misturas de Uniforme com Beta(<math>r, 1</math>) ou Beta(1, <math>r</math>)</b>	<b>75</b>
5.1	Definição . . . . .	75
5.2	Caso particular de $r = 2$ . . . . .	78
5.2.1	Estimação do parâmetro $k$ . . . . .	79
5.2.2	Esquema de simulação . . . . .	80
5.2.3	Resultados da estimação de $k$ . . . . .	81
5.3	Quando $r > 2$ . . . . .	86
5.3.1	Estimação dos parâmetros $p$ e $q$ . . . . .	87
5.3.2	Esquema de simulação . . . . .	89
5.3.3	Resultados da estimação de $p$ e $q$ . . . . .	90
5.4	Resumo dos resultados da estimação . . . . .	118

<b>6 Considerações finais</b>	<b>121</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>127</b>
<b>Apêndice A – Tabelas com o viés dos estimadores</b>	<b>137</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>151</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>155</b>
<b>Abreviaturas</b>	<b>159</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>161</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O acesso à informação é determinante para o avanço da ciência e assume um papel central na capacidade de produção científica e tecnológica, constituindo um elemento fundamental para o desenvolvimento do conhecimento humano. A evolução tecnológica a que temos vindo a assistir nos últimos anos, o aumento da capacidade computacional e o custo cada vez mais baixo de armazenamento de dados criam condições para que se desenvolva um debate e para que surjam iniciativas que visam a democratização e mais vasta avaliação do conhecimento científico. Estas condições servem também de mote para se aprofundar o conhecimento e as metodologias de meta análise, termo introduzido por Glass (1976) formalizando uma investigação que ultrapassava as revisões narrativas da literatura publicada. A meta análise tem vindo a afirmar-se como um instrumento de trabalho, despertando o interesse de muitos investigadores em áreas que vão desde a medicina às ciências sociais.

*“Meta-analysis refers to the analysis of analyses. I use it to refer to the statistical analysis of a large collection of results from individual studies for the purpose of integrating the findings. It connotes a rigorous alternative to the casual, narrative discussions of research studies which typify our attempts to make sense of the rapidly expanding research literature.”*

(Glass, 1976)

Refere-se a meta análise como a análise estatística das sínteses, sendo vista como uma síntese quantitativa de diferentes estudos, combinando os

resultados de diversos estudos independentes através de procedimentos de análise estatística. Emergiu como um desenvolvimento da revisão sistemática da literatura mas rapidamente ganhou estatuto como uma metodologia estatística capaz de harmonizar respostas parciais discordantes e de encontrar significância estatística global que pequenas amostras parciais habitualmente não evidenciam.

“*Shooting a large and targeted volume of work, which leads to a technical competence that lets your creativity soar*” é uma das recomendações que o fotógrafo Steve Simon partilha no livro “*The Passionate Photographer*”, uma fonte de inspiração e um guia prático ao longo do qual o autor descreve 10 etapas para que fotógrafos amadores possam tirar fotografias com a qualidade que gostariam. Reconhece-se nesta recomendação a ideia subjacente à teoria dos testes de hipóteses na construção do conhecimento a partir de informação empírica. Poderíamos também recorrer a uma citação de Linus Pauling muitas vezes referida: “*If you want to have good ideas you must have many ideas. Most of them will be wrong, and what you have to learn is which ones to throw away*”.

Apesar da sua importância para o conhecimento científico, a teoria dos testes de hipóteses é muitas vezes utilizada de forma simplista por parte dos investigadores. Considerando que uma análise estatística é, atualmente, um requisito incontornável na publicação científica. Na prática o que se procura é *um valor de prova- $p$  significativo*, em detrimento de um adequado planeamento de experiências, com consequências adversas para o progresso da ciência. De facto, uma consequência insuficientemente discutida do teorema da transformação uniformizante é que se a hipótese nula  $H_0$  for verdadeira, o valor de prova- $p$  correspondente ao valor observado da estatística de teste  $T$  é uma observação de uma Uniforme padrão. Assim, ao usar como critério de publicação a obtenção de um valor de prova- $p$  *significativo* cria-se um *viés de publicação* que tem uma influência nefasta em estudos de síntese, por estudos com resultados não-significativos estarem sub-representados.

O primeiro passo para efetuar um estudo de meta análise será selecionar adequadamente a evidência e, em princípio, deverá ser adotado um critério justo para decidir os estudos a incluir. Em todo o caso, o viés de publicação deve ser tido em consideração, uma vez que os resultados não significativos raramente são publicados. Uma possibilidade para mitigar este problema será utilizar, quando disponíveis, alguns estudos ou relatórios não publicados, com precaução para que não sejam incluídos estudos de qualidade duvidosa comprometendo os resultados da síntese meta analítica. Também há quem recomende a utilização de um desenho de amostragem, para selecionar os



estudos considerados, que permita atenuar o enviesamento de publicação.

Os estudos de meta análise que combinam os valores de prova- $p$  são particularmente sensíveis ao viés de publicação, uma vez que grande parte dos dados disponíveis virão certamente de trabalhos considerados merecedores de serem publicados devido aos baixos valores de prova- $p$ , sugerindo resultados significativos.

Uma outra forma que poderá condicionar o acesso à informação nos estudos de meta análise será a barreira linguística, ou ainda a indisponibilidade de acesso a algumas revistas ou artigos científicos, havendo o risco dos estudos de meta análise não considerarem resultados de publicações importantes. Também por este motivo, assume extrema relevância o debate em torno do livre acesso ao conhecimento científico, de forma a garantir que os investigadores têm acesso à informação de que necessitam para conduzir as suas investigações, incorporando o conhecimento existente e o mais atualizado possível, sobre a questão investigada.

Poderá arriscar-se afirmar que o debate em torno da democratização do conhecimento científico está no início. Iniciativas como o Sci-Hub<sup>1</sup> que assina com um esclarecedor “... *to remove all barriers in the way of science*”, contribuem para modificar a relação de forças entre as grandes editoras, as grandes universidades e a comunidade científica em geral.

Em 2011, Alexandra Elbakyan, uma investigadora do Cazaquistão, criou o Sci-Hub, um sítio na internet que permite contornar os acessos pagos a publicações e a revistas científicas, proporcionando acesso (ilegal) a praticamente todos os artigos alguma vez publicados. A disponibilização dos artigos é efetuada mediante consulta, acedendo à base de dados pirata LibGen. No caso desta base de dados ainda não ter o título pretendido, o Sci-Hub acede diretamente à página da revista, utilizando credenciais doadas por investigadores e, após disponibilizar o artigo, doa uma cópia à base de dados LibGen, contribuindo assim para o crescimento e para a atualização desta base de dados pirata.

Há a possibilidade do Sci-Hub vir a mudar as regras do jogo. Através deste sítio na internet qualquer investigador, de qualquer universidade, em qualquer parte do mundo, pode ter acesso ao que anteriormente poucos investigadores e poucas universidades se podiam dar ao luxo de pagar. Está aberta uma guerra jurídica com as principais editoras. Está lançado o debate sobre a legitimidade que as editoras têm para somar lucros por um serviço de partilha de conteúdos que não produziram e pelo qual não remuneram nem

---

<sup>1</sup><http://sci-hub.io>

os autores, nem as universidades ou os centros de investigação. As editoras apresentam argumentos baseados na legalidade das suas ações, mas o debate passou para o campo ético e moral: as editoras apresentam lucros na ordem dos milhares de milhões de dólares e há cada vez mais universidades que têm dificuldade em assegurar os meios financeiros necessários para que a sua comunidade de investigadores possa aceder à informação de que precisa para continuar a contribuir para o progresso da ciência.

As publicações científicas são uma forma de garantir a transferência de informação e a partilha do conhecimento, fazendo corresponder a necessidade de quem precisa da informação para desenvolver a sua investigação e a de quem pretende divulgar o resultado do seu trabalho com a restante comunidade científica. Um instrumento de trabalho imprescindível para o desenvolvimento do conhecimento científico.

O trabalho desenvolvido ao longo desta tese não será diferente de qualquer outro trabalho de investigação. Resulta do acaso, de muitas horas de dedicação, de diversas ligações e de relações que, ao longo do percurso, fomos estabelecendo com trabalhos anteriores dos investigadores mais envolvidos no tema, mas também com resultados, reflexões ou observações efetuadas por outros investigadores que aparentemente estão mais distantes. Resulta assim da habilidade de identificar um problema e de procurar uma solução, de utilizar a informação a que temos acesso, de a combinar cruzando diferentes formas de ver o mundo, de adicionar um pouco de criatividade e bastante espírito de aventura.

## 1.1 Uma controvérsia

Uma boa controvérsia acondimenta um debate e desperta a atenção para o pormenor, para o detalhe. A controvérsia Mendel-Fisher anima a comunidade científica há pouco mais de um século e está associada ao trabalho destes dois nomes que muito contribuíram para o avanço da ciência – Gregor Mendel (1822-1884), por muitos considerado o pai da genética devido às observações que lhe permitiram estabelecer as leis básicas sobre a hereditariedade através do seu trabalho com ervilhas-de-cheiro e Sir Ronald Fisher (1890-1962), recordado como um dos estatísticos mais influentes de todos os tempos, um dos pais da genética, havendo também quem o descreva como um dos maiores sucessores de Darwin.

Ao longo dos anos diversos cientistas têm contribuído para esta controvérsia (Figura 1.1.1), esgrimido argumentos em favor do trabalho de Mendel,

ou reforçando as críticas apresentadas por Fisher.

Fisher criticou publicamente, pela primeira vez, os dados de Mendel numa comunicação oral realizada no âmbito de uma conferência em 1911, deixando indícios de que os resultados de Mendel seriam bons demais para serem verdadeiros: “*It is interesting that Mendel’s original results all fall within the limits of probable error*”. Mais tarde, num artigo intitulado “*Has Mendel’s work been rediscovered?*” Fisher (1936) apresenta uma análise detalhada onde expõe os seus argumentos, demonstrando a baixa probabilidade de se observar uma amostra com as características das apresentadas na coleção de dados recolhidos por Mendel, deixando a possibilidade dos dados poderem ter sido adulterados por algum dos assistentes de Mendel.

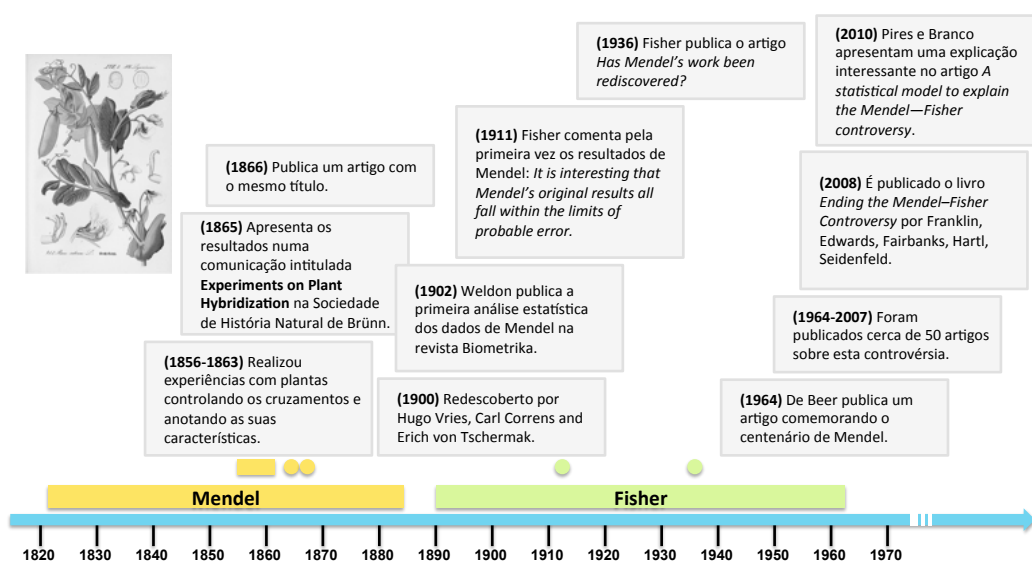


Figura 1.1.1: Mendel vs Fisher — a cronologia de uma controvérsia.

Em 2008, alguns dos investigadores que ao longo dos anos mais ativamente reagiram às acusações de Fisher juntaram os seus esforços para publicar um livro intitulado “*Ending the Mendel-Fisher Controversy*”, procurando pôr termo a este assunto (Franklin *et al.*, 2008). Este livro apresenta de forma sistemática os principais argumentos em defesa do trabalho de Mendel e as críticas apontadas por Fisher. Apesar de não ter conseguido cumprir o seu desígnio — terminar com a polémica — cria condições para que uma nova geração de investigadores se dedique a este tema com uma perspetiva renovada sobre a matéria.

Foi o que aconteceu dois anos mais tarde, no interessante trabalho de Pires and Branco (2010) onde se desenvolve uma explicação para a famosa

controvérsia Mendel-Fisher baseada na possibilidade de Mendel, ou algum dos seus colaboradores, quando insatisfeito com um resultado experimental, ter replicado a experiência e reportado o que considerou ser o resultado mais fiável — leia-se *mais consentâneo com os seus interesses*.

Repare-se que há nas críticas de Fisher e no trabalho de Pires and Branco (2010) argumentos suficientes para se admitir a possibilidade dos dados de Mendel terem sido sujeitos a um enviesamento (voluntário ou involuntário, não será o mais relevante). Não será absurdo admitir que este tipo de comportamento seja, porventura, mais comum do que seria desejável, constituindo uma fonte potencial de problemas para a combinação dos valores de prova- $p$ , um dos primeiros resultados da meta análise, por exemplo na combinação de testes independentes.

## 1.2 O problema

Suponha-se que foram realizados  $n$  testes independentes, assumindo-se em geral que foram efetuados por equipas diferentes trabalhando sobre o mesmo problema, que interessa harmonizar, Brilhante *et al.* (2013b) e Monteiro (2013). Seja  $p_j$  o valor de prova- $p$  decorrente do teste  $T_j : H_{0j}$  vs.  $H_{1j}$ . O teste combinado considera a hipótese nula global  $\mathbf{H}_0$  : todos os  $H_{0j}$  são verdadeiros,  $j = 1, 2, \dots, n$ , versus a hipótese alternativa  $\mathbf{H}_1$  : alguns dos  $H_{1j}$  são verdadeiros.

A questão foi inicialmente abordada por Tippett (1931) — que considerou que a hipótese nula composta  $H_0$  deve ser rejeitada ao nível  $\alpha$  se

$$p_{1:n} = \min_{1 \leq j \leq n} p_j < 1 - (1 - \alpha)^{1/n},$$

utilizando diretamente os valores de prova- $p$  e o facto de, sob  $H_0$ ,  $P_{1:n} \frown \text{Beta}(1, n)$ .

O método mínimo de Tippett é um caso especial do Wilkinson (1951) que aconselha a rejeição de  $H_0$  quando uma qualquer estatística de pequena ordem  $p_{j:n} < c$ ; sabendo que  $P_{j:n} \frown \text{Beta}(j, n - j + 1)$  para rejeitar  $H_0$  com um nível de significância  $\alpha$ , o ponto de corte  $c$  é a solução de

$$\int_0^c u^{j-1} (1-u)^{n-j} du = \alpha B(j, n-j+1).$$

Pestana (2011) propôs um método baseado na média geométrica de  $n$  variáveis aleatórias (v.a.) Uniformes padrão independentes,  $G_n = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n P_j}$ ,

que fornece um teste potente baseado diretamente nos valores de prova- $p$  observados, rejeitando  $H_0$  com um nível de significância  $\alpha$  se

$$G_n < e^{-\frac{\chi_{2n;1-\alpha}^2}{2n}}.$$

Este método é fundamentalmente uma recuperação do método de Fisher, que adiante apresentaremos, reformulado em termos de médias geométricas, uma vez que a utilização de médias aritméticas foi há muito banida, dada a dificuldade do cálculo da distribuição exata na população Uniforme.

Existem outros métodos que, em vez de utilizarem diretamente os valores de prova- $p$ , utilizam transformações desses valores. Por exemplo, Fisher (1932) sugere a rejeição de  $H_0$  com um nível de significância  $\alpha$  se

$$-2 \sum_{j=1}^n \ln p_j > \chi_{2n,1-\alpha}^2,$$

assumindo que  $P_j$  tem distribuição Uniforme padrão, então  $-2 \ln P_j \sim \chi_2^2$ , donde facilmente se deduz que, sob  $H_0$ ,  $-2 \sum_{j=1}^n \ln P_j \sim \chi_{2n}^2$ .

Stouffer *et al.* (1949), aconselham rejeitar  $H_0$ , com um nível de significância  $\alpha$ , se

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \Phi^{-1}(p_j) < -z_{1-\alpha},$$

com  $\Phi^{-1}$  a denotar a inversa da função de distribuição (f.d.) gaussiana padrão.

Alguns dos métodos anteriormente apresentados lidam diretamente com os valores de prova- $p$  (Tippett, Wilkinson e média geométrica), outros utilizam transformações dos valores de prova- $p$  (Fisher e Stouffer) mas repare-se que todos se baseiam na possibilidade de que, sob  $H_0$ , os valores de prova- $p$  observados  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  são uma amostra de uma população Uniforme padrão.

Contudo, nem sempre será possível assumir que os valores de prova- $p$  observados são realizações de uma v.a. Uniforme padrão. Bastando para isso considerar a possibilidade de, perante resultados inesperados ou incerteza em relação às medições, algumas experiências terem sido repetidas, escolhendo para publicação o *melhor* dos resultados obtidos.

Esta observação guiou a nossa pesquisa para modelos que permitam lidar com amostras *contaminadas* por valores que designamos por *valores de prova problemáticos*<sup>2</sup>, procurando métodos que permitam estimar a proporção desses valores numa amostra.

---

<sup>2</sup> Em inglês propomos a utilização do termo *messy p-values* para designar *valores de prova problemáticos*.

### 1.3 O modelo A, o modelo B e a família Mendel( $m$ )

Pires and Branco (2010) constataram que existe uma forte evidência para concluir que a amostra dos 84 valores de prova- $p$  dos testes individuais  $\chi_1^2$  provenientes dos dados de Mendel se afasta da distribuição Uniforme padrão. A representação gráfica da função de distribuição empírica (f.d.e.) sugere uma distribuição entre a Uniforme padrão e o máximo de duas Uniformes padrão, ou seja uma Beta(2,1). Uma possível explicação será terem sido repetidas algumas experiências, presumivelmente as que se desviavam mais da teoria de Mendel, sendo reportados os resultados mais concordantes com as expectativas iniciais. Esta observação levou estes autores a testarem o ajustamento de dois modelos que designaram por modelo A e por modelo B.

No modelo A, assume-se que terão sido repetidas experiências sempre que o seu valor de prova- $p$  era inferior a um parâmetro  $\alpha \in [0, 1]$ , fixado pelo experimentador, sendo posteriormente publicado o maior dos dois resultados observados. Neste modelo admite-se que a amostra de valores de prova- $p$  possa estar contaminada por observações de uma população Beta(2,1), tendo sido repetidas as experiências com valores de prova- $p$  inferiores ao parâmetro  $\alpha$ . Formalizando, considere-se  $U$  uma v.a. Uniforme padrão e  $U_{2:2}$  o máximo de duas v.a. independentes identicamente distribuídas (i.i.d.) Uniformes padrão,

$$X_\alpha = \begin{cases} U_{2:2} & , se \quad 0 \leq U < \alpha \\ U & , se \quad \alpha \leq U < 1 \end{cases} , \text{ com } \alpha \in [0, 1] ,$$

tendo f.d. dada por

$$F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} x^2, & se \quad 0 \leq x < \alpha \\ (1 + \alpha)x - \alpha, & se \quad \alpha \leq x < 1 \end{cases} .$$

Os resultados apresentados por Pires and Branco (2010) demonstram que o modelo A consubstancia uma explicação estatisticamente plausível para a controvérsia, sendo entre todos os modelos possíveis o que melhor parece descrever os dados de Mendel, tendo sido estimado um  $\alpha = 0.201$ .

O modelo B corresponde a um cenário em que algumas das experiências também teriam sido repetidas, publicando o maior dos dois resultados, mas neste caso as experiências a repetir seriam escolhidas aleatoriamente com uma probabilidade  $\beta \in [0, 1]$ . Com

$$X_\beta = \begin{cases} U & U_{2:2} \\ 1 - \beta & \beta \end{cases}, \text{ com } \beta \in [0, 1],$$

tendo f.d. dada por  $F_{X_\beta}(x) = (1 - \beta)x + \beta x^2$ .

Em Gomes *et al.* (2009), com o intuito de testar o pressuposto de uniformidade de uma amostra de valores de prova- $p$  reportados de forma independente, tinha sido utilizado um modelo semelhante, designado por  $X_m$

$$X_m = \begin{cases} U & U_{1:2} \\ 1 - \frac{|m|}{2} & \frac{|m|}{2} \end{cases}, \text{ com } m \in [-2, 0],$$

com função densidade de probabilidade (f.d.p.)

$$f_{X_m}(x) = \left[1 + m \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

A família de v.a.  $X_m$  foi utilizada por Gomes *et al.* (2009), considerando  $m \in [-2, 0)$ , para aumentar computacionalmente amostras de pseudo-valores de prova- $p$  com o intuito de testar a uniformidade, na expectativa de que este procedimento contribuísse para aumentar a potência do teste.

Os resultados obtidos contrariaram a expectativa inicial, constatando-se que a potência do teste diminui à medida que a dimensão da amostra aumenta. Na prática, a componente Uniforme torna-se mais *acentuada* na amostra computacionalmente aumentada. O Teorema 2.1.1 proposto por Deng and George (1992), que exploraremos com detalhe no Capítulo 2, ajuda-nos a compreender melhor este resultado. Em Sequeira (2009) pode encontrar-se uma demonstração simples destes resultados.

Na continuidade deste trabalho, Brilhante *et al.* (2010b) conseguem melhorar a potência do teste através do aumento computacional da amostra, utilizando uma estratégia de simulação diferente e estendendo  $m$  para o domínio  $[-2, 2]$ , conforme se encontra definido adiante em (1.3.2).

A v.a.  $X_m$ , da família Mendel( $m$ ), considerando  $m \in [-2, 2]$ , conforme se encontra descrita em (1.3.1), parece ser adequada para modelar a contaminação dos valores de prova e desta forma contribuir para o desenvolvimento dos procedimentos de combinação dos valores de prova, um dos temas relevantes da meta análise.

Neste caso sob validade de  $H_0$  seria reportado um *pseudo-valor-p* que seria o máximo (respetivamente o mínimo) de valores de prova- $p$  Uniformes padrão, e que sob validade de  $H_1$  seria o máximo (respetivamente o mínimo) de valores de prova- $p$  generalizados, não Uniformes.

Brilhante *et al.* (2014) investigaram o modelo Mendel,

$$X_m = \begin{cases} U & U_{1+\lceil \frac{m}{2} \rceil:2} \\ 1 - \frac{|m|}{2} & \frac{|m|}{2} \end{cases}, \quad \text{com } m \in [-2, 2], \quad (1.3.1)$$

onde  $\lceil x \rceil$  representa o menor número inteiro maior ou igual a  $x$ . Ou seja, um modelo de misturas convexas de Uniforme com o máximo ( $m \in (0, 2]$ ), ou com o mínimo ( $m \in [-2, 0)$ ) de duas Uniformes independentes, que corresponde a haver uma proporção  $\frac{|m|}{2}$ ,  $m \in [-2, 2]$ , de extremos de Uniforme na sequência de valores de prova- $p$  reportados, evidenciando as dificuldades de estimação do parâmetro de mistura (a proporção ingênua ou intencional de pseudo-valores- $p$ ), ao usar o modelo (1.3.1).

No Capítulo 4 será apresentado o trabalho desenvolvido sobre a família Mendel( $m$ ) e se fosse necessário indicar uma única palavra-chave anunciando de que trata esta tese, a escolha, recairia em f.d.p. da Mendel( $m$ )

$$f_{X_m}(x) = \left[1 + m \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad m \in [-2, 2]. \quad (1.3.2)$$

Aquela família de f.d.p. descreve as combinações lineares convexas de f.d.p. da Uniforme padrão (Beta(1,1)), com coeficiente  $1 - \frac{|m|}{2}$ , com a f.d.p. da Beta(2,1), se  $m \in (0, 2]$  ou com a f.d.p. da Beta(1,2), se  $m \in [-2, 0)$ .

Na Secção seguinte (Secção 1.4), quando abordarmos com toda a generalidade as v.a. Mendel — adequadas para representar uma mistura de Uniforme e de máximos e/ou mínimos de Uniformes — usaremos uma notação própria, em que (1.3.1) será uma v.a. Mendel( $2; \frac{m}{2}, 0$ ) se  $m > 0$  ou, Mendel( $2; 0, \frac{|m|}{2}$ ) se  $m < 0$ .

## 1.4 A família Mendel( $r; p, q$ )

Será ainda considerado, no Capítulo 5, um modelo um pouco mais complexo, que inclui a Mendel( $m$ ) (1.3.2) como um caso particular. Suponha-se que num determinado problema alguns investigadores, perante resultados inesperados ou suspeitando das medições efetuadas, repetem a experiência  $r$  vezes, escolhendo publicar o *melhor* dos  $r$  resultados. Considerando, neste caso, que para alguns investigadores o *melhor* resultado será o mínimo e para outros será o máximo, das  $r$  experiências realizadas.

Para modelar esta situação, propomos que se considere uma mistura convexa de uma v.a. Uniforme padrão  $U$ , com o máximo de  $r$  v.a. Uniformes padrão  $U_{r:r} = \max\{U_1, U_2, \dots, U_r\}$  e com o mínimo de  $r$  v.a. Uniformes



padrão  $U_{1:r} = \min\{U_1, U_2, \dots, U_r\}$ . Assumindo que é publicado o máximo das  $r$  experiências com probabilidade  $p \in [0, 1]$ , o mínimo com probabilidade  $q \in [0, 1]$  e que  $p + q \in [0, 1]$ ,

$$X_{r;p,q} = \begin{cases} U & U_{r:r} & U_{1:r} \\ 1 - p - q & p & q \end{cases}, \quad 0 \leq \min\{p, q, 1 - p - q\}, \quad (1.4.1)$$

com f.d. dada por

$$F_{X_{r;p,q}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ (1 - p - q)x + px^r + q[1 - (1 - x)^r] & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases} .$$

Dizemos, neste caso, que a v.a.  $X_{r;p,q}$  tem distribuição Mendel( $r; p, q$ ).

Semblano *et al.* (2015) estudaram o caso especial em que  $r = 2$  que é equivalente à mistura pseudo-convexa com um único parâmetro

$$X_{2;k} = \begin{cases} U & U_{2:2} \\ 1 - k & k \end{cases},$$

onde  $k = p - q$  e  $-1 \leq k \leq 1$ .

## 1.5 Organização da tese

Nesta dissertação começamos por apresentar, no Capítulo 2, a distribuição Uniforme e alguns dos teoremas de caracterização, tendo em consideração a importância desta distribuição para a meta análise e também como elemento central nos estudos de simulação.

No Capítulo 3, a introdução do conceito de valores de prova problemáticos implica necessariamente visitar também os valores de prova generalizados (Tsui and Weerahandi, 1989; Weerahandi, 1995; Hartung *et al.*, 2008; Kulinskaya *et al.*, 2008; Brilhante, 2013).

Uma panorâmica das propriedades da distribuição Mendel( $m$ ) e suas implicações para o estudo da robustez de caracterizações da Uniforme será apresentada no Capítulo 4. Naturalmente que tal nos conduz a investigar testes de uniformidade, o que é complementado com uma abordagem à estimação de  $m$ . Retomamos ainda os estudos iniciados por Gomes *et al.* (2009) sobre o aumento computacional de amostras de valores de prova- $p$  e suas

consequências no que se refere a potência dos testes. Parte substancial da investigação, nomeadamente a relacionada com a estimação de  $m$ , só pode atualmente ser feita usando simulação, que apresentaremos com detalhe.

O Capítulo 5 será dedicado ao estudo da v.a.  $X_{r;p,q} \sim \text{Mendel}(r; p, q)$ , com uma apresentação detalhada dos estudos de simulação efetuados para estimar o parâmetro  $k$ , no caso particular  $r = 2$ , bem como os parâmetros  $p$  e  $q$  quando  $r > 2$ .

No Capítulo final será efetuado um resumo dos resultados obtidos e partilhadas algumas das questões com que nos fomos deparando ao longo da realização deste trabalho.

Parte dos resultados e considerações já apresentados serão repetidos ao longo da tese.

## Capítulo 2

# A distribuição Uniforme e *colegas*

A distribuição Uniforme é um dos modelos mais simples e dos mais notáveis na classe de distribuições absolutamente contínuas, desempenhando um papel central em Probabilidade e em Estatística Computacional, devido ao Teorema da Transformação Uniformizante (TTU)  $F_X(X) \stackrel{d}{=} U \sim \text{Uniforme}(0,1)$ , válido em condições muito gerais. Esta característica faz com que o modelo Uniforme desempenhe um papel fundamental nos procedimentos de geração de números pseudo-aleatórios e que mereça especial atenção nos problemas de simulação.

As caracterizações da Uniforme e algoritmos para geração de Uniformes ocupam por isso um lugar de relevo na investigação estatística, veja-se Johnson *et al.* (1995).  $U$  é a mais simples das v.a. Beta, um modelo para os valores de prova aleatórios, sob a validade da hipótese nula. Isso esteve na base dos trabalhos pioneiros de Tippett (1931) e de Fisher (1932) sobre a combinação de valores de prova obtidos em testes independentes. Testar uniformidade e independência é assim um tópico importante em meta análise, que abordaremos na Secção 2.3.

Na combinação de valores de prova é pouco credível que todos eles tenham sido obtidos na situação da hipótese nula ser verdadeira. Por isso, os conceitos de valor de prova aleatório e de valor de prova generalizado tornaram-se relevantes na teoria da combinação de valores- $p$ . A possibilidade de alguns dos valores de prova reportados não serem genuínos, por ter havido repetição de experiências quando o primeiro resultado não convinha, levou-nos também a investigar misturas de Uniforme e extremos de Uniformes, a que chamamos variáveis de Mendel (por ser uma possível explicação de Mendel ter reportado

valores que Fisher denunciou como excessivamente bons, veja-se Pires and Branco (2010) sobre a controvérsia de Mendel–Fisher).

A caracterização da Uniforme de Deng and George (1992) inspirou uma caracterização das misturas de Uniforme e máximos ou mínimos de Uniformes independentes, que nos leva a uma investigação de independência *versus* auto-regressividade na Secção 2.3; por outro lado, os trabalhos de Aleixo *et al.* (2011), Pestana *et al.* (2011) e de Brilhante *et al.* (2011a) puseram em evidência a importância das variáveis Beta em dinâmica populacional, expandindo o modelo de Verhulst, e na Secção 2.4 apresentamos resultados sobre a evolução de uma população em que o crescimento é a densidade de mistura de Uniforme e máximo de duas Uniformes independentes, e a retroação é a densidade de mistura Uniforme e mínimo de duas Uniformes independentes, respetivamente. Referiremos ainda, pelo relevo que têm em dinâmica populacional, produtos de Uniforme independentes e as variáveis BetaBoop.

## 2.1 Variáveis aleatórias Beta e BetaBoop

Denote-se a v.a. Uniforme padrão por  $U$  e considere-se que  $\mathbf{U}_n = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  é um vector aleatório de dimensão  $n$ , tendo como marginais univariadas v.a. com distribuição Uniforme padrão independentes.

Representando a família de v.a. Beta por  $B_{p,q}$ ,  $p > 0$ ,  $q > 0$ , com f.d.p. dada por

$$f_{B_{p,q}}(x) = \frac{x^{p-1} (1-x)^{q-1}}{\beta(p,q)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$$

(onde  $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ ,  $p > 0$ ,  $q > 0$  é o integral de Euler de primeira espécie, também conhecido por função Beta),  $B_{1,1}$  será uma v.a. Uniforme padrão. Repare-se que  $1 - B_{p,q} \stackrel{d}{=} B_{q,p}$ , em particular  $1 - U \stackrel{d}{=} U$ , onde  $\stackrel{d}{=}$  significa *igual em distribuição*.

Considere-se  $U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}$ , onde  $U_{k:n}$  representa a  $k$ -ésima estatística ordinal (e.o.) ascendente de  $\mathbf{U}_n$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$ . Facilmente se deduz que  $U_{k:n} \frown B_{k,n+1-k}$  e que, em particular, os extremos  $U_{1:n} \stackrel{d}{=} B_{1,n}$  e  $U_{n:n} \stackrel{d}{=} B_{n,1}$ .

Observe-se que  $U_{n:n} \stackrel{d}{=} U^{1/n}$ , ou de um modo mais geral que  $U^{1/p} \stackrel{d}{=} B_{p,1}, \forall p > 0$ .

Por outro lado, a f.d.p. do produto  $\mathcal{P}_n = U_1 \cdots U_n$  é

$$f_{\mathcal{P}_n}(x) = \frac{(-\ln x)^{n-1}}{\Gamma(n)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad (2.1.1)$$

onde  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ ,  $\alpha > 0$ , representa a função Gama ou integral de Euler de segunda espécie. Assim, hierarquicamente definindo

$$X_1 \frown \text{Uniforme}(0, 1)$$

$$X_2 \frown \text{Uniforme}(0, X_1)$$

...

$$X_n \frown \text{Uniforme}(0, X_{n-1}),$$

$X_n \stackrel{d}{=} \mathcal{P}_n$ . Observe-se ainda que  $\mathcal{P}_n \prec U_{1:n}$ , onde o símbolo  $\prec$  denota, como usualmente, que  $\mathcal{P}_n$  é estocasticamente inferior a  $U_{1:n}$ , isto é  $F_{\mathcal{P}_n}(x) \leq F_{U_{1:n}}(x)$ ,  $x \in (0, 1)$ .

A f.d.p. de  $B_{2,2} \stackrel{d}{=} U_{2:3}$  é  $f_{B_{2,2}}(x) = 6x(1-x)\mathbb{I}_{(0,1)}(x) \propto f_{B_{2,1}}(x) \times f_{B_{1,2}}(x)$ , como usual o símbolo  $\propto$  denota que o primeiro membro é proporcional ao segundo. Numa perspectiva probabilística, este resultado, poderá parecer pouco interessante, mas tem consequências curiosas para o estudo da dinâmica populacional generalizando o modelo logístico de Verhulst (Brilhante *et al.*, 2011b).

A função  $\beta(p, q)$  de Euler é o caso especial com  $\pi = 1$ ,  $\varrho = 1$  da função  $\mathfrak{B}(p, q, \pi, \varrho)$

$$\mathfrak{B}(p, q, \pi, \varrho) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} (-\ln(1-x))^{\pi-1} (-\ln x)^{\varrho-1} dx,$$

com  $p, q, \pi, \varrho > 0$ . Repare-se que  $\mathfrak{B}(p, q, \pi, \varrho) = \mathfrak{B}(q, p, \varrho, \pi)$  e que  $\mathfrak{B}(p, 1, 1, \varrho) = \frac{\Gamma(\varrho)}{p^\varrho}$ , donde  $\mathfrak{B}(1, q, \pi, 1) = \frac{\Gamma(\pi)}{q^\pi}$ .

Podendo assim definir-se a família de v.a. BetaBoop

$$\mathcal{X}_{p,q,\pi,\varrho} \frown \text{BetaBoop}(p, q, \pi, \varrho),$$

com f.d.p.

$$f_{\mathcal{X}_{p,q,\pi,\varrho}}(x) = \frac{1}{\mathfrak{B}(p, q, \pi, \varrho)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} (-\ln(1-x))^{\pi-1} (-\ln x)^{\varrho-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

Observe-se que  $1 - \mathcal{X}_{p,q,\pi,\varrho} \stackrel{d}{=} \mathcal{X}_{q,p,\varrho,\pi}$  e que  $\mathcal{X}_{1,1,1,n} \stackrel{d}{=} \mathcal{P}_n$ .

Merecem a nossa atenção, pelo seu interesse, três subfamílias da Beta-Boop:

- A Beta( $p, q$ ), subfamília  $\mathcal{X}_{p,q,1,1} \stackrel{d}{=} B_{p,q}$ .

Repare-se que a transformada de Mellin de  $B_{p,q}$  é

$$\mathcal{M}_{B_{p,q}}(s) = \int_0^1 x^s f_{B_{p,q}}(x) dx = \frac{B(p+s, q)}{B(p, q)}, \quad \Re(p+s) > 0,$$

onde  $\Re(\bullet)$  denota a parte real do complexo que está em argumento.

- A subfamília que tem  $q = \pi = 1$  com f.d.p. da forma

$$f_{\mathcal{X}_{p,1,1,\varrho}}(x) = \frac{p^\varrho}{\Gamma(\varrho)} x^{p-1} (-\ln x)^{\varrho-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

A transformada de Mellin de  $\mathcal{X}_{p,1,1,\varrho}$  é

$$\mathcal{M}_{\mathcal{X}_{p,1,1,\varrho}}(s) = \left( \frac{p}{p+s} \right)^\varrho, \quad \Re(p+s) > 0.$$

Reconhece-se a função geradora de momentos da v.a. Gama; Note-se que  $-\ln \mathcal{X}_{p,1,1,\varrho} \frown \text{Gama}\left(\varrho, \frac{1}{p}\right)$ , resultando naturalmente  $\mathcal{M}_{-\ln \mathcal{X}_{p,1,1,\varrho}}(s) = \int_0^1 e^{-\ln(x)s} f_{\mathcal{X}_{p,1,1,\varrho}}(x) dx = \mathcal{M}_{\mathcal{X}_{p,1,1,\varrho}}(s)$ .

Como referido anteriormente o produto de  $n$  v.a. Uniforme padrão independentes é  $\mathcal{X}_{1,1,1,n}$ .

Observe-se também que se  $X$  e  $Y$  forem v.a. independentes Beta(2,1), com  $Z = XY$ ,

$$f_{XY}(z) = 4z(-\ln z) \mathbb{I}_{(0,1)}(z) \iff Z \frown \text{BetaBoop}(2, 1, 1, 2).$$

Generalizando, se  $X \frown \text{Beta}(m, 1)$  e  $Y \frown \text{Beta}(p, 1)$  forem v.a. independentes com  $m \neq p$ , então

$$f_{XY}(z) = \frac{mp}{|m-p|} (z^{p-1} - z^{m-1}) \mathbb{I}_{(0,1)}(z),$$

deste modo, quando  $m-p \rightarrow 0$  obtém-se

$$f_{XY}(z) = m^2 z^{m-1} (-\ln z) \mathbb{I}_{(0,1)}(z),$$

i.e., o produto de duas v.a. independentes Beta( $m, 1$ ) é  $\mathcal{X}_{m,1,1,2}$ .

Além disso, como a transformada de Mellin de  $\mathcal{X}_{p,1,1,\varrho}$  é  $\left(\frac{p}{p+s}\right)^\varrho$ , facilmente se deduz que se  $\mathcal{X}_{p,1,1,\varrho}$  e  $\mathcal{X}_{p,1,1,\tau}$  forem independentes,

$$\mathcal{X}_{p,1,1,\varrho} \mathcal{X}_{p,1,1,\tau} \stackrel{d}{=} \mathcal{X}_{p,1,1,\varrho+\tau}.$$

Evidentemente, o facto de  $\{\mathcal{X}_{p,1,1,\varrho}, \varrho > 0\}$  ser fechado para o produto de membros independentes é equivalente a  $\{X \sim \text{Gama}(\varrho, \frac{1}{p}), \varrho > 0\}$  ser fechado para a soma.

- A subfamília com  $p = \varrho = 1$  e f.d.p. da forma

$$f_{\mathcal{X}_{1,q,\pi,1}}(x) = \frac{q^\pi}{\Gamma(\pi)} (1-x)^{q-1} (-\ln(1-x))^{\pi-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x),$$

com propriedades similares às da família anteriormente apresentada.

Nesta tese não exploramos a riqueza dos modelos BetaBoop, limitando-nos a apresentar modelos de crescimento populacional com características extremas *emagrecidas* (*thinned*, no sentido de Rényi (1956), isto é geometricamente filtradas), como extensão do modelo de Verhulst, quando usamos núcleos associados a densidades de probabilidade BetaBoop na equação diferencial descrevendo o crescimento e a retroação.

Já atrás referimos a importância da Uniforme, que em grande parte se deve ao Teorema da Transformação Uniformizante.

A v.a. Uniforme padrão é a transformação uniformizante de qualquer v.a. com f.d. estritamente crescente, no sentido em que se  $X \sim F_X$ , então  $F_X(X) \sim \text{Uniforme}(0,1)$ . Sob condições muito gerais, seja  $F_Y^{\leftarrow}(u) = \inf\{y : F_Y(y) \geq u\}$  a inversa generalizada de  $F_Y$ , então  $F_Y^{\leftarrow}(U) \sim F_Y$ , com  $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$ . Ilustrando com um exemplo, se  $X \sim \text{Exponencial}(1)$ ,  $1 - e^{-X} \sim \text{Uniforme}(0,1)$ , logo  $e^{-X} \stackrel{d}{=} 1 - e^{-X} \sim \text{Uniforme}(0,1)$ , ou seja  $U \sim \text{Uniforme}(0,1) \implies -\ln U \sim \text{Exponencial}(1)$ .

O Teorema da Transformação Uniformizante poderá ser visto como uma *ponte* entre duas v.a.  $X$  e  $Y$ , no sentido em que  $F_Y^{\leftarrow}[F_X(X)] \stackrel{d}{=} Y$  e constitui um resultado importante nos testes de hipóteses pois, sob a validade de  $H_0$ , o valor de prova- $p$  será o valor observado de uma v.a. Uniforme padrão, como se poderá ver com mais detalhe no Capítulo 3 ou em Kulinskaya *et al.* (2008).

Este resultado está na base da combinação dos valores de prova- $p$   $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  em meta análise, nomeadamente como referido no Capítulo 1 em Tippett (1931), assumindo a independência das observações e sob a validade da hipótese nula global,  $p_{1:n}$  é o valor observado da v.a.  $B_{1:n}$  — mais geralmente  $p_{k:n}$  é o valor observado da v.a.  $B_{k:n+1-k}$  — em Fisher (1932), assumindo os pressupostos anteriormente referidos,  $-2 \sum_{k=1}^n \ln p_k$  é o valor observado da v.a.  $\chi_{2n}^2$ .

Basta evidentemente que num dos testes a hipótese alternativa seja verdadeira para os resultados de Tippett (1931) e de Fisher (1932) deixarem de ser verdadeiros. Como a combinação de valores de prova é uma técnica importante em meta análise, essa possibilidade levou à discussão de valores de prova aleatórios (Sackrowitz and Samuel-Cahn, 1999) e valores de prova generalizados (Tsui and Weerahandi, 1989) veja-se ainda em Hartung *et al.* (2008) e em Kulinskaya *et al.* (2008) uma discussão clarificadora desses tópicos, que abordaremos com mais detalhe no Capítulo 3.

Por outro lado se um experimentador ingénuo (ou fraudulento) não reportar valores de prova que não lhe agradem, repetindo experiências para obter valores de prova mais convenientes, estes deixam de ser Uniformes, serão antes extremos de Uniformes independentes. Leva-nos isso a distinguir valores de prova genuínos desses valores de prova problemáticos (que Brillhante *et al.* (2015a) chamaram *messy p-values*), e a tratar de variáveis de Mendel, que começamos a discutir na próxima Secção.

A Uniforme padrão tem muitas propriedades características, como exemplo é a variável com suporte em  $[0,1]$  com entropia máxima, que lhe confere propriedades *absorventes*, como observado por Brillhante *et al.* (2010b); veja-se em Johnson *et al.* (1995) uma resenha de caracterizações.

Deng and George (1992) estabeleceram uma caracterização de que adiante apresentamos uma extensão para variáveis de Mendel:

**Teorema 2.1.1**

*Sejam  $X$  e  $U$  v.a. independentes, em que  $X$  é absolutamente contínua com suporte em  $(0, 1)$  e  $U$  é uma Uniforme padrão. Então,  $W = \min\left(\frac{U}{X}, \frac{1-U}{1-X}\right)$  e  $V = X + U - \lfloor X + U \rfloor$  são Uniformes padrão, com  $X$ ,  $W$  e  $V$  independentes. Tomando  $\lfloor X + U \rfloor$  pelo maior inteiro que não excede  $X + U$ .*

*Demonstração.* Considere-se  $X$  uma v.a. absolutamente contínua com suporte em  $(0, 1)$  e  $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$ , independentes uma da outra.

É fácil verificar que  $W = \min\left(\frac{U}{X}, \frac{1-U}{1-X}\right) \sim \text{Uniforme}(0,1)$ . É imediato que o suporte desta variável é  $\mathbf{S} = (0, 1)$ ; para qualquer  $w \in (0, 1)$ .

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \mathbb{P}[U \leq X, U \leq wX] + \mathbb{P}[U > X, U \geq 1 - w(1 - X)] \\ &= \int_0^w f_U(u) \left[ \int_{\frac{u}{w}}^1 f_X(x) dx \right] du + \int_{1-w}^1 f_U(u) \left[ \int_0^{\frac{u}{w} + \frac{w-1}{w}} f_X(x) dx \right] du \\ &= \int_0^w \left[ 1 - F_X\left(\frac{u}{w}\right) \right] du + \int_{1-w}^1 \left[ F_X\left(\frac{u}{w} + \frac{w-1}{w}\right) \right] du. \end{aligned}$$



Substituindo  $z = u + w - 1$  no segundo integral, obtém-se:

$$F_W(w) = \int_0^w \left[ 1 - F_X\left(\frac{u}{w}\right) \right] du + \int_0^w \left[ F_X\left(\frac{z - (w-1)}{w} + \frac{w-1}{w}\right) \right] dz = w,$$

ficando assim demonstrado que  $W \sim \text{Uniforme}(0,1)$ .

No que se refere a  $V = X + U - \lfloor X + U \rfloor$ , é também imediato que o suporte de  $V$  é  $\mathbf{S} = (0, 1)$ , para qualquer  $v \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \mathbb{P}[U \leq -X + 1, U \leq -X + v] + \mathbb{P}[U > -X + 1, U \leq -X + v + 1] \\ &= \int_0^v f_X(x) \left[ \int_0^{-x+v} du \right] dx + \int_0^v f_X(x) \left[ \int_{-x+1}^1 du \right] dx + \\ &\quad + \int_v^1 f_X(x) \left[ \int_{-x+1}^{-x+v+1} du \right] dx \\ &= \int_0^v [f_X(x)(-x+v)] dx + \int_0^v [f_X(x)x] dx + \int_v^1 [f_X(x)v] dx \\ &= - \int_0^v x f_X(x) dx + \int_0^v x f_X(x) dx + v \left[ \int_0^v f_X(x) dx + \int_v^1 f_X(x) dx \right] \\ &= v, \end{aligned}$$

podendo então dizer-se que  $V \sim \text{Uniforme}(0,1)$ .

Para demonstrar a independência entre  $X$  e  $W$ , considere-se  $x, w \in (0, 1)$ .

$$F_{W|X=x}(w) = \mathbb{P}[U \leq wx, U \leq x|X = x] + \mathbb{P}[U \geq 1 - w + wx, U > x|X = x].$$

Como  $X$  e  $U$  são independentes,

$$F_{W|X=x}(w) = F_U(wx) + 1 - F_U(1 - w + wx) = w = F_W(w).$$

Para demonstrar a independência entre  $X$  e  $V$ , considere-se  $x, v \in (0, 1)$ .

$$F_{V|X=x}(v) = \mathbb{P}[U + x - \lfloor U + x \rfloor \leq v|X = x].$$

Como  $X$  e  $U$  são independentes,

$$\begin{aligned} F_{V|X=x}(v) &= \mathbb{P}[U < 1 - x, U \leq v - x] + \mathbb{P}[U \geq 1 - x, U \leq v - x + 1] \\ &= \begin{cases} F_U(v - x + 1) - F_U(1 - x) = v, & \text{se } v \leq x \\ F_U(v - x) + 1 - F_U(1 - x) = v, & \text{se } v > x \end{cases} \\ &= F_V(v). \end{aligned}$$

□

Observação: o resultado de Deng and George (1992) está citado em Johnson *et al.* (1995), obviamente sem demonstração, e não tivemos acesso ao trabalho original. A demonstração apresentada é uma variante, mais pormenorizada, da que se encontra em Gomes *et al.* (2009).

## 2.2 Variáveis de Mendel

Considerando todos os segmentos de reta que passam no ponto fixo  $(\frac{1}{2}, 1)$  com declive  $m \in [-2, 2]$  obtém-se a f.d.p. apresentada em (1.3.2):

$$f_{X_m}(x) = \left[1 + m \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$$

da mistura  $X_m$  da Uniforme padrão com a Beta(1,2) quando  $m \in [-2, 0]$ , ou com a Beta(2,1) quando  $m \in (0, 2]$

$$X_m = \begin{cases} U & U_{1+\lceil \frac{m}{2} \rceil:2} \\ 1 - \frac{|m|}{2} & \frac{|m|}{2} \end{cases}$$

(onde  $\lceil x \rceil$  representa o menor número inteiro maior ou igual a  $x$ ). Note-se que  $X_{-2} \stackrel{d}{=} U_{1:2}$ ,  $X_0 \stackrel{d}{=} U$  e  $X_2 \stackrel{d}{=} U_{2:2}$ .

A família  $X_m$ ,  $m \in [-2, 2]$  foi utilizada em Gomes *et al.* (2009) no contexto da meta análise, na combinação de valores de prova- $p$ , obtendo um resultado inesperado — o aumento computacional das amostras pode diminuir a potência dos testes.

No trabalho realizado sobre a controvérsia Mendel–Fisher, Pires and Branco (2010) investigaram a possibilidade de explicar o ajustamento *demasiado bom* observado nos dados de Mendel, considerando a possibilidade de terem sido repetidas algumas experiências, sendo posteriormente publicado o melhor dos resultados observados.

Parece verosímil admitir que perante resultados inesperados, ocasionalmente, alguns investigadores repitam a experiência reportando o *melhor* dos dois valores de prova- $p$  observados, em vez do *mau* valor de prova- $p$  da experiência original. Se assim for, existe uma proporção (desconhecida)  $\frac{|m|}{2}$  de valores de prova problemáticos que poderão ser observações de  $U_{1:2}$ , se o *melhor* for o mínimo, ou de  $U_{2:2}$ , se o *melhor* for o máximo das duas observações. A v.a.  $X_m$  será apropriada para modelar os valores de prova- $p$  reportados

(*problemáticos e genuínos*). Por este motivo dizemos que  $X_m$ ,  $m \in [-2, 2]$ , é uma v.a. Mendel, escrevendo  $X_m \curvearrowright \text{Mendel}(m)$ .

Note-se que estimar a proporção desconhecida de valores de prova problemáticos constitui um desafio complexo, como veremos ao longo deste trabalho.

Há uma extensão interessante da caracterização de Deng and George (1992) no que se refere a variáveis de Mendel:

**Teorema 2.2.1**

Sejam  $X_m$  e  $X_p$  independentes, com  $m, p \in [-2, 2]$ , v.a.  $\text{Mendel}(m)$  e  $\text{Mendel}(p)$ , respectivamente. Então,

- $W_{m,p} = \min\left(\frac{X_m}{X_p}, \frac{1-X_m}{1-X_p}\right) \curvearrowright \text{Mendel}\left(\frac{mp}{6}\right)$ ;
- $V_{m,p} = X_m + X_p - \lfloor X_m + X_p \rfloor$  é uma mistura pseudo-convexa de Uniforme, com peso  $\left(1 - \frac{mp}{12}\right)$ , com uma  $\text{Beta}(2, 2)$ , com peso  $\frac{mp}{12}$ .

*Demonstração.* Considere-se  $X_m \curvearrowright \text{Mendel}(m)$  e  $X_p \curvearrowright \text{Mendel}(p)$  independentes.

Vamos verificar que  $W_{m,p} = \min\left(\frac{X_m}{X_p}, \frac{1-X_m}{1-X_p}\right) \curvearrowright \text{Mendel}\left(\frac{mp}{6}\right)$ . O suporte desta variável é  $\mathcal{S} = (0, 1)$ ; para qualquer  $w \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} F_{W_{m,p}}(w) &= \int_0^w f_{X_m}(u) \left[ \int_{\frac{u}{w}}^1 f_{X_p}(x) dx \right] du + \int_{1-w}^1 f_{X_m}(u) \left[ \int_0^{\frac{u+w-1}{w}} f_{X_p}(x) dx \right] du \\ &= \int_0^w f_{X_m}(u) \left[ 1 - F_{X_p}\left(\frac{u}{w}\right) \right] du + \int_{1-w}^1 f_{X_m}(u) F_{X_p}\left(\frac{u+w-1}{w}\right) du. \end{aligned}$$

Substituindo  $z = u + w - 1$  no segundo integral, obtém-se:

$$\begin{aligned} F_{W_{m,p}}(w) &= \int_0^w f_{X_m}(u) \left[ 1 - F_{X_p}\left(\frac{u}{w}\right) \right] du + \int_0^w f_{X_m}(z + 1 - w) F_{X_p}\left(\frac{z}{w}\right) dz \\ &= F_{X_m}(w) + m(1-w) \int_0^w F_{X_p}\left(\frac{z}{w}\right) dz \\ &= F_{X_m}(w) + m(1-w) \left[ \frac{wp}{6} + \frac{w}{2} \left(1 - \frac{p}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Derivando,

$$f_{W_{m,p}}(w) = \frac{mp}{6}w + 1 - \frac{mp}{12} = 1 + \frac{mp}{6} \left(w - \frac{1}{2}\right),$$

ou seja,  $W_{m,p} \curvearrowright \text{Mendel}\left(\frac{mp}{6}\right)$ .

Em relação a  $V_{m,p} = X_m + X_p - \lfloor X_m + X_p \rfloor$ . Considere-se  $v \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F_{V_{m,p}}(v) &= \int_0^1 f_{X_m}(x) \mathbb{P}[X_m + X_p - \lfloor X_m + X_p \rfloor \leq v | X_m = x] dx \\ &= \int_0^1 f_{X_m}(x) \mathbb{P}[X_p - \lfloor x + X_p \rfloor \leq v - x] dx \\ &= \int_0^v f_{X_m}(x) [F_{X_p}(v - x) + 1 - F_{X_p}(1 - x)] dx \\ &\quad + \int_v^1 f_{X_m}(x) [F_{X_p}(1 - x + v) - F_{X_p}(1 - x)] dx. \end{aligned}$$

Poupando alguns passos mais fastidiosos, pelo teorema fundamental do cálculo, chega-se à expressão:

$$\begin{aligned} f_{V_{m,p}}(v) &= \int_0^1 \left( mx + 1 - \frac{m}{2} \right) \left( pv - px + 1 - \frac{p}{2} \right) dx + p[1 - F_{X_m}(v)] \\ &= \left( 1 - \frac{mp}{12} \right) + \frac{mp}{12} 6v(1 - v), \end{aligned}$$

ou seja,  $V_{m,p}$  é uma mistura pseudo-convexa de uma Uniforme, com peso  $1 - \frac{mp}{12}$ , com uma Beta(2, 2), com peso  $\frac{mp}{12}$ .  $\square$

A demonstração do teorema explicita e corrige um lapso da demonstração que se encontra em Sequeira (2009).

Anote-se que este teorema ilustra bem o poder absorvente da Uniforme padrão: partindo de misturas de Uniforme com Beta(1,2) ou com Beta(2,1) obtêm-se misturas de Uniforme com Beta em que o peso da Uniforme é maior.

Anote-se ainda que basta que  $m = 0$  ou  $p = 0$  para que  $W_{m,p} = \min\left(\frac{X_m}{X_p}, \frac{1-X_m}{1-X_p}\right) \curvearrowright \text{Mendel}\left(\frac{mp}{6}\right)$  seja Uniforme padrão; no entanto a independência entre  $W_{m,p}$  e  $X_p$  só existe no caso  $m = 0$ , como se vê na caracterização de Deng and George (1992)

## 2.3 Uniformidade e independência

Nos resultados clássicos sobre combinação de valores de prova assume-se que os valores de prova são observações de Uniformes padrão independentes. Testar ajustamento Uniforme e independência é por isso um passo prévio à combinação dos valores de prova usando qualquer das metodologias expostas em Pestana (2011), de que a mais popular e, porventura mais eficaz, é a de Fisher (1932), veja-se Brilhante *et al.* (2013a).

Vamos por isso abordar a possibilidade de se ter um processo auto-regressivo de ordem 1 gerado por variáveis Mendel( $m$ ). Este resultado foi apresentado no 9th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation, Lisboa 2015 por M. F. Brilhante, D. Pestana, P. Semblano e F. Sequeira (Brilhante *et al.*, 2015b) e desenvolve a nota CEAUL 23/2013 (Brilhante *et al.*, 2013b).

Seja  $\{X_{m,i}\}$ ,  $i \geq 0$ , uma sucessão de réplicas independentes de  $X_m$ ,  $m \in [-2, 2]$  com f.d.p.  $f_{X_m}(x) = \left[1 + m \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$  e defina-se

$$Y_{m,i} = \rho Y_{m,i-1} + (1 - \rho) X_{m,i}, \quad Y_{m,0} = X_{m,0},$$

$1 \leq i \leq n$ ,  $\rho \in [0, 1)$ .

Se  $\rho = 0$ , a sequência gerada  $\{Y_{m,i}\}$ ,  $i \geq 0$ , coincide com a sequência original. Por outro lado, se  $\rho > 0$  há correlação serial. Se  $m = 0$  este cenário é apropriado para investigar se os valores de prova  $p_k$ , sob validade de  $H_0$ , são independentes, ou se há correlação serial.

Investiguemos então a distribuição conjunta dos  $Y_{m,i}$ , sendo a transformação inversa

$$X_{m,i} = \frac{Y_{m,i} - \rho Y_{m,i-1}}{1 - \rho}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

o jacobiano da inversa é  $J = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^n$ .

Então

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n \left( m \frac{y_{m,i} - \rho y_{m,i-1}}{1 - \rho} + \frac{2 - m}{2} \right) \frac{1}{1 - \rho} \mathbb{I}_{\mathbf{S}},$$

onde  $\mathbf{S} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \left\{ 0 < \frac{y_{m,i} - \rho y_{m,i-1}}{1 - \rho} < 1 \right\} \right\}$ .

Observando que

$$\bigcap_{i=1}^n \left\{ 0 < \frac{y_{m,i} - \rho y_{m,i-1}}{1 - \rho} < 1 \right\} \iff \rho \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{y_{m,i}}{y_{m,i-1}}, \frac{1 - y_{m,i}}{1 - y_{m,i-1}} \right\},$$

conclui-se que no caso de a sucessão geradora ser de Uniformes padrão ( $m = 0$ ) a densidade de probabilidade conjunta de  $Y_1, \dots, Y_n$  é

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \rho} \mathbb{I}_{\rho \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{y_{0,i}}{y_{0,i-1}}, \frac{1 - y_{0,i}}{1 - y_{0,i-1}} \right\}}.$$

Portanto sob validade de  $H_0 : \rho = 0$  estamos na situação

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{X_{0,i}}{X_{0,i-1}}, \frac{1 - X_{0,i}}{1 - X_{0,i-1}} \right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \{U_1, \dots, U_n\} \sim \text{Beta}(1, n).$$

Mais geralmente, ainda com  $m = 0$  mas deixando cair a hipótese de independência

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{Y_{0,i}}{Y_{0,i-1}}, \frac{1 - Y_{0,i}}{1 - Y_{0,i-1}} \right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \rho + (1 - \rho) \frac{X_{0,i}}{X_{0,i-1}}, \rho + (1 - \rho) \frac{1 - X_{0,i}}{1 - X_{0,i-1}} \right\}$$

tem distribuição Uniforme no suporte  $(\rho, 1]$ .

O procedimento para testar correlação serial no caso simples de a sucessão geradora do processo auto-regressivo ser Uniforme decorre imediatamente dos resultados acima:

Denotando

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \rho + (1 - \rho) \frac{X_{0,i}}{X_{0,i-1}}, \rho + (1 - \rho) \frac{1 - X_{0,i}}{1 - X_{0,i-1}} \right\} = V_{i,\rho} \quad \text{e}$$

$$V = \min_{1 \leq i \leq n} V_{i,\rho},$$

$V$  é o estimador de verosimilhança máxima de  $\rho$ , e é suficiente para  $\rho$ .

A função de verosimilhança — que é também a razão de verosimilhanças para testar  $H_0 : \rho = 0$  vs.  $H_A : \rho > 0$  — é

$$L(\rho) = \left( \frac{1}{1 - \rho} \right)^n \mathbb{I}_{\rho \leq V}.$$

Rejeita-se então a hipótese nula ao nível  $\alpha$  quando  $V > 1 - \alpha^{1/n}$ , sendo a função potência

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{(1 - \rho)^n} & \text{se } \rho \leq 1 - \alpha^{1/n} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

No caso geral de sucessão geradora de  $X_m$ ,  $m \in [-2, 2]$ ,

$$\frac{Y_{m,i}}{Y_{m,i-1}} = \rho + (1 - \rho) \frac{X_{m,i}}{X_{m,i-1}}$$

e

$$\frac{1 - Y_{m,i}}{1 - Y_{m,i-1}} = \rho + (1 - \rho) \frac{1 - X_{m,i}}{1 - X_{m,i-1}},$$

pelo que

$$\min \left( \frac{Y_{m,i}}{Y_{m,i-1}}, \frac{1 - Y_{m,i}}{1 - Y_{m,i-1}} \right) = \rho + (1 - \rho) \min \left( \frac{X_{m,i}}{X_{m,i-1}}, \frac{1 - X_{m,i}}{1 - X_{m,i-1}} \right)$$

e daí, devido à independência dos  $X_{m,i}$

$$\min \left( \frac{Y_{m,i}}{Y_{m,i-1}}, \frac{1 - Y_{m,i}}{1 - Y_{m,i-1}} \right) \stackrel{d}{=} \rho + (1 - \rho) X_{\frac{m^2}{6}}.$$

Quer isso dizer que estamos agora interessados no mínimo de variáveis obtidas do tipo (no sentido de Khinchine) das  $X_{\frac{m^2}{6}}$ , com uma contração  $(1 - \rho)$  e uma translação  $\rho$ . Também neste caso esse mínimo é um estimador suficiente de  $\rho$ .

## 2.4 Variáveis de Mendel e dinâmica populacional

Nesta Secção descrevemos alguns modelos de dinâmica populacional inspirados no modelo de Verhulst, mas em que crescimento e retroação, na equação diferencial, deixam de ser descritos pela parábola logística — isto é, associados respetivamente à Beta(2,1) e à Beta(1,2) —, terminando com o estudo da situação em que o crescimento é Mendel( $m$ ),  $m \in [0, 2]$ , e a retroação é Mendel( $p$ ),  $p \in [-2, 0]$ .

### 2.4.1 Modelo de Verhulst e extensões

Verhulst (1845, 1847) revolucionou os estudos populacionais admitindo que a dimensão da população  $N(t)$  no instante  $t$  é *regular* no sentido em que admite uma representação  $\frac{dN(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k [N(t)]^k$ , com  $A_0 = 0$ ,  $A_1 > 0$  e  $A_2 < 0$ , usando a aproximação de segunda ordem

$$\frac{dN(t)}{dt} \approx rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right),$$

com a interpretação usual

- $r$  = taxa mendeliana de crescimento instantâneo, e
- $K$  = limite de equilíbrio imposto pelo desenvolvimento sustentável.

Assim, quando o fator de expansão  $N(t)$  e de retroação  $1 - \frac{N(t)}{K}$  devida a fatores ambientais e limitação de recursos se equilibram, a dimensão da população é aproximada pela função logística

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}},$$

onde  $N_0 = N(0)$ , que corresponde a uma dinâmica sustentável. A parábola logística associada à discretização da equação de Verhulst, ou seja,

$$x_{n+1} = c x_n (1 - x_n)$$

( $c = c(r) > 0$ ), teve um papel singular na teoria das bifurcações de Feigenbaum e dinâmica caótica, veja-se por exemplo Tsoularis (2001).

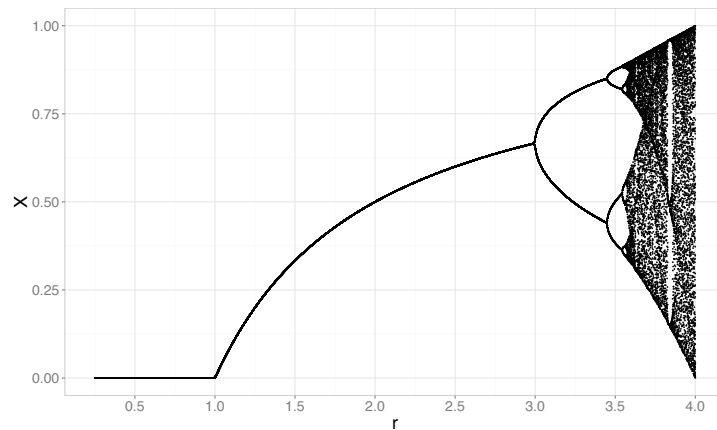


Figura 2.4.1: Diagrama de Feigenbaum para a solução de  $x = cx(1-x)$  pelo método do ponto fixo.

Observando em particular que a parábola logística é proporcional a densidade Beta(2,2), tornou-se interessante o estudo de equações diferenciais associadas a Betas. Aleixo *et al.* (2011) fizeram um estudo dinâmico exaustivo de modelos associados a outras Beta(p,2), em que a retroação, de ordem 1 ( $q = 2$ ), não equilibra necessariamente o fator expansivo  $p$ , mostrando que para cada valor deste parâmetro se podem distinguir regiões topologicamente distintas, nomeadamente (da esquerda para a direita na Figura 2.4.2<sup>1</sup>):

- uma região de extinção súbita, seguida de regiões de estabilidade com entropia topológica nula;

<sup>1</sup>Agradeço ao Professor Dinis Pestana a cedência desta Figura, originalmente publicada em Aleixo *et al.* (2011).



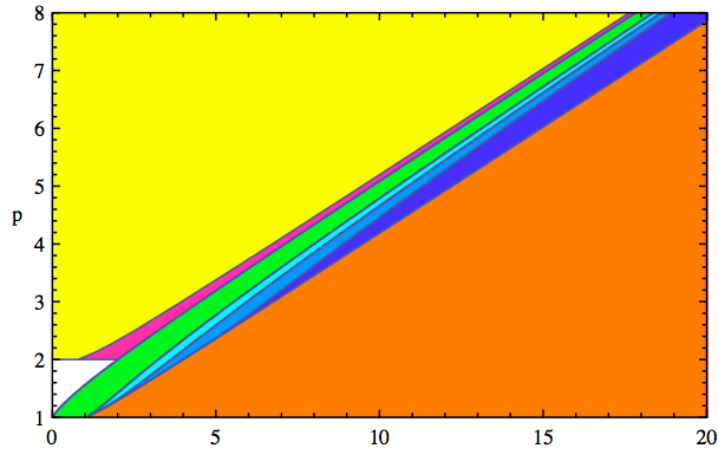


Figura 2.4.2: Diferentes regiões de comportamento para a solução de  $x = cx^p(1 - x)$ .

- uma região de duplicação de período (bifurcações) com entropia topológica constante;
- uma região caótica, onde a entropia topológica tem o valor máximo constante  $\ln 2$ ;
- uma região de extinção decorrente do efeito de Allee;
- uma região de extinção diferida.

Por outro lado, observando que a parábola logística  $x(1 - x)$ ,  $x \in (0, 1)$ , é proporcional ao produto da densidade da Beta(2,1) pela densidade da Beta(1,2), que modelam o máximo e o mínimo de duas variáveis Uniformes padrão independentes, respetivamente, Pestana *et al.* (2011) investigaram o uso de um fator retroativo mais moderado, associado agora à densidade  $(-\ln x)I_{(0,1)}(x)$ , que modela o produto de duas Uniformes padrão independentes. A solução da equação diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = r N(t)[-\ln N(t)] \implies N(t) = \exp(-e^{-rt})$$

é um clássico da dinâmica populacional, conhecida pela função de Gompertz, mas que em Estatística é mais conhecida como densidade da Gumbel. Brilhante *et al.* (2011a) estudaram a extensão natural

$$\frac{dN(t)}{dt} = r N(t)[-\ln N(t)]^{1+\alpha}$$

cuja solução é a distribuição de Fréchet para máximos se  $\alpha > 0$ , e a distribuição de Weibull para máximos se  $\alpha < 0$ .

O estudo de núcleos associados à densidade

$$f_{\mathcal{X}_{p,q,\pi,\rho}}(x) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}[-\ln(1-x)]^{\pi-1}(-\ln x)^{\rho-1}}{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}[-\ln(1-x)]^{\pi-1}(-\ln x)^{\rho-1}dx} I_{(0,1)}(x), \quad p, q, \pi, \rho > 0,$$

que Brilhante *et al.* (2011a) chamaram densidade BetaBoop, e que engloba como caso particular densidades Beta, tem ainda mais interesse. Assim, Brilhante *et al.* (2012) procederam ao estudo sistemático de

$$\frac{dN(t)}{dt} = r [N(t)]^{p-1} [1 - N(t)]^{q-1} [-\ln(1 - N(t))]^{\pi-1} [-\ln N(t)]^{\rho-1}$$

em que os fatores

- $[N(t)]^{p-1}$  e  $[-\ln(1 - N(t))]^{\pi-1}$  modelam a expansão da população, e
- $[1 - N(t)]^{q-1}$  e  $[-\ln N(t)]^{\rho-1}$  as retroações, que equilibram o crescimento populacional.

Os diversos equilíbrios são apenas conhecidos quando alguns dos expoentes são 1 e para algumas combinações dos parâmetros. Em particular temos:

- $p = q = \pi = \rho = 1$  — crescimento linear;
- $p = 2$  e  $q = \pi = \rho = 1$  — crescimento exponencial;
- $q = 2$  e  $p = \pi = \rho = 1$  — decaimento exponencial;
- $p = q = 2$  e  $\pi = \rho = 1$  — crescimento logístico;
- $q = \pi = \rho = 1 \Rightarrow N(t) = [-(p-2)(c+rt)]^{\frac{1}{2-p}}$ ;
- $p = \rho = 2, q = \pi = 1 \Rightarrow N(t) = \exp(e^{-rt} + c)$  — crescimento Gompertz (ou Gumbel);
- $p = 2, q = \pi = 1, Q = 1 + \xi \Rightarrow N(t) = \exp[-\xi(rt-c)^{-\frac{1}{\xi}}]$  — crescimento Fréchet se  $\xi > 0$ , crescimento Weibull se  $\xi \in (-1, 0)$  (quando  $\xi \rightarrow 0$ , o crescimento limite é do tipo Gumbel);
- Por outro lado, um crescimento sustentável é atingido sempre que  $p + \pi = q + \rho$ .

Assim, extensões naturais da equação de Verhulst têm como solução equilíbrios dinâmicos que são mais adequados do que o modelo clássico quando se pretende modelar fenómenos de crescimento incontrolado, como o número de células cancerosas num tumor invasivo.

O peso relativo do fator expansivo e do fator retroativo nas extensões da equação diferencial de Verhulst levam-nos a obter modelos populacionais associados às leis extremas. Quando a retroação  $1 - N(t)$  é moderada utilizando antes  $-\ln N(t)$ , a solução é da classe de Gumbel, em vez do clássico equilíbrio logístico – que afinal é também uma lei extremal, mas no esquema max-geo estável estudado por Rachev and Resnick (1991).

De facto, o emagrecimento geométrico leva a que se considere o máximo das variáveis remanescentes no esquema de rarefação de Rényi (1956), que necessariamente é estocasticamente inferior ao máximo de todas as variáveis. Quer Kovalenko (1965) quer Kozubowski (1994) apresentaram resultados definitivos no que se refere a leis limites estáveis, respetivamente no caso de variáveis positivas e no caso geral, que mostram que quer a log-logística quer a sua simetrização, que obtivemos quando usamos parâmetros  $p \neq 2$  e/ou  $q \neq 2$  na generalização da equação de Verhulst, são também leis max-geo estáveis.

Por outro lado, usando potências de  $-\ln N(t)$  obtemos soluções associadas às clássicas leis estáveis de Fréchet e de Weibull, tendo assim um largo espetro de possíveis equilíbrios dinâmicos, que podem ser de grande utilidade no estudo de desenvolvimentos explosivos, por exemplo de células em tecidos neoplásicos Rocha and Aleixo (2013).

Note-se que se em vez de substituir  $N(t)[1 - N(t)]$  por  $[N(t)]^{p-1}[-\ln(N(t))]^{q-1}$  usarmos a substituição  $[-\ln(1 - N(t))]^{p-1}[1 - N(t)]^{q-1}$ , obtemos soluções associadas às leis de mínimos, em vez de soluções associadas às clássicas leis de máximos.

## 2.4.2 Extensões Mendelianas do modelo de Verhulst

Pareceu natural investigar extensões da equação de Verhulst em que o equilíbrio seja governado por núcleos mendelianos, isto é,

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \left[ 1 + m \left( N(t) - \frac{1}{2} \right) \right] \left[ 1 + p \left( N(t) - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (2.4.1)$$

onde

- $\left[ 1 + m \left( N(t) - \frac{1}{2} \right) \right]$ ,  $m \in [0, 2]$ , regula o incremento populacional, e

- $\left[1 + p \left(N(t) - \frac{1}{2}\right)\right]$ ,  $p \in [-2, 0]$ , é uma retroação.

(A equação de Verhulst é o caso especial  $m = 2$  e  $p = -2$ ).

Observe-se que:

- o primeiro fator está associado a uma mistura de Uniforme (Beta(1,1)) e de máximo de duas Uniformes independentes (Beta (2,1)), e
- o segundo fator está associado a uma mistura de Uniforme e de mínimo de duas Uniformes independentes (Beta(1,2)).

Estas misturas, com densidades

$$f_{X_m}(x) = \left[1 + m \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad m \in [-2, 2], \quad (2.4.2)$$

onde  $f_{X_0}$  é a densidade da Uniforme padrão, foram usadas por Gomes *et al.* (2009), quando  $m \in [-2, 0]$ , para aumentar computacionalmente a dimensão de uma amostra de valores de prova- $p$ , na esperança (não concretizada) de aumentar a potência dos testes de uniformidade.

Por outro lado, Pires and Branco (2010) usaram (2.4.2) para investigar a controvérsia de Mendel-Fisher, sobre a possibilidade de haver o uso de valores de prova- $p$  problemáticos, obtidos com repetição de testes quando o resultado não é o desejado pelo investigador. Por essa razão apelidamos de *mendelianos* os procedimentos em que uma fração dos resultados reportados corresponde a uma escolha do mais favorável aos intuítos do experimentador quando não obtém o que esperava, não havendo em geral uma explicitação de que tal foi feito, nem em que proporção.

Dividindo ambos os membros da equação (2.4.1) por  $\left[1 + m \left(N(t) - \frac{1}{2}\right)\right] \left[1 + p \left(N(t) - \frac{1}{2}\right)\right]$ , obtém-se

$$\frac{1}{(1 + m(N(t) - \frac{1}{2}))(1 + p(N(t) - \frac{1}{2}))} \frac{dN(t)}{dt} = r, \quad (2.4.3)$$

e integrando em ordem a  $t$ , ou seja,

$$\int \frac{1}{(1 + m(N(t) - \frac{1}{2}))(1 + p(N(t) - \frac{1}{2}))} \frac{dN(t)}{dt} dt = \int r dt,$$

obtém-se como solução de (2.4.3) a equação

$$N(t) = \frac{(2-p) C_0 e^{(m-p)rt} + m - 2}{2m - 2p C_0 e^{(m-p)rt}}.$$

Note-se que para  $m = 2$  e  $p = -2$  obtemos de facto o crescimento logístico. Este resultado foi apresentado em *Brilhante et al. (2016)*



## Capítulo 3

# Os valores de prova generalizados, os valores de prova aleatórios e os valores de prova problemáticos

Como referem Wasserstein and Lazar (2016), nos últimos anos tem vindo a tornar-se cada vez mais fácil recolher e armazenar dados, tem aumentado a quantificação da investigação científica, têm proliferado bases de dados cada vez maiores e mais complexas. Esta realidade alarga o campo de aplicação da estatística, cria novos desafios e constitui uma oportunidade para o desenvolvimento do conhecimento humano, mas com ela surgem também preocupações sobre os resultados obtidos, sobre as conclusões apresentadas. A validade das conclusões científicas, incluindo a capacidade de as reproduzir, depende de algo mais do que da estatística. A escolha adequada dos métodos, a condução apropriada da análise e a interpretação correta dos resultados estatísticos desempenham um papel fundamental para garantir que as conclusões são robustas e que a incerteza existente se encontra bem retratada.

Muitas das conclusões apresentadas em trabalhos de investigação são suportadas no conceito de *significância estatística*, tipicamente avaliada através do valor de prova- $p$ . Utilizando os dados para avaliar a plausibilidade da hipótese nula,  $H_0$ , o valor de prova- $p$  é a probabilidade de, sob a validade de  $H_0$ , se observar um valor tão ou mais extremo do que o valor observado para a estatística de teste.

Frequentemente o valor prova- $p$  é interpretado como uma medida da evi-

dência contra  $H_0$ , no sentido em que valores pequenos fornecem evidência de que  $H_0$  poderá ser falsa, enquanto valores grandes revelam que não há evidência suficiente para rejeitar  $H_0$ . A publicação dos valores de prova- $p$  em qualquer estudo que envolva testes de hipóteses é uma boa prática estatística. Desta forma, os especialistas podem avaliar a adequabilidade da evidência e a significância dos resultados obtidos.

É inquestionável a utilidade do valor de prova- $p$  como medida estatística, mas é um instrumento que tem vindo a ser mal utilizado e que muitas vezes é sujeito a interpretações erradas. A polémica em torno da sua utilização tem vindo a animar a comunidade científica e já levou a *American Statistical Association* (ASA) a constituir um grupo de trabalho para debater o tema e a emitir a declaração recentemente publicada com o título “*The ASA’s statement on p-values: context, process, and purpose*” (Wasserstein and Lazar, 2016) sobre os valores de prova- $p$  e a significância estatística.

De um modo mais formal, considerando  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória cuja distribuição depende do parâmetro de interesse  $\theta$ , diz-se que  $T = T(\mathbf{X}; \theta)$  é a variável de teste, se  $T(\mathbf{X}; \theta_0)$  for a estatística de teste quando o valor do parâmetro é  $\theta_0$  conhecido. Representa-se por  $t(\mathbf{x}; \theta) = T(\mathbf{x}; \theta)$ , o valor observado da variável de teste, sendo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  uma realização de  $\mathbf{X}$ . Assumindo, sem perda de generalidade, que  $\mathbb{P}[T(\mathbf{X}; \theta) > t(\mathbf{x}; \theta)]$  é uma função de  $\theta$  não decrescente e que se pretende efetuar um teste de hipóteses unilateral do tipo  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs  $H_1 : \theta > \theta_0$ , então o valor de prova- $p$  será:

$$p = \mathbb{P}[T(\mathbf{X}; \theta_0) > t(\mathbf{x}; \theta_0)]. \quad (3.0.1)$$

Note-se que, sob  $H_0$ , valores grandes de  $T$  podem ser considerados como valores extremos da distribuição de  $T$ , mas o valor de prova- $p$ , ou a *significância estatística*, não mede o tamanho de um *efeito* ou a *importância* de um resultado. Valores de prova- $p$  pequenos não implicam necessariamente a presença de efeitos grandes ou importantes, do mesmo modo valores de prova- $p$  grandes não implicam a falta de importância ou a não existência de efeito.

Qualquer efeito, por mais pequeno que seja, pode dar origem a valores de prova- $p$  suficientemente pequenos que coloquem em causa a hipótese nula, desde que a dimensão da amostra ou a medida de precisão sejam suficientemente grandes. Por outro lado, efeitos grandes podem produzir valores de prova- $p$  pouco significativos, se a amostra for pequena ou se as medições forem imprecisas. Naturalmente, efeitos estimados idênticos terão valores de prova- $p$  diferentes, se a precisão das estimativas diferir.



Refere-se com frequência que rejeitar a hipótese nula é uma decisão forte, mantê-la será uma decisão fraca. Na verdade, a manutenção da hipótese nula poderá ser uma consequência natural da escassez de dados.

Os testes de hipóteses de Neyman-Pearson são uma ferramenta essencial do método científico e partilham os fundamentos da *falsificabilidade* das teorias científicas, que são sempre suscetíveis de serem refutadas pela experiência, mas que nunca podem ser definitivamente confirmadas ou corroboradas. O *princípio da falsificabilidade* foi proposto por Karl Popper que dedicou grande parte do seu trabalho ao estudo da epistemologia e que será provavelmente um dos mais influentes filósofos da ciência do século XX. O termo *racionalismo crítico* descreve a sua filosofia que rejeita o *empirismo clássico* e a perspectiva indutiva do método científico, defendendo a concepção de que todo o conhecimento é falível e corrigível, virtualmente provisório. Segundo Karl Popper, o progresso científico assenta não na observação, mas na geração de hipóteses que poderão ser avaliadas criticamente através da observação e da experimentação. Desta forma, o objetivo do trabalho de um cientista não será a verificação, mas a possibilidade de falsificação da hipótese inicial.

Por isso, frequentemente, nos testes de hipóteses confronta-se uma teoria com os factos e, de um modo geral, a hipótese nula corresponde à teoria que se pretende rejeitar, sendo a hipótese alternativa aquela que exprime as convicções do investigador. Esta é a abordagem dos testes de hipóteses de Neyman-Pearson, muito apelativa, nem sempre a mais apropriada e a prática encarrega-se de demonstrar que nem sempre se verificam as condições anteriormente enunciadas. Existem situações em que os investigadores realizam testes de hipóteses com o intuito de validar a hipótese nula — os casos mais evidentes serão os testes de hipóteses efetuados para validar os pressupostos de aplicação de determinadas técnicas estatísticas, por exemplo testar a homocedasticidade de populações normais previamente à investigação de diferença das médias.

### 3.1 Valores de prova generalizados

Em meta análise, os métodos de combinação de valores de prova- $p$  e os testes de uniformidade são temas que estão relacionados de um modo muito próximo. Como vimos anteriormente, o valor de prova- $p$  é uma medida da evidência contra  $H_0$  e quando se dispõe de valores de prova- $p$  independentes, sob validade de  $H_0$ , os valores- $p$  são observações de uma população uniforme padrão. Existindo um número significativo de resultados que levantam dúvidas sobre a veracidade da hipótese global, não é verosímil admitir a validade

de  $H_0$  e, sob  $H_1$ , a distribuição amostral dos valores de prova- $p$  deixa de ser uniforme padrão. Neste caso, a abordagem recomendada será combinar a evidência estatística sob a validade da hipótese alternativa,  $H_1$ , utilizando o conceito de *valor de prova generalizado*.

Tsui and Weerahandi (1989) apresentaram a noção de *valores de prova generalizados* e de *estatística generalizada*, para resolver problemas em que é necessário obter uma estatística de teste com uma distribuição que não dependa de parâmetros que perturbem a inferência estatística.

Seguiremos o exemplo apresentado em Brilhante (2013) para vermos como estes conceitos podem ser aproveitados para lidar com a síntese meta analítica de provas, especialmente em casos com motivos evidentes para suspeitar da hipótese geral ou em que se suspeita da existência de valores de prova problemáticos.

Seja  $X$  uma v.a. com f.d. que depende do parâmetro de interesse  $\theta$  e de um vector de parâmetros perturbadores  $\zeta$  e  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória da população  $X$ , sendo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  o valor observado de  $\mathbf{X}$ .

Para ultrapassar a dificuldade criada pela presença de um parâmetro perturbador  $\zeta$ , será considerada uma variável de teste generalizada da forma  $T_g = T_g(\mathbf{X}; \mathbf{x}; \theta, \zeta)$  que, para além de ser uma função de  $\mathbf{X}$ , envolve o seu valor observado  $\mathbf{x}$  e os parâmetros  $(\theta, \zeta)$ , definindo-se três condições:

1. o valor observado  $t_g = T_g(\mathbf{x}; \mathbf{x}; \theta; \zeta)$  não depende de  $\theta$  nem de  $\zeta$ ;
2. para  $\theta$  fixo, a distribuição  $T_g(\mathbf{X}; \mathbf{x}; \theta; \zeta)$  não depende de  $\zeta$ ;
3. para  $\theta$  e  $\zeta$  fixos,  $\mathbb{P}[T_g \leq t_g; \theta]$  é uma função monótona de  $\theta$  para qualquer  $t_g$ .

Continuando a utilizar como exemplo o teste unilateral em que se pretende avaliar a hipótese  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs  $H_1 : \theta > \theta_0$ , substituindo em (3.0.1) a variável de teste pela variável de teste generalizada, obtém-se o valor de prova- $p$  generalizado ( $p_g$ ):

$$p_g = \mathbb{P}[T_g \geq t_g | \theta = \theta_0],$$

se  $\mathbb{P}[T_g \leq t_g; \theta]$  for estocasticamente crescente com  $\theta$ . Caso  $T_g$  seja estocasticamente decrescente com  $\theta$ , então  $p_g = \mathbb{P}[T_g \leq t_g | \theta = \theta_0]$ .

O conceito de valor de prova generalizado tem vindo a ganhar popularidade, uma vez que permite ultrapassar as dificuldades inerentes à existência

de parâmetros perturbadores. O problema de Behrens-Fisher é um dos exemplos habitualmente referidos para ilustrar como a utilização deste conceito permite contornar a existência de parâmetros que perturbam a inferência estatística sobre os parâmetros de interesse. Considere-se o caso em que se pretende testar a igualdade de valores médios  $\mu_1$  e  $\mu_2$  de duas populações gaussianas em que não existe igualdade de variâncias, utilizando a informação de duas amostras independentes de dimensão  $n_1$  e  $n_2$ , respetivamente.

A dificuldade na resolução deste problema resulta de se pretender inferir sobre o parâmetro de interesse  $\theta = \mu_1 - \mu_2$ , existindo um parâmetro perturbador  $\zeta = (\sigma_1^2, \sigma_2^2)$ . Para este problema, Linnik (1968) demonstrou que não existe um teste exato *convencional* baseado numa estatística suficiente e completa. Contudo, existem soluções convencionais baseadas noutras estatísticas e soluções aproximadas baseadas em estatísticas suficientes completas (Weerahandi, 1995).

Considere-se o vetor aleatório  $\mathbf{W} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2)$ , represente-se por  $\mathbf{w} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2, s_1^2, s_2^2)$  o seu valor observado, sendo  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2$  os estimadores habituais do valor médio e da variância. Defina-se a estatística de teste generalizada

$$T(\mathbf{W}; \mathbf{w}, \theta, \zeta) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sqrt{\frac{s_1^2 \sigma_1^2}{n_1 S_1^2} + \frac{s_2^2 \sigma_2^2}{n_2 S_2^2}},$$

que tem o valor observado  $t = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ , sendo o valor esperado de  $T$  uma função crescente de  $\mu_1 - \mu_2$ .

Tendo em consideração que

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = Z \sim N(0, 1)$$

e que se tem

$$Y_1 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n_1 - 1}^2 \quad Y_2 = \frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_2 - 1}^2,$$

reescreve-se  $T(\mathbf{W}; \mathbf{w}, \theta, \zeta)$  em função das v.a.  $Z, Y_1$  e  $Y_2$  independentes:

$$T(\mathbf{W}; \mathbf{w}, \theta, \zeta) = Z \sqrt{\frac{(n_1 - 1) s_1^2}{n_1 Y_1} + \frac{(n_2 - 1) s_2^2}{n_2 Y_2}}.$$

Desta forma, define-se  $p_g$  como valor de prova generalizado para testar a hipótese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  vs  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ :

$$p_g = \mathbb{P}[T \geq t | \mu_1 = \mu_2] = \mathbb{P}\left[Z \sqrt{\frac{(n_1 - 1) s_1^2}{n_1 Y_1} + \frac{(n_2 - 1) s_2^2}{n_2 Y_2}} \geq \bar{x}_1 - \bar{x}_2\right].$$

Através deste exemplo é possível compreender a vantagem da estatística de teste generalizada que permite desenhar um teste exato para situações em que existem parâmetros perturbadores.

Seguiremos um outro exemplo em que se aplicam os princípios dos valores de prova generalizados, não porque se esteja perante a presença de um parâmetro perturbador, mas porque haverá indícios de que as observações correspondam a valores prova problemáticos, contaminados por observações que não têm distribuição uniforme padrão.

Como propõe Brillhante (2013), considere-se a família de v.a.  $X_m \curvearrowright$  Medel( $m$ ) com f.d.p. (1.3.2). O interesse será confrontar a hipótese de uniformidade com uma alternativa mais propícia a originar valores próximos de zero, que será sugerido pelo efeito de enviesamento de publicação. Ou seja:

$$H_0 : m = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : m < 0. \quad (3.1.1)$$

Tendo em consideração a dificuldade associada à pesquisa de estatísticas suficientes não triviais para  $m$  que possam ser usadas na construção de uma variável de teste generalizada, utiliza-se o TTU e aplica-se a metodologia proposta por Iyer and Patterson (2002) para construção de uma variável de teste generalizada, que de seguida se apresenta de forma resumida.

Suponha-se que existem  $n$  parâmetros desconhecidos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  e que o parâmetro de interesse é  $\theta = f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ . Se existir um conjunto de estatísticas  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  e um conjunto de pivots invertíveis  $(V_1, V_1, \dots, V_n)$  relacionando  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  com  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  então, escrevendo o parâmetro de interesse  $\theta = g(U_1, U_2, \dots, U_n, V_1, V_2, \dots, V_n)$ , obtém-se uma expressão para quantidades pivotais generalizadas que pode ser utilizada para inferências sobre  $\theta$ ,  $R = \theta - g(u_1, u_2, \dots, u_n, V_1, V_2, \dots, V_n)$ , sendo  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  os valores observados de  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ .

Denote-se por  $F_{X_m}$  a f.d. da v.a.  $X_m$ . Pelo TTU tem-se  $F_{X_m}(X_i) \curvearrowright$  Uniforme(0,1), com  $i = 1, \dots, n$ , donde  $V = -2 \sum_{j=1}^n \ln [F_{X_m}(X_j)] \curvearrowright \chi_{2n}^2$  é

uma variável pivot. Note-se que

$$\begin{aligned} V &= -2 \sum_{j=1}^n \ln [F_{X_m}(X_j)] = -2 \sum_{j=1}^n \ln \left( \frac{m}{2} X_j^2 + \frac{2-m}{2} X_j \right) \\ &\approx -2 \sum_{j=1}^n \ln (X_j) - mn (\bar{X} - 1). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Resolvendo (3.1.2) em ordem a  $m$  obtém-se  $m \approx \frac{V+2 \sum_{j=1}^n \ln(X_j)}{n(1-\bar{X})}$ . Desta forma, define-se que

$$T(\mathbf{X}; \mathbf{x}; m) = m - \frac{V + 2 \sum_{j=1}^n \ln(x_j)}{n(1-\bar{x})}$$

é uma variável de teste generalizada para  $m$ , com  $T(\mathbf{x}; \mathbf{x}; m) \approx 0$ , sendo  $\mathbb{P}[T > t; m]$  uma função crescente de  $m$ . Assim, o valor de prova generalizado,  $p_g$ , para testar as hipóteses em (3.1.1) será dado por

$$p_g = \mathbb{P}[T(\mathbf{X}; \mathbf{x}; m) \leq 0 | m = 0] = 1 - \mathbb{P}\left[V \leq -2 \sum_{j=1}^n \ln x_j\right].$$

De forma análoga, o valor de prova generalizado para testar a hipótese  $H_0 : m = 0$  vs  $H_1 : m > 0$  será dado por

$$p_g = \mathbb{P}[T(\mathbf{X}; \mathbf{x}; m) \geq 0 | m = 0] = \mathbb{P}\left[V \leq -2 \sum_{j=1}^n \ln x_j\right].$$

Como acabou de se ilustrar, o conceito de estatística generalizada é abrangente, não se limitando a sua aplicação aos casos em que é necessário contornar as dificuldades criadas pela presença de parâmetros perturbadores.

## 3.2 Valores de prova aleatórios

O valor de prova- $p$  será certamente um dos indicadores mais utilizados em processos de decisão, daí a crescente preocupação com a necessidade de garantir que quem utiliza este indicador compreende o seu significado e que tenha conhecimento das suas limitações, uma preocupação bem presente no trabalho de Schervish (1996) com o título “*P values: What They Are and What They Are Not*”.

Sob a validade de  $H_0$ , o valor de prova- $p$  é um valor observado duma v.a.  $P$  com distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , qualquer que seja a dimensão da amostra. Note-se que, nestas circunstâncias, é igualmente expectável observar qualquer valor entre 0 e 1. Assim, o nível de significância habitualmente utilizado como referência, 0.05, significa que, para uma determinada experiência, um em vinte valores de prova- $p$  observados poderá ser 0.05 ou inferior, mesmo que a hipótese nula seja verdadeira. Na teoria dos testes de hipóteses de Neyman-Pearson este conceito é definido como o erro de primeira espécie, a partir do qual se determina a região de rejeição e que permite controlar a frequência com que erradamente se decide rejeitar a hipótese nula.

Murdoch *et al.* (2008) apresentam a sugestão de ensinar o conceito de valor de prova- $p$  através de simulação com a apresentação de histogramas, para evidenciar que os valores de prova- $p$  são v.a., guiando os alunos e exemplificando interpretações válidas, de forma a que seja possível apreender o significado do valor de prova- $p$  e dos testes de hipóteses.

Tomando o valor de prova- $p$  tal como se encontra definido em (3.0.1), seja  $T(\mathbf{x}; \theta_1)$  com f.d.  $F_1$  o resultado duma experiência ao qual se associa o valor de prova- $p$ , define-se *valor de prova aleatório* como sendo,

$$P_a = \mathbb{P}[T(\mathbf{X}; \theta_0) > T(\mathbf{x}; \theta_1)] = 1 - F_0[T(\mathbf{x}; \theta_1)],$$

que por simplicidade de apresentação consideraremos no contexto de v.a. contínuas com f.d. invertível, sendo  $F_0$  a f.d. amostral, sob  $H_0$ , da estatística de teste  $T$  com inversa  $F_0^{-1}$ . A f.d. do valor de prova aleatório,  $P_a$ , para  $p \in [0, 1]$  será dada por

$$\begin{aligned} F_{P_a}(p) &= \mathbb{P}[P_a \leq p] = \mathbb{P}[1 - F_0(T(\mathbf{x}; \theta_1)) \leq p] \\ &= \mathbb{P}[F_0(T(\mathbf{x}; \theta_1)) \geq 1 - p] = \mathbb{P}[T(\mathbf{x}; \theta_1) \geq F_0^{-1}(1 - p)] \\ &= 1 - F_1[F_0^{-1}(1 - p)]. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Repare-se que se a distribuição da estatística de teste original,  $T(\mathbf{X}; \theta_1)$ , for igual à da distribuição sob  $H_0$ , ou seja se  $F_1 = F_0$  em (3.2.1) obtém-se  $F_{P_a}(p) = p$ , para  $p \in [0, 1]$ , a função distribuição de uma uniforme padrão. Quando  $F_1$  é diferente de  $F_0$ , a v.a.  $P_a$  frequentemente terá uma distribuição muito diferente.

Uma das condições necessárias para garantir a credibilidade do trabalho científico é a capacidade de reproduzir os resultados duma experiência. Goodman (1992) explora a relação entre o valor de prova- $p$  e a noção de

repetibilidade, demonstrando que para um determinado valor de prova- $p$ , a probabilidade de replicar um resultado significativo, sob certas condições, é mais pequena do que muitos estariam à espera — no contexto de testes sobre valores médios gaussianos, na repetição independente de uma experiência em que se obteve um valor de prova- $p$  de 0.05, o valor esperado do valor de prova é  $\mathbb{E}[P] = 0.122$  (Kulinskaya *et al.*, 2008), um resultado preocupante quando se pensa no viés de publicação em meta análise. A questão da repetibilidade é analisada com rigor no contexto da meta análise por Utts (1991).

Boos and Stefanski (2011) estudam a variabilidade do valor de prova- $p$ , um aspecto que poderá ser importante considerar para avaliar resultados científicos que não se conseguem reproduzir através da replicação das experiências. A possibilidade de, numa repetição da experiência, observar um valor de prova- $p$  *semelhante* ao obtido será algo a ponderar quando se analisam os resultados de qualquer experiência.

A família Mendel( $m$ ) (1.3.1), ou de um modo mais geral a família Mendel( $r; p, q$ ) (1.4.1), será a mais apropriada para modelar a v.a.  $P_a$ , quando se considera a possibilidade de alguns experimentadores, perante resultados que contrariam a sua hipótese de investigação, terem repetido experiências, reportando o *melhor* dos resultados obtidos — o *melhor* resultado poderá ser o mínimo ou o máximo de uniformes independentes.

Para além dos trabalhos já referidos recomenda-se ainda Hung *et al.* (1997) que explora o comportamento do valor de prova- $p$  quando a hipótese alternativa é verdadeira.





# Capítulo 4

## A família Mendel( $m$ ) de misturas de Uniforme com Beta(2,1) ou Beta(1,2)

### 4.1 Definição

É interessante observar a Figura 4.1.1, onde se encontra a representação gráfica de várias f.d.p. da v.a.  $X_m \sim \text{Mendel}(m)$ , sendo cada uma dessas funções um segmento de reta que passa pelo ponto  $(\frac{1}{2}, 1)$  com declive  $m \in [-2, 2]$  e com suporte em  $(0, 1)$  uma f.d.p. da família Mendel( $m$ ). Esta família que tem como casos particulares:

- quando  $m = 0$ , a f.d.p. da Uniforme padrão,  $f_U(x) = \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ ;
- quando  $m = 2$ , a f.d.p. do máximo  $U_{2:2}$  de duas v.a. Uniformes padrão i.i.d.,  $U_1$  e  $U_2$ ,  $f_{U_{2:2}}(x) = 2x\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ ;
- quando  $m = -2$ , a f.d.p. do mínimo  $U_{1:2}$  de duas v.a. Uniformes padrão i.i.d.,  $U_1$  e  $U_2$ ,  $f_{U_{1:2}}(x) = 2(1-x)\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ .

Estes casos particulares são também membros importantes da família Beta-Boop, fazem parte da família das Betas com f.d.p. dada por

$$f_{X_{p,q}}(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$$

(onde  $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  é a função Beta de Euler).

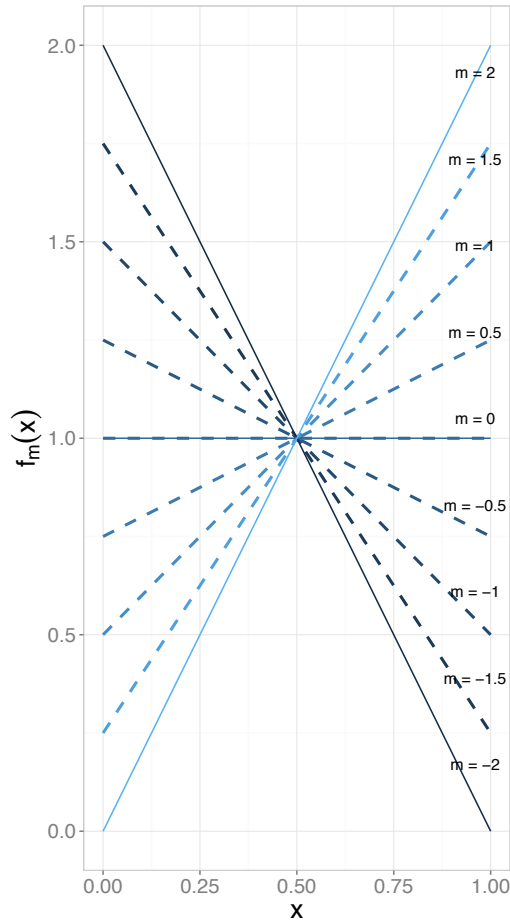


Figura 4.1.1: Função densidade de probabilidade  $f_{X_m}$ , quando  $m = -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5$  e  $2$ .

Recuperando (1.3.2):

$$f_{X_m}(x) = \left[ 1 + m \left( x - \frac{1}{2} \right) \right] \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad m \in [-2, 2].$$

Note-se que  $f_{X_m}$  é uma mistura convexa da f.d.p. da Uniforme padrão, com peso  $1 - \frac{|m|}{2}$ , com a densidade  $f_{U_{2,2}}$  se  $m \in (0, 2]$  ou com a densidade  $f_{U_{1,2}}$  se  $m \in [-2, 0)$ , com peso  $\frac{|m|}{2}$ . Escrevendo  $X_m$  de um outro modo,

$$X_m = \begin{cases} U & U_{1+\lceil \frac{m}{2} \rceil:2} \\ 1 - \frac{|m|}{2} & \frac{|m|}{2} \end{cases} .$$

Pode ainda referir-se que  $X_m$  é uma mistura da Uniforme com a Beta(2, 1) ou com a Beta(1,2), consoante  $m \in (0, 2]$  ou  $m \in [-2, 0)$ .

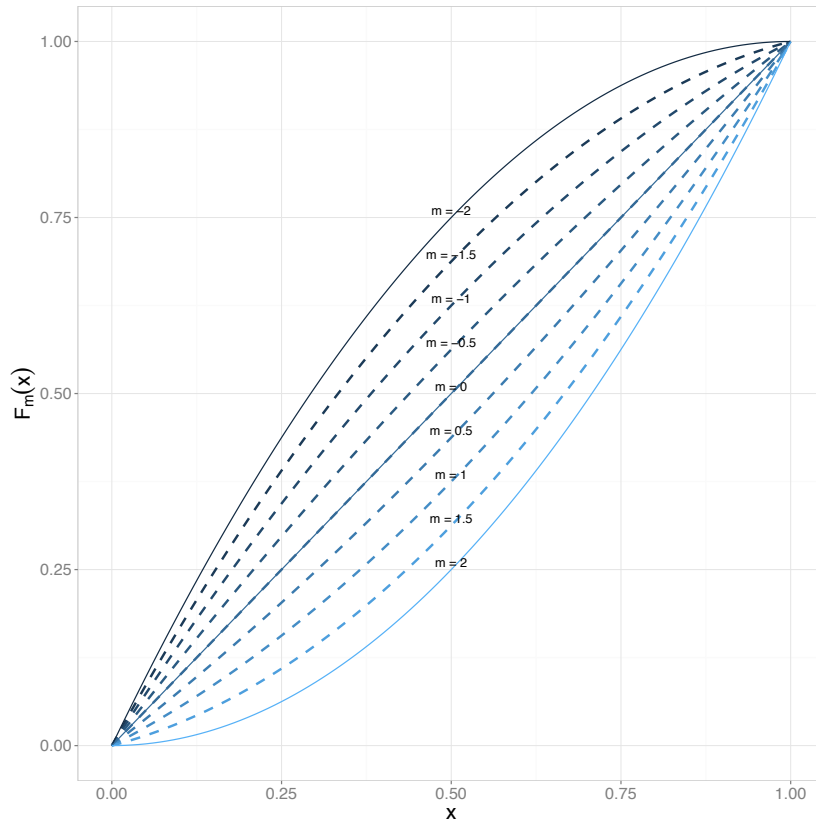


Figura 4.1.2: Função de distribuição  $F_{X_m}$  quando  $m = -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5$  e  $2$ .

Repare-se também que as f.d. correspondentes às densidades (1.3.2) são

$$F_{X_m}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0 \\ \frac{m}{2} x^2 + \left(1 - \frac{m}{2}\right) x & , \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases} , \quad m \in [-2, 2], \quad (4.1.1)$$

cuja inversa é

$$F_{X_m}^{-1}(u) = \begin{cases} u & , \text{ se } m = 0 \\ \frac{\frac{m}{2} - 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{m}{2}\right)^2 + 2mu}}{m} & , \text{ se } m \in [-2, 2] \setminus \{0\} \end{cases} , \quad u \in [0, 1]. \quad (4.1.2)$$

Em (4.1.1) apresenta-se a f.d. de  $X_m$ , na Figura 4.1.2 encontra-se a sua representação gráfica para alguns valores de  $m$ , tornando-se evidente que  $X_m \prec X_q$ , para  $-2 \leq m \leq q \leq 2$ .

## 4.2 Momentos e outras propriedades

Os momentos de uma v.a. (quando existem) permitem caracterizar a distribuição de probabilidade e conhecer o domínio da v.a.. O momento de ordem  $k$  da v.a.  $X_m$  é

$$\mathbb{E} [X_m^k] = \frac{m}{k+2} + \frac{1-\frac{m}{2}}{k+1}. \quad (4.2.1)$$

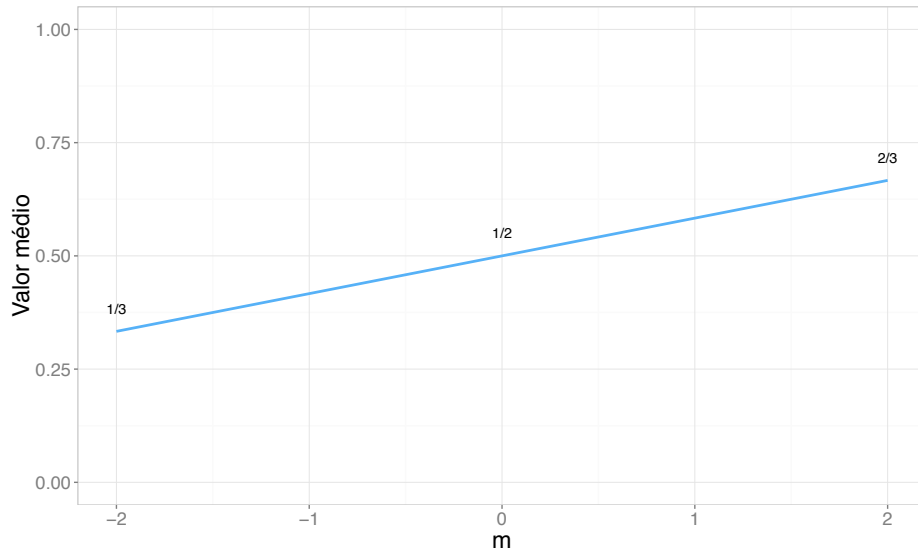


Figura 4.2.1: Valor médio de  $X_m$ .

Através de (4.2.1) facilmente se determina o valor médio da v.a.  $X_m$  que é dado por

$$\mathbb{E} [X_m] = \frac{m+6}{12} = \frac{m}{12} + \frac{1}{2} \quad (4.2.2)$$

e que varia entre  $\frac{1}{3}$  ( $m = -2$ ) e  $\frac{2}{3}$  ( $m = 2$ ), sendo  $\frac{1}{2}$  para  $m = 0$ , conforme se pode confirmar através da Figura 4.2.1.

Utilizando o teorema de König chega-se à variância de  $X_m$  que, como se pode observar na Figura 4.2.2, assume valores entre  $\frac{1}{18}$  e  $\frac{1}{12}$ , tendo a variabilidade máxima quando  $m = 0$  e a variabilidade mínima quando  $|m| = 2$ .

$$\begin{aligned} \text{Var} [X_m] &= \mathbb{E} [X_m^2] - (\mathbb{E} [X_m])^2 \\ &= \frac{4+m}{12} - \frac{(6+m)^2}{144} = \frac{(12-m^2)}{144} = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{m^2}{12}\right). \end{aligned}$$

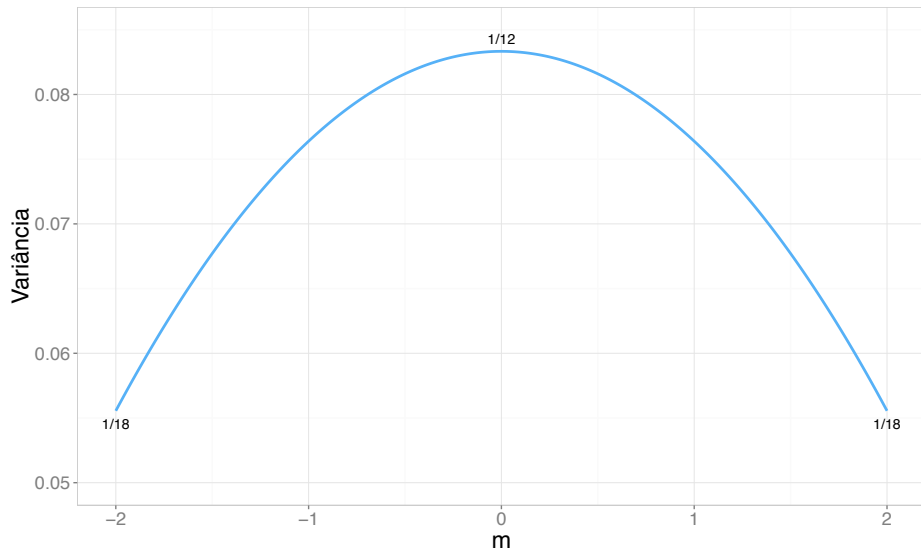


Figura 4.2.2: Variância de  $X_m$ .

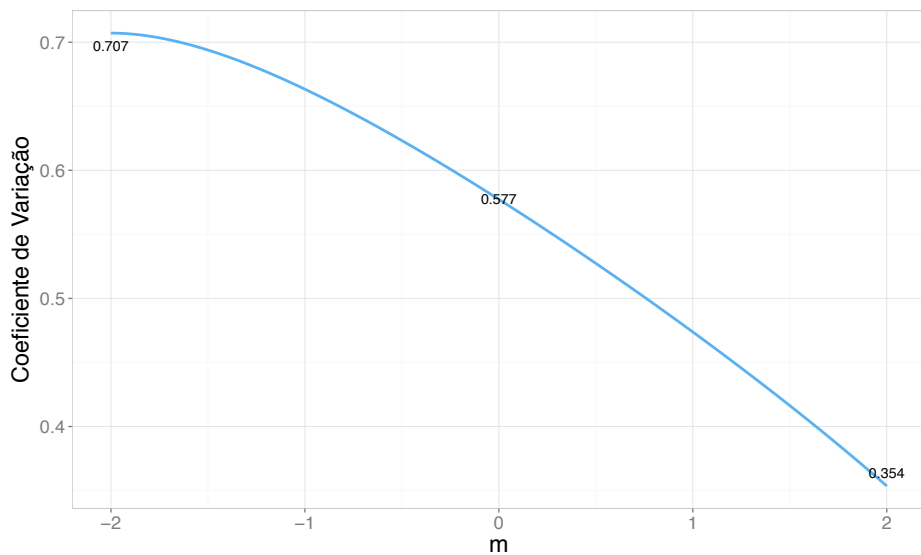


Figura 4.2.3: Coeficiente de Variação de  $X_m$ .

O coeficiente de variação é uma medida de dispersão que relativiza o desvio padrão em relação ao valor médio e é obtido dividindo o desvio padrão pelo valor médio. Por vezes multiplica-se o coeficiente de variação por 100, representando assim a percentagem dos desvios em relação ao valor médio.

O coeficiente de variação para a v.a.  $X_m$  é

$$CV_{X_m} = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{12 - m^2}}{6 + m},$$

que assume o valor mínimo ( $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.354$ ) em  $m = 2$ , o valor máximo ( $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ ) em  $m = -2$ , sendo  $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$  quando  $m = 0$ .

As funções características são uma ferramenta analítica importante da teoria da probabilidade e têm a vantagem, em relação às outras transformadas integrais, de existir para todo  $t \in \mathbb{R}$ . A função característica da v.a.  $X_m$  é definida pelo valor médio da v.a. complexa  $e^{iX_m t}$  e é dada por:

$$\varphi_{X_m}(t) = \frac{i(1 - \frac{m}{2})}{t} + \frac{1}{t^2} \left[ me^{it} - m - ite^{it} - \frac{mit}{2}e^{it} \right].$$

A observação que a função característica de uma determinada v.a. depende apenas da sua distribuição, leva-nos a uma das suas propriedades mais interessantes: funções características de v.a. com a mesma distribuição são idênticas. Ou seja,

$$\varphi_X(t) \equiv \varphi_Y(t) \iff X \stackrel{d}{=} Y.$$

Estabelecemos de seguida algumas propriedades simples desta família de v.a..

#### **Teorema 4.2.1**

Se  $X \sim F_{X_m}$ , então  $1 - X \sim F_{X_{-m}}$ .

*Demonstração.*

Considerando  $Y = 1 - X$ , tem-se

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[1 - X \leq y] = \mathbb{P}[X \geq 1 - y] = 1 - F_X(1 - y).$$

Então,

$$f_Y(y) = f_X(1 - y) = 1 + m \left( 1 - y - \frac{1}{2} \right) = 1 - m \left( y - \frac{1}{2} \right), \quad 0 < y < 1.$$

□

É curioso observar que a probabilidade de  $X$  pertencer a intervalos do tipo  $[\frac{1}{2} - k, \frac{1}{2} + k]$  depende apenas de  $k$  e não tem qualquer relação com o valor de  $m$ . Veja-se,

$$\mathbb{P} \left[ \frac{1}{2} - k < X < \frac{1}{2} + k \right] = 2k, \quad k \in [0, \frac{1}{2}].$$

Pois repare-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\frac{1}{2} - k < X < \frac{1}{2} + k\right] &= F_{X_m}\left(\frac{1}{2} + k\right) - F_{X_m}\left(\frac{1}{2} - k\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2} + k\right)^2 + \left(1 - \frac{m}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + k\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2} - k\right)^2 - \left(1 - \frac{m}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - k\right) = 2k. \end{aligned}$$

Quando se consideram intervalos do tipo  $[\mathbb{E}(X) - k, \mathbb{E}(X) + k]$  o resultado é

$$\mathbb{P}[\mathbb{E}(X) - k \leq X \leq \mathbb{E}(X) + k] = 2k + \frac{km^2}{6}, \quad k \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{|m|}{12}\right].$$

Neste caso, será a amplitude do intervalo  $2k$  mais uma quantidade  $(\frac{km^2}{6})$  que depende de  $m$ .

### Teorema 4.2.2

Seja  $Y$  uma v.a. com f.d.p.  $f_{X_m}$  e  $X$  uma v.a. com f.d.p.  $f_{X_{-m}}$ , para  $m \in [-2, 2]$ . Para  $i = 1, \dots, n$ ,  $\{Y_i\}$  i.i.d. a  $Y$  e  $\{X_i\}$  i.i.d. a  $X$ , sendo  $X_{i:n}$  e  $Y_{i:n}$  as  $i$ -ésimas e.o. ascendentes associadas, tem-se:

$$Y_{i:n} \stackrel{d}{=} 1 - X_{n-i+1:n}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

*Demonstração.* Se  $W = 1 - X_{n-i+1:n}$ , tem-se  $F_W(w) = \mathbb{P}[X_{n-i+1:n} \geq 1 - w]$ . Ou seja  $F_W(w) = 1 - F_{X_{n-i+1:n}}(1 - w)$ . Desta forma pode escrever-se  $f_W$  como

$$\begin{aligned} f_W(1 - w) &= \\ &= f_X(1 - w) [F_X(1 - w)]^{n-i} [1 - F_X(1 - w)]^{i-1} \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} = \\ &= [-m(1 - w) + 1 + m/2] [-m(1 - w)^2/2 + (1 + m/2)(1 - w)]^{n-i} \\ &\quad [1 + m(1 - w)^2/2 - (1 + m/2)(1 - w)]^{i-1} \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} = \\ &= f_Y(w) [F_Y(w)]^{i-1} [1 - F_Y(w)]^{n-i} \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} = f_{Y_{i:n}}(w). \end{aligned}$$

□

### Teorema 4.2.3

Considere-se  $X \curvearrowright \text{Mendel}(m)$ , seja  $k_i = \frac{i}{n}$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\Delta_i = \mathbb{P}[k_i \leq X \leq k_{i+1}] = \frac{m}{2n^2} (2i + 1 - n) + \frac{1}{n}, \quad (4.2.3)$$

sendo  $\frac{m}{2n^2} (2i + 1 - n)$  o desvio da uniformidade cuja soma será obviamente 0.

Face ao resultado anterior (4.2.3) repare-se que a soma do espaçamento  $i$  com o espaçamento  $n - i - 1$  não depende de  $m$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ :

$$\Delta_i + \Delta_{n-i-1} = \frac{2}{n}.$$

#### Teorema 4.2.4

Seja  $X \sim \text{Mendel}(m)$ ,

$$\mathbb{E}[X_{n:n}] = 1 - \frac{\sum_{k=0}^n (2-m)^k \frac{m^{n-k}}{2^{n-k+1}} \binom{n}{k}}{2^n}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n:n}] &= \int_0^1 \left[ 1 - \left( \frac{mx^2}{2} + \left(1 - \frac{m}{2}\right)x \right)^n \right] dx \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(2-m)^k}{2^k} \frac{m^{n-k}}{2^{n-k}} \int_0^1 x^{2n-k} dx \\ &= 1 - \frac{m^n}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(2-m)^k}{m^k} \frac{1}{2^{n-k+1}} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

□

Por outro lado,

$$\mathbb{E}[X_{1:n}^{(m)}] = 1 - \mathbb{E}[X_{n:n}^{(-m)}].$$

### 4.3 Estimação do parâmetro $m$

Como referido anteriormente a v.a.  $X_m$  da família  $\text{Mendel}(m)$  com f.d.p. (1.3.2) é suficientemente flexível para poder ser utilizada num contexto de valores de prova problemáticos, modelando os valores de prova publicados e, desta forma, fornecer informação sobre a proporção de observações na amostra que são de facto Uniformes. Estimar o parâmetro  $m$  assume um papel determinante pois, nestas circunstâncias, conhecido o valor do parâmetro  $m$  facilmente se determina a proporção  $\left(\frac{|m|}{2}\right)$  de observações não Uniformes.

A procura de um estimador adequado para  $m$  tem apresentado diversas dificuldades conduzindo a pesquisa para a experimentação de métodos menos



utilizados em problemas de estimação e nem sempre os caminhos percorridos permitiram colher os resultados esperados.

Apresentam-se de seguida alguns dos estimadores estudados e que foram obtidos através do método:

- dos momentos ( $\widetilde{m}_M$ );
- de máxima verosimilhança ( $\widetilde{m}_{ML}$ );
- de mínimos quadrados ( $\widetilde{m}_{LS}$ );
- do espaçamento máximo ( $\widetilde{m}_{MSp}$ );
- dos momentos probabilisticamente ponderados ( $\widetilde{m}_{PWM}$ ).

Assume-se que  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  é uma amostra da população com f.d.p. (1.3.2) e f.d. (4.1.1), com o parâmetro  $m$  desconhecido e, utiliza-se  $\mathcal{M}$  para designar o espaço do parâmetro  $[-2, 2]$ . Considera-se o ponto amostral  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e a f.d.e.  $F_n^*$ .

### 4.3.1 Método dos momentos ( $\widetilde{m}_M$ )

O estimador do método dos momentos (M) determina-se de uma forma simples e intuitiva, fazendo corresponder os momentos populacionais não observáveis aos momentos empíricos equivalentes.

Para a família (1.3.2), considerando a expressão do momento de primeira ordem (4.2.2), facilmente se retira que um estimador dos momentos para  $m$  poderá ser

$$\widetilde{m}_M = 12\bar{X} - 6.$$

Este método produz um estimador não enviesado para  $m$ , ou seja

$$\mathbb{E}[\widetilde{m}_M] = \mathbb{E}[12\bar{X} - 6] = m,$$

com variância dada por

$$Var[\widetilde{m}_M] = Var[12\bar{X} - 6] = \frac{12 - m^2}{n}.$$

Apesar de  $\widetilde{m}_M$  admitir valores fora do espaço do parâmetro  $\mathcal{M}$ , repare-se que é um estimador centrado.

### 4.3.2 Método de máxima verosimilhança ( $\tilde{m}_{ML}$ )

A ideia base do método de máxima verosimilhança (ML) é determinar o valor do parâmetro  $m$  que maximiza a função de verosimilhança,  $L(m; \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}|m)$ . Intuitivamente identifica-se o valor do parâmetro que maximiza a *concordância* dos dados com o modelo selecionado. No caso das v.a. discretas, a função de verosimilhança expressa a probabilidade da amostra observada  $\mathbf{x}$  em função do parâmetro  $\theta$  desconhecido, associando a cada um dos possíveis valores do parâmetro a sua plausibilidade ou verosimilhança face à amostra observada.

Os estimadores obtidos através do ML produzem, de uma forma geral, boas estimativas, sendo por isso uma das primeiras abordagens nos problemas de estimação.

Para a família (1.3.2) a função de log-verosimilhança é dada por

$$L(m; \mathbf{x}) = \ln \prod_{k=1}^n \left[ 1 + m \left( x_k - \frac{1}{2} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \ln \left[ 1 + m \left( x_k - \frac{1}{2} \right) \right],$$

sendo diferenciável em ordem a  $m$  com

$$\frac{dL}{dm} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k - \frac{1}{2}}{1 + m \left( x_k - \frac{1}{2} \right)} = \frac{\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} - x_k \right) \prod_{i=1, i \neq k}^n \left( \frac{m-2}{2m} - x_i \right)}{m \prod_{k=1}^n \left( \frac{m-2}{2m} - x_k \right)}. \quad (4.3.1)$$

Repare-se que o numerador da expressão (4.3.1) é uma função polinomial de ordem  $n-1$ . Não havendo expressões analíticas explícitas para as soluções de  $\frac{dL}{dm} = 0$ , quando  $n > 3$ , será utilizado um método numérico para resolver a equação.

É possível determinar as raízes das funções polinomiais de 2º e 3º grau, mas dispensamo-nos de as explicitar.

Não havendo garantias que existam soluções para  $\frac{dL}{dm} = 0$  pertencentes ao espaço do parâmetro  $\mathcal{M}$ , o estimador ML é determinado diretamente através da expressão

$$\tilde{m}_{ML} = \arg \max_{m \in \mathcal{M}} L(m; \mathbf{x}) = \arg \max_{m \in \mathcal{M}} \prod_{k=1}^n \left[ 1 + m \left( x_k - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4.3.2)$$

com  $L$  a representar a função de verosimilhança. Quando nenhuma das soluções de  $\frac{dL}{dm} = 0$  pertence a  $\mathcal{M}$ , a estimativa considerada será o valor admissível mais próximo,  $-2$  ou  $2$ .

### 4.3.3 Método dos mínimos quadrados ( $\tilde{m}_{LS}$ )

Seja  $F_n^*$  a função de distribuição empírica, tomando o modelo

$$F_m(x) = F_n^*(x) + \epsilon \Rightarrow F_n^*(x) = F_m(x) + \epsilon,$$

o par  $(x_{k:n}, \frac{k}{n})$ , com  $k = 1, \dots, n$ , verifica a relação

$$\frac{k}{n} = \frac{m}{2} x_{k:n} (x_{k:n} - 1) + x_{k:n} + \epsilon_k.$$

No método dos mínimos quadrados (LS) estima-se  $m$  de forma a minimizar os desvios ( $\epsilon_k$ ) entre os valores observados e os valores estimados, procurando o modelo que melhor se ajusta à amostra observada.

Utilizando a função quadrática penalizam-se de igual forma os desvios negativos e os desvios positivos e pode escrever-se a soma dos quadrados dos erros como

$$\begin{aligned} SE &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{k}{n} - \frac{m}{2} x_{k:n} (x_{k:n} - 1) - x_{k:n} \right]^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{m}{2} x_{k:n} (x_{k:n} - 1) + x_{k:n} - \frac{k}{n} \right]^2. \end{aligned}$$

Derivando, resulta

$$\frac{dSE}{dm} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{m}{2} x_{k:n} (x_{k:n} - 1) + x_{k:n} - \frac{k}{n} \right] x_{k:n} (x_{k:n} - 1).$$

Fazendo  $\frac{dSE}{dm} = 0$  e resolvendo em ordem a  $m$ , obtém-se o estimador dos mínimos quadrados  $\tilde{m}_{LS}$ ,

$$\tilde{m}_{LS} = \frac{2 \sum_{k=1}^n x_{k:n} (1 - x_{k:n}) \left( x_{k:n} - \frac{k}{n} \right)}{\sum_{k=1}^n [x_{k:n} (1 - x_{k:n})]^2}.$$

### 4.3.4 Método do espaçamento máximo ( $\tilde{m}_{MSp}$ )

O método do espaçamento máximo (MSp) proposto por Ranney (1984) baseia-se numa aproximação à divergência de Kullback-Leibler, tal como o

ML. Este método tem sido referido como alternativa ao ML, nomeadamente para a estimação de misturas de distribuições contínuas e de distribuições de *caudas pesadas*, com parâmetros de localização e escala desconhecidos (Ekström, 2008).

Dada uma amostra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de uma população com f.d. (4.1.1), com  $m$  desconhecido, define-se

$$D_k(m) = F_m(x_{k:n}) - F_m(x_{k-1:n}), \quad k = 1, 2, \dots, n+1,$$

onde  $x_{0:n} \equiv \alpha_{F_m}$  e  $x_{n+1:n} \equiv \omega_{F_m}$ , respetivamente o ínfimo e o supremo do suporte da distribuição.

A estimativa MSp corresponderá ao valor  $m$  que maximiza a função:

$$\begin{aligned} S_n(m) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \ln [(n+1)D_k(m)] \\ &= \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \ln D_k(m). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\tilde{m}_{MSp} = \arg \max_{m \in \mathcal{M}} S_n(m).$$

Para a f.d. (4.1.1),  $F_m(x_{0:n}) \equiv 0$  e  $F_m(x_{n+1:n}) \equiv 1$ , tem-se:

$$D_k(m) = \begin{cases} \frac{m}{2} x_{1:n}(x_{1:n} - 1) + x_{1:n} & , k = 1 \\ \frac{m}{2} [x_{k:n}(x_{k:n} - 1) - x_{k-1:n}(x_{k-1:n} - 1)] + x_{k:n} - x_{k-1:n} & , k = 2, \dots, n \\ 1 - \frac{m}{2} x_{n:n}(x_{n:n} - 1) - x_{n:n} & , k = n+1 \end{cases}$$

Se a função  $S_n$  for diferenciável em ordem a  $m$ , a solução de  $\frac{dS_n}{dm} = 0$  pertencente ao espaço do parâmetro  $\mathcal{M}$  é candidata a estimativa MSp

$$\begin{aligned} \frac{dS_n}{dm} &= \frac{1}{n+1} \left[ \frac{x_{1:n}(x_{1:n} - 1)}{m x_{1:n}(x_{1:n} - 1) + 2x_{1:n}} \right. \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \frac{x_{k:n}(x_{k:n} - 1) - x_{k-1:n}(x_{k-1:n} - 1)}{m [x_{k:n}(x_{k:n} - 1) - x_{k-1:n}(x_{k-1:n} - 1)] + 2(x_{k:n} - x_{k-1:n})} \\ &\quad \left. - \frac{x_{n:n}(x_{n:n} - 1)}{2 - m x_{n:n}(x_{n:n} - 1) - 2x_{n:n}} \right]. \end{aligned}$$

### 4.3.5 Método dos momentos probabilisticamente ponderados ( $\tilde{m}_{PWM}$ )

A estimação através do método dos momentos probabilisticamente ponderados (PWM) foi proposta por Greenwood *et al.* (1979) e, por vezes, é utilizada quando o estimador ML não existe ou é difícil de calcular.

Seja  $X$  uma v.a. com f.d.  $F$ . Os momentos probabilisticamente ponderados de  $F$  são definidos por

$$M_{p,r,s} = \mathbb{E}[X^p (F(X))^r (1 - F(X))^s],$$

com  $p$ ,  $r$  e  $s$  números reais. Para  $r = s = 0$  e  $p$  inteiro positivo,  $M_{p,0,0}$  representa o  $p$ -ésimo momento de  $F$ .

Se  $r$  e  $s$  forem inteiros, bastará considerar  $M_{p,r,0} = \mathbb{E}[X^p (F(X))^r]$  ou  $M_{p,0,r} = \mathbb{E}[X^p (1 - F(X))^r]$ . Repare-se que  $F^r (1 - F)^s$  pode ser escrito como uma combinação linear de potências de  $F$ .

Hosking and Wallis (1987) aconselham a utilização de  $M_{1,r,0}$  ou de  $M_{1,0,r}$  cujos estimadores centrados, para amostras de dimensão  $n$  e  $r$  inteiro, são:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{1,r,0} &= \frac{1}{n} \sum_{k=r+1}^n \frac{\binom{k-1}{r}}{\binom{n-1}{r}} X_{k:n} \\ \tilde{M}_{1,0,r} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-r} \frac{\binom{n-k}{r}}{\binom{n-1}{r}} X_{k:n}.\end{aligned}$$

Para a família (1.3.2), por exemplo  $M_{1,1,0} = -\frac{m^2}{240} + \frac{m}{24} + \frac{1}{3}$  e  $M_{1,0,1} = \frac{m^2}{240} + \frac{m}{24} + \frac{1}{6}$ , sendo o estimador PWM de  $m$  com base em  $M_{1,1,0}$  o resultado de:

$$\tilde{m}_{PWM} = 5 \pm \sqrt{105 - 240\tilde{M}_{1,1,0}}.$$

Poderá ainda considerar-se o estimador PWM obtido com base em  $M_{1,2,0} = \frac{m^3}{3360} - \frac{m^2}{240} + \frac{m}{40} + \frac{1}{4}$  ou em  $M_{1,3,0} = -\frac{m^4}{40320} + \frac{m^3}{2240} - \frac{m^2}{280} + \frac{m}{60} + \frac{1}{5}$ .

## 4.4 Estudo por simulação

Ao longo desta Secção serão descritos os procedimentos de simulação desenhados para investigar o comportamento dos estimadores e discutidos os resultados obtidos.

### 4.4.1 Esquema de simulação pontual

Analisa-se a qualidade dos diferentes estimadores através da simulação computacional para  $m$  conhecido ( $m = -2(0.5)2$ ) e amostras de pequena a grande dimensão ( $n = 4(1)10(2)20(5)50(10)100$ ).

Foram utilizados diferentes valores de  $m$  para se avaliar o desempenho dos estimadores em situações onde a distribuição de mistura é dominada pela componente Uniforme (valores de  $m$  próximos de zero) e outros onde a distribuição Beta não Uniforme é mais dominante (valores de  $|m|$  próximos de 2); referem-se estes casos como tendo um sinal *fraco vs forte*, respectivamente. Os casos selecionados contêm também uma variedade de situações intermédias.

Para cada valor de  $m$  e para cada valor de  $n$  conhecidos, efetuou-se uma simulação utilizando um procedimento que pode ser resumido em cinco etapas:

1. gerar uma amostra de  $n$  números pseudo aleatórios  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  com distribuição Uniforme padrão;
2. obter a amostra  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  com a distribuição de mistura  $F_{X_m}$ , através do método da transformação inversa considerando (4.1.2),  $x = u$ , quando  $m = 0$  e,  $x = \frac{\frac{m}{2} - 1 + \sqrt{(\frac{1 - \frac{m}{2}}{2})^2 + 2mu}}{m}$ , quando  $m \neq 0$ ;
3. calcular a estimativa  $\tilde{m}$ , para cada um dos estimadores estudados;
4. repetir 1 000 vezes os passos 1, 2 e 3;
5. para o conjunto de todas as estimativas obtidas, determina-se a proporção de estimativas admissíveis, ou seja, as que se encontram dentro do espaço do parâmetro  $\mathcal{M}$  ( $\tilde{m} \in [-2, 2]$ ), calculam-se também as estatísticas de interesse, por exemplo a média, o viés e o erro quadrático médio (e.q.m.).

O estudo por simulação dos estimadores propostos para  $m$  foi realizado em *R* (R Core Team, 2015), através do processo descrito anteriormente e utilizando, quando necessário, o procedimento de otimização *optim* com o método *Brent* e o procedimento *solve* do pacote *rootSolve* (Soetaert, 2009). Os gráficos utilizados para analisar os resultados obtidos foram construídos através do pacote *ggplot2* (Wickham, 2009).

## 4.4.2 Resultados da estimação pontual

Para os estimadores  $\tilde{m}_M$ ,  $\tilde{m}_{LS}$ , e  $\tilde{m}_{PWM}$  não há garantia de que as estimativas pertençam ao espaço do parâmetro  $\mathcal{M}$ . Repare-se na proporção de estimativas inadmissíveis obtidas nas simulações realizadas, observando a Figura 4.4.1, a Figura 4.4.2 e a Figura 4.4.3.

Note-se que, para  $|m| = 2$ , a proporção de estimativas inadmissíveis é superior a 45% em praticamente todos casos simulados. A única exceção é o estimador  $\tilde{m}_{LS}$  para  $m = 2$  e  $n$  pequeno. No caso em que  $m = 2$  e  $n = 4$ , este estimador, apresenta cerca de 25% de valores fora do espaço do parâmetro  $\mathcal{M}$ , valor que vai aumentando à medida que a dimensão da amostra aumenta, chegando a ser superior a 45% quando  $n = 100$ . Note-se também que, em todos os outros casos, a proporção de valores fora do espaço do parâmetro vai diminuindo à medida que aumenta a dimensão da amostra.

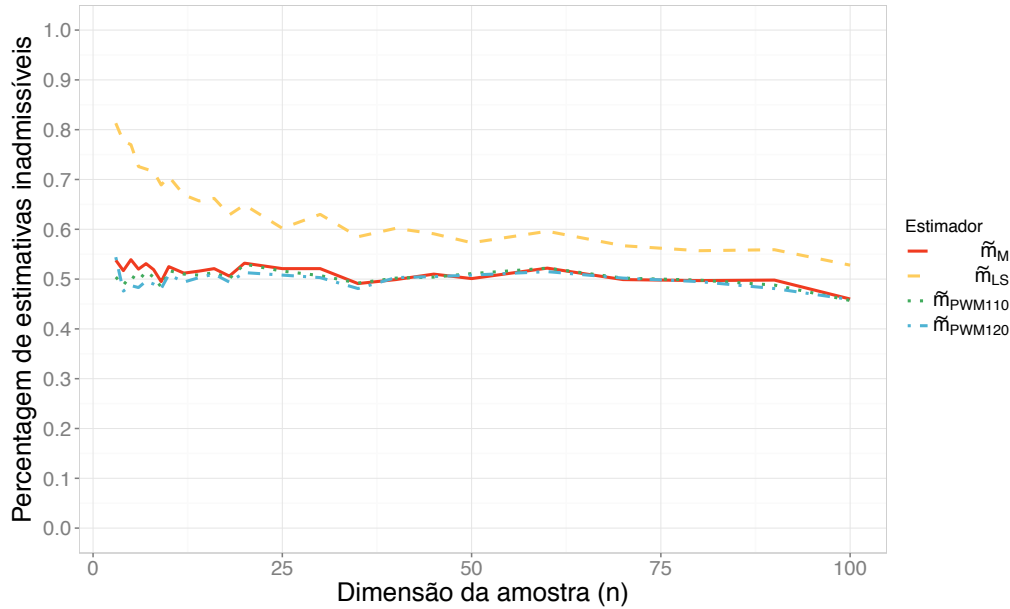


Figura 4.4.1: Percentagem de estimativas inadmissíveis obtidas utilizando os estimadores  $\tilde{m}_M$ ,  $\tilde{m}_{LS}$ ,  $\tilde{m}_{PWM}$  (com base em  $M_{1,1,0}$ ) e  $\tilde{m}_{PWM}$  (com base em  $M_{1,2,0}$ ), para amostras de diversas dimensões e para  $m = -2$ .

De um modo geral para  $|m| < 1$  e  $n > 25$  a percentagem de valores inadmissíveis é inferior a 10%, chegando a ser zero, ou perto de zero, para amostras de dimensão elevada ou valores de  $m$  mais próximos da origem.

Para  $m < 0.5$  o estimador  $\tilde{m}_{LS}$  é o que apresenta a percentagem de estimativas inadmissíveis mais elevada, sendo a menor proporção de estimativas

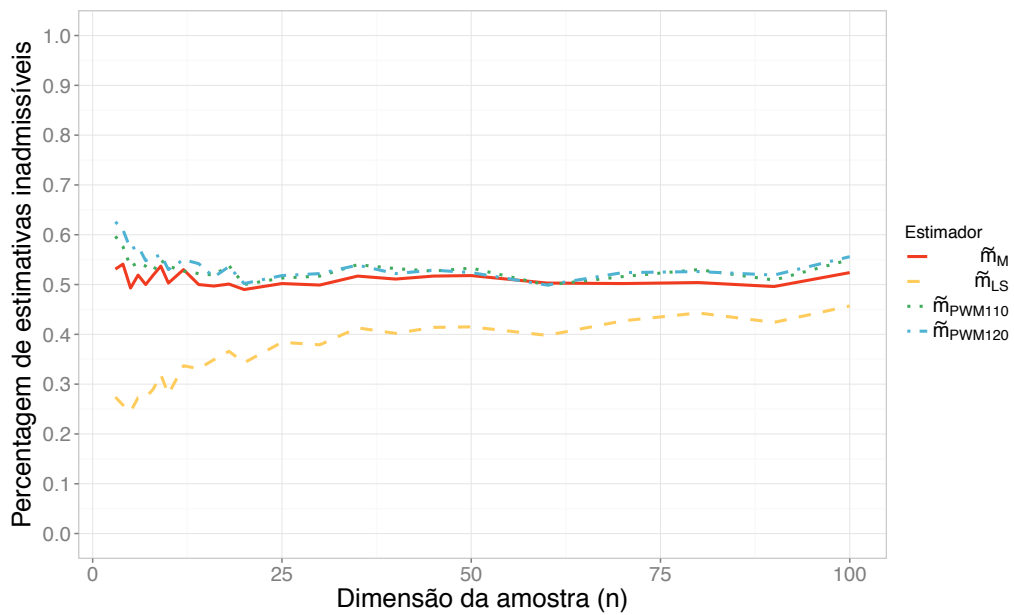


Figura 4.4.2: Percentagem de estimativas inadmissíveis obtidas utilizando  $\tilde{m}_M$ ,  $\tilde{m}_{LS}$ ,  $\tilde{m}_{PWM}$  (com base em  $M_{1,1,0}$ ) e  $\tilde{m}_{PWM}$  (com base em  $M_{1,2,0}$ ), para amostras de diversas dimensões com  $m = 2$ .

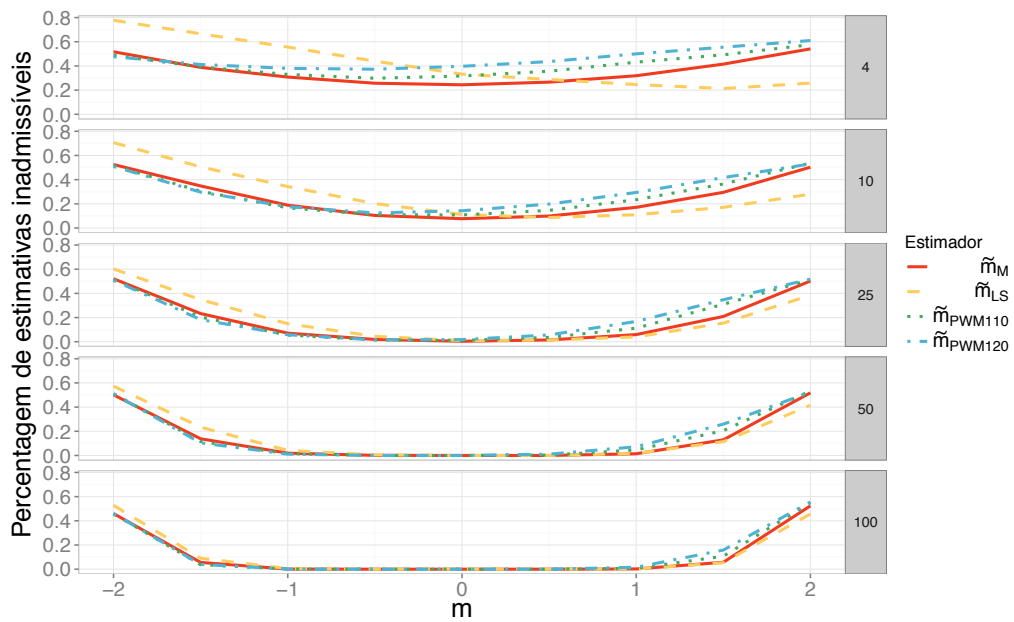


Figura 4.4.3: Comparação da percentagem de estimativas inadmissíveis obtidas utilizando  $\tilde{m}_M$ ,  $\tilde{m}_{LS}$ ,  $\tilde{m}_{PWM}$  (com base em  $M_{1,1,0}$ ) e  $\tilde{m}_{PWM}$  (com base em  $M_{1,2,0}$ ), para diversos valores de  $m$  e  $n = 4, 10, 25, 50$  e  $100$ .



fora do espaço do parâmetro observada pelo estimador  $\tilde{m}_M$  nas amostras de pequena dimensão e pelo  $\tilde{m}_{PWM}$  (com base em  $M_{1,2,0}$ ) para  $n \geq 10$ . Para  $m > 0.5$ , estes estimadores trocam de posição, observando-se os melhores resultados no  $\tilde{m}_{LS}$  e os piores no  $\tilde{m}_{PWM}$ .

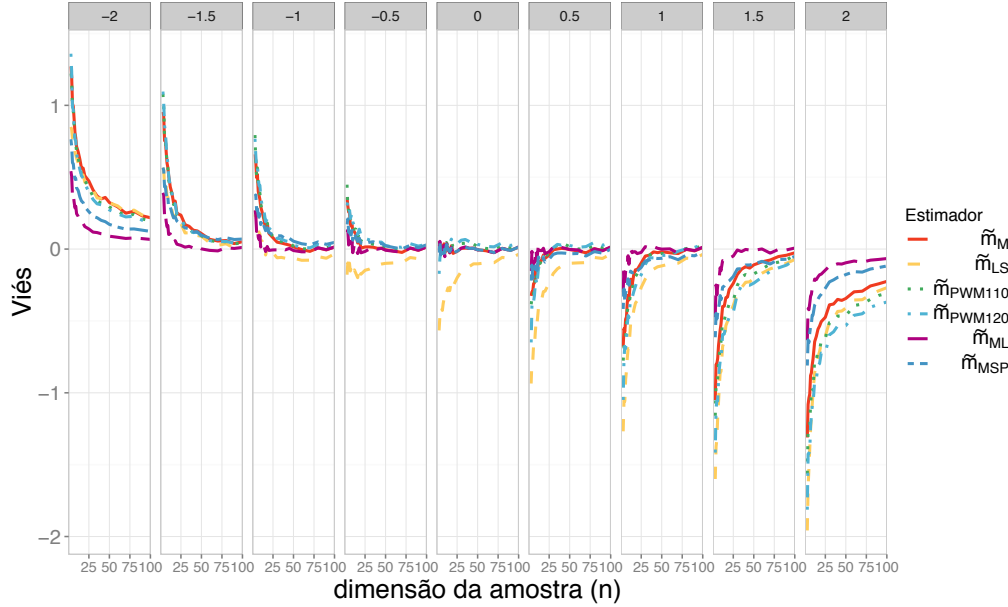


Figura 4.4.4: Viés dos estimadores  $\tilde{m}_M$ ,  $\tilde{m}_{LS}$ ,  $\tilde{m}_{PWM}$  (com base em  $M_{1,1,0}$ ) e  $\tilde{m}_{PWM}$  (com base em  $M_{1,2,0}$ ),  $\tilde{m}_{ML}$  e  $\tilde{m}_{MSP}$  para diversos valores de  $m$  e para amostras de diferentes dimensões.

Através da Figura 4.4.4, observa-se uma tendência de diminuição do enviesamento à medida que a dimensão da amostra aumenta e denota-se um maior enviesamento quando a componente de mistura tem um sinal forte (valores de  $|m|$  próximos de 2).

Para  $|m| < 2$  e  $n > 25$  o viés apresenta valores muito próximos de zero, observando-se valores mais baixos no estimador  $\tilde{m}_{ML}$ , seguido-se o  $\tilde{m}_{MSP}$  e o  $\tilde{m}_M$ .

Note-se que o estimador  $\tilde{m}_{LS}$  tem um comportamento diferente dos restantes estimadores, apresentando valores de enviesamento negativo a partir de  $m > -0.5$ .

Nas Figuras 4.4.5 e 4.4.6 representa-se o viés e o e.q.m. dos estimadores onde se observaram os melhores resultados:  $\tilde{m}_M$ ,  $\tilde{m}_{ML}$  e  $\tilde{m}_{MSP}$ . Pode confirmar-se que o estimador  $\tilde{m}_{ML}$  apresenta os valores mais baixos do viés, qualquer que seja o valor de  $m$ , e o e.q.m. mais baixo, para  $|m| = 2$ .



Figura 4.4.5: Viés dos estimadores  $\tilde{m}_M$ ,  $\tilde{m}_{ML}$ ,  $\tilde{m}_{MSP}$  para diversos valores de  $m$  e para amostras de diferentes dimensões.

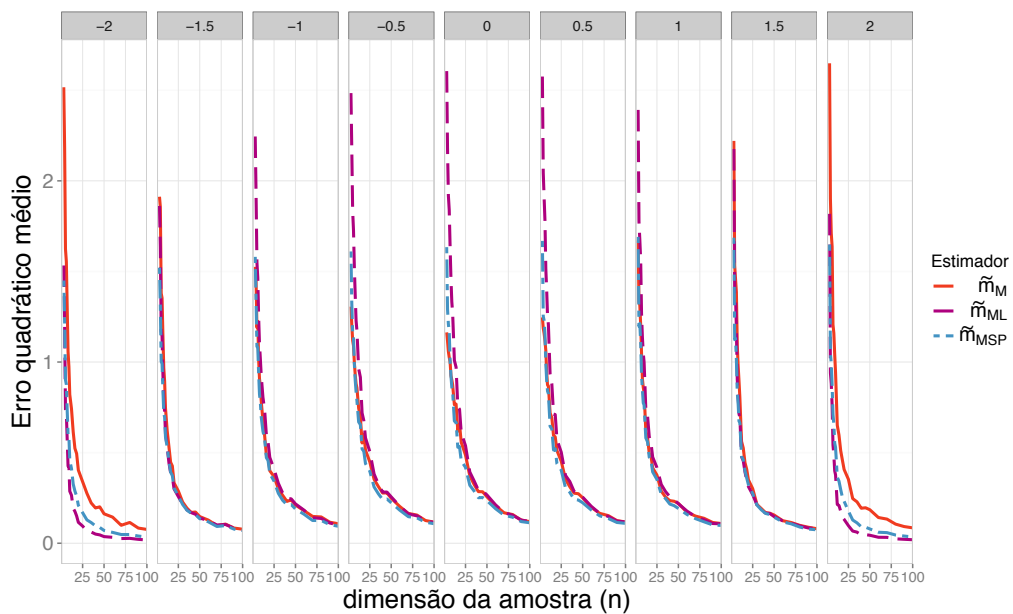


Figura 4.4.6: Erro quadrático médio dos estimadores  $\tilde{m}_M$ ,  $\tilde{m}_{ML}$ ,  $\tilde{m}_{MSP}$  para diversos valores de  $m$  e para amostras de diferentes dimensões.

Os valores do e.q.m. mais baixos para  $|m| < 2$  são obtidos no estimador  $\widetilde{m}_{MSp}$ , mas sem se destacar dos outros dois casos aqui analisados com mais detalhe.

### 4.4.3 Esquema de simulação bootstrap

Foi ainda realizado um estudo de simulação, onde se reproduziu a experiência anterior, com um esquema de simulação bootstrap paramétrico para calcular intervalos de confiança para os estimadores, utilizando o método percentil e o método *bias-corrected and accelerated* (BCa).

Nesta simulação acrescentou-se uma restrição adicional de forma a que todas as estimativas pertençam ao espaço do parâmetro  $\mathcal{M}$ , eliminando a possibilidade de obter estimativas inadmissíveis. Assim, quando as estimativas iniciais não pertencem a  $\mathcal{M}$ , passa considerar-se o valor admissível mais próximo ( $-2$  ou  $2$  consoante o caso) e utiliza-se um  $t$  para assinalar os métodos assim ajustados. Ajustaram-se desta forma as estimativas que resultam dos estimadores determinados pelo método dos momentos ( $\widetilde{m}_{M^t}$ ), pelo método dos mínimos quadrados ( $\widetilde{m}_{LS^t}$ ) e pelo método dos momentos probabilisticamente ponderados ( $\widetilde{m}_{PWM^t}$ ).

O procedimento de simulação descrito na Secção anterior foi adaptado a partir da etapa 4, mantendo os passos 1 a 3 conforme o esquema inicial e acrescentando 5 novas etapas (4a, 5a, 6a, 7a e 8a):

1. gerar uma amostra de  $n$  números pseudo aleatórios  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  com distribuição Uniforme padrão;
2. obter a amostra  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  com a distribuição de mistura  $F_m$ , através do método da transformação inversa considerando (4.1.2),  $x = u$ , quando  $m = 0$  e,  $x = \frac{\frac{m}{2} - 1 + \sqrt{(1 - \frac{m}{2})^2 + 2mu}}{m}$ , quando  $m \neq 0$ ;
3. calcular a estimativa  $\widetilde{m}$ , para cada um dos estimadores estudados;
- 4a. para cada amostra  $\mathbf{x}$ , gerar  $B = 1000$  amostras *bootstrap*  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  com a distribuição de mistura  $F_{X_m}$ , para cada uma das estimativas calculadas na etapa 3;
- 5a. calcular as estimativas  $\widetilde{m}^*$ , para cada um dos estimadores estudados, utilizando as amostras  $\mathbf{x}^*$  respetivas;
- 6a. determinar os intervalos confiança bootstrap pelo método do percentil e pelo método BCa e calcular as estatísticas de interesse.

- 7a. repetir 1 000 vezes os passos 1 a 6a;
- 8a. calcular a percentagem de cobertura dos intervalos de confiança, determinar a amplitude média dos intervalos e outras estatísticas de interesse.

É importante referir que os valores de prova- $p$  são gerados aleatoriamente através do modelo (1.3.1) recorrendo ao TTU. Desta forma, o verdadeiro valor do parâmetro é conhecido e está fixo para cada caso de simulação. As amostras geradas em cada passo da simulação são utilizadas para calcular as estimativas através dos diferentes métodos, sendo assim possível determinar a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança e comparar os resultados obtidos com os diferentes estimadores estudados.

Esta simulação foi realizada em  $R$  (R Core Team, 2015), sendo utilizado o pacote *boot* (Canty and Ripley, 2015) para executar o procedimento bootstrap e, tal como no esquema de simulação descrito na Secção 4.4.1, sempre que necessário, foi utilizado o procedimento de otimização *optim* com o método *Brent* e o procedimento *solve* do pacote *rootSolve* (Soetaert, 2009). Os gráficos utilizados para analisar os resultados obtidos foram construídos através do pacote *ggplot2* (Wickham, 2009).

#### 4.4.4 Resultados da simulação bootstrap

Para grande parte dos estimadores estudados a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança bootstrap calculados pelo método percentil é próxima do seu valor nominal (Figura 4.4.8). No entanto, repare-se na probabilidade de cobertura do intervalo de confiança a 95% para o estimador dos mínimos quadrados,  $\tilde{m}_{LS^t}$ , (Figura 4.4.7) onde se torna evidente um desvio significativo da probabilidade de cobertura do intervalo, para amostras de pequena dimensão ( $n = 4$  e  $10$ ) e para valores  $m > -0.5$ ; Para  $n = 4$  e para  $m > -0.5$  a probabilidade de cobertura é inferior a 80%.

Analisando os estimadores  $\tilde{m}_{M^t}$ ,  $\tilde{m}_{PWM120^t}$ ,  $\tilde{m}_{ML}$  e  $\tilde{m}_{MS^p}$  no intervalo de cobertura entre 80% e 100% (Figura 4.4.8), faz-se notar que para  $n = 4$  a probabilidade de cobertura se situa acima dos 95% em praticamente todos os casos, chegando a atingir os 100% quando  $|m| < 1.5$ . Na mesma Figura, observa-se que a probabilidade de cobertura do intervalo de confiança do estimador de máxima verosimilhança,  $\tilde{m}_{ML}$ , para  $|m| < 0.5$  e  $n = 10$ , desce para valores de 90% e de 85%.

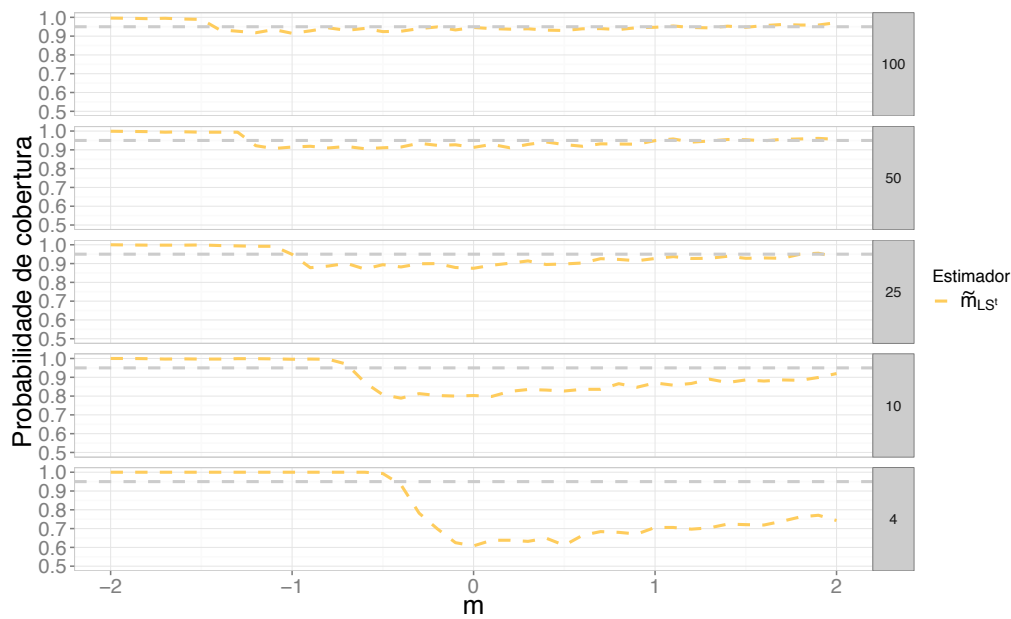


Figura 4.4.7: Probabilidade de cobertura do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método do percentil para  $\tilde{m}_{LS^t}$ . A tracejado representa-se a probabilidade de cobertura nominal.

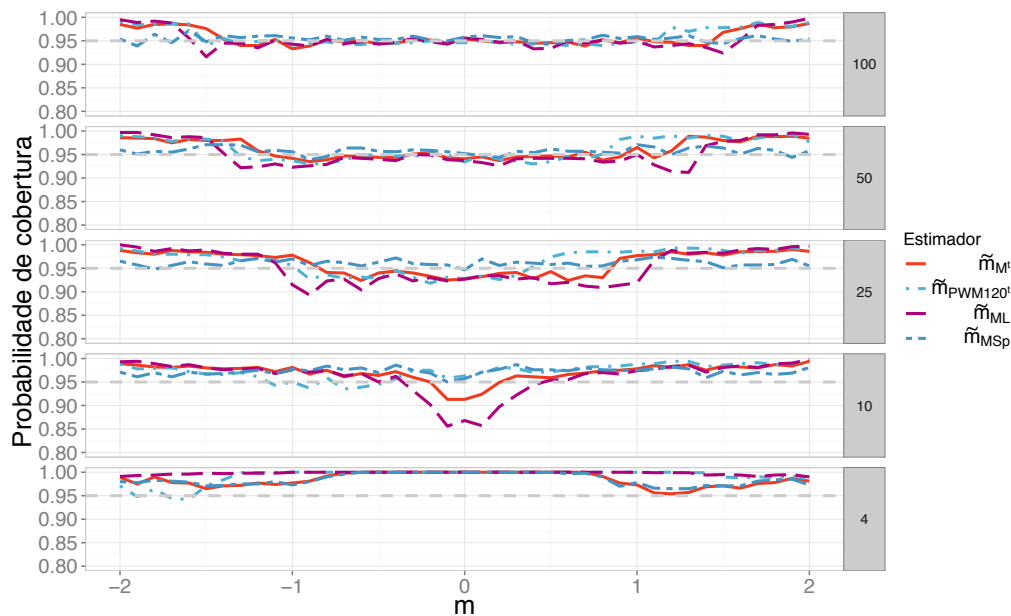


Figura 4.4.8: Probabilidade de cobertura do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método do percentil para  $\tilde{m}_{M^t}$ ,  $\tilde{m}_{PWM120^t}$ ,  $\tilde{m}_{ML}$  e  $\tilde{m}_{MSp}$ . A tracejado representa-se a probabilidade de cobertura nominal.

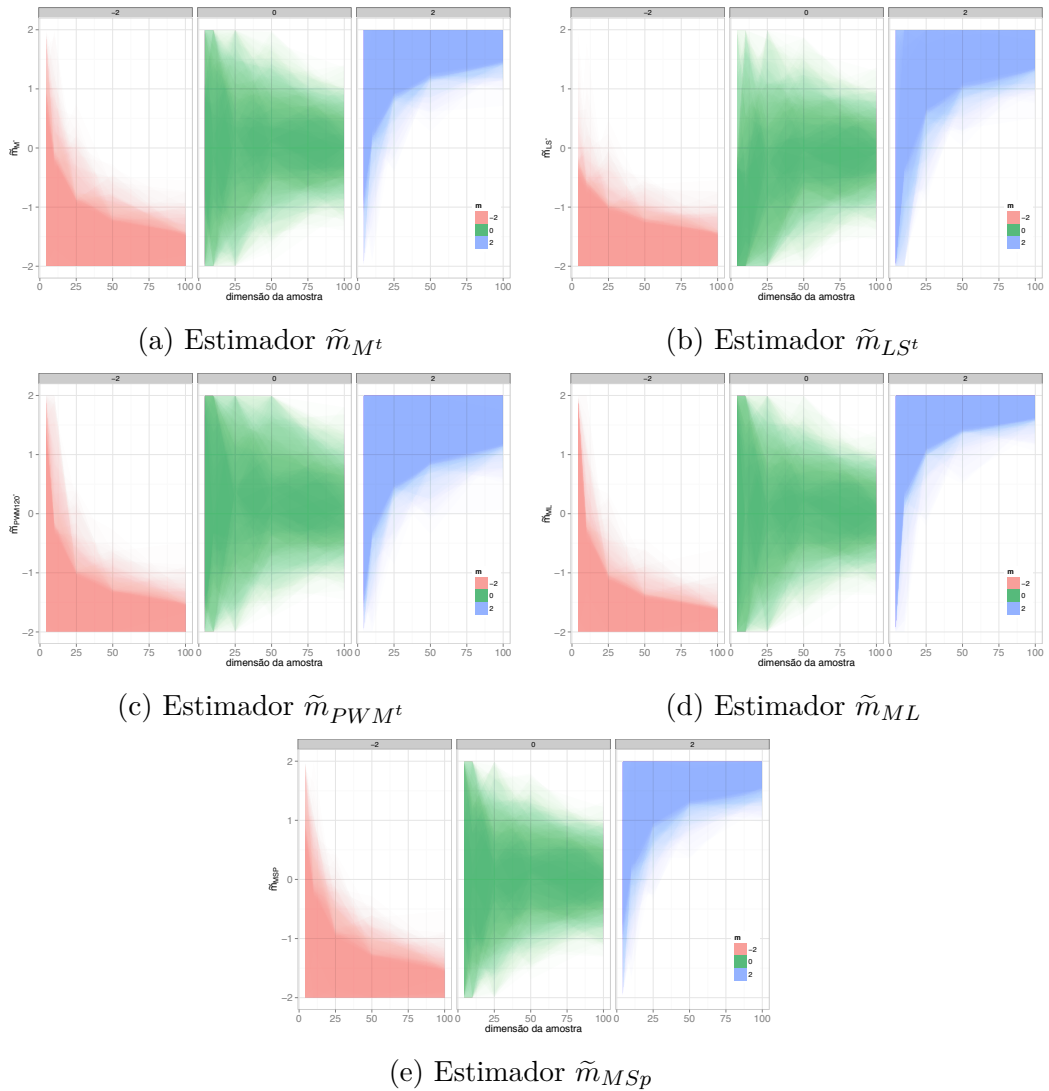


Figura 4.4.9: Sobreposição dos diversos intervalos de confiança bootstrap calculados pelo método percentil, para  $m$  conhecido, considerando os casos “puros” ( $m = -2, 0$  e  $2$ ) e diferentes dimensões de amostra. A vermelho representam-se os intervalos de confiança obtidos para  $m = -2$ ; a verde para  $m = 0$ ; a azul para  $m = 2$ .

De um modo geral, nos restantes casos, a probabilidade de cobertura do intervalo de confiança bootstrap a 95%, obtido pelo método percentil, está relativamente próxima do seu valor nominal.

Na Figura 4.4.9 apresenta-se um conjunto de gráficos com a representação sobreposta dos diversos intervalos de confiança bootstrap a 95% calculados pelo método percentil, para os 5 métodos de estimação avaliados e para os casos *puros*, ou seja para  $m = -2$ ,  $m = 0$ , e  $m = 2$ . Uma mancha de cor intensa, ou mais nítida, corresponde a uma zona de maior sobreposição de intervalos de confiança; por outro lado, uma mancha suave, ou mais difusa, corresponderá a zonas com menos casos observados.

Numa primeira observação da Figura 4.4.9 retém-se a grande mancha (elevada amplitude) dos intervalos de confiança obtidos para  $m = 0$  ou  $|m| = 2$  e  $n$  pequeno. A mancha mais intensa, em muitos casos, chega a cobrir todo o espaço do parâmetro, demonstrando a dificuldade inerente a este exercício de estimação.

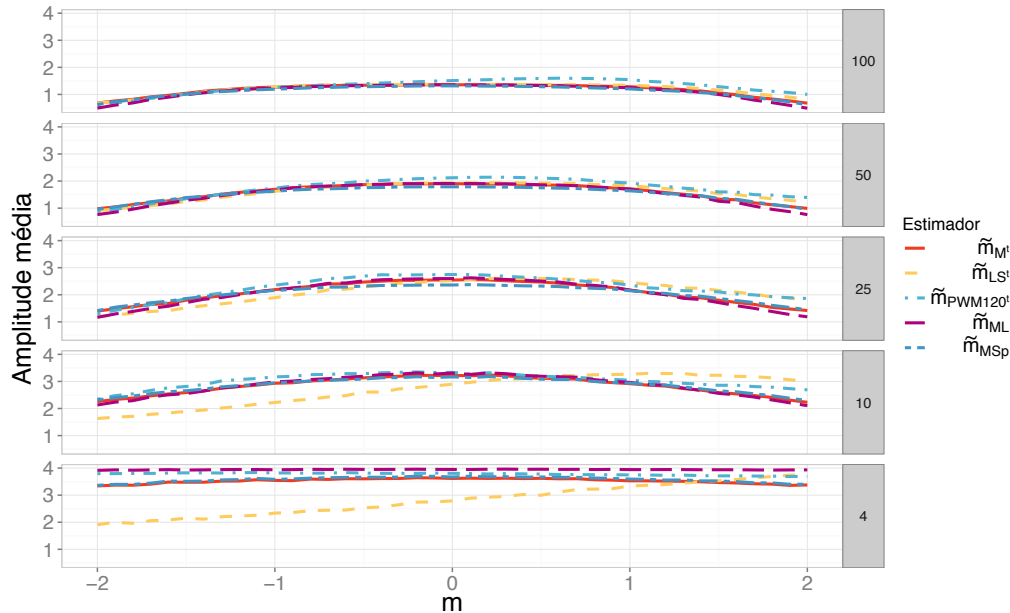


Figura 4.4.10: Amplitude média do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método do percentil para  $\tilde{m}_{M^t}$ ,  $\tilde{m}_{LS^t}$ ,  $\tilde{m}_{PWM120^t}$ ,  $\tilde{m}_{ML}$  e  $\tilde{m}_{MSp}$ , para diversos valores de  $m$  e  $n = 4, 10, 25, 50$  e  $100$ .

A análise da Figura 4.4.9, complementada com uma observação mais atenta da Figura 4.4.8, da Figura 4.4.10 e das Tabelas 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 e 4.4.5, permite distinguir pela positiva os resultados do estimador baseado no método dos mínimos quadrados. Repare-se que, para  $n$  pequeno e

para  $m \leq -0.5$ , o estimador  $\tilde{m}_{LS^t}$  apresenta os intervalos de confiança de menor amplitude e com probabilidades de cobertura acima do valor nominal (95%).

Para  $n$  pequeno evidenciam-se também os resultados do estimador  $\tilde{m}_{M^t}$ , mas note-se que a amplitude média dos intervalos de confiança é sempre elevada, sendo 3.34 para  $n = 4$  e 2.26 para  $n = 10$ . Uma nota de destaque para os resultados dos intervalos de confiança a 95% do estimador calculado pelo método do espaçamento máximo ( $\tilde{m}_{MSP}$ ) que parece ter o melhor comportamento para  $|m| \leq 1$  e  $n$  grande.

Estes resultados reforçam as principais conclusões que decorrem da análise efetuada através do esquema de simulação apresentado na Secção 4.4.2.

Na Figura 4.4.11 e na Figura 4.4.12 representa-se, respetivamente, a probabilidade de cobertura e a amplitude média dos intervalos de confiança bootstrap com 95% de significância, calculados através do método BCa.

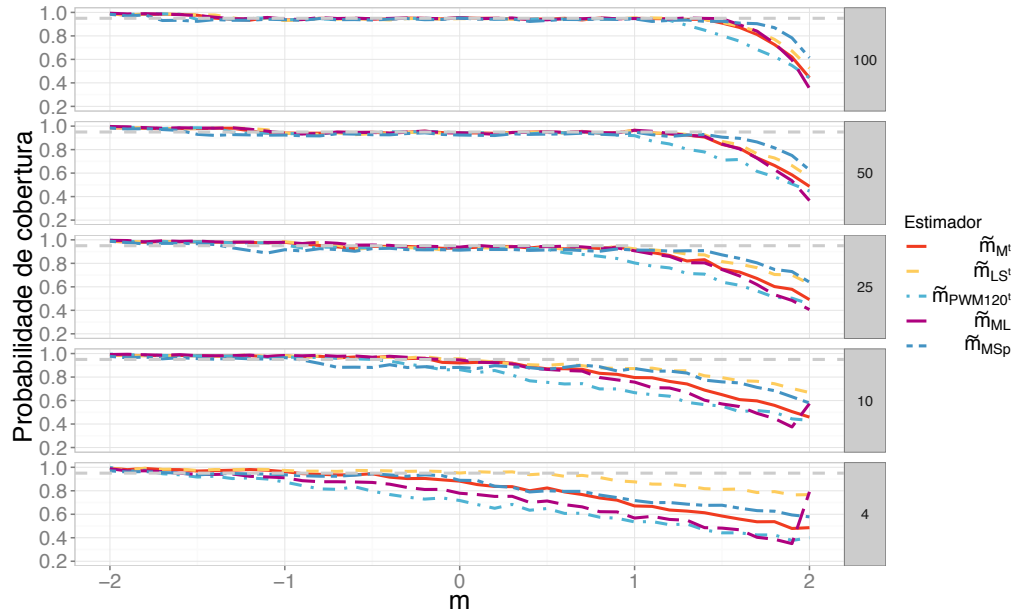


Figura 4.4.11: Probabilidade de cobertura do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método BCa para  $\tilde{m}_{M^t}, \tilde{m}_{LS^t}, \tilde{m}_{PWM120^t}, \tilde{m}_{ML}$  e  $\tilde{m}_{MSP}$ , para diversos valores de  $m$  e  $n = 4, 10, 25, 50$  e  $100$ . A tracejado representa-se a probabilidade de cobertura nominal.

A utilização do método BCa para calcular os intervalos de confiança bootstrap para o estimador  $\tilde{m}_{LS^t}$  corrige a quebra brusca observada (para valores de  $m > -0.5$ ) na probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança



bootstrap determinados pelo método percentil.

Atente-se à Figura 4.4.11 e repare-se que se dá uma diminuição significativa na probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança calculados pelo método BCa à medida que o valor de  $m$  se aproxima de 2. Aumentando a dimensão da amostra ( $n$ ), nota-se que a degradação da probabilidade cobertura vai ocorrendo para valores de  $m$  cada vez mais próximos de 2.

Comparando os intervalos de confiança bootstrap calculados pelo método percentil com os determinados pelo método BCa para o estimador  $\tilde{m}_{LS^t}$  e para  $m < -0.5$ , distinguem-se os resultados do método percentil por manterem uma elevada probabilidade de cobertura e por terem valores de amplitude média inferiores aos observados nos intervalos calculados através do método BCa.

Para os restantes estimadores, quando  $m < -1$ , a amplitude média dos intervalos de confiança calculados pelo método BCa é geralmente inferior à amplitude dos intervalos determinados pelo método percentil, sendo muito próximos os valores da probabilidade de cobertura dos intervalos. Denota-se uma diminuição significativa na probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança determinados pelo método BCa à medida que  $m$  se aproxima de 2.

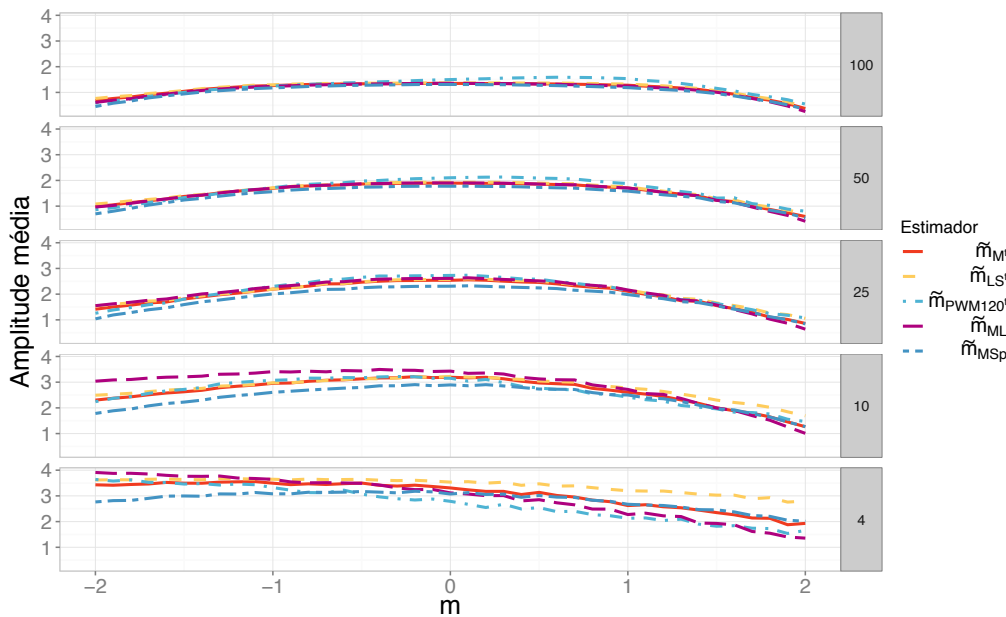


Figura 4.4.12: Amplitude média do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método BCa para  $\tilde{m}_{M^t}, \tilde{m}_{LS^t}, \tilde{m}_{PWM120^t}, \tilde{m}_{ML}$  e  $\tilde{m}_{MSP}$ , para diversos valores de  $m$  e  $n = 4, 10, 25, 50$  e  $100$ .

Tabela 4.4.1: Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador  $\tilde{m}_{Mt}$ .

Estimador	m	n	Estimativa média	Viés médio	Intervalo de confiança a 95%	
					Prob. de cobertura (amplitude média)	
					Percentil	BCa
$\tilde{m}_{Mt}$	-2.00	4	-1.46	0.4057	0.99 (3.34)	0.99 (3.43)
		10	-1.65	0.2682	0.99 (2.26)	0.99 (2.30)
		25	-1.79	0.1686	0.99 (1.40)	0.99 (1.41)
		50	-1.85	0.1165	0.99 (0.98)	0.99 (0.99)
		100	-1.89	0.0825	0.98 (0.68)	0.99 (0.69)
	-1.50	4	-1.06	0.2942	0.96 (3.48)	0.97 (3.50)
		10	-1.32	0.2008	0.98 (2.59)	0.98 (2.63)
		25	-1.42	0.0994	0.98 (1.80)	0.98 (1.81)
		50	-1.47	0.0506	0.98 (1.37)	0.98 (1.38)
		100	-1.51	0.0232	0.98 (1.04)	0.98 (1.04)
	-1.00	4	-0.77	0.2130	0.98 (3.54)	0.96 (3.49)
		10	-0.92	0.1299	0.98 (2.93)	0.98 (2.96)
		25	-0.99	0.0467	0.98 (2.19)	0.98 (2.20)
		50	-1.01	0.0147	0.94 (1.70)	0.94 (1.69)
		100	-1.02	0.0025	0.93 (1.27)	0.94 (1.27)
	-0.50	4	-0.47	0.1280	1.00 (3.60)	0.94 (3.50)
		10	-0.45	0.0630	0.96 (3.13)	0.97 (3.13)
		25	-0.50	0.0173	0.94 (2.47)	0.94 (2.47)
		50	-0.49	0.0014	0.94 (1.87)	0.95 (1.86)
		100	-0.51	0.0004	0.94 (1.34)	0.94 (1.34)
0.00	4	-0.05	0.0122	1.00 (3.62)	0.88 (3.31)	
	10	-0.06	0.0098	0.91 (3.22)	0.92 (3.19)	
	25	-0.00	0.0006	0.93 (2.54)	0.93 (2.54)	
	50	0.00	-0.0005	0.94 (1.90)	0.94 (1.90)	
	100	0.00	0.0005	0.95 (1.36)	0.96 (1.35)	
0.50	4	0.28	-0.0752	1.00 (3.62)	0.82 (3.14)	
	10	0.46	-0.0618	0.96 (3.12)	0.87 (2.97)	
	25	0.50	-0.0174	0.94 (2.47)	0.94 (2.46)	
	50	0.53	-0.0034	0.95 (1.86)	0.95 (1.86)	
	100	0.49	0.0005	0.95 (1.34)	0.94 (1.33)	
1.00	4	0.80	-0.2233	0.97 (3.53)	0.67 (2.62)	
	10	0.92	-0.1300	0.98 (2.92)	0.80 (2.61)	
	25	0.99	-0.0496	0.98 (2.18)	0.92 (2.11)	
	50	0.99	-0.0120	0.96 (1.72)	0.96 (1.71)	
	100	0.99	-0.0017	0.96 (1.29)	0.95 (1.28)	
1.50	4	1.09	-0.3008	0.97 (3.47)	0.58 (2.35)	
	10	1.32	-0.2013	0.98 (2.59)	0.65 (2.00)	
	25	1.41	-0.1002	0.98 (1.80)	0.75 (1.55)	
	50	1.50	-0.0560	0.98 (1.33)	0.84 (1.23)	
	100	1.48	-0.0209	0.97 (1.06)	0.91 (1.02)	
2.00	4	1.40	-0.3900	0.98 (3.38)	0.49 (1.93)	
	10	1.68	-0.2726	0.99 (2.23)	0.46 (1.27)	
	25	1.77	-0.1656	0.99 (1.42)	0.49 (0.86)	
	50	1.84	-0.1149	0.98 (0.99)	0.49 (0.60)	
	100	1.90	-0.0845	0.99 (0.68)	0.44 (0.37)	

Tabela 4.4.2: Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador  $\tilde{m}_{LSt}$ .

Estimador	m	n	Estimativa média	Viés médio	Intervalo de confiança a 95%	
					Prob. de cobertura (amplitude média)	
					Percentil	BCa
$\tilde{m}_{LSt}$	-2.00	4	-1.84	0.0852	1.00 (1.91)	0.99 (3.62)
		10	-1.81	0.1081	1.00 (1.63)	0.99 (2.49)
		25	-1.84	0.1020	1.00 (1.20)	0.99 (1.54)
		50	-1.87	0.0863	1.00 (0.91)	0.99 (1.08)
		100	-1.90	0.0697	1.00 (0.68)	0.99 (0.76)
	-1.50	4	-1.63	-0.0269	1.00 (2.15)	0.97 (3.64)
		10	-1.58	0.0171	1.00 (1.89)	0.98 (2.72)
		25	-1.55	0.0069	1.00 (1.52)	0.98 (1.86)
		50	-1.54	-0.0017	0.99 (1.25)	0.98 (1.41)
		100	-1.55	-0.0066	0.99 (1.01)	0.98 (1.07)
	-1.00	4	-1.45	-0.1172	1.00 (2.34)	0.97 (3.65)
		10	-1.28	-0.0912	1.00 (2.22)	0.98 (2.98)
		25	-1.18	-0.0801	0.95 (1.89)	0.98 (2.20)
		50	-1.11	-0.0663	0.92 (1.62)	0.94 (1.71)
		100	-1.07	-0.0452	0.92 (1.29)	0.93 (1.30)
	-0.50	4	-1.26	-0.2134	0.99 (2.53)	0.97 (3.64)
		10	-0.87	-0.2103	0.81 (2.61)	0.97 (3.14)
		25	-0.70	-0.1460	0.89 (2.29)	0.93 (2.48)
		50	-0.59	-0.0955	0.91 (1.86)	0.94 (1.89)
		100	-0.56	-0.0507	0.92 (1.37)	0.94 (1.36)
	0.00	4	-0.92	-0.3670	0.61 (2.79)	0.95 (3.54)
		10	-0.52	-0.2958	0.80 (2.90)	0.96 (3.22)
		25	-0.20	-0.1802	0.88 (2.52)	0.92 (2.57)
		50	-0.10	-0.1002	0.91 (1.94)	0.94 (1.93)
		100	-0.05	-0.0497	0.95 (1.38)	0.95 (1.37)
	0.50	4	-0.65	-0.4867	0.61 (3.00)	0.95 (3.47)
		10	-0.00	-0.3948	0.83 (3.15)	0.90 (3.05)
		25	0.30	-0.2027	0.90 (2.61)	0.94 (2.50)
50		0.43	-0.1009	0.93 (1.92)	0.95 (1.90)	
100		0.44	-0.0485	0.93 (1.37)	0.94 (1.36)	
1.00	4	-0.13	-0.7098	0.71 (3.34)	0.88 (3.20)	
	10	0.48	-0.4781	0.87 (3.26)	0.87 (2.77)	
	25	0.80	-0.2213	0.93 (2.45)	0.92 (2.16)	
	50	0.90	-0.1048	0.95 (1.83)	0.96 (1.75)	
	100	0.94	-0.0496	0.95 (1.34)	0.95 (1.32)	
1.50	4	0.18	-0.8349	0.72 (3.53)	0.81 (3.03)	
	10	0.93	-0.5413	0.89 (3.23)	0.80 (2.30)	
	25	1.24	-0.2524	0.93 (2.16)	0.82 (1.66)	
	50	1.41	-0.1364	0.95 (1.53)	0.87 (1.28)	
	100	1.44	-0.0664	0.95 (1.16)	0.91 (1.06)	
2.00	4	0.54	-0.9806	0.74 (3.74)	0.77 (2.80)	
	10	1.36	-0.5948	0.92 (3.02)	0.67 (1.69)	
	25	1.63	-0.2959	0.93 (1.81)	0.62 (1.06)	
	50	1.76	-0.1829	0.96 (1.22)	0.56 (0.71)	
	100	1.86	-0.1211	0.97 (0.81)	0.52 (0.45)	

Tabela 4.4.3: Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador  $\tilde{m}_{PWM120^t}$ .

Estimador	m	n	Estimativa média	Viés médio	Intervalo de confiança a 95%	
					Prob. de cobertura (amplitude média)	
					Percentil	BCa
$\tilde{m}_{PWM120^t}$	-2.00	4	-1.37	0.5567	0.97 (3.79)	1.00 (3.64)
		10	-1.67	0.3076	0.99 (2.34)	1.00 (2.24)
		25	-1.81	0.1654	0.99 (1.29)	1.00 (1.26)
		50	-1.86	0.1068	0.99 (0.88)	0.99 (0.86)
		100	-1.91	0.0731	0.99 (0.59)	0.99 (0.58)
	-1.50	4	-0.86	0.4093	0.97 (3.82)	0.92 (3.46)
		10	-1.25	0.2641	0.97 (2.81)	0.98 (2.72)
		25	-1.40	0.1181	0.98 (1.86)	0.98 (1.81)
		50	-1.46	0.0561	0.98 (1.35)	0.99 (1.33)
		100	-1.49	0.0244	0.94 (1.01)	0.94 (1.00)
	-1.00	4	-0.47	0.2941	1.00 (3.82)	0.87 (3.32)
		10	-0.78	0.2117	0.95 (3.17)	0.97 (3.07)
		25	-0.94	0.0931	0.96 (2.36)	0.96 (2.30)
		50	-0.97	0.0399	0.94 (1.74)	0.94 (1.72)
		100	-1.00	0.0166	0.94 (1.26)	0.94 (1.25)
	-0.50	4	-0.12	0.1768	1.00 (3.82)	0.80 (3.07)
		10	-0.30	0.1426	0.94 (3.29)	0.95 (3.17)
		25	-0.42	0.0837	0.93 (2.69)	0.93 (2.65)
		50	-0.45	0.0412	0.95 (2.00)	0.95 (1.98)
		100	-0.50	0.0202	0.95 (1.40)	0.95 (1.39)
0.00	4	0.27	0.0518	1.00 (3.81)	0.72 (2.79)	
	10	0.14	0.0743	0.96 (3.33)	0.86 (3.15)	
	25	0.10	0.0634	0.93 (2.75)	0.93 (2.73)	
	50	0.05	0.0455	0.93 (2.12)	0.94 (2.10)	
	100	0.02	0.0253	0.95 (1.51)	0.95 (1.50)	
0.50	4	0.57	-0.0541	1.00 (3.78)	0.65 (2.54)	
	10	0.63	-0.0319	0.97 (3.19)	0.76 (2.77)	
	25	0.57	0.0265	0.97 (2.62)	0.92 (2.58)	
	50	0.59	0.0333	0.94 (2.11)	0.94 (2.09)	
	100	0.52	0.0277	0.94 (1.59)	0.95 (1.58)	
1.00	4	0.97	-0.1996	1.00 (3.75)	0.54 (2.13)	
	10	1.00	-0.1162	0.99 (3.05)	0.67 (2.42)	
	25	1.05	-0.0481	0.99 (2.36)	0.80 (2.14)	
	50	1.05	-0.0023	0.99 (1.93)	0.92 (1.88)	
	100	1.02	0.0145	0.95 (1.55)	0.95 (1.54)	
1.50	4	1.19	-0.2910	0.99 (3.71)	0.44 (1.82)	
	10	1.32	-0.2104	0.99 (2.86)	0.55 (1.96)	
	25	1.39	-0.1224	0.99 (2.11)	0.64 (1.63)	
	50	1.51	-0.0863	0.99 (1.60)	0.71 (1.31)	
	100	1.49	-0.0417	0.98 (1.29)	0.80 (1.16)	
2.00	4	1.32	-0.3445	0.98 (3.69)	0.40 (1.66)	
	10	1.58	-0.2907	1.00 (2.69)	0.43 (1.47)	
	25	1.68	-0.2047	0.99 (1.86)	0.45 (1.07)	
	50	1.75	-0.1543	0.98 (1.39)	0.45 (0.80)	
	100	1.84	-0.1216	0.99 (1.00)	0.44 (0.55)	

Tabela 4.4.4: Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador  $\tilde{m}_{ML}$ .

Estimador	m	n	Estimativa média	Viés médio	Intervalo de confiança a 95%	
					Prob. de cobertura (amplitude média)	
					Percentil	BCa
$\tilde{m}_{ML}$	-2.00	4	-1.57	0.3700	0.99 (3.92)	0.99 (3.91)
		10	-1.74	0.2115	0.99 (2.13)	0.99 (3.04)
		25	-1.86	0.1182	1.00 (1.17)	1.00 (1.55)
		50	-1.90	0.0767	1.00 (0.76)	1.00 (0.97)
		100	-1.94	0.0513	1.00 (0.49)	0.99 (0.61)
	-1.50	4	-1.14	0.2691	1.00 (3.93)	0.94 (3.76)
		10	-1.37	0.1535	0.98 (2.55)	0.98 (3.21)
		25	-1.45	0.0620	0.99 (1.71)	0.99 (1.91)
		50	-1.49	0.0245	0.99 (1.29)	0.98 (1.37)
		100	-1.50	0.0077	0.92 (0.99)	0.97 (1.01)
	-1.00	4	-0.80	0.1879	1.00 (3.94)	0.91 (3.64)
		10	-0.95	0.0990	0.98 (2.98)	0.98 (3.41)
		25	-1.01	0.0259	0.92 (2.19)	0.98 (2.28)
		50	-1.01	0.0056	0.92 (1.67)	0.94 (1.69)
		100	-1.01	0.0000	0.94 (1.24)	0.94 (1.24)
	-0.50	4	-0.47	0.1102	1.00 (3.95)	0.87 (3.49)
		10	-0.47	0.0484	0.95 (3.19)	0.97 (3.44)
		25	-0.50	0.0088	0.93 (2.51)	0.96 (2.55)
		50	-0.49	-0.0009	0.94 (1.87)	0.95 (1.87)
		100	-0.51	0.0001	0.94 (1.33)	0.95 (1.32)
	0.00	4	-0.04	0.0068	1.00 (3.95)	0.78 (3.12)
		10	-0.05	0.0051	0.87 (3.31)	0.95 (3.43)
		25	0.00	0.0000	0.93 (2.60)	0.94 (2.61)
		50	0.00	-0.0005	0.94 (1.91)	0.94 (1.90)
		100	0.00	0.0005	0.96 (1.36)	0.96 (1.35)
	0.50	4	0.30	-0.0693	1.00 (3.96)	0.71 (2.85)
		10	0.48	-0.0477	0.95 (3.19)	0.86 (3.13)
		25	0.50	-0.0091	0.92 (2.51)	0.94 (2.51)
50		0.53	-0.0009	0.94 (1.86)	0.95 (1.86)	
100		0.50	0.0009	0.93 (1.33)	0.94 (1.32)	
1.00	4	0.85	-0.2003	1.00 (3.94)	0.57 (2.27)	
	10	0.95	-0.0964	0.97 (2.96)	0.76 (2.72)	
	25	1.01	-0.0280	0.92 (2.17)	0.91 (2.16)	
	50	0.99	-0.0037	0.95 (1.70)	0.96 (1.70)	
	100	0.99	0.0001	0.95 (1.25)	0.95 (1.25)	
1.50	4	1.14	-0.2676	1.00 (3.94)	0.48 (1.93)	
	10	1.38	-0.1554	0.98 (2.56)	0.57 (1.99)	
	25	1.45	-0.0614	0.98 (1.71)	0.75 (1.58)	
	50	1.51	-0.0281	0.98 (1.25)	0.85 (1.22)	
	100	1.49	-0.0066	0.92 (1.00)	0.95 (1.01)	
2.00	4	1.49	-0.3517	0.99 (3.93)	0.79 (1.36)	
	10	1.77	-0.2150	1.00 (2.11)	0.57 (1.01)	
	25	1.85	-0.1175	1.00 (1.19)	0.41 (0.64)	
	50	1.90	-0.0772	0.99 (0.76)	0.37 (0.41)	
	100	1.94	-0.0516	1.00 (0.49)	0.35 (0.26)	

Tabela 4.4.5: Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador  $\tilde{m}_{MSP}$ .

Estimador	m	n	Estimativa média	Viés médio	Intervalo de confiança a 95%	
					Prob. de cobertura (amplitude média)	
					Percentil	BCa
$\tilde{m}_{MSP}$	-2.00	4	-1.34	0.4596	0.98 (3.36)	0.97 (2.76)
		10	-1.56	0.3460	0.97 (2.32)	0.98 (1.78)
		25	-1.75	0.2254	0.96 (1.42)	0.99 (1.04)
		50	-1.82	0.1502	0.96 (0.96)	0.98 (0.70)
		100	-1.88	0.0999	0.95 (0.63)	0.98 (0.45)
	-1.50	4	-0.95	0.3280	0.97 (3.51)	0.94 (3.00)
		10	-1.17	0.2578	0.97 (2.66)	0.96 (2.23)
		25	-1.32	0.1604	0.96 (1.86)	0.97 (1.60)
		50	-1.39	0.0991	0.97 (1.39)	0.93 (1.24)
		100	-1.45	0.0580	0.95 (1.01)	0.92 (0.94)
	-1.00	4	-0.68	0.2336	0.97 (3.58)	0.94 (3.08)
		10	-0.79	0.1738	0.98 (2.94)	0.97 (2.61)
		25	-0.90	0.1046	0.97 (2.16)	0.92 (2.01)
		50	-0.95	0.0621	0.96 (1.62)	0.92 (1.56)
		100	-0.98	0.0335	0.96 (1.19)	0.94 (1.18)
	-0.50	4	-0.41	0.1387	1.00 (3.66)	0.94 (3.17)
		10	-0.39	0.0835	0.97 (3.09)	0.88 (2.79)
		25	-0.45	0.0517	0.96 (2.32)	0.92 (2.25)
		50	-0.46	0.0277	0.96 (1.76)	0.93 (1.74)
		100	-0.50	0.0160	0.95 (1.29)	0.94 (1.28)
0.00	4	-0.03	0.0083	1.00 (3.67)	0.89 (3.07)	
	10	-0.04	0.0085	0.96 (3.17)	0.88 (2.89)	
	25	0.00	0.0000	0.95 (2.36)	0.91 (2.31)	
	50	0.00	-0.0005	0.95 (1.79)	0.92 (1.77)	
	100	0.00	0.0004	0.96 (1.32)	0.95 (1.31)	
0.50	4	0.25	-0.0844	1.00 (3.67)	0.80 (3.02)	
	10	0.40	-0.0859	0.98 (3.08)	0.86 (2.73)	
	25	0.45	-0.0514	0.96 (2.32)	0.91 (2.24)	
	50	0.49	-0.0312	0.96 (1.75)	0.93 (1.73)	
	100	0.48	-0.0144	0.94 (1.29)	0.93 (1.28)	
1.00	4	0.71	-0.2459	0.98 (3.59)	0.72 (2.67)	
	10	0.79	-0.1705	0.98 (2.94)	0.87 (2.50)	
	25	0.90	-0.1050	0.97 (2.15)	0.91 (1.98)	
	50	0.93	-0.0601	0.97 (1.64)	0.95 (1.58)	
	100	0.96	-0.0325	0.96 (1.20)	0.94 (1.19)	
1.50	4	0.95	-0.3271	0.97 (3.52)	0.68 (2.46)	
	10	1.19	-0.2623	0.97 (2.65)	0.76 (1.96)	
	25	1.31	-0.1581	0.95 (1.87)	0.87 (1.54)	
	50	1.41	-0.1023	0.96 (1.36)	0.91 (1.18)	
	100	1.43	-0.0567	0.94 (1.02)	0.92 (0.95)	
2.00	4	1.27	-0.4384	0.97 (3.40)	0.58 (2.01)	
	10	1.59	-0.3521	0.98 (2.29)	0.58 (1.27)	
	25	1.72	-0.2219	0.96 (1.45)	0.64 (0.84)	
	50	1.82	-0.1516	0.96 (0.95)	0.63 (0.53)	
	100	1.89	-0.1008	0.95 (0.62)	0.61 (0.34)	

## 4.5 Resumo dos resultados

Entre os estimadores estudados, destacam-se pela positiva os resultados observados quando a distribuição de mistura tem um sinal fraco (componente dominante Uniforme) e a melhoria significativa na qualidade dos estimadores à medida que  $|m|$  se aproxima de zero.

Salienta-se também a tendência generalizada de melhoria dos resultados à medida que a dimensão da amostra aumenta:

- Para os estimadores  $m_M$ ,  $m_{LS}$ , e  $m_{PWM}$ , a percentagem de estimativas inadmissíveis é mais elevada para amostras de pequena dimensão e diminui com o aumento da dimensão das amostras. Esta tendência altera-se no estimador  $\tilde{m}_{LS}$  quando  $m = 2$ . Neste caso, a proporção de estimativas inválidas é de 0.457 quando  $n = 100$  e vai decrescendo à medida que a dimensão da amostra diminui, sendo de 0.258 quando  $n = 4$ .
- Para amostras de pequena dimensão, observa-se um enviesamento elevado (em valor absoluto) que se acentua ainda mais quando a mistura é dominada pela componente Beta não Uniforme ( $|m| \approx 2$ ).
- O enviesamento tende a aproximar-se de zero à medida que aumenta a dimensão da amostra, denotando-se uma convergência mais rápida para  $|m| < 1$ .
- Os estimadores  $\tilde{m}_{ML}$  e  $\tilde{m}_{MSp}$  são os que demonstraram melhores resultados. Realça-se também o desempenho do estimador  $\tilde{m}_M$ , em especial quando a componente de mistura tem um sinal fraco ( $|m| < 1$ ).

Considerando as restrições adicionais forçando as estimativas a pertencerem sempre ao espaço do parâmetro  $\mathcal{M}$  e os resultados dos intervalos de confiança bootstrap:

- Evidencia-se pela positiva a utilização do método percentil para determinar os intervalos de confiança do estimador  $\tilde{m}_{LS^t}$ , quando  $m < -0.5$ . Para o mesmo estimador e para valores de  $m > -0.5$  o método BCa proporciona melhores resultados.
- Quando a componente de mistura tem um sinal fraco ( $|m| < 1$ ) e para valores de  $n > 4$ , o estimador  $\tilde{m}_{MSp}$  apresenta os intervalos de confiança bootstrap com menor amplitude e com probabilidade de cobertura próxima do valor nominal, tendo geralmente os melhores resultados com os intervalos de confiança calculados pelo método BCa.

- Quando a componente de mistura tem um sinal forte e  $m$  se aproxima de 2, os intervalos de confiança com menor amplitude e com probabilidade de cobertura superior ao valor nominal são os calculados pelo método percentil para o estimador  $\tilde{m}_{ML}$ .

A estimação do parâmetro  $m$  constitui um problema complexo e os métodos investigados apresentam resultados modestos, mas ainda assim com aspectos extremamente animadores que constituem um estímulo adicional para aprofundar esta investigação procurando novos rumos e contribuindo para o avanço das técnicas da meta análise.



# Capítulo 5

## A família Mendel( $r; p, q$ ) de misturas de Uniforme com Beta( $r, 1$ ) ou Beta( $1, r$ )

### 5.1 Definição

Consideremos agora questões de não-identificabilidade mais complexas, admitindo que os valores reportados por diferentes investigadores são uma mistura de erros diversos, no sentido em que uns reportam os valores obtidos na primeira experiência, outros reportam o máximo e outros reportam o mínimo de um certo número,  $r$ , de réplicas da experiência. Neste caso a v.a.  $X_{r;p,q} \sim \text{Mendel}(r;p,q)$ , poderá ser representada como uma mistura convexa de uma v.a. Uniforme com uma v.a. Beta( $r, 1$ ) e uma Beta( $1, r$ ). Assumindo que é reportado o máximo de  $r$  réplicas da experiência com probabilidade  $p \in [0, 1]$ , o mínimo com probabilidade  $q \in [0, 1]$  e que  $p + q \in [0, 1]$ ,

$$X_{r;p,q} = \left\{ \begin{array}{ccc} U & U_{r:r} & U_{1:r} \\ 1 - p - q & p & q \end{array} \right., \quad 0 \leq \min\{p, q, 1 - p - q\}. \quad (5.1.1)$$

A f.d.p. da v.a.  $X_{r;p,q}$  será

$$f_{X_{r;p,q}}(x) = (1 - p - q + prx^{r-1} + qr(1 - x)^{r-1}) \mathbb{I}_{(0,1)}(x),$$

Como o momento de ordem  $k$  de  $X_{r;p,q}$  tem a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^k] &= \int_0^1 x^k f_{X_{r;p,q}}(x) dx \\ &= \int_0^1 [(1-p-q)x^k + prx^{r+k-1} + qrx^k(1-x)^{r-1}] dx \\ &= \frac{1-p-q}{k+1} + \frac{pr}{r+k} + qrB(k+1, r) \\ &= \frac{1-p-q}{k+1} + \frac{pr}{r+k} + \frac{q}{\binom{r+k}{r}},\end{aligned}$$

facilmente se determina o valor médio de  $X_{r;p,q}$ ,

$$\mathbb{E}[X_{r;p,q}] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{r-1}{r+1}(p-q) \right]$$

e o momento de segunda ordem,

$$\mathbb{E}[X_{r;p,q}^2] = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{2(r-1)}{r+2} p - \frac{(r-1)(r+4)}{(r+1)(r+2)} q \right].$$

A variância será dada por:

$$\begin{aligned}Var[X_{r;p,q}] &= \mathbb{E}[X_{r;p,q}^2] - (\mathbb{E}[X_{r;p,q}])^2 \\ &= \frac{1}{12} \left[ 1 + \frac{2(p+q)(r-2)(r-1)}{(r+1)(r+2)} - \frac{3(r-1)^2(p-q)^2}{(r+1)^2} \right].\end{aligned}$$

Na Figura 5.1.1 e na Figura 5.1.2, encontra-se representado, respectivamente, o valor médio e a variância de  $X_{r;p,q}$ , para  $r = 2, 3, 4, 5$ . Repare-se que os planos do valor médio se intersejam quando  $p = q$  e que, para  $r > 2$ , a variância é mais elevada quando  $p = q = 0.5$  (para  $r = 2$  o valor máximo da variância é observado quando  $p = q$ ).

Uma nota curiosa sobre a v.a.  $X_{r;p,q}$  surge ao verificar que pode ser representada através duma mistura pseudo-convexa de máximos — isto é, em que a soma dos coeficientes é 1, sem a exigência de que cada um deles esteja em  $[0,1]$  —  $\{U_{1:1} \equiv U, U_{2:2}, U_{3:3} \dots, U_{r:r}\}$ , com  $0 \leq \min\{p, q\}$ ,  $p+q \leq 1$ . Veja-se que,

$$\begin{aligned}F_{X_{r;p,q}}(x) &= (1-p-q)F_U(x) + pF_{U_{r:r}}(x) + qF_{U_{1:r}}(x) \\ &= (1-p-q)x + px^r + q[1 - (1-x)^r] \\ &= [1-p+q(r-1)]F_U(x) + \sum_{j=2}^{r-1} \binom{r}{j} q(-1)^{j+1} F_{U_{j:j}}(x) \quad (5.1.2) \\ &\quad + [p - (-1)^r q] F_{U_{r:r}}(x).\end{aligned}$$

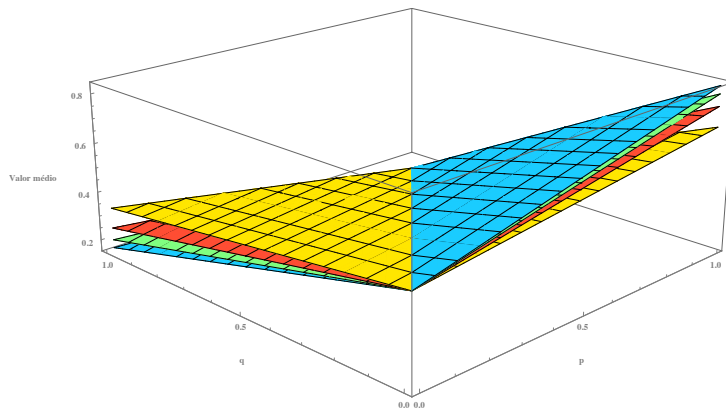


Figura 5.1.1: Valor médio de  $X_{r;p,q}$ , para  $r = 2$  (amarelo), 3 (vermelho), 4 (verde) e 5 (azul).

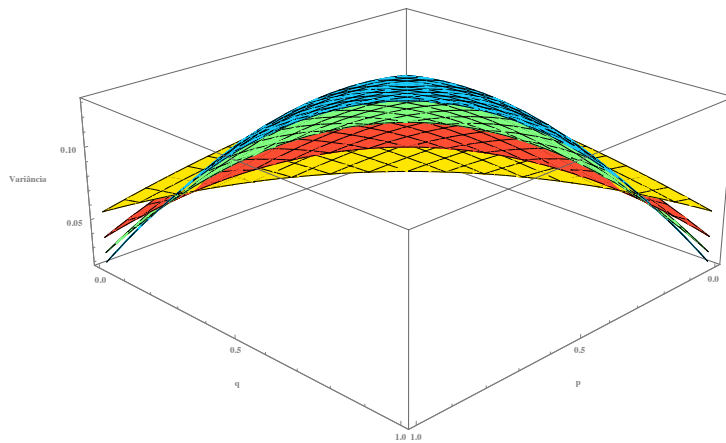


Figura 5.1.2: Variância de  $X_{r;p,q}$ , para  $r = 2$  (amarelo), 3 (vermelho), 4 (verde) e 5 (azul).

De forma análoga,  $X_{r;p,q}$  também pode ser representada como uma mistura pseudo-convexa de mínimos,

$$F_{X_{r;p,q}}(x) = [1 - q + p(r - 1)]F_U(x) + \sum_{j=2}^{r-1} \binom{r}{j} p(-1)^{j+1} F_{U_{1;j}}(x) + [q + (-1)^{r+1}p]F_{U_{1;r}}(x).$$

## 5.2 Caso particular de $r = 2$

Quando  $r = 2$ , utilizando o resultado (5.1.2), a f.d. da v.a.  $X_{2;p,q}$  poderá ser escrita como uma mistura pseudo-convexa de máximos:

$$F_{X_{2;p,q}}(x) = (1 - p + q)F_U(x) + (p - q)F_{U_{2:2}}(x). \quad (5.2.1)$$

Em (5.2.1), o peso  $q$  associado ao mínimo é incorporado no peso do máximo, ocorrendo os necessários ajustamentos no peso de  $U$ . Neste caso, o parâmetro que interessará estudar será  $k = p - q$ , pois fica evidente que a f.d. da v.a.  $X_{2;p,q}$  será igual  $\forall p, q, p + q \in [0, 1]$ , cuja diferença entre  $p$  e  $q$  seja igual a  $k$  (com  $k \in [-1, 1]$ ). Repare-se na representação da f.d. da v.a. Mendel(2; $p,q$ ) (Figura 5.2.1) e veja-se que para qualquer  $p$  e  $q$  com  $p - q = k$  se obtém a mesma f.d..

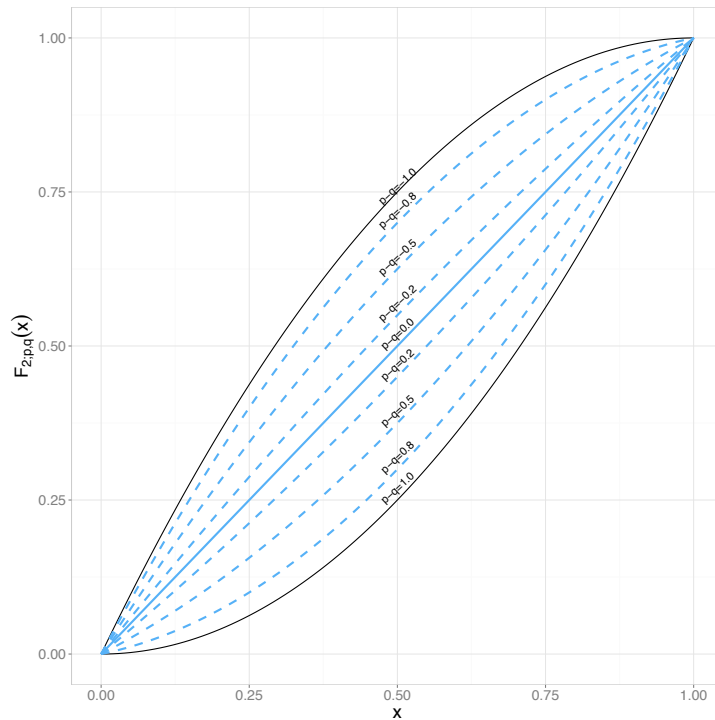


Figura 5.2.1: Função de distribuição da v.a. Mendel(2; $p,q$ ).

Se  $p = 0$ , ou  $q = 0$ , obtém-se uma v.a. da família  $X_m$  (4.1.1). Por exemplo, se  $q = 0$ , resultará  $m = 2p$  (com  $p \in [0, 1]$ ) e a f.d. será dada por:

$$F_{X_{2;p,0}}(x) = (1 - p)F_U(x) + pF_{U_{2:2}}(x).$$

Os problemas de identificabilidade tornam-se ainda mais evidentes no caso em que  $r = 2$  com  $p = q$  — um modelo natural quando se pensa num esquema similar: o investigador ou obtém um único valor de prova- $p$  que reporta, ou replica a experiência e reporta o segundo valor que observa, que então com igual probabilidade será um máximo ou um mínimo. Neste caso,  $X_{2;p,p} \stackrel{d}{=} U$ ,

$$F_{X_{2;p,p}}(x) \stackrel{d}{=} F_U(x).$$

Assim, se  $p = q$  a distribuição de  $X_{2;p,p}$  será Uniforme, qualquer que seja o valor de  $p \in [0, \frac{1}{2}]$ . Desta forma, se com igual probabilidade os experimentadores repetirem a experiência e reportarem o máximo ou o mínimo dessas duas experiências, manter-se-á válida a asserção inicial de que os valores reportados serão provenientes de uma distribuição Uniforme.

Repare-se que  $X_{2;p,p} \stackrel{d}{=} U$  poderá ser visto como um caso particular da mistura convexa de uma v.a.  $W$  com f.d. contínua com o máximo  $W_{2:2}$  de duas réplicas de  $W$ , com probabilidade  $p$  e, com o mínimo  $W_{1:2}$  de duas réplicas de  $W$ , com a mesma probabilidade  $p \in [0, \frac{1}{2}]$ . Ou seja,

$$W_{2;p,p} = \begin{cases} W & W_{2:2} & W_{1:2} \\ 1 - 2p & p & p \end{cases} \stackrel{d}{=} W.$$

### 5.2.1 Estimação do parâmetro $k$

Quando se tem  $r = 2$ ,  $X_{2;p,q} = X_{2;k}$  é uma v.a. da família Mendel( $m$ ) e, conseqüentemente a estimação do parâmetro  $k$ , que incorpora a informação da diferença entre  $p$  e  $q$  (com  $k = p - q$  e  $-1 \leq k \leq 1$ ) herda todas as dificuldades da estimação de  $m$  na referida família. Assim, a f.d. (5.2.1) em função do parâmetro  $k$  será,

$$F_{X_{2;k}}(x) = (1 - k)F_U(x) + kF_{U_{2:2}}(x). \quad (5.2.2)$$

No Capítulo 4, foram explorados diversos métodos para a estimação do parâmetro  $m$ , aqui optamos por estimar o parâmetro  $k$  efetuando em simultâneo um teste de ajustamento do modelo e a estimação do parâmetro, *invertendo* os testes de ajustamento de forma a identificar a região do parâmetro onde os dados apresentam maior *concordância* com o modelo ajustado, obtendo o que por vezes se designa por intervalo de confiança de *score*.

Assim, para obter as estimativas de  $k$ , utiliza-se o teste de ajustamento de Kolmogorov-Smirnov (KS), supondo que  $F_{n;k}^*$  é a função de distribuição

empírica de uma amostra proveniente do modelo  $F_{X_{2;k}}$ , com  $k$  desconhecido e  $n$  a dimensão da amostra. Uma estimativa para  $k$  pode ser obtida identificando o valor que minimiza a estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov, isto é,

$$\tilde{k}_{KS} = \arg \min_{k \in [-1,1]} D_{n;r}(k),$$

onde,

$$D_{n;r}(k) = \sup_{x \in [0,1]} \left| F_{n;k}^*(x) - F_{X_{2;k}}(x) \right|.$$

O que será equivalente a procurar o valor  $k \in [-1, 1]$  que maximiza o valor de prova- $p$  associado ao teste de ajustamento de KS.

Procede-se de forma idêntica utilizando o teste de ajustamento de Anderson-Darling (AD). Um teste que habitualmente apresenta melhores resultados do que o de KS quando a distribuição em causa tem *caudas* mais pesadas (o que nesta situação não é relevante).

$$A = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[F_{n;k}^*(x) - F_{X_{2;k}}(x)]^2}{F_{X_{2;k}}(x) [1 - F_{X_{2;k}}(x)]} dF_{X_{2;k}}(x).$$

## 5.2.2 Esquema de simulação

Com o intuito de analisar os resultados das estimativas para  $k$ , obtidas através dos testes de ajustamento de KS e de AD, fez-se um estudo de simulação para valores de  $k$  conhecido ( $k = -1(0.05)1$ ) e amostras de dimensão  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

Para cada valor de  $k$  e para cada valor de  $n$  conhecidos, o procedimento de execução da simulação pode ser resumido em cinco etapas:

1. gerar uma amostra de  $n$  números pseudo-aleatórios com distribuição Uniforme padrão,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ;
2. obter a amostra  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  com a distribuição de mistura  $F_{X_{2;k}}$ , através do método da transformação inversa considerando, quando  $k = 0$ ,  $x = u$ , e  $x = \frac{k-1+\sqrt{1-2k+k^2+4ku}}{2k}$ , quando  $k \neq 0$ ;
3. determinar os valores de  $k$  que maximizam os valores de prova- $p$  associados aos dois testes de ajustamento;

4. repetir 20 000<sup>1</sup> vezes os passos 1, 2 e 3;
5. para todas as estimativas obtidas, determinar os intervalos de confiança de *score* e calcular também as estatísticas de interesse, por exemplo a média, o viés e o erro quadrático médio.

Procedendo deste modo os valores de prova- $p$  são gerados aleatoriamente através do modelo (5.2.2) recorrendo ao TTU. Desta forma, o verdadeiro valor do parâmetro é conhecido e está fixo para cada caso de simulação. As amostras geradas em cada passo da simulação são utilizadas para efetuar os testes de ajustamento de KS e de AD para os diversos valores admissíveis do parâmetro. Sendo assim possível identificar o valor que maximiza o valor de prova- $p$  associado a cada um dos testes de ajustamento e determinar os intervalos de confiança de *score*, comparando os resultados obtidos através dos dois testes de ajustamento estudados.

Esta simulação foi realizada em R (R Core Team, 2015), utilizando o pacote *kolmim* (Carvalho, 2015) para efetuar o teste de ajustamento de KS e o pacote *ADGofTest* (Bellosta, 2011) para o teste de AD. Os gráficos utilizados para analisar os resultados foram construídos através do pacote *ggplot2* (Wickham, 2009).

### 5.2.3 Resultados da estimação de $k$

De um modo geral, as estimativas obtidas através do teste de ajustamento de AD são melhores do que as fornecidas pelo teste de ajustamento de KS, sendo a diferença entre os dois métodos mais evidente nas amostras de menor dimensão.

Através da análise da Figura 5.2.2 pode confirmar-se que os valores do e.q.m. das estimativas obtidas pelo teste de ajustamento de AD são sempre mais baixos do que os valores das estimativas obtidas através do teste de ajustamento de KS. Note-se que os valores mais altos são observados quando  $k = 0$  e vão diminuindo à medida que  $|k|$  se aproxima de 1, isto é, quando a componente de mistura tem um sinal mais forte (componente dominante Beta não Uniforme).

Observe-se, na Figura 5.2.3, o viés das estimativas de  $k$  e repare-se na tendência de diminuição do enviesamento à medida que a dimensão da amostra

---

<sup>1</sup>este procedimento revelou-se bastante rápido, permitindo executar um elevado número de simulações.

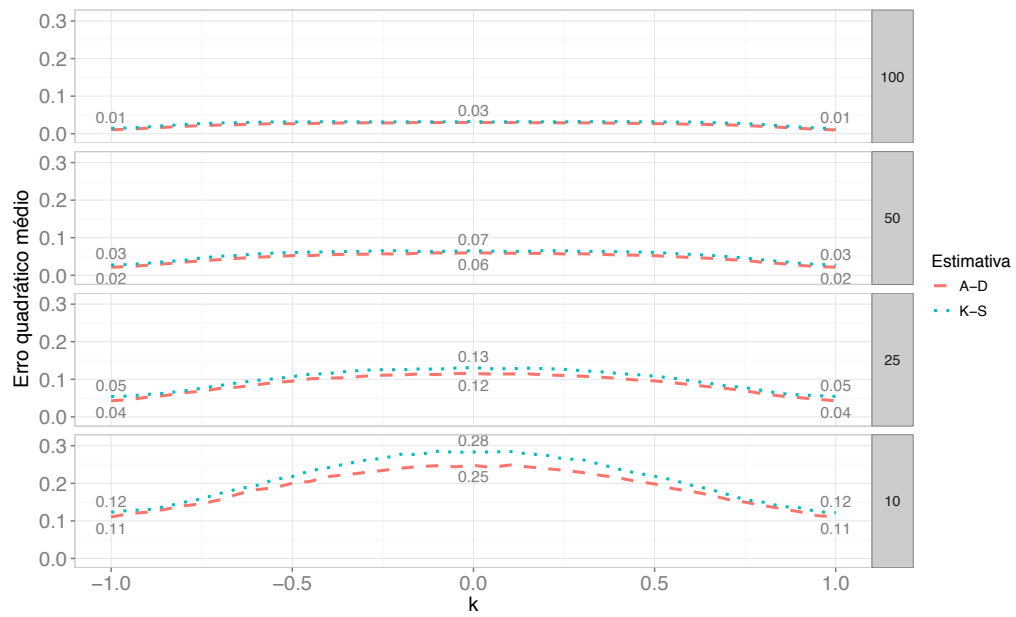


Figura 5.2.2: Erro quadrático médio das estimativas para  $k$  obtidas através dos testes de ajustamento de AD e de KS, para diversos valores de  $k$ , com  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

aumenta, denotando-se que o enviesamento aumenta quando a componente de mistura tem um sinal mais forte ( $|k|$  está próximo de 1).



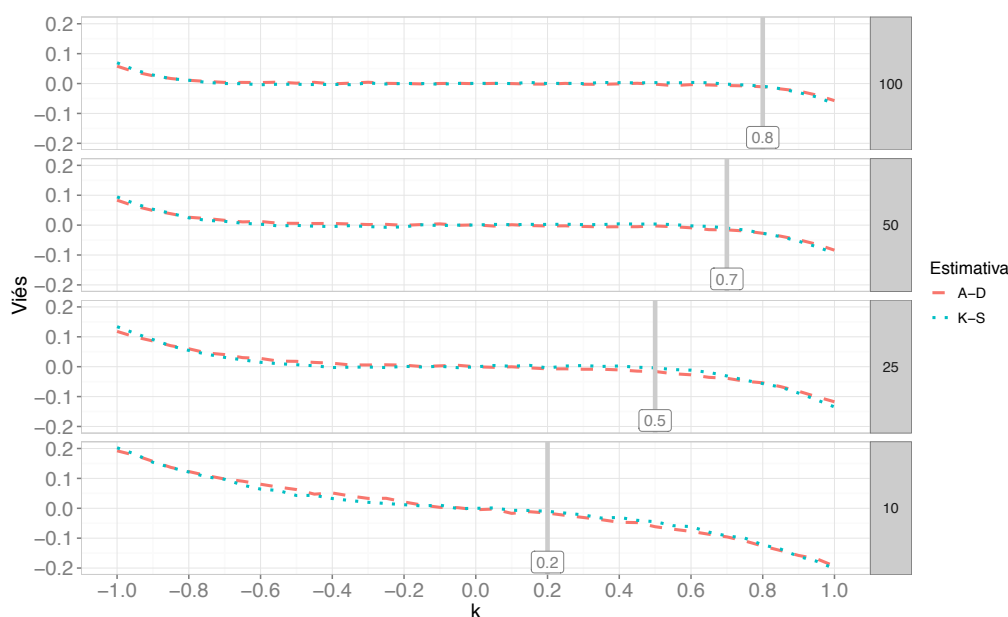


Figura 5.2.3: Viés das estimativas para  $k$  obtidas através dos testes de ajustamento de AD e de KS, para diversos valores de  $k$  com  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

Nas Figuras 5.2.4 e 5.2.5 estão representados os valores médios das estimativas calculadas através dos testes de ajustamento de AD e de KS. Pode, uma vez mais, verificar-se que os valores obtidos estão muito próximos do verdadeiro valor de  $k$ . À medida que a dimensão da amostra aumenta, o valor médio das estimativas começa a afastar-se do verdadeiro valor para  $|k|$  cada vez mais próximo de 1. Um olhar mais atento permite confirmar que o valor médio das estimativas que resultam do teste de ajustamento de AD se encontra, de um modo geral, mais próximo do verdadeiro valor de  $k$ .

Os resultados até agora analisados parecem interessantes. No entanto, na Figura 5.2.6, observe-se a amplitude média dos intervalos de confiança de *score* com um nível de significância de 95%: a amplitude média dos intervalos de confiança de *score* é sempre superior a 1 para amostras de dimensão 10, chegando a ser 1.58 e 1.66, quando  $k = 0$ ; quando  $k = 0$ , o valor mais baixo (0.67) é observado em amostras de dimensão 100, sendo todos os outros valores próximos ou superiores a 1; amplitude média dos intervalos de confiança inferior a 0.5 só se encontra, quando  $|k| \approx 1$ , em amostras de dimensão 50, no teste de ajustamento de AD e, em amostras de dimensão 100, nos dois testes de ajustamento.

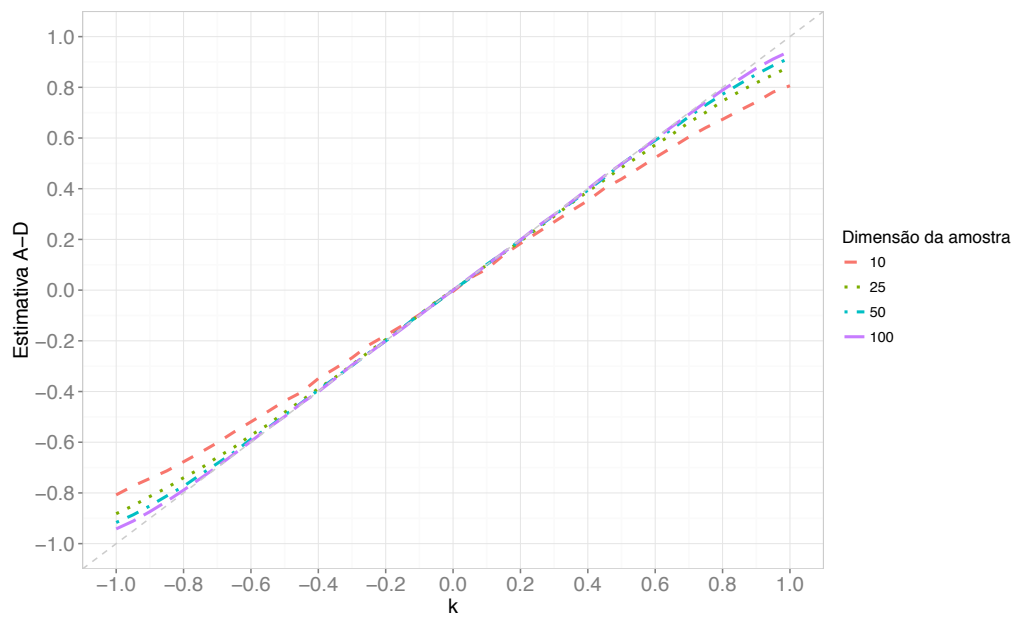


Figura 5.2.4: Valor médio das estimativas para  $k$  obtidas através do teste de ajustamento de AD, para os diversos valores de  $k$  e para amostras de dimensão  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

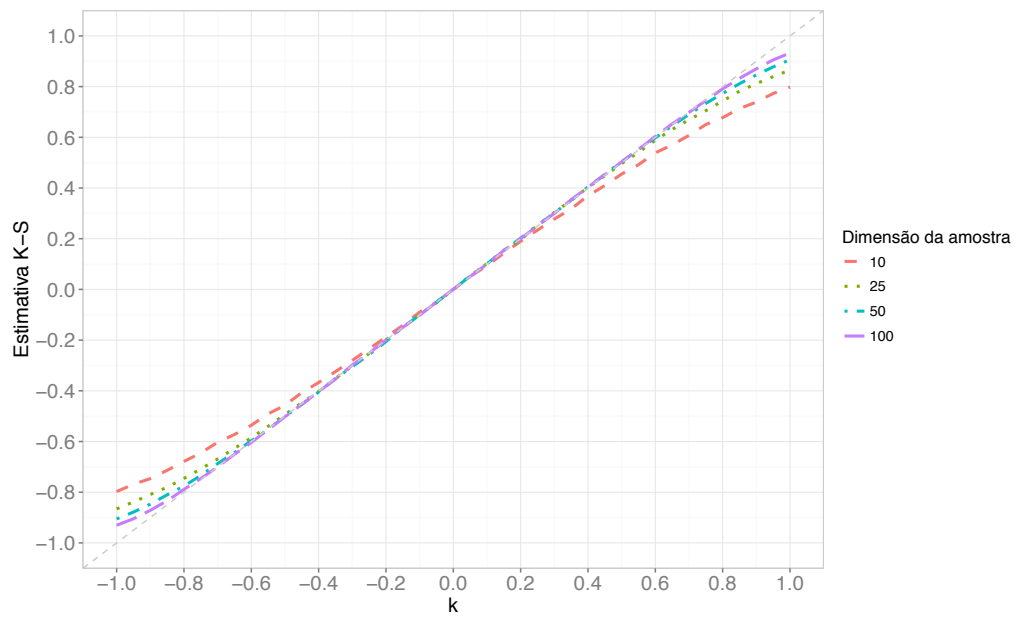


Figura 5.2.5: Valor médio das estimativas para  $k$  obtidas através do teste de ajustamento de KS, para diversos valores de  $k$  com  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

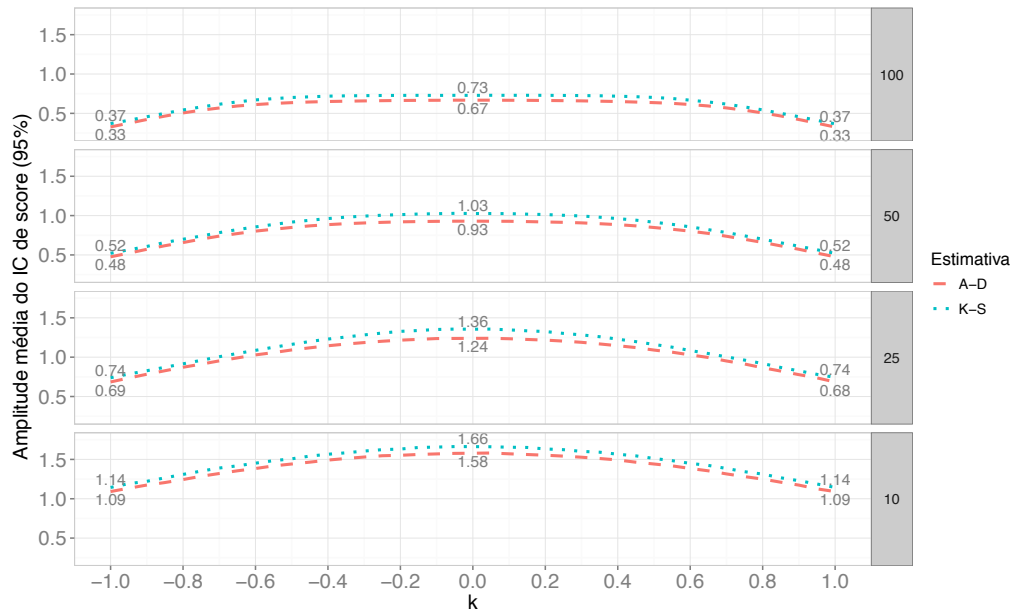


Figura 5.2.6: Amplitude média dos intervalos de confiança de *score*, utilizando os testes de ajustamento de AD e de KS, para os diversos valores de  $k$  e para amostras de dimensão  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

Em praticamente todos os casos simulados, parece denotar-se que os intervalos de confiança obtidos cobrem grande parte do espaço do parâmetro.

Uma outra forma de utilizar esta informação será considerar a proporção de intervalos de confiança de *score* que incluem  $k = 0$ , ou seja, os casos em que não será excluída a hipótese de  $X_{2;k}$  ter distribuição Uniforme padrão. Na Figura 5.2.7 está representada esta informação, podendo constatar-se que: para amostras de dimensão 10 e 25, a proporção de intervalos de confiança que incluem  $k = 0$  é sempre superior a 0.05, qualquer que seja o valor de  $k$ ; para amostras de dimensão 50 e 100, só se observa uma proporção de intervalos de confiança que incluem  $k = 0$  inferior a 0.05 quando  $|k| \approx 1$ .

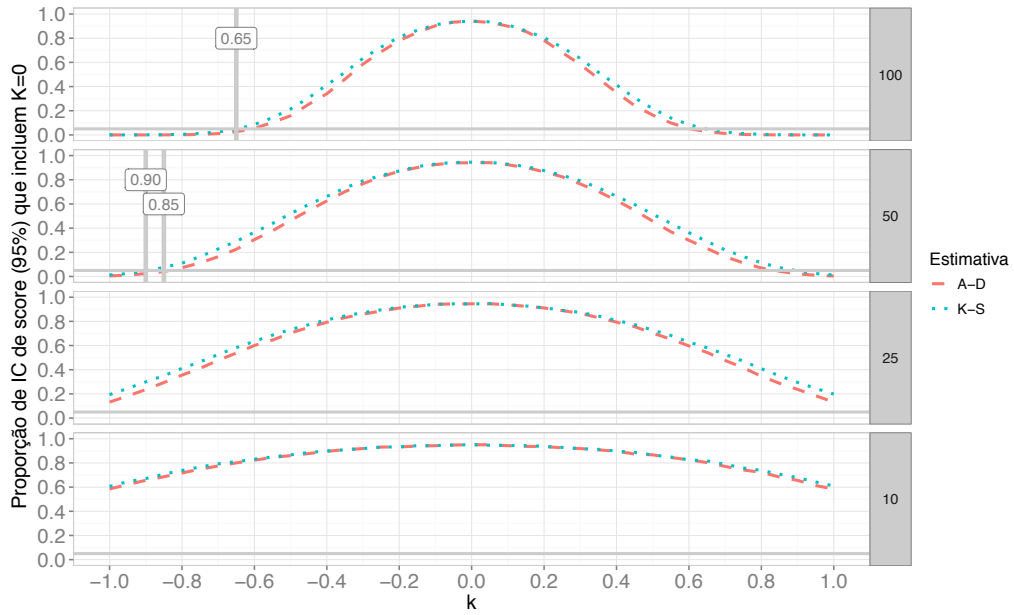


Figura 5.2.7: Proporção dos intervalos de confiança de *score* que incluem  $k = 0$ . Intervalos de confiança de *score* obtidos, utilizando os testes de ajustamento de AD e de KS, para diversos valores de  $k$  com  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

### 5.3 Quando $r > 2$

Na Secção 5.2 foi dada especial atenção ao caso particular  $r = 2$ ; iremos agora analisar o caso mais geral,  $r > 2$ , da mistura convexa (5.1.1) que tem como f.d.p.,

$$f_{X_{r;p,q}}(x) = [1 - p - q + prx^{r-1} + qr(1-x)^{r-1}] \mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

Ao admitir  $r > 2$  apresenta-se um cenário mais complexo do que os estudados até aqui. Assume-se que um investigador possa ser tentado a replicar uma experiência  $r$  vezes, sempre que não está satisfeito com os resultados, porque por exemplo:

- desconfia da calibração dos aparelhos de medição;
- o custo de cada réplica é acessível;
- a duração de cada experiência não é demasiado longa;
- estão disponíveis unidades experimentais em número suficiente.

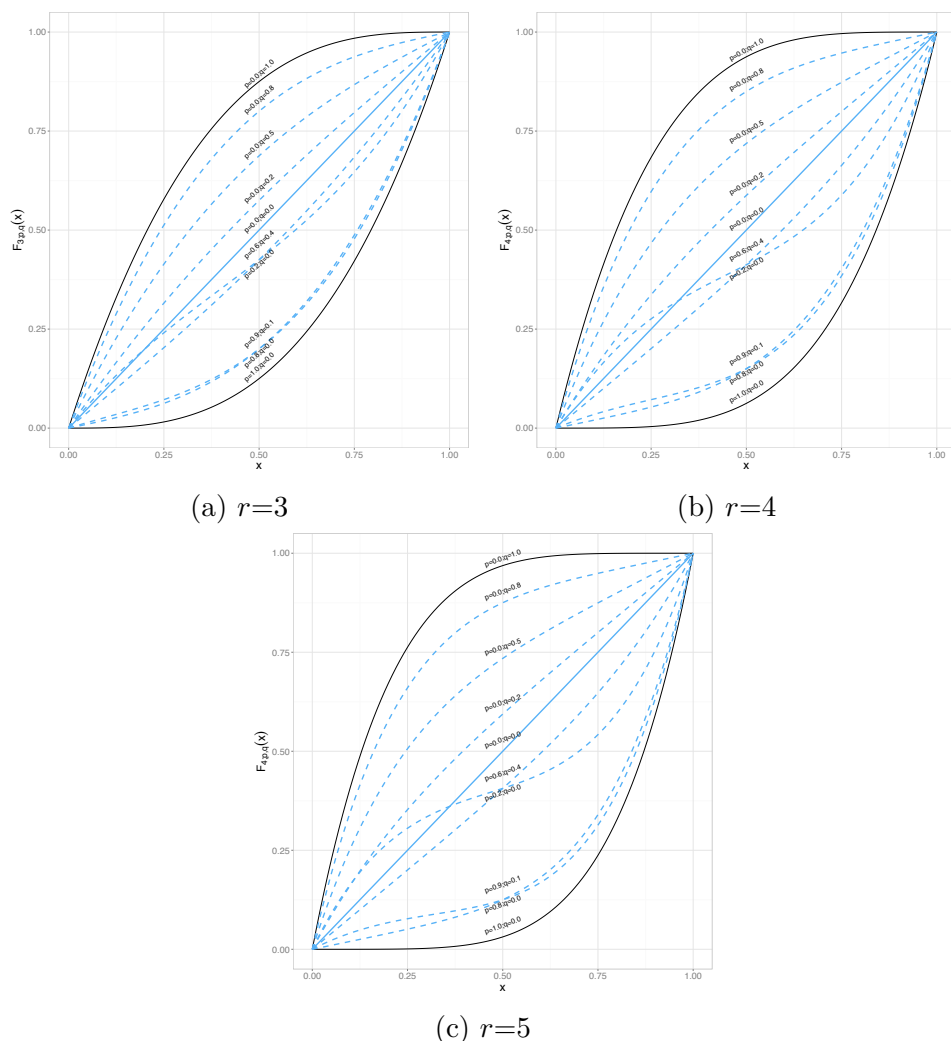


Figura 5.3.1: Função de distribuição da v.a. Mendel( $r; p, q$ ), com  $r = 3, 4, 5$ .

Através da Figura 5.3.1 pode observar-se a f.d. da v.a. Mendel( $r; p, q$ ), com  $r = 3, 4, 5$  e para diferentes valores de  $p$  e  $q$ . Nestes casos, ao contrário do que acontece quando  $r = 2$ , cada par  $(p, q)$ , com  $p, q, p + q \in [0, 1]$  tem uma f.d. diferente.

### 5.3.1 Estimação dos parâmetros $p$ e $q$

Ao longo do Capítulo 4 foram estudados os desempenhos dos diversos métodos propostos para a estimação do parâmetro  $m$ . Para estimar os parâmetros de mistura  $p$  e  $q$ , da família Mendel( $r; p, q$ ), serão utilizados os

métodos onde se observaram os melhores resultados para a estimação de  $m$  e uma abordagem semelhante à utilizada na Secção 5.2 deste Capítulo, obtendo as estimativas através da maximização dos valores de prova- $p$  associados ao teste de ajustamento de KS e ao teste de ajustamento de AD. Em síntese, serão comparadas as estimativas calculadas através do:

- método dos momentos  $(\tilde{p}_M, \tilde{q}_M)$ ;
- método de máxima verosimilhança  $(\tilde{p}_{ML}, \tilde{q}_{ML})$ ;
- método do espaçamento máximo  $(\tilde{p}_{MSP}, \tilde{q}_{MSP})$ ;
- teste de ajustamento de Kolmogorov-Smirnov  $(\tilde{p}_{KS}, \tilde{q}_{KS})$ ;
- teste de ajustamento de Anderson-Darling  $(\tilde{p}_{AD}, \tilde{q}_{AD})$ .

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória de dimensão  $n$  proveniente de uma população com distribuição (5.1.1), tendo  $r > 2$  fixo. Apresentam-se de seguida os estimadores utilizados para estimar o parâmetro de mistura  $\theta = (p, q)$ , com  $\theta \in \Theta = \{(p, q) : p, q, p + q \in [0, 1]\}$

As estimativas para  $p$  e  $q$  calculadas pelo do método dos momentos podem ser obtidas através das equações (5.3.1):

$$\begin{aligned}\tilde{p}_M &= \frac{3(r+1)(r+2)M_2 - 2(r+1)(r+4)M_1 + 2(r+1)}{(r-1)(r-2)} \\ \tilde{q}_M &= \frac{3(r+1)(r+2)M_2 - 4(r+1)^2M_1 + r(r+1)}{(r-1)(r-2)},\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

sendo  $M_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k$ .

Tendo em consideração que o espaço do parâmetro  $\Theta$  é limitado e que através das equações anteriormente descritas poderão resultar estimativas inadmissíveis, os estimadores dos momentos para  $\tilde{p}_M$  e para  $\tilde{q}_M$  serão ajustados de forma a garantir que as estimativas obtidas se encontram dentro do espaço do parâmetro. Deste modo, serão utilizados os estimadores ajustados  $\tilde{p}_{M^t} = \min[\max(\tilde{p}_M; 0); 1]$  e  $\tilde{q}_{M^t} = \min[\max(\tilde{q}_M; 0); 1]$ , considerando admissíveis as estimativas em que se verifica a condição:  $\tilde{p}_{M^t} + \tilde{q}_{M^t} \leq 1$ .

Utilizou-se um procedimento de optimização não linear para determinar as estimativas referentes aos métodos de ML e de MSP, considerando as restrições do espaço do parâmetro  $\Theta = \{(p, q) : p, q, p + q \in [0, 1]\}$ . Assim,

a estimativa de ML será dada pelo par  $\tilde{\theta}_{ML} = (\tilde{p}_{ML}, \tilde{q}_{ML})$  que maximiza a expressão (5.3.2):

$$\tilde{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \prod_{j=1}^n \left[ 1 - p - q + prx_j^{r-1} + qr(1 - x_j)^{r-1} \right], \quad (5.3.2)$$

com  $\theta = (p, q)$  e  $\Theta = \{(p, q) : p, q, p + q \in [0, 1]\}$ .

Por outro lado, a estimativa do MS<sub>p</sub> será obtida identificando os valores  $\tilde{\theta}_{MSp} = (\tilde{p}_{MSp}, \tilde{q}_{MSp})$  que maximizam a expressão (5.3.3):

$$\tilde{\theta}_{MSp} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \ln \left[ (n+1) \left( F_{X_{r;p,q}}(X_{j:n}) - F_{X_{r;p,q}}(X_{j-1:n}) \right) \right], \quad (5.3.3)$$

sendo  $F_{X_{r;p,q}}$  a f.d. de  $X_{r;p,q}$ , com  $X_{0:n} \equiv 0$  e  $X_{n+1:n} \equiv 1$ .

### 5.3.2 Esquema de simulação

O desempenho dos diversos métodos propostos para estimar os parâmetros de mistura  $p$  e  $q$  foi analisado através de um estudo de simulação, considerando  $r=3, 4$  e  $5$ , com  $p$  e  $q$  conhecidos a variarem de  $0$  a  $1$  com um espaçamento de  $0.1$ , para amostras de dimensão  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

Para cada valor de  $r$ , cada par de valores  $(p, q)$  e para cada valor de  $n$  conhecidos, efetuou-se uma simulação utilizando um procedimento que pode ser resumido em sete etapas:

1. gerar uma amostra de  $n$  números pseudo-aleatórios e transformar numa sequência de três categorias, com base no vector de probabilidades  $(1 - p - q, p, q)$ ;
2. obter a amostra  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  com a distribuição de mistura  $F_{X_{r;p,q}}$ , gerando, para cada um dos  $n$  elementos da amostra,  $r$  números pseudo-aleatórios e escolhendo o primeiro valor, o mínimo ou o máximo dos  $r$  valores, de acordo com a categoria identificada no passo anterior;
3. calcular as estimativas  $\tilde{p}$  e  $\tilde{q}$  para cada um dos estimadores estudados e determinar os valores de  $(p, q)$  que maximizam os valores de prova- $p$  associados aos dois testes de ajustamento;
4. repetir 1 000 vezes os passos 1, 2 e 3;

5. para todas as estimativas obtidas, determinar a proporção de estimativas admissíveis, ou seja, as que se encontram dentro do espaço dos parâmetros, calcular também as estatísticas de interesse, por exemplo a média, o viés e o e.q.m.;
6. repetir  $50^2$  vezes os passos 4 e 5;
7. calcular a média amostral das estimativas, do e.q.m., do viés e determinar o erro padrão respectivo.

Este procedimento permite gerar valores de prova- $p$  aleatoriamente através do modelo (5.1.1), sendo fixos e conhecidos, em cada passo de simulação, os verdadeiros valores dos parâmetros  $p$  e  $q$ . As amostras geradas são utilizadas para calcular as estimativas obtidas com base nos procedimentos em estudo, utilizando processos de otimização para obter as estimativas referentes aos métodos de ML, de MSp e para identificar os valores que maximizam os valores de prova- $p$  associados aos testes de ajustamento de KS e de AD.

O estudo por simulação dos estimadores propostos para  $p$  e  $q$  foi realizado em *R* (R Core Team, 2015) através do processo descrito anteriormente e utilizando, quando necessário, o procedimento de otimização *optim* com o método *Brent* e o procedimento de otimização não linear *nloptr* (Johnson, 2008). Para os gráficos utilizou-se o pacote *ggplot2* (Wickham, 2009).

### 5.3.3 Resultados da estimação de $p$ e $q$

O cenário proposto apresenta desafios assinaláveis para o exercício de estimação e para a análise dos seus resultados: pretende-se avaliar o desempenho dos cinco métodos propostos para estimar os parâmetros  $p$  e  $q$ , considerando amostras de pequena a grande dimensão ( $n = 10, 25, 50, 100$ ), com um número fixo de réplicas da experiência ( $r = 3, 4, 5$ ), sabendo que  $\{p, q, p + q\} \in [0, 1]$ .

Começamos por analisar as Figuras 5.3.2, 5.3.3 e 5.3.4, onde se apresenta a proporção de valores inadmissíveis que resultam das estimativas obtidas através do método dos momentos truncado  $(\tilde{p}_{M^t}, \tilde{q}_{M^t})$ .

A proporção de estimativas inadmissíveis varia entre 0 e 0.50. Em todos os cenários simulados o valor mais alto é observado quando  $p + q = 1$ , ou seja,

---

<sup>2</sup>este procedimento revelou ser muito demorado, o número 50 resulta da necessidade de garantir um equilíbrio entre o número de observações e o tempo para realizar as simulações.



quando a componente Uniforme está ausente da mistura. Para  $p + q = 1$  a proporção de estimativas inadmissíveis varia entre 0.48 e 0.50.

Quando  $p + q < 1$ , a proporção de estimativas inadmissíveis vai diminuindo para valores cada vez mais próximos de 0, à medida que aumenta a dimensão da amostra e que se considera um maior número de réplicas da experiência:

- para  $p = q = 0$  e considerando amostras de pequena dimensão ( $n = 10$ ), a proporção de estimativas inadmissíveis passa de 0.24, quando  $r = 3$ , para 0.08, quando  $r = 4$  e para 0.03, quando  $r=5$ .
- mantendo  $p = q = 0$ , mas considerando amostras de dimensão 100, a proporção de estimativas inadmissíveis é de 0.01, quando  $r = 3$  e passa para 0 quando  $r = 4$  ou 5;
- denota-se uma tendência de diminuição na proporção de estimativas inadmissíveis à medida que aumenta a dimensão da amostra;
- observam-se valores mais baixos de estimativas inadmissíveis quando a componente de mistura tem um sinal mais fraco, ou seja, quando é dominada pela componente Uniforme.

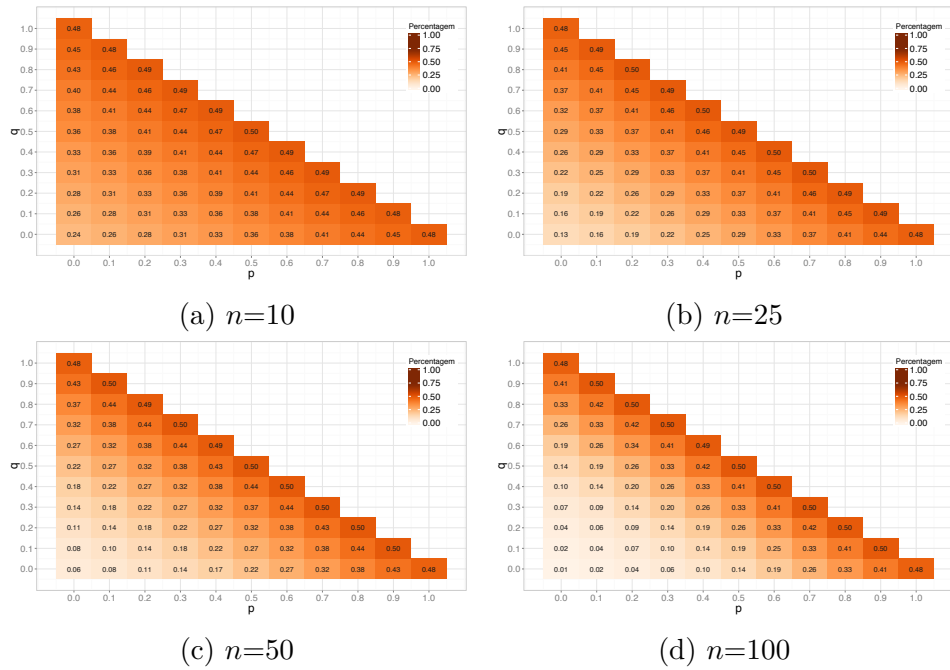


Figura 5.3.2: Proporção de estimativas inadmissíveis de  $p_{M^t}$  e  $q_{M^t}$ , para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 10, 25, 50, 100$ .

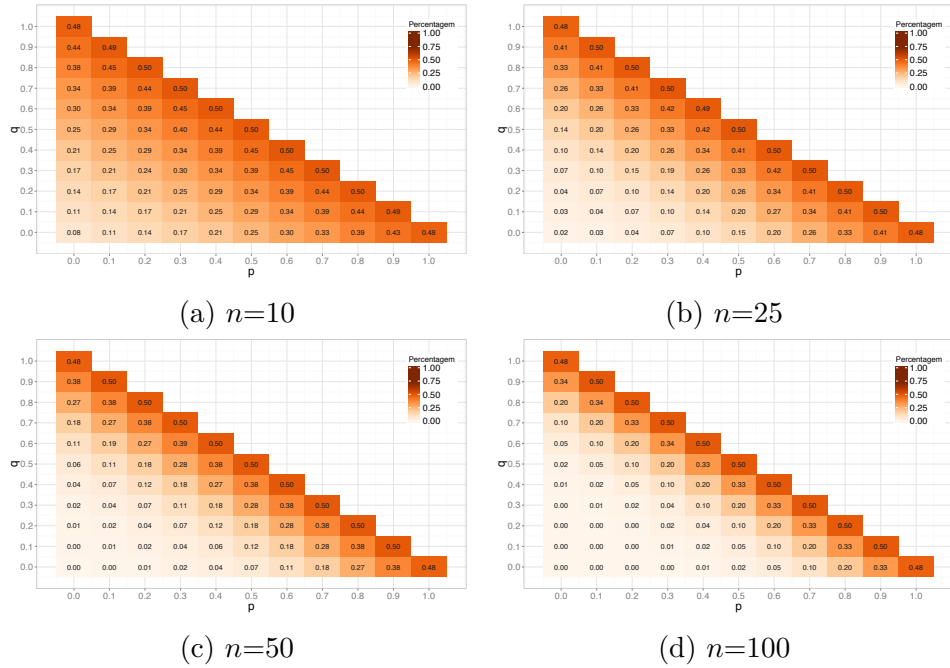
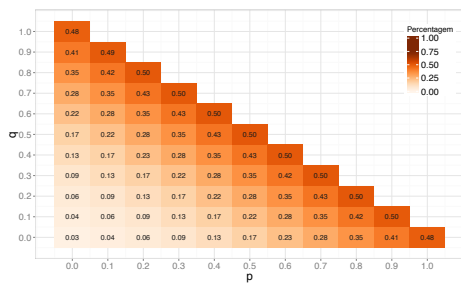
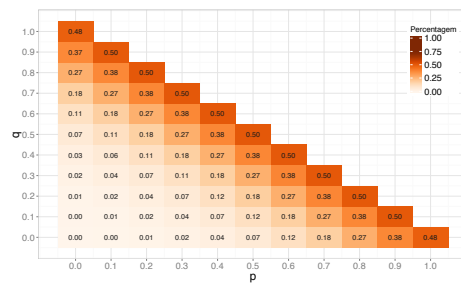


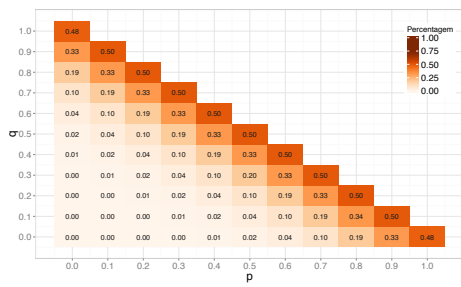
Figura 5.3.3: Proporção de estimativas inadmissíveis de  $p_{M^t}$  e  $q_{M^t}$ , para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 10, 25, 50, 100$ .



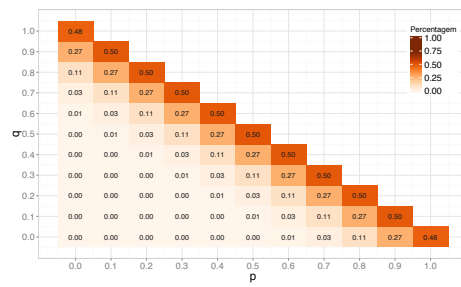
(a)  $n=10$



(b)  $n=25$



(c)  $n=50$



(d)  $n=100$

Figura 5.3.4: Proporção de estimativas inadmissíveis de  $p_{M^t}$  e  $q_{M^t}$ , para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 10, 25, 50, 100$ .

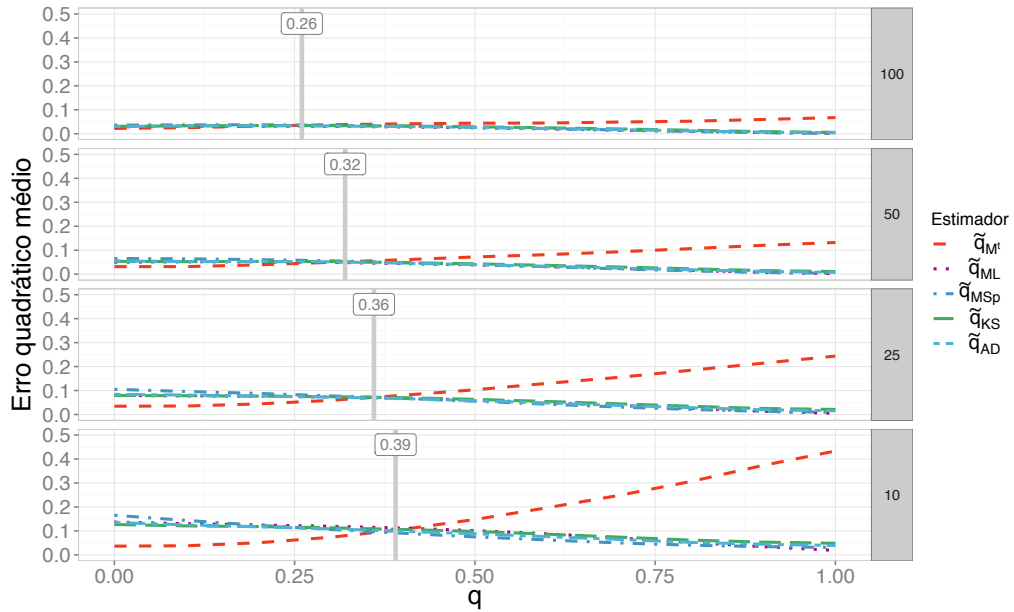


Figura 5.3.5: Erro quadrático médio de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0$ ,  $r = 3$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

Observem-se as Figuras 5.3.5, 5.3.6 e 5.3.7 onde se apresenta o e.q.m. para os diferentes estimadores,  $\tilde{q}_\bullet$ , com  $p = 0$  e  $q \in [0, 1]$ , considerando amostras de dimensão  $n = 10, 25, 50, 100$  e  $r = 3, 4, 5$ .

Acompanhe-se, ao longo das diferentes representações gráficas (Figuras 5.3.5, 5.3.6 e 5.3.7), o mais simples dos estimadores considerados, o estimador do método dos momentos ( $M^t$ ) e repare-se que tem um comportamento diferente do dos restantes estimadores estudados. Embora as diferenças tendam a ficar mais esbatidas à medida que a dimensão da amostra aumenta de 10 para 100 e que o  $r$  passa de 3 para 5. As estimativas obtidas através do estimador  $M^t$  apresentam os valores mais baixos do e.q.m. quando a Uniforme é a componente dominante da mistura ( $q \approx 0$ ), em especial nas amostras de menor dimensão ( $n = 10, 25$ ) e quando se admite um menor número de replicações das experiências ( $r = 2, 3$ ).

Se excluirmos o comportamento do estimador  $M^t$ , denota-se uma tendência generalizada de diminuição do e.q.m. à medida que  $q$  se aproxima de 1. Fixando  $r$ , observa-se neste conjunto de estimadores, uma diminuição do e.q.m. à medida que a dimensão da amostra aumenta e que  $q$  se aproxima de 1. Por outro lado, fixando  $n$ , parece evidenciar-se uma diminuição do e.q.m. nos cenários em que se considera um maior número de replicações das experiências (quando  $r$  passa de 3 para 4 e para 5).

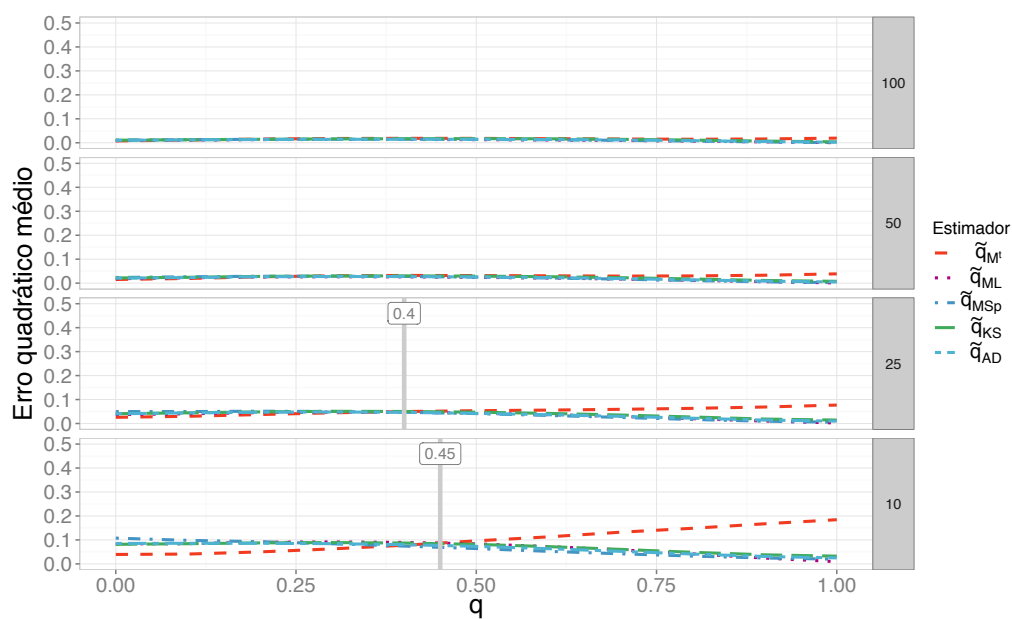


Figura 5.3.6: Erro quadrático médio de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0$ ,  $r = 4$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

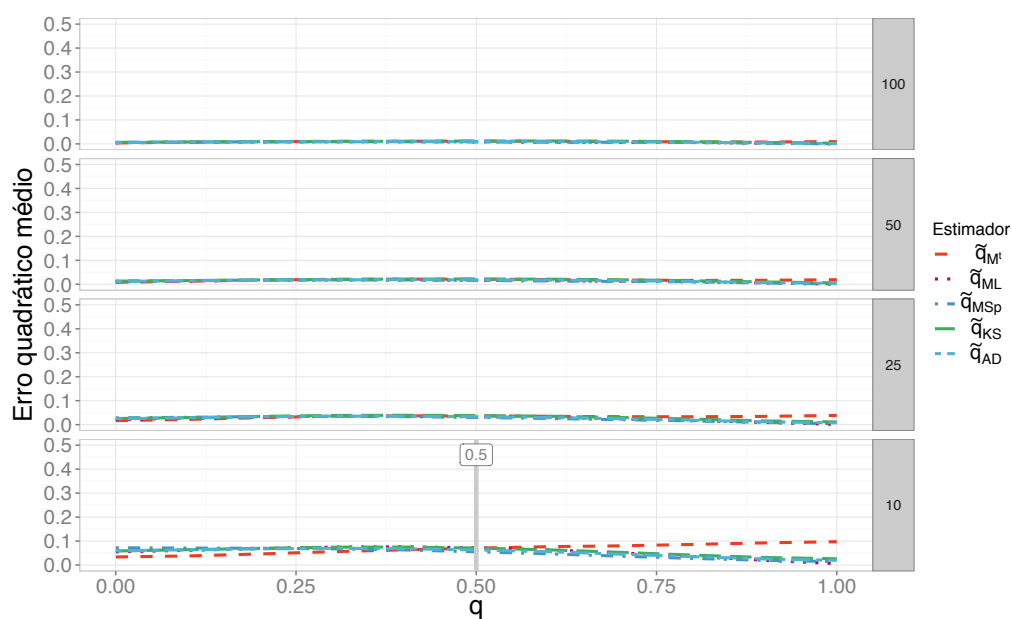


Figura 5.3.7: Erro quadrático médio de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0$ ,  $r = 5$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

Nas Figuras anteriormente analisadas, encontra-se assinalado o ponto a partir do qual o e.q.m. do estimador  $M^t$  passa a ser superior ao dos restantes estimadores. O e.q.m. dos estimadores MSp, ML, KS e AD é em geral muito próximo. No entanto, observando com atenção, à medida que  $q$  se aproxima de 1, consegue distinguir-se o estimador MSp que apresenta o e.q.m. mais baixo para  $n = 10, 25$ ; para  $q \approx 1$  ou amostras de dimensão 50 ou 100, surge o estimador ML com o e.q.m. mais baixo, aparentando ter um melhor desempenho quando a mistura tem um sinal forte de uma das componentes de mistura não Uniforme, estando ausente a outra componente não Uniforme.

Nas Tabelas 5.3.1 a 5.3.12 apresenta-se o e.q.m. e o erro padrão respetivo, para os cinco estimadores analisados e para as diferentes combinações dos parâmetros  $(p, q)$ , com  $n = 10, 25, 50, 100$  e  $r = 3, 4, 5$ .

Quando se fixa  $p > 0$  e se considera  $q \in [0, 1]$ , para  $\tilde{q}$  sobressai o  $M^t$ , quando a componente dominante é a Uniforme ( $q$  pequeno) e a dimensão da amostra é 10 ou 25. À medida que  $q$  aumenta o estimador MSp apresenta valores de e.q.m. mais baixos, em especial nas amostras de dimensão 10 e 25. Para amostras de dimensão  $n = 50, 100$  e quando o  $r$  passa de 3 para 5, as diferenças entre os métodos estudados tendem a atenuar-se, como se ilustra na Figura 5.3.8 e na Figura 5.3.9.

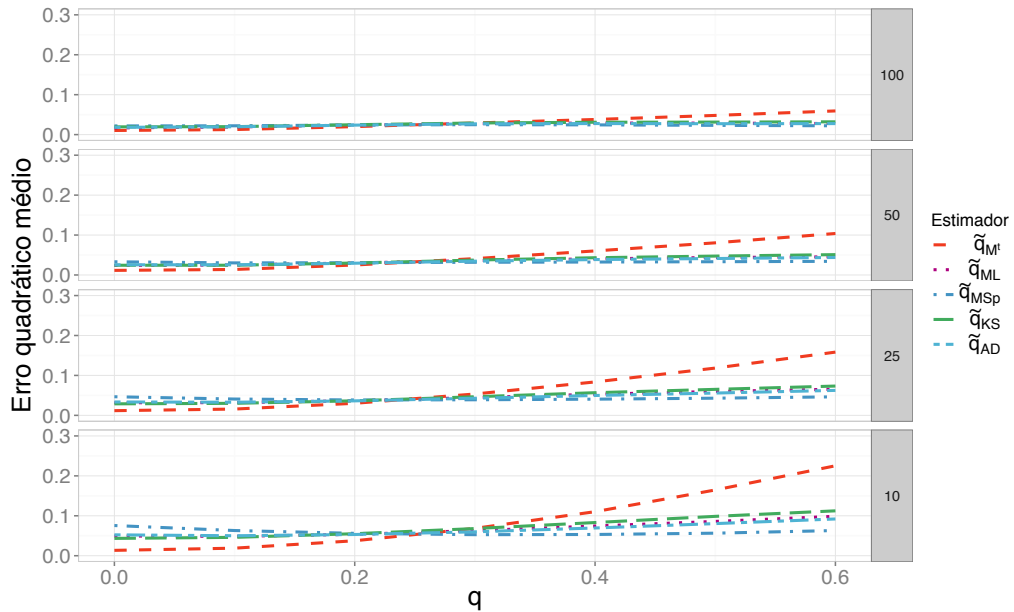


Figura 5.3.8: Erro quadrático médio de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0.4$ ,  $r = 3$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

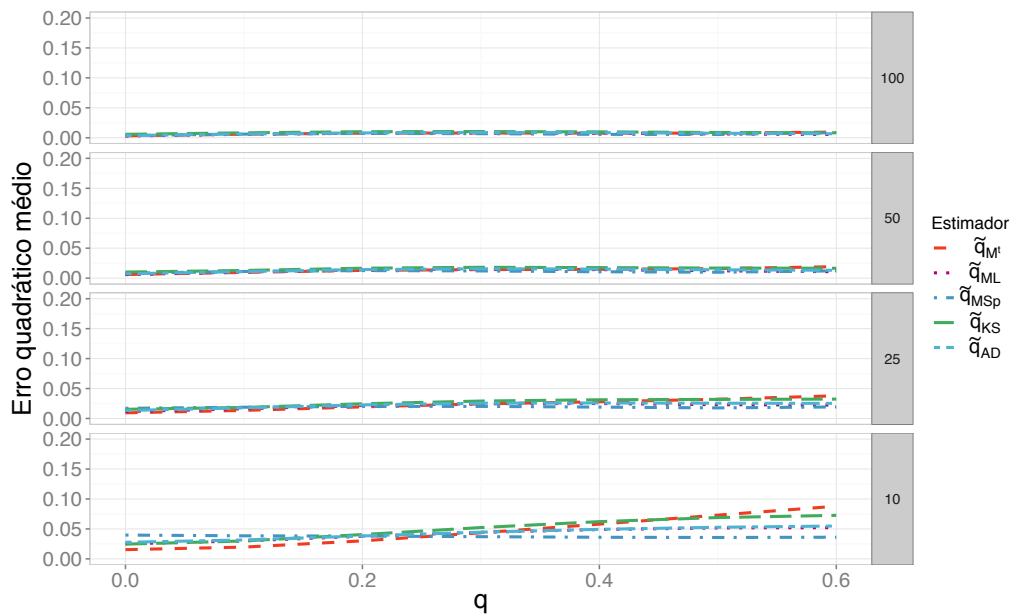


Figura 5.3.9: Erro quadrático médio de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0.4$ ,  $r = 5$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

Analisando atentamente o erro padrão associado ao e.q.m. das estimativas de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $p$  fixo, rapidamente se conclui que o erro padrão é baixo e que tende a diminuir, aproximando-se de zero, à medida que a dimensão da amostra aumenta e que se admite um maior número de replicação das experiências. Denota-se também que o erro padrão tem tendência para aumentar quando  $q$  aumenta.

Quanto ao desempenho de  $\tilde{p}_\bullet$  com  $p \leq 0.2$  fixo (como se ilustra nas Figuras 5.3.10 e 5.3.11), surge um dado interessante: quando  $p = 0$  e  $q \rightarrow 1$ , o e.q.m. diminui para valores muito próximos de zero; para amostras de dimensão  $n \geq 50$ , o e.q.m. mantém a tendência anteriormente descrita, mas é próximo de 0, qualquer que seja o valor de  $q$ , sobretudo para  $r = 5$ . Neste caso, destaca-se o estimador  $M^t$  com o e.q.m. mais baixo. A diferença para os restantes estimadores diminui quando a dimensão da amostra aumenta e quando o  $r$  passa de 3 para 5.

Para  $p \geq 0.4$  fixo, em especial, nas amostras de menor dimensão o valor do e.q.m. do estimador MSp apresenta, em geral, o e.q.m. mais baixo, seguindo-se o estimador AD e o ML, sendo mais evidente para amostras de dimensão baixa (como se ilustra na Figura 5.3.12).

Note-se ainda que o erro padrão associado ao e.q.m. das estimativas de

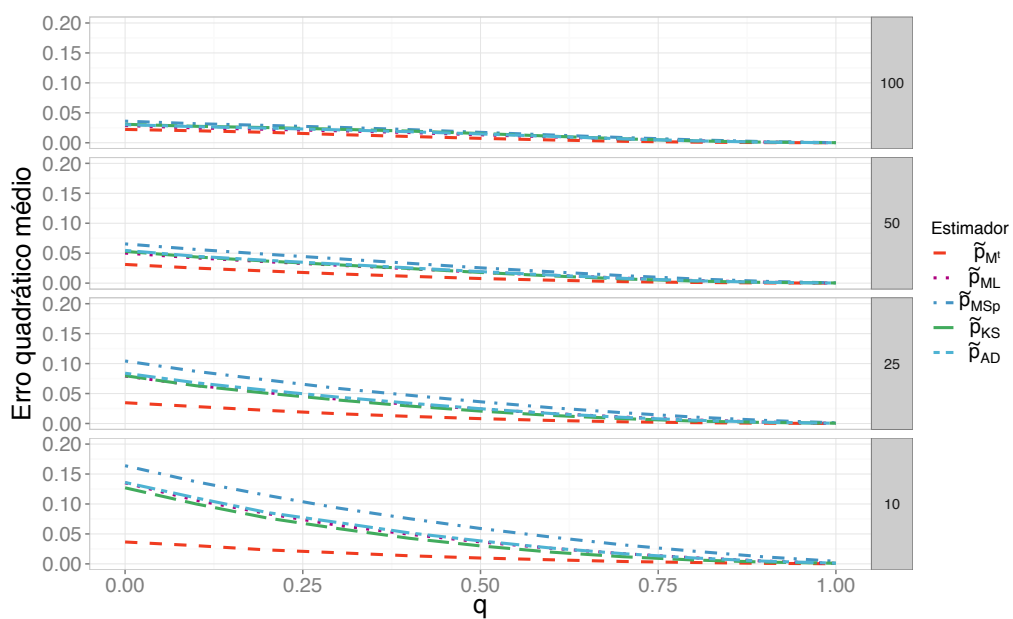


Figura 5.3.10: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0$ ,  $r = 3$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

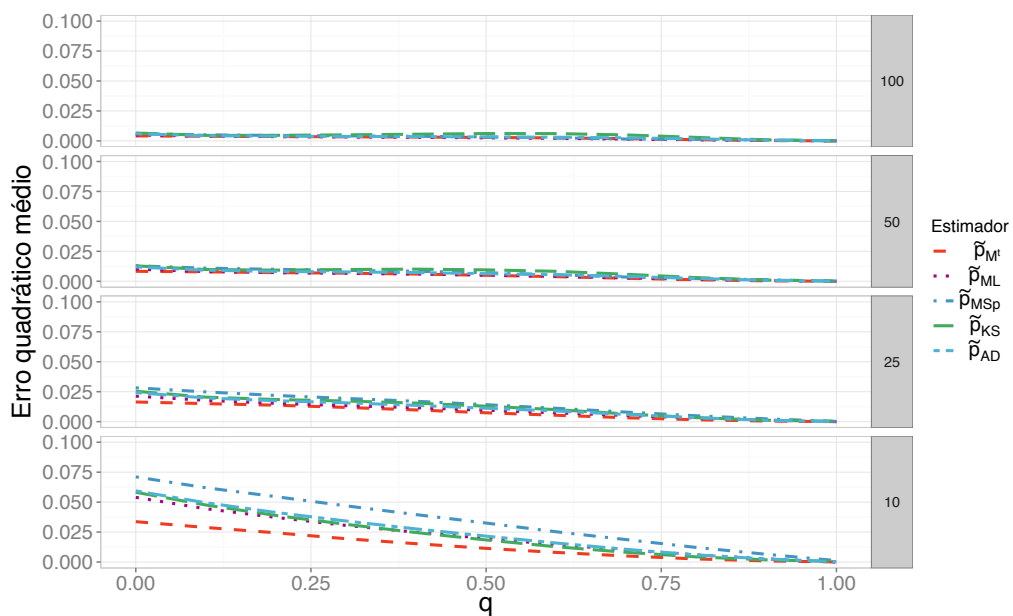


Figura 5.3.11: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0$ ,  $r = 5$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .



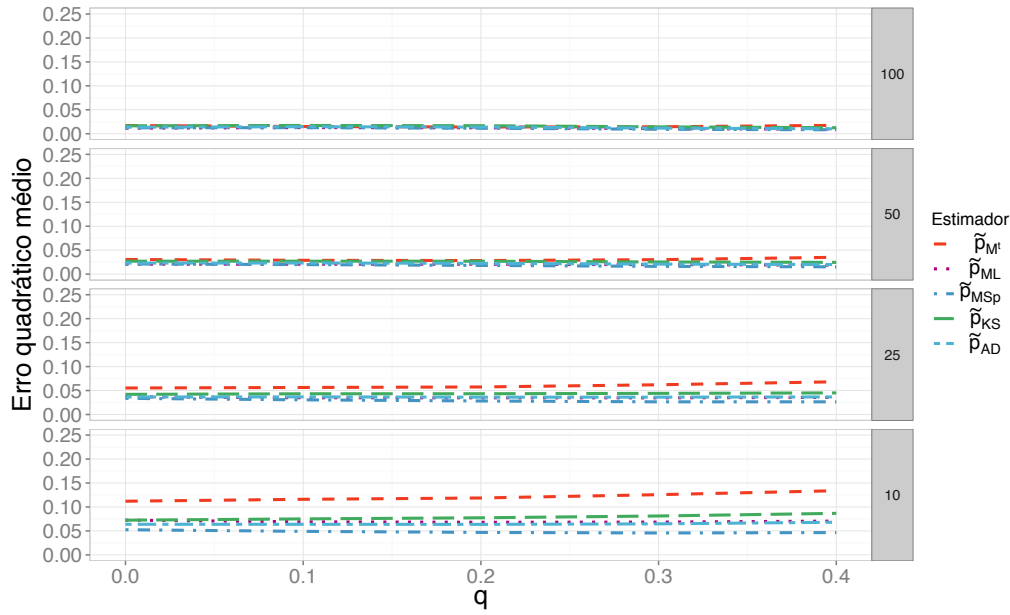


Figura 5.3.12: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0.6$ ,  $r = 4$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

$\tilde{p}_\bullet$  para  $p$  fixo é baixo e que se aproxima de zero quando a dimensão da amostra aumenta ou quando se admite um maior número de réplicas das experiências ( $r = 3, 4, 5$ ). De um modo geral, quando  $p < 0.6$  o erro padrão diminui à medida que  $q$  aumenta, mas as diferenças vão ficando cada vez mais atenuadas com o aumento da dimensão da amostra e do valor de  $r$ .

Quando se fixa o parâmetro  $q$  obtêm-se resultados análogos aos observados para  $p$  fixo, trocando os papéis de  $p$  ( $\tilde{p}_\bullet$ ) e de  $q$  ( $\tilde{q}_\bullet$ ), uma consequência natural da relação de simetria entre  $U_{1:r}$  e  $U_{r:1}$ .

Nas Figuras 5.3.13, 5.3.14 e 5.3.15 representa-se o viés dos estimadores admitindo 3 replicações das experiências e considerando amostras de dimensão  $n = 10, 25$  e  $100$ . Os cinco estimadores analisados sobrestimam o valor dos parâmetros quando a componente dominante é Uniforme e subestimam quando a mistura começa a ser dominada pelas componentes Beta não Uniforme.

Nestas representações fica evidente que o padrão observado para o estimador  $M^t$  se distingue dos restantes métodos de estimação em análise: o viés de  $\tilde{p}_\bullet$  aumenta à medida que  $p \rightarrow 1$  e, para cada  $p$  fixo, diminui ligeiramente quando o valor de  $q$  aumenta; o comportamento do viés de  $\tilde{q}_\bullet$  é análogo, trocando os papéis de  $p$  com  $q$  e de  $\tilde{p}_\bullet$  com  $\tilde{q}_\bullet$ . Para os restantes métodos de

estimação (ML, MSp, KS e AD), de um modo geral, o viés de  $\tilde{p}_\bullet$  acompanha o viés de  $\tilde{q}_\bullet$  à medida que  $p$  e  $q$  variam entre 0 e 1.

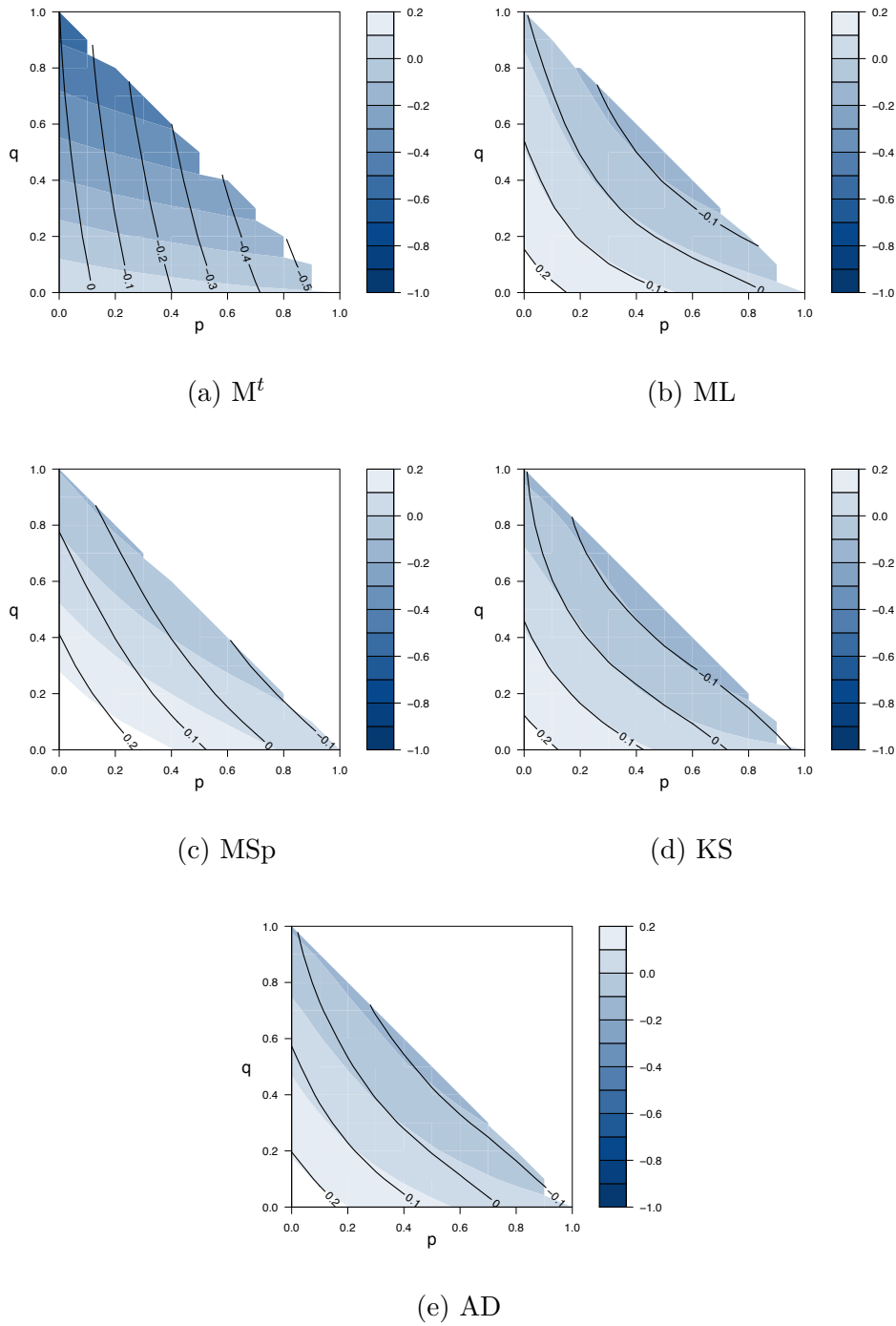


Figura 5.3.13: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 10$ . As linhas de contorno representam o viés de  $\tilde{p}_\bullet$ ; As regiões coloridas representam o viés de  $\tilde{q}_\bullet$ .

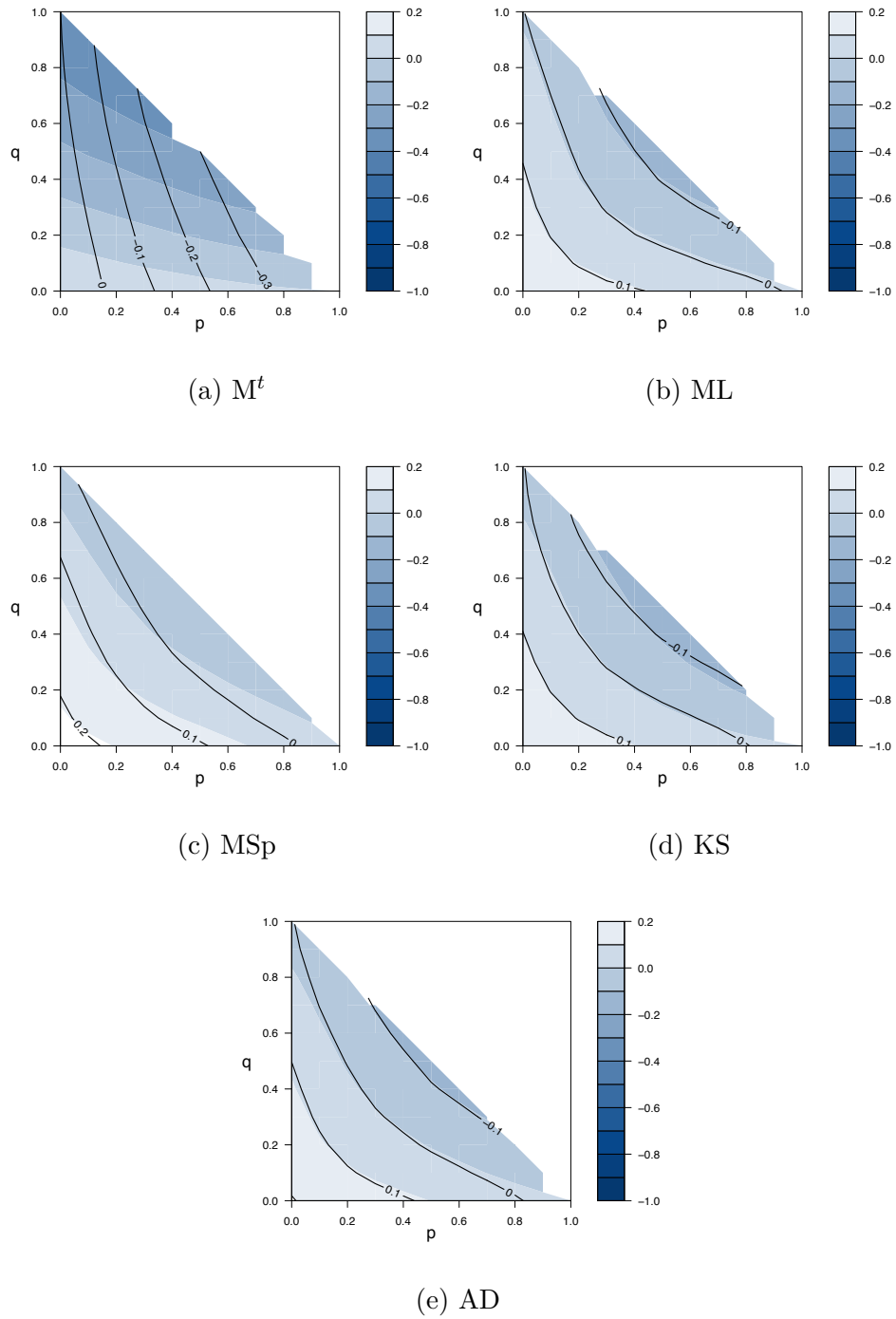


Figura 5.3.14: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 25$ . As linhas de contorno representam o viés de  $\tilde{p}_\bullet$ ; As regiões coloridas representam o viés de  $\tilde{q}_\bullet$ .

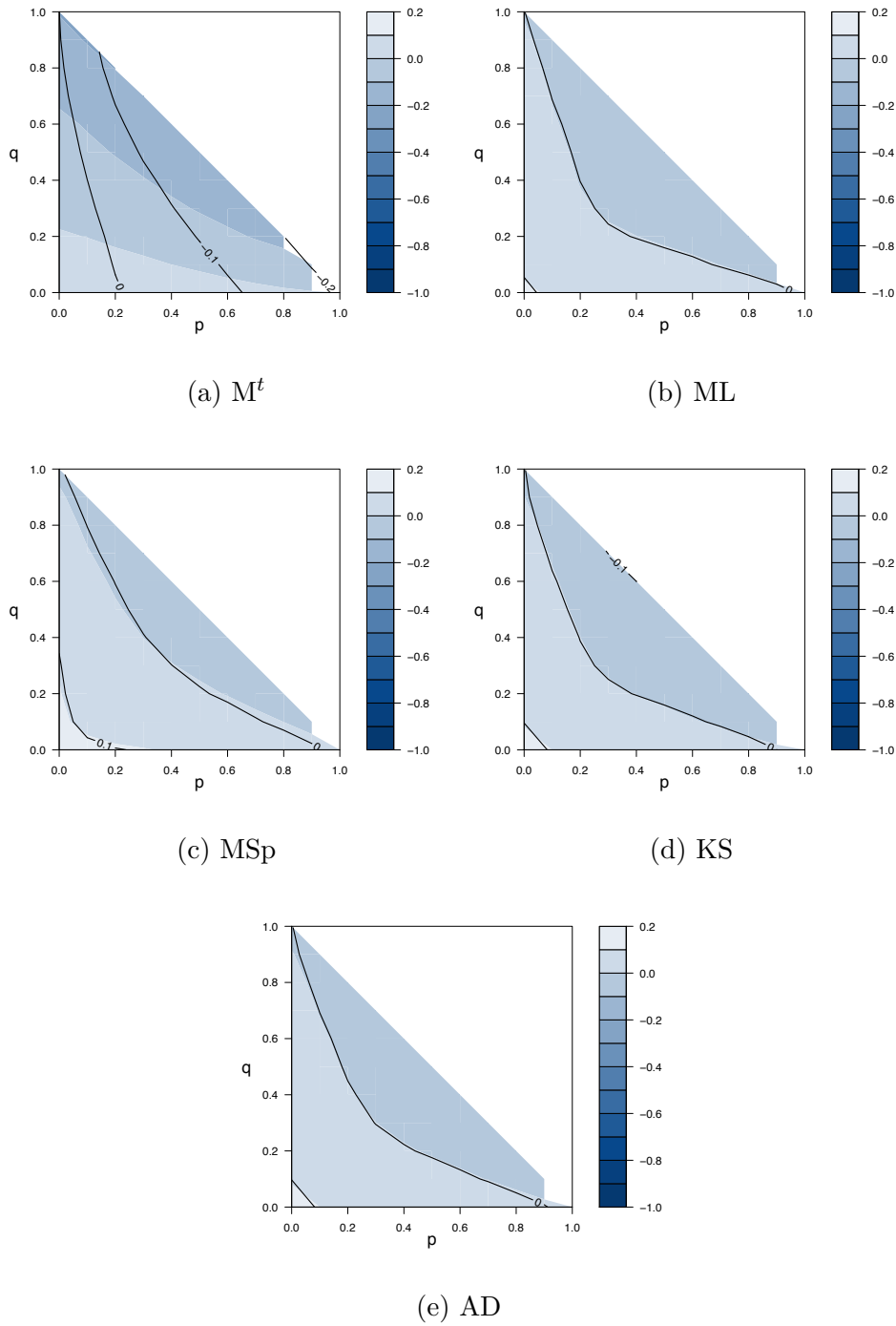


Figura 5.3.15: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 100$ . As linhas de contorno representam o viés de  $\tilde{p}_\bullet$ ; As regiões coloridas representam o viés de  $\tilde{q}_\bullet$ .

Observa-se uma diminuição no valor do viés à medida que aumenta a dimensão da amostra e que se admite um maior número de réplicas das experiências (Figuras 5.3.16, 5.3.17 e 5.3.18). Note-se que, quando a componente dominante é Uniforme ( $q \approx 0$ ) o estimador  $M^t$  é o que tem um enviesamento menor, mas à medida que  $q$  aumenta o enviesamento dos restantes métodos vai diminuindo e o do estimador  $M^t$  vai-se afastando de zero com valores cada vez mais negativos, nomeadamente quando se admite um menor número de réplicas das experiências.

No Apêndice 6 encontram-se as Tabelas .0.1 a .0.12 com o viés e o respetivo erro padrão dos cinco estimadores analisados, para as diferentes combinações dos parâmetros  $(p, q)$ , para  $n = 10, 25, 50, 100$  e para  $r = 3, 4, 5$ .

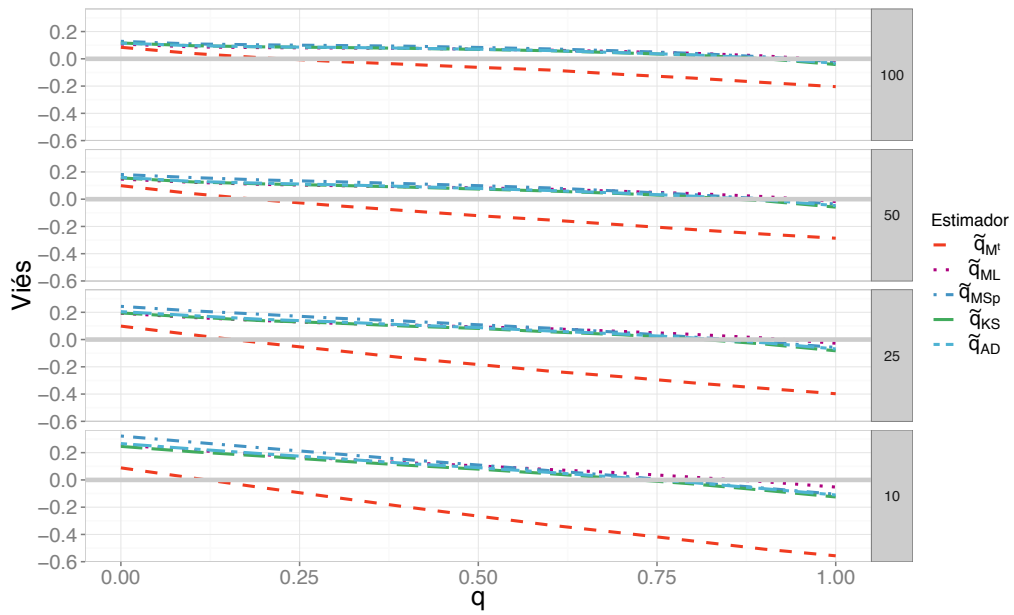


Figura 5.3.16: Viés de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0$ ,  $r = 3$  e  $n = 10, 25, 50$  e 100.

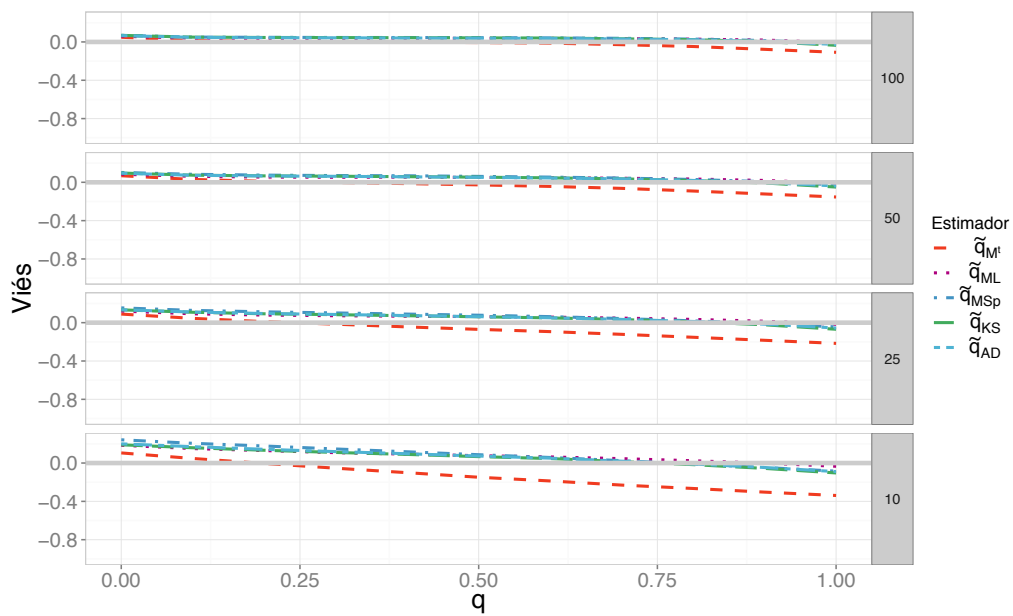


Figura 5.3.17: Viés de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0$ ,  $r = 4$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

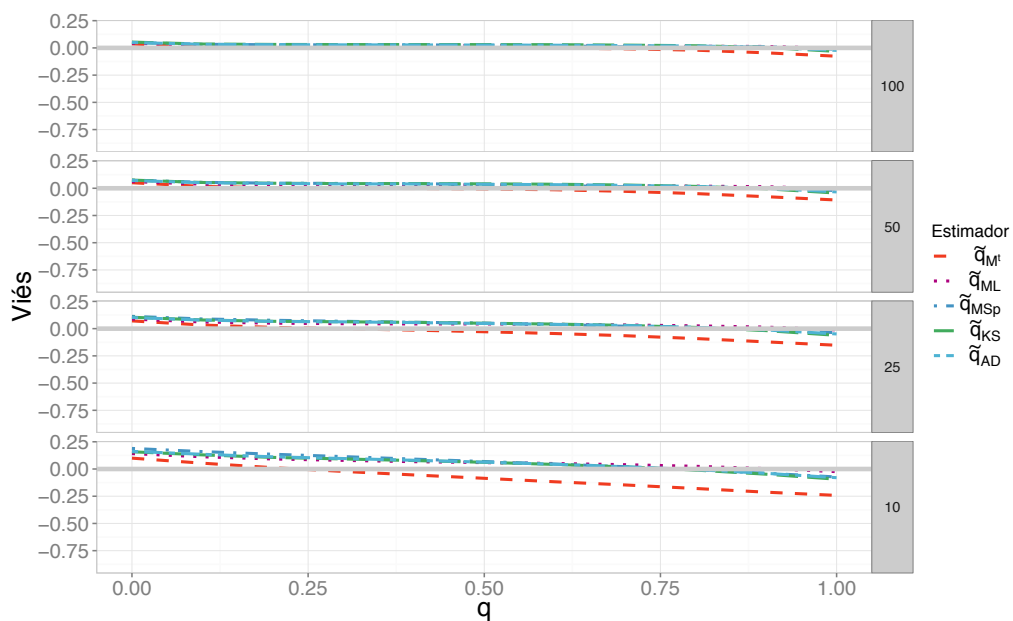


Figura 5.3.18: Viés de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $q \in [0, 1]$ , com  $p = 0$ ,  $r = 5$  e  $n = 10, 25, 50$  e  $100$ .

Tabela 5.3.1: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m..

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.037 (0.0004)	0.036 (0.0005)	0.023 (0.0003)	0.051 (0.0003)	0.014 (0.0003)	0.106 (0.0004)	0.007 (0.0002)	0.197 (0.0009)	0.002 (0.0001)	0.307 (0.0015)	0.000 (0.0000)	0.433 (0.0024)
	ML	0.135 (0.0010)	0.137 (0.0009)	0.084 (0.0006)	0.125 (0.0007)	0.049 (0.0004)	0.112 (0.0005)	0.026 (0.0003)	0.088 (0.0004)	0.010 (0.0001)	0.052 (0.0005)	0.001 (0.0000)	0.019 (0.0003)
	MSP	0.164 (0.0009)	0.165 (0.0008)	0.114 (0.0006)	0.123 (0.0006)	0.075 (0.0005)	0.090 (0.0004)	0.045 (0.0003)	0.062 (0.0004)	0.021 (0.0002)	0.040 (0.0004)	0.004 (0.0000)	0.031 (0.0004)
	KS	0.127 (0.0008)	0.127 (0.0010)	0.077 (0.0006)	0.118 (0.0007)	0.043 (0.0004)	0.106 (0.0005)	0.020 (0.0003)	0.086 (0.0004)	0.006 (0.0001)	0.062 (0.0004)	0.001 (0.0000)	0.048 (0.0004)
	AD	0.136 (0.0008)	0.135 (0.0010)	0.086 (0.0006)	0.117 (0.0006)	0.052 (0.0004)	0.098 (0.0004)	0.026 (0.0003)	0.076 (0.0004)	0.010 (0.0001)	0.052 (0.0004)	0.001 (0.0000)	0.039 (0.0003)
	0.2	M <sup>t</sup>	0.051 (0.0003)	0.024 (0.0004)	0.042 (0.0002)	0.042 (0.0003)	0.037 (0.0002)	0.107 (0.0004)	0.035 (0.0001)	0.207 (0.0008)	0.035 (0.0001)	0.337 (0.0020)	
ML		0.124 (0.0007)	0.083 (0.0006)	0.080 (0.0005)	0.081 (0.0005)	0.054 (0.0004)	0.085 (0.0004)	0.037 (0.0002)	0.088 (0.0006)	0.029 (0.0001)	0.084 (0.0006)		
MSP		0.123 (0.0005)	0.113 (0.0006)	0.084 (0.0005)	0.084 (0.0005)	0.056 (0.0004)	0.066 (0.0004)	0.036 (0.0002)	0.059 (0.0004)	0.024 (0.0001)	0.061 (0.0005)		
KS		0.116 (0.0007)	0.077 (0.0007)	0.080 (0.0005)	0.080 (0.0005)	0.055 (0.0004)	0.090 (0.0005)	0.040 (0.0002)	0.096 (0.0004)	0.034 (0.0001)	0.096 (0.0007)		
AD		0.116 (0.0007)	0.087 (0.0007)	0.079 (0.0005)	0.079 (0.0004)	0.053 (0.0003)	0.079 (0.0004)	0.037 (0.0002)	0.080 (0.0004)	0.029 (0.0001)	0.081 (0.0006)		
0.4		M <sup>t</sup>	0.107 (0.0004)	0.013 (0.0002)	0.107 (0.0004)	0.037 (0.0002)	0.111 (0.0003)	0.110 (0.0004)	0.117 (0.0004)	0.225 (0.0009)			
	ML	0.112 (0.0004)	0.049 (0.0005)	0.086 (0.0003)	0.054 (0.0004)	0.074 (0.0004)	0.074 (0.0003)	0.071 (0.0003)	0.099 (0.0006)				
	MSP	0.090 (0.0004)	0.076 (0.0005)	0.067 (0.0003)	0.056 (0.0003)	0.053 (0.0003)	0.053 (0.0003)	0.047 (0.0002)	0.063 (0.0004)				
	KS	0.106 (0.0006)	0.043 (0.0004)	0.091 (0.0004)	0.055 (0.0004)	0.083 (0.0003)	0.083 (0.0004)	0.085 (0.0003)	0.112 (0.0006)				
	AD	0.099 (0.0005)	0.052 (0.0004)	0.080 (0.0004)	0.053 (0.0003)	0.069 (0.0003)	0.069 (0.0003)	0.068 (0.0003)	0.092 (0.0005)				
	0.6	M <sup>t</sup>	0.194 (0.0008)	0.007 (0.0002)	0.207 (0.0009)	0.035 (0.0001)	0.225 (0.0010)	0.117 (0.0003)					
ML		0.087 (0.0004)	0.026 (0.0003)	0.088 (0.0005)	0.037 (0.0002)	0.098 (0.0006)	0.071 (0.0003)						
MSP		0.062 (0.0003)	0.044 (0.0003)	0.058 (0.0004)	0.036 (0.0002)	0.064 (0.0005)	0.047 (0.0003)						
KS		0.086 (0.0003)	0.020 (0.0003)	0.095 (0.0005)	0.040 (0.0002)	0.112 (0.0005)	0.086 (0.0003)						
AD		0.076 (0.0003)	0.026 (0.0003)	0.080 (0.0004)	0.037 (0.0002)	0.091 (0.0005)	0.068 (0.0003)						
0.8		M <sup>t</sup>	0.306 (0.0017)	0.002 (0.0001)	0.336 (0.0015)	0.035 (0.0001)							
	ML	0.052 (0.0005)	0.010 (0.0001)	0.083 (0.0006)	0.029 (0.0001)								
	MSP	0.040 (0.0004)	0.021 (0.0002)	0.061 (0.0006)	0.024 (0.0001)								
	KS	0.063 (0.0004)	0.007 (0.0001)	0.096 (0.0006)	0.034 (0.0001)								
	AD	0.053 (0.0004)	0.010 (0.0001)	0.081 (0.0006)	0.029 (0.0002)								
	1.0	M <sup>t</sup>	0.433 (0.0018)	0.000 (0.0000)									
ML		0.019 (0.0003)	0.001 (0.0000)										
MSP		0.031 (0.0003)	0.004 (0.0000)										
KS		0.047 (0.0004)	0.001 (0.0000)										
AD		0.038 (0.0004)	0.001 (0.0000)										



Tabela 5.3.2: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 25$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m..

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.035 (0.0004)	0.035 (0.0003)	0.022 (0.0003)	0.044 (0.0003)	0.012 (0.0002)	0.080 (0.0004)	0.005 (0.0001)	0.130 (0.0008)	0.001 (0.0000)	0.185 (0.0015)	0.000 (0.0000)	0.244 (0.0019)
	ML	0.079 (0.0006)	0.080 (0.0006)	0.051 (0.0004)	0.077 (0.0004)	0.032 (0.0002)	0.068 (0.0003)	0.017 (0.0001)	0.050 (0.0003)	0.006 (0.0001)	0.026 (0.0002)	0.000 (0.0000)	0.005 (0.0001)
	MSP	0.104 (0.0006)	0.105 (0.0006)	0.073 (0.0004)	0.088 (0.0004)	0.047 (0.0003)	0.067 (0.0003)	0.026 (0.0002)	0.043 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.021 (0.0001)	0.001 (0.0000)	0.010 (0.0001)
	KS	0.080 (0.0005)	0.080 (0.0006)	0.050 (0.0004)	0.077 (0.0004)	0.029 (0.0003)	0.070 (0.0004)	0.013 (0.0001)	0.054 (0.0003)	0.004 (0.0001)	0.034 (0.0002)	0.000 (0.0000)	0.021 (0.0002)
	AD	0.084 (0.0005)	0.084 (0.0006)	0.055 (0.0004)	0.077 (0.0004)	0.034 (0.0003)	0.066 (0.0003)	0.017 (0.0001)	0.048 (0.0003)	0.005 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.000 (0.0000)	0.015 (0.0002)
	0.2	M <sup>t</sup>	0.044 (0.0003)	0.022 (0.0002)	0.035 (0.0002)	0.035 (0.0002)	0.030 (0.0001)	0.079 (0.0004)	0.029 (0.0001)	0.141 (0.0009)	0.031 (0.0001)	0.212 (0.0012)	
ML		0.076 (0.0003)	0.052 (0.0004)	0.052 (0.0003)	0.052 (0.0003)	0.037 (0.0001)	0.056 (0.0003)	0.026 (0.0001)	0.051 (0.0004)	0.020 (0.0001)	0.044 (0.0004)		
MSP		0.087 (0.0003)	0.074 (0.0004)	0.060 (0.0003)	0.059 (0.0003)	0.039 (0.0002)	0.050 (0.0003)	0.024 (0.0001)	0.040 (0.0003)	0.015 (0.0001)	0.035 (0.0003)		
KS		0.077 (0.0005)	0.050 (0.0003)	0.053 (0.0003)	0.053 (0.0003)	0.037 (0.0002)	0.060 (0.0003)	0.027 (0.0001)	0.061 (0.0004)	0.025 (0.0001)	0.057 (0.0004)		
AD		0.077 (0.0005)	0.055 (0.0004)	0.053 (0.0003)	0.054 (0.0002)	0.036 (0.0002)	0.055 (0.0002)	0.024 (0.0001)	0.052 (0.0003)	0.020 (0.0001)	0.047 (0.0004)		
0.4		M <sup>t</sup>	0.080 (0.0003)	0.012 (0.0001)	0.079 (0.0004)	0.030 (0.0001)	0.084 (0.0004)	0.084 (0.0004)	0.093 (0.0005)	0.158 (0.0010)			
	ML	0.068 (0.0004)	0.032 (0.0003)	0.056 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.053 (0.0003)	0.053 (0.0003)	0.052 (0.0002)	0.065 (0.0004)				
	MSP	0.067 (0.0003)	0.047 (0.0003)	0.050 (0.0002)	0.039 (0.0002)	0.041 (0.0002)	0.041 (0.0002)	0.036 (0.0002)	0.046 (0.0004)				
	KS	0.070 (0.0003)	0.029 (0.0002)	0.060 (0.0003)	0.036 (0.0002)	0.057 (0.0002)	0.057 (0.0003)	0.059 (0.0003)	0.073 (0.0005)				
	AD	0.066 (0.0003)	0.034 (0.0002)	0.055 (0.0002)	0.036 (0.0002)	0.050 (0.0002)	0.050 (0.0003)	0.049 (0.0003)	0.062 (0.0005)				
	0.6	M <sup>t</sup>	0.128 (0.0008)	0.005 (0.0001)	0.141 (0.0008)	0.029 (0.0001)	0.157 (0.0009)	0.094 (0.0004)					
ML		0.049 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.051 (0.0004)	0.026 (0.0001)	0.066 (0.0005)	0.052 (0.0002)						
MSP		0.043 (0.0002)	0.027 (0.0001)	0.040 (0.0003)	0.023 (0.0001)	0.047 (0.0004)	0.036 (0.0002)						
KS		0.054 (0.0003)	0.014 (0.0001)	0.060 (0.0003)	0.027 (0.0001)	0.073 (0.0004)	0.060 (0.0003)						
AD		0.048 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.052 (0.0003)	0.024 (0.0001)	0.062 (0.0004)	0.049 (0.0003)						
0.8		M <sup>t</sup>	0.186 (0.0013)	0.001 (0.0000)	0.212 (0.0016)	0.031 (0.0001)							
	ML	0.025 (0.0002)	0.006 (0.0001)	0.045 (0.0004)	0.020 (0.0001)								
	MSP	0.021 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.036 (0.0004)	0.015 (0.0001)								
	KS	0.034 (0.0002)	0.004 (0.0001)	0.057 (0.0003)	0.025 (0.0001)								
	AD	0.028 (0.0002)	0.005 (0.0001)	0.047 (0.0003)	0.020 (0.0001)								
	1.0	M <sup>t</sup>	0.246 (0.0019)	0.000 (0.0000)									
ML		0.005 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
MSP		0.010 (0.0001)	0.001 (0.0000)										
KS		0.021 (0.0002)	0.000 (0.0000)										
AD		0.015 (0.0002)	0.000 (0.0000)										

Tabela 5.3.3: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 50$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m..

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.031 (0.0004)	0.031 (0.0003)	0.020 (0.0002)	0.039 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.060 (0.0003)	0.005 (0.0001)	0.081 (0.0006)	0.001 (0.0000)	0.107 (0.0008)	0.000 (0.0000)	0.132 (0.0010)
	ML	0.050 (0.0004)	0.050 (0.0004)	0.036 (0.0003)	0.051 (0.0003)	0.024 (0.0002)	0.044 (0.0002)	0.013 (0.0001)	0.031 (0.0002)	0.004 (0.0000)	0.016 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.002 (0.0000)
	MSP	0.066 (0.0004)	0.065 (0.0004)	0.048 (0.0003)	0.060 (0.0003)	0.033 (0.0002)	0.048 (0.0002)	0.019 (0.0001)	0.031 (0.0002)	0.007 (0.0000)	0.014 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.004 (0.0000)
	KS	0.053 (0.0004)	0.053 (0.0004)	0.037 (0.0003)	0.053 (0.0003)	0.024 (0.0002)	0.048 (0.0002)	0.012 (0.0001)	0.037 (0.0002)	0.003 (0.0000)	0.022 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.011 (0.0001)
	AD	0.055 (0.0004)	0.055 (0.0004)	0.038 (0.0003)	0.053 (0.0003)	0.025 (0.0002)	0.046 (0.0002)	0.013 (0.0001)	0.033 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.018 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.007 (0.0001)
	0.2	M <sup>t</sup>	0.039 (0.0002)	0.020 (0.0002)	0.030 (0.0001)	0.030 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.057 (0.0003)	0.024 (0.0001)	0.088 (0.0006)	0.027 (0.0001)	0.126 (0.0011)	
ML		0.051 (0.0003)	0.035 (0.0003)	0.040 (0.0002)	0.040 (0.0002)	0.030 (0.0001)	0.042 (0.0002)	0.021 (0.0001)	0.034 (0.0003)	0.016 (0.0001)	0.028 (0.0003)		
MSP		0.060 (0.0004)	0.048 (0.0004)	0.045 (0.0002)	0.045 (0.0002)	0.030 (0.0001)	0.039 (0.0002)	0.019 (0.0001)	0.029 (0.0003)	0.012 (0.0001)	0.023 (0.0002)		
KS		0.053 (0.0003)	0.037 (0.0004)	0.041 (0.0002)	0.041 (0.0002)	0.030 (0.0001)	0.045 (0.0002)	0.021 (0.0001)	0.040 (0.0002)	0.020 (0.0001)	0.038 (0.0003)		
AD		0.053 (0.0003)	0.038 (0.0003)	0.041 (0.0002)	0.041 (0.0002)	0.030 (0.0001)	0.042 (0.0002)	0.020 (0.0001)	0.035 (0.0002)	0.016 (0.0001)	0.031 (0.0002)		
0.4		M <sup>t</sup>	0.060 (0.0003)	0.012 (0.0001)	0.057 (0.0003)	0.025 (0.0001)	0.061 (0.0003)	0.060 (0.0003)	0.071 (0.0003)	0.104 (0.0006)			
	ML	0.045 (0.0002)	0.024 (0.0002)	0.041 (0.0002)	0.030 (0.0001)	0.040 (0.0002)	0.040 (0.0002)	0.039 (0.0003)	0.045 (0.0004)				
	MSP	0.048 (0.0002)	0.033 (0.0002)	0.039 (0.0002)	0.031 (0.0001)	0.032 (0.0002)	0.032 (0.0002)	0.028 (0.0002)	0.034 (0.0003)				
	KS	0.048 (0.0003)	0.024 (0.0002)	0.044 (0.0002)	0.030 (0.0001)	0.043 (0.0002)	0.043 (0.0002)	0.044 (0.0003)	0.051 (0.0003)				
	AD	0.046 (0.0002)	0.026 (0.0002)	0.041 (0.0002)	0.029 (0.0001)	0.039 (0.0002)	0.039 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.044 (0.0003)				
	0.6	M <sup>t</sup>	0.082 (0.0005)	0.005 (0.0001)	0.090 (0.0008)	0.024 (0.0001)	0.105 (0.0006)	0.071 (0.0004)					
ML		0.031 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.034 (0.0002)	0.021 (0.0001)	0.046 (0.0003)	0.039 (0.0002)						
MSP		0.031 (0.0001)	0.019 (0.0001)	0.029 (0.0002)	0.018 (0.0001)	0.034 (0.0003)	0.028 (0.0002)						
KS		0.037 (0.0002)	0.012 (0.0001)	0.041 (0.0003)	0.021 (0.0001)	0.051 (0.0003)	0.044 (0.0003)						
AD		0.033 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.036 (0.0003)	0.020 (0.0001)	0.044 (0.0003)	0.037 (0.0002)						
0.8		M <sup>t</sup>	0.105 (0.0007)	0.001 (0.0000)	0.127 (0.0013)	0.027 (0.0001)							
	ML	0.016 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.028 (0.0003)	0.016 (0.0001)								
	MSP	0.014 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.023 (0.0002)	0.012 (0.0001)								
	KS	0.022 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.038 (0.0003)	0.020 (0.0001)								
	AD	0.018 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.031 (0.0003)	0.016 (0.0001)								
	1.0	M <sup>t</sup>	0.134 (0.0010)	0.000 (0.0000)									
ML		0.002 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
MSP		0.004 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
KS		0.011 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
AD		0.007 (0.0001)	0.000 (0.0000)										

Tabela 5.3.4: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 100$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m..

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.022 (0.0002)	0.022 (0.0002)	0.017 (0.0002)	0.032 (0.0002)	0.010 (0.0001)	0.041 (0.0002)	0.005 (0.0001)	0.045 (0.0003)	0.001 (0.0000)	0.052 (0.0005)	0.000 (0.0000)	0.067 (0.0006)
	ML	0.029 (0.0002)	0.029 (0.0002)	0.022 (0.0002)	0.032 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.029 (0.0002)	0.010 (0.0001)	0.020 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.010 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.002 (0.0001)
	MSP	0.036 (0.0002)	0.036 (0.0003)	0.029 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.022 (0.0001)	0.032 (0.0002)	0.013 (0.0001)	0.022 (0.0001)	0.005 (0.0000)	0.009 (0.0000)	0.000 (0.0000)	0.001 (0.0000)
	KS	0.031 (0.0003)	0.031 (0.0003)	0.025 (0.0002)	0.034 (0.0003)	0.020 (0.0001)	0.032 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.025 (0.0002)	0.003 (0.0000)	0.015 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.006 (0.0000)
	AD	0.030 (0.0003)	0.030 (0.0003)	0.024 (0.0002)	0.033 (0.0003)	0.018 (0.0001)	0.030 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.022 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.012 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.004 (0.0000)
0.2	M <sup>t</sup>	0.032 (0.0001)	0.017 (0.0002)	0.025 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.020 (0.0001)	0.037 (0.0002)	0.019 (0.0001)	0.048 (0.0004)	0.022 (0.0001)	0.066 (0.0006)		
	ML	0.032 (0.0002)	0.022 (0.0002)	0.030 (0.0001)	0.030 (0.0002)	0.024 (0.0001)	0.030 (0.0002)	0.016 (0.0001)	0.023 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.018 (0.0001)		
	MSP	0.037 (0.0003)	0.029 (0.0002)	0.033 (0.0001)	0.033 (0.0002)	0.024 (0.0001)	0.029 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.020 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.015 (0.0001)		
	KS	0.034 (0.0002)	0.025 (0.0002)	0.031 (0.0001)	0.031 (0.0002)	0.025 (0.0001)	0.032 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.016 (0.0001)	0.025 (0.0002)		
	AD	0.033 (0.0002)	0.024 (0.0002)	0.030 (0.0002)	0.030 (0.0002)	0.024 (0.0001)	0.031 (0.0001)	0.016 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.021 (0.0001)		
0.4	M <sup>t</sup>	0.042 (0.0002)	0.010 (0.0001)	0.037 (0.0002)	0.020 (0.0001)	0.038 (0.0002)	0.038 (0.0003)	0.047 (0.0003)	0.059 (0.0005)				
	ML	0.028 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.030 (0.0002)	0.024 (0.0001)	0.029 (0.0002)	0.029 (0.0002)	0.025 (0.0002)	0.028 (0.0002)				
	MSP	0.032 (0.0002)	0.022 (0.0002)	0.029 (0.0002)	0.024 (0.0001)	0.024 (0.0002)	0.024 (0.0002)	0.020 (0.0002)	0.022 (0.0002)				
	KS	0.032 (0.0002)	0.019 (0.0001)	0.033 (0.0002)	0.025 (0.0001)	0.031 (0.0002)	0.031 (0.0002)	0.030 (0.0002)	0.032 (0.0002)				
	AD	0.030 (0.0002)	0.018 (0.0001)	0.031 (0.0002)	0.024 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.028 (0.0002)	0.024 (0.0002)	0.028 (0.0002)				
0.6	M <sup>t</sup>	0.046 (0.0004)	0.005 (0.0000)	0.048 (0.0004)	0.019 (0.0001)	0.060 (0.0005)	0.047 (0.0003)						
	ML	0.020 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.023 (0.0001)	0.016 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.025 (0.0002)						
	MSP	0.022 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.021 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.022 (0.0002)	0.020 (0.0002)						
	KS	0.025 (0.0001)	0.011 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.032 (0.0002)	0.030 (0.0002)						
	AD	0.022 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.024 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.024 (0.0001)						
0.8	M <sup>t</sup>	0.053 (0.0004)	0.001 (0.0000)	0.065 (0.0006)	0.022 (0.0001)								
	ML	0.010 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.018 (0.0001)	0.012 (0.0001)								
	MSP	0.009 (0.0000)	0.005 (0.0000)	0.015 (0.0001)	0.009 (0.0001)								
	KS	0.015 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.025 (0.0002)	0.016 (0.0001)								
	AD	0.012 (0.0000)	0.003 (0.0000)	0.020 (0.0002)	0.012 (0.0001)								
1.0	M <sup>t</sup>	0.068 (0.0006)	0.000 (0.0000)										
	ML	0.001 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
	MSP	0.001 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
	KS	0.006 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
	AD	0.004 (0.0000)	0.000 (0.0000)										

Tabela 5.3.5: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m..

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.039 (0.0005)	0.039 (0.0004)	0.027 (0.0003)	0.050 (0.0003)	0.016 (0.0002)	0.078 (0.0003)	0.008 (0.0001)	0.113 (0.0007)	0.003 (0.0001)	0.149 (0.0011)	0.000 (0.0000)	0.184 (0.0015)
	ML	0.083 (0.0007)	0.083 (0.0007)	0.054 (0.0005)	0.090 (0.0006)	0.034 (0.0003)	0.090 (0.0004)	0.019 (0.0002)	0.072 (0.0004)	0.007 (0.0001)	0.042 (0.0003)	0.000 (0.0000)	0.009 (0.0002)
	MSP	0.107 (0.0007)	0.107 (0.0007)	0.078 (0.0005)	0.092 (0.0005)	0.053 (0.0003)	0.074 (0.0004)	0.032 (0.0002)	0.052 (0.0003)	0.015 (0.0001)	0.032 (0.0003)	0.002 (0.0000)	0.020 (0.0002)
	KS	0.082 (0.0006)	0.081 (0.0005)	0.052 (0.0004)	0.087 (0.0006)	0.031 (0.0003)	0.087 (0.0005)	0.015 (0.0002)	0.072 (0.0004)	0.005 (0.0001)	0.048 (0.0003)	0.001 (0.0000)	0.032 (0.0003)
	AD	0.086 (0.0006)	0.085 (0.0005)	0.058 (0.0004)	0.086 (0.0005)	0.036 (0.0003)	0.080 (0.0004)	0.019 (0.0002)	0.063 (0.0004)	0.007 (0.0001)	0.041 (0.0003)	0.000 (0.0000)	0.025 (0.0003)
	0.2	M <sup>t</sup>	0.050 (0.0004)	0.026 (0.0003)	0.039 (0.0003)	0.040 (0.0002)	0.033 (0.0002)	0.075 (0.0004)	0.030 (0.0001)	0.120 (0.0008)	0.030 (0.0001)	0.171 (0.0011)	
ML		0.090 (0.0006)	0.054 (0.0005)	0.061 (0.0004)	0.062 (0.0004)	0.043 (0.0002)	0.070 (0.0003)	0.031 (0.0001)	0.068 (0.0004)	0.024 (0.0001)	0.058 (0.0005)		
MSP		0.092 (0.0006)	0.078 (0.0005)	0.066 (0.0004)	0.066 (0.0004)	0.045 (0.0002)	0.056 (0.0002)	0.029 (0.0002)	0.046 (0.0003)	0.019 (0.0001)	0.043 (0.0004)		
KS		0.088 (0.0006)	0.052 (0.0005)	0.064 (0.0005)	0.063 (0.0005)	0.046 (0.0003)	0.076 (0.0004)	0.035 (0.0002)	0.078 (0.0004)	0.031 (0.0001)	0.071 (0.0005)		
AD		0.087 (0.0005)	0.057 (0.0005)	0.062 (0.0004)	0.062 (0.0004)	0.044 (0.0003)	0.067 (0.0004)	0.031 (0.0002)	0.064 (0.0004)	0.024 (0.0001)	0.058 (0.0004)		
0.4		M <sup>t</sup>	0.078 (0.0003)	0.016 (0.0002)	0.075 (0.0003)	0.033 (0.0002)	0.077 (0.0004)	0.077 (0.0003)	0.083 (0.0004)	0.135 (0.0008)			
	ML	0.090 (0.0005)	0.033 (0.0003)	0.070 (0.0003)	0.043 (0.0003)	0.059 (0.0003)	0.059 (0.0003)	0.054 (0.0002)	0.070 (0.0004)				
	MSP	0.074 (0.0003)	0.053 (0.0003)	0.056 (0.0002)	0.045 (0.0003)	0.043 (0.0002)	0.043 (0.0002)	0.036 (0.0002)	0.046 (0.0003)				
	KS	0.086 (0.0004)	0.030 (0.0004)	0.076 (0.0003)	0.045 (0.0003)	0.070 (0.0004)	0.069 (0.0003)	0.072 (0.0003)	0.087 (0.0005)				
	AD	0.080 (0.0004)	0.036 (0.0004)	0.066 (0.0003)	0.043 (0.0003)	0.057 (0.0003)	0.057 (0.0002)	0.054 (0.0003)	0.068 (0.0004)				
	0.6	M <sup>t</sup>	0.112 (0.0007)	0.008 (0.0001)	0.119 (0.0007)	0.030 (0.0001)	0.134 (0.0008)	0.084 (0.0004)					
ML		0.072 (0.0004)	0.019 (0.0002)	0.068 (0.0004)	0.031 (0.0002)	0.070 (0.0004)	0.054 (0.0003)						
MSP		0.052 (0.0003)	0.032 (0.0003)	0.047 (0.0003)	0.029 (0.0002)	0.047 (0.0003)	0.036 (0.0002)						
KS		0.072 (0.0003)	0.015 (0.0001)	0.077 (0.0005)	0.035 (0.0002)	0.087 (0.0005)	0.072 (0.0003)						
AD		0.064 (0.0003)	0.019 (0.0001)	0.064 (0.0004)	0.031 (0.0002)	0.068 (0.0004)	0.054 (0.0003)						
0.8		M <sup>t</sup>	0.148 (0.0012)	0.003 (0.0001)	0.172 (0.0014)	0.030 (0.0001)							
	ML	0.042 (0.0004)	0.007 (0.0001)	0.059 (0.0005)	0.024 (0.0001)								
	MSP	0.032 (0.0003)	0.015 (0.0001)	0.043 (0.0004)	0.020 (0.0001)								
	KS	0.048 (0.0003)	0.005 (0.0001)	0.072 (0.0005)	0.031 (0.0001)								
	AD	0.041 (0.0003)	0.007 (0.0001)	0.059 (0.0005)	0.024 (0.0001)								
	1.0	M <sup>t</sup>	0.186 (0.0015)	0.000 (0.0000)									
ML		0.009 (0.0002)	0.000 (0.0000)										
MSP		0.020 (0.0002)	0.002 (0.0000)										
KS		0.033 (0.0003)	0.001 (0.0000)										
AD		0.026 (0.0003)	0.000 (0.0000)										

Tabela 5.3.6: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 25$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m..

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.026 (0.0003)	0.026 (0.0003)	0.019 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.012 (0.0002)	0.050 (0.0002)	0.006 (0.0001)	0.056 (0.0004)	0.002 (0.0000)	0.063 (0.0005)	0.000 (0.0000)	0.077 (0.0007)
	ML	0.037 (0.0003)	0.037 (0.0003)	0.026 (0.0002)	0.046 (0.0003)	0.018 (0.0001)	0.047 (0.0003)	0.011 (0.0001)	0.037 (0.0002)	0.004 (0.0000)	0.020 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.002 (0.0000)
	MSP	0.050 (0.0004)	0.050 (0.0004)	0.037 (0.0003)	0.051 (0.0003)	0.027 (0.0002)	0.047 (0.0003)	0.017 (0.0001)	0.034 (0.0002)	0.007 (0.0001)	0.017 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.005 (0.0001)
	KS	0.041 (0.0003)	0.041 (0.0003)	0.029 (0.0003)	0.048 (0.0004)	0.020 (0.0002)	0.050 (0.0003)	0.011 (0.0001)	0.042 (0.0002)	0.003 (0.0000)	0.027 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.014 (0.0001)
	AD	0.040 (0.0003)	0.041 (0.0003)	0.029 (0.0003)	0.047 (0.0003)	0.020 (0.0002)	0.046 (0.0002)	0.012 (0.0001)	0.037 (0.0002)	0.004 (0.0000)	0.022 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.010 (0.0001)
	0.2	M <sup>t</sup>	0.038 (0.0002)	0.019 (0.0002)	0.029 (0.0001)	0.029 (0.0001)	0.023 (0.0001)	0.044 (0.0002)	0.021 (0.0001)	0.057 (0.0005)	0.023 (0.0001)	0.077 (0.0007)	
ML		0.046 (0.0003)	0.026 (0.0002)	0.036 (0.0002)	0.036 (0.0002)	0.028 (0.0001)	0.041 (0.0002)	0.020 (0.0001)	0.035 (0.0002)	0.015 (0.0001)	0.027 (0.0002)		
MSP		0.051 (0.0003)	0.038 (0.0003)	0.040 (0.0002)	0.040 (0.0002)	0.028 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.018 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.021 (0.0002)		
KS		0.049 (0.0003)	0.029 (0.0002)	0.038 (0.0002)	0.038 (0.0002)	0.029 (0.0002)	0.045 (0.0002)	0.022 (0.0001)	0.044 (0.0003)	0.022 (0.0001)	0.040 (0.0003)		
AD		0.047 (0.0003)	0.029 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.028 (0.0002)	0.041 (0.0002)	0.019 (0.0001)	0.036 (0.0002)	0.015 (0.0001)	0.031 (0.0002)		
0.4		M <sup>t</sup>	0.050 (0.0003)	0.012 (0.0001)	0.044 (0.0002)	0.023 (0.0001)	0.044 (0.0003)	0.044 (0.0003)	0.051 (0.0004)	0.068 (0.0006)			
	ML	0.047 (0.0002)	0.018 (0.0002)	0.041 (0.0002)	0.028 (0.0002)	0.035 (0.0002)	0.035 (0.0002)	0.030 (0.0002)	0.036 (0.0003)				
	MSP	0.047 (0.0002)	0.027 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.029 (0.0002)	0.028 (0.0002)	0.028 (0.0002)	0.022 (0.0002)	0.027 (0.0002)				
	KS	0.050 (0.0003)	0.020 (0.0002)	0.046 (0.0002)	0.029 (0.0002)	0.040 (0.0002)	0.041 (0.0003)	0.041 (0.0002)	0.046 (0.0003)				
	AD	0.047 (0.0002)	0.020 (0.0002)	0.041 (0.0002)	0.028 (0.0002)	0.034 (0.0002)	0.034 (0.0002)	0.031 (0.0002)	0.037 (0.0003)				
	0.6	M <sup>t</sup>	0.055 (0.0003)	0.006 (0.0001)	0.057 (0.0004)	0.021 (0.0001)	0.068 (0.0005)	0.051 (0.0003)					
ML		0.037 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.035 (0.0002)	0.020 (0.0001)	0.036 (0.0003)	0.030 (0.0002)						
MSP		0.034 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.018 (0.0001)	0.026 (0.0003)	0.022 (0.0002)						
KS		0.042 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.043 (0.0002)	0.022 (0.0001)	0.045 (0.0003)	0.041 (0.0002)						
AD		0.037 (0.0002)	0.012 (0.0001)	0.036 (0.0002)	0.019 (0.0001)	0.037 (0.0002)	0.031 (0.0002)						
0.8		M <sup>t</sup>	0.062 (0.0004)	0.002 (0.0000)	0.077 (0.0008)	0.023 (0.0001)							
	ML	0.020 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.027 (0.0002)	0.015 (0.0001)								
	MSP	0.017 (0.0001)	0.007 (0.0000)	0.022 (0.0002)	0.011 (0.0001)								
	KS	0.027 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.040 (0.0003)	0.022 (0.0001)								
	AD	0.022 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.031 (0.0003)	0.015 (0.0001)								
	1.0	M <sup>t</sup>	0.077 (0.0007)	0.000 (0.0000)									
ML		0.002 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
MSP		0.005 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
KS		0.014 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
AD		0.010 (0.0001)	0.000 (0.0000)										

Tabela 5.3.7: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 50$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m..

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.015 (0.0002)	0.015 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.026 (0.0002)	0.009 (0.0001)	0.032 (0.0002)	0.005 (0.0001)	0.031 (0.0002)	0.001 (0.0000)	0.030 (0.0002)	0.000 (0.0000)	0.039 (0.0003)
	ML	0.018 (0.0002)	0.018 (0.0002)	0.014 (0.0001)	0.026 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.026 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.021 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.012 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.001 (0.0000)
	MSP	0.024 (0.0002)	0.024 (0.0002)	0.019 (0.0002)	0.029 (0.0002)	0.015 (0.0001)	0.028 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.022 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.011 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.002 (0.0000)
	KS	0.021 (0.0002)	0.022 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.015 (0.0001)	0.030 (0.0002)	0.010 (0.0001)	0.027 (0.0002)	0.003 (0.0000)	0.017 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.008 (0.0001)
	AD	0.020 (0.0002)	0.021 (0.0002)	0.016 (0.0001)	0.027 (0.0002)	0.013 (0.0001)	0.027 (0.0002)	0.008 (0.0001)	0.023 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.014 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.005 (0.0000)
	0.2	M <sup>t</sup>	0.026 (0.0002)	0.013 (0.0001)	0.022 (0.0001)	0.022 (0.0001)	0.017 (0.0001)	0.027 (0.0002)	0.015 (0.0001)	0.029 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.039 (0.0003)	
ML		0.026 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.023 (0.0001)	0.024 (0.0001)	0.020 (0.0001)	0.026 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.021 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.015 (0.0001)		
MSP		0.029 (0.0002)	0.019 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.020 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.018 (0.0001)	0.007 (0.0000)	0.013 (0.0001)		
KS		0.028 (0.0002)	0.017 (0.0002)	0.026 (0.0001)	0.026 (0.0002)	0.022 (0.0001)	0.030 (0.0002)	0.016 (0.0001)	0.027 (0.0002)	0.003 (0.0001)	0.017 (0.0002)		
AD		0.027 (0.0002)	0.015 (0.0002)	0.024 (0.0001)	0.025 (0.0002)	0.020 (0.0001)	0.027 (0.0002)	0.013 (0.0001)	0.023 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.018 (0.0001)		
0.4		M <sup>t</sup>	0.032 (0.0002)	0.009 (0.0001)	0.027 (0.0002)	0.017 (0.0001)	0.025 (0.0002)	0.025 (0.0002)	0.029 (0.0003)	0.035 (0.0003)			
	ML	0.026 (0.0002)	0.011 (0.0001)	0.026 (0.0001)	0.020 (0.0001)	0.022 (0.0001)	0.022 (0.0001)	0.017 (0.0001)	0.019 (0.0002)				
	MSP	0.028 (0.0002)	0.015 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.020 (0.0001)	0.018 (0.0001)	0.018 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.015 (0.0002)				
	KS	0.030 (0.0002)	0.015 (0.0001)	0.030 (0.0002)	0.021 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.024 (0.0002)	0.024 (0.0002)				
	AD	0.027 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.027 (0.0002)	0.020 (0.0001)	0.022 (0.0001)	0.022 (0.0001)	0.017 (0.0001)	0.020 (0.0002)				
	0.6	M <sup>t</sup>	0.031 (0.0002)	0.005 (0.0000)	0.028 (0.0002)	0.015 (0.0001)	0.035 (0.0002)	0.030 (0.0002)					
ML		0.021 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.021 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.019 (0.0001)	0.017 (0.0001)						
MSP		0.021 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.018 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.013 (0.0001)						
KS		0.027 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.027 (0.0002)	0.016 (0.0001)	0.025 (0.0001)	0.025 (0.0002)						
AD		0.023 (0.0001)	0.008 (0.0001)	0.023 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.020 (0.0001)	0.017 (0.0001)						
0.8		M <sup>t</sup>	0.030 (0.0003)	0.001 (0.0000)	0.039 (0.0004)	0.017 (0.0001)							
	ML	0.012 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.015 (0.0001)	0.010 (0.0000)								
	MSP	0.011 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.013 (0.0001)	0.007 (0.0000)								
	KS	0.017 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.024 (0.0002)	0.016 (0.0001)								
	AD	0.014 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.018 (0.0002)	0.011 (0.0001)								
	1.0	M <sup>t</sup>	0.038 (0.0004)	0.000 (0.0000)									
ML		0.001 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
MSP		0.002 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
KS		0.008 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
AD		0.005 (0.0001)	0.000 (0.0000)										

Tabela 5.3.8: Erro quadrático médio  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 100$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m..

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.008 (0.0001)	0.008 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.016 (0.0001)	0.006 (0.0001)	0.019 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.017 (0.0001)	0.001 (0.0000)	0.015 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.019 (0.0002)
	ML	0.009 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.006 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.012 (0.0001)	0.002 (0.0000)	0.007 (0.0000)	0.000 (0.0000)	0.000 (0.0000)
	MSP	0.011 (0.0001)	0.011 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.008 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.006 (0.0000)	0.012 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.007 (0.0000)	0.000 (0.0000)	0.001 (0.0000)
	KS	0.011 (0.0001)	0.011 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.017 (0.0001)	0.008 (0.0000)	0.017 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.011 (0.0001)	0.000 (0.0000)	0.004 (0.0000)
	AD	0.010 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.008 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.005 (0.0000)	0.014 (0.0001)	0.002 (0.0000)	0.009 (0.0000)	0.000 (0.0000)	0.002 (0.0000)
0.2	M <sup>t</sup>	0.016 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.011 (0.0001)	0.020 (0.0001)		
	ML	0.013 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.016 (0.0001)	0.009 (0.0000)	0.012 (0.0001)	0.006 (0.0000)	0.008 (0.0001)		
	MSP	0.014 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.008 (0.0000)	0.011 (0.0001)	0.005 (0.0000)	0.007 (0.0001)		
	KS	0.015 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.016 (0.0001)	0.016 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.018 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.017 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.015 (0.0001)		
	AD	0.014 (0.0001)	0.008 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.016 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.007 (0.0000)	0.010 (0.0001)		
0.4	M <sup>t</sup>	0.018 (0.0001)	0.006 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.018 (0.0002)				
	ML	0.014 (0.0001)	0.006 (0.0001)	0.016 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.008 (0.0001)	0.009 (0.0001)				
	MSP	0.014 (0.0001)	0.008 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.011 (0.0001)	0.011 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.008 (0.0001)				
	KS	0.017 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.018 (0.0001)	0.015 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.013 (0.0001)				
	AD	0.015 (0.0001)	0.007 (0.0001)	0.016 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.012 (0.0001)	0.013 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.010 (0.0001)				
0.6	M <sup>t</sup>	0.017 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.014 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.018 (0.0002)	0.016 (0.0001)						
	ML	0.012 (0.0001)	0.004 (0.0000)	0.012 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.009 (0.0001)						
	MSP	0.012 (0.0001)	0.006 (0.0000)	0.012 (0.0001)	0.008 (0.0000)	0.008 (0.0001)	0.007 (0.0000)						
	KS	0.017 (0.0001)	0.008 (0.0001)	0.017 (0.0001)	0.012 (0.0000)	0.013 (0.0001)	0.012 (0.0001)						
	AD	0.014 (0.0001)	0.005 (0.0001)	0.014 (0.0001)	0.009 (0.0001)	0.010 (0.0001)	0.009 (0.0001)						
0.8	M <sup>t</sup>	0.015 (0.0001)	0.001 (0.0000)	0.019 (0.0001)	0.011 (0.0001)								
	ML	0.007 (0.0000)	0.002 (0.0000)	0.008 (0.0001)	0.006 (0.0000)								
	MSP	0.007 (0.0000)	0.003 (0.0000)	0.007 (0.0001)	0.005 (0.0000)								
	KS	0.011 (0.0001)	0.003 (0.0000)	0.014 (0.0001)	0.012 (0.0001)								
	AD	0.009 (0.0000)	0.002 (0.0000)	0.010 (0.0001)	0.007 (0.0000)								
1.0	M <sup>t</sup>	0.019 (0.0002)	0.000 (0.0000)										
	ML	0.000 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
	MSP	0.001 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
	KS	0.004 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
	AD	0.002 (0.0000)	0.000 (0.0000)										

Tabela 5.3.9: Erro quadrático médio de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m..

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.034 (0.0004)	0.034 (0.0003)	0.024 (0.0003)	0.046 (0.0003)	0.015 (0.0002)	0.063 (0.0003)	0.008 (0.0001)	0.077 (0.0005)	0.003 (0.0001)	0.086 (0.0007)	0.000 (0.0000)	0.097 (0.0008)
	ML	0.054 (0.0004)	0.055 (0.0005)	0.037 (0.0003)	0.069 (0.0004)	0.025 (0.0003)	0.076 (0.0004)	0.015 (0.0002)	0.063 (0.0003)	0.006 (0.0001)	0.036 (0.0002)	0.000 (0.0000)	0.005 (0.0001)
	MSP	0.071 (0.0004)	0.072 (0.0005)	0.055 (0.0004)	0.070 (0.0004)	0.040 (0.0003)	0.063 (0.0003)	0.025 (0.0002)	0.047 (0.0002)	0.012 (0.0001)	0.028 (0.0002)	0.001 (0.0000)	0.014 (0.0002)
	KS	0.058 (0.0005)	0.058 (0.0004)	0.039 (0.0003)	0.070 (0.0005)	0.025 (0.0003)	0.075 (0.0004)	0.013 (0.0002)	0.063 (0.0003)	0.004 (0.0001)	0.041 (0.0002)	0.000 (0.0000)	0.026 (0.0002)
	AD	0.059 (0.0005)	0.059 (0.0004)	0.041 (0.0003)	0.067 (0.0004)	0.028 (0.0003)	0.068 (0.0004)	0.016 (0.0002)	0.055 (0.0003)	0.006 (0.0001)	0.035 (0.0002)	0.000 (0.0000)	0.019 (0.0002)
	0.2	M <sup>t</sup>	0.046 (0.0003)	0.024 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.037 (0.0002)	0.030 (0.0002)	0.058 (0.0003)	0.027 (0.0001)	0.079 (0.0006)	0.026 (0.0001)	0.099 (0.0008)	
ML		0.069 (0.0005)	0.037 (0.0004)	0.050 (0.0003)	0.050 (0.0003)	0.037 (0.0002)	0.060 (0.0003)	0.027 (0.0001)	0.056 (0.0004)	0.021 (0.0001)	0.044 (0.0004)		
MSP		0.070 (0.0005)	0.054 (0.0004)	0.053 (0.0003)	0.052 (0.0003)	0.037 (0.0002)	0.048 (0.0002)	0.025 (0.0002)	0.040 (0.0003)	0.017 (0.0001)	0.034 (0.0003)		
KS		0.069 (0.0005)	0.038 (0.0003)	0.054 (0.0004)	0.053 (0.0004)	0.041 (0.0002)	0.068 (0.0003)	0.033 (0.0002)	0.067 (0.0003)	0.030 (0.0001)	0.058 (0.0004)		
AD		0.067 (0.0004)	0.041 (0.0003)	0.052 (0.0003)	0.051 (0.0004)	0.038 (0.0002)	0.059 (0.0003)	0.028 (0.0002)	0.054 (0.0003)	0.022 (0.0001)	0.046 (0.0003)		
0.4		M <sup>t</sup>	0.063 (0.0003)	0.015 (0.0002)	0.058 (0.0003)	0.030 (0.0001)	0.058 (0.0003)	0.058 (0.0003)	0.063 (0.0004)	0.088 (0.0007)			
	ML	0.076 (0.0003)	0.025 (0.0003)	0.059 (0.0003)	0.038 (0.0002)	0.049 (0.0003)	0.049 (0.0002)	0.043 (0.0002)	0.052 (0.0004)				
	MSP	0.063 (0.0003)	0.040 (0.0003)	0.048 (0.0002)	0.038 (0.0002)	0.036 (0.0003)	0.036 (0.0002)	0.029 (0.0002)	0.036 (0.0003)				
	KS	0.075 (0.0004)	0.025 (0.0002)	0.067 (0.0003)	0.041 (0.0002)	0.062 (0.0003)	0.062 (0.0003)	0.064 (0.0003)	0.073 (0.0003)				
	AD	0.068 (0.0003)	0.028 (0.0002)	0.058 (0.0003)	0.038 (0.0002)	0.049 (0.0003)	0.049 (0.0002)	0.046 (0.0002)	0.055 (0.0003)				
	0.6	M <sup>t</sup>	0.076 (0.0005)	0.008 (0.0001)	0.079 (0.0006)	0.026 (0.0002)	0.088 (0.0007)	0.063 (0.0004)					
ML		0.063 (0.0003)	0.014 (0.0002)	0.056 (0.0004)	0.027 (0.0001)	0.053 (0.0004)	0.043 (0.0002)						
MSP		0.046 (0.0002)	0.025 (0.0002)	0.040 (0.0003)	0.025 (0.0002)	0.037 (0.0003)	0.029 (0.0002)						
KS		0.063 (0.0003)	0.013 (0.0002)	0.067 (0.0003)	0.033 (0.0002)	0.073 (0.0004)	0.064 (0.0003)						
AD		0.055 (0.0003)	0.016 (0.0001)	0.054 (0.0003)	0.028 (0.0002)	0.055 (0.0003)	0.045 (0.0003)						
0.8		M <sup>t</sup>	0.086 (0.0007)	0.003 (0.0001)	0.100 (0.0008)	0.026 (0.0001)							
	ML	0.035 (0.0003)	0.006 (0.0001)	0.043 (0.0004)	0.021 (0.0001)								
	MSP	0.027 (0.0003)	0.012 (0.0001)	0.033 (0.0003)	0.017 (0.0001)								
	KS	0.042 (0.0003)	0.004 (0.0001)	0.058 (0.0004)	0.030 (0.0001)								
	AD	0.035 (0.0002)	0.006 (0.0001)	0.047 (0.0004)	0.023 (0.0001)								
	1.0	M <sup>t</sup>	0.097 (0.0007)	0.000 (0.0000)									
ML		0.005 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
MSP		0.014 (0.0002)	0.001 (0.0000)										
KS		0.026 (0.0002)	0.000 (0.0000)										
AD		0.019 (0.0002)	0.000 (0.0000)										









## 5.4 Resumo dos resultados da estimação

Quando se considera a possibilidade de repetir uma experiência escolhendo para publicação o *melhor* de dois resultados ( $r = 2$ ) o parâmetro que interessa estimar é  $k = p - q$ , com  $k \in [-1, 1]$ . Pois, como oportunamente se observou, a f.d. da v.a.  $\text{Mendel}(2; p, q)$  é igual  $\forall p, q, p + q \in [0, 1]$  cuja diferença entre  $p$  e  $q$  seja igual a  $k$ .

Entre os métodos de estimação considerados, destaca-se o do teste de ajustamento de AD com resultados melhores do que os obtidos através do teste de ajustamento de KS, uma diferença que tende a esbater-se à medida que a dimensão da amostra aumenta.

Salienta-se também a tendência generalizada de melhoria dos resultados, quando se aumenta a dimensão da amostra:

- O enviesamento tende para zero à medida que a amostra aumenta. Para amostras de pequena dimensão observa-se um maior enviesamento que se acentua quando  $|k|$  está perto de 1.
- Intervalos de confiança de *score* com nível de significância de 95% com elevada amplitude. Amplitude que vai diminuindo à medida que  $|k|$  se aproxima de 1 (componente dominante Beta não Uniforme) e que aumenta a dimensão da amostra.
- Elevada proporção de intervalos de confiança de *score* com nível de significância de 95% que incluem  $k = 0$ :
  - Para amostras de dimensão 10 e 25 a proporção de intervalos de confiança que incluem  $k = 0$  é sempre superior a 0.05 para qualquer valor de  $k$ .
  - Para amostras de dimensão 50 e 100 a proporção de intervalos de confiança que incluem  $k = 0$  só é inferior a 0.05 para  $|k| \approx 1$ .

Foram ainda testados e comparados cinco diferentes métodos para estimar os parâmetros  $p$  e  $q$ , admitindo que os experimentadores podem, em certas circunstâncias, replicar as experiências um número fixo de vezes:  $r = 3, 4, 5$ .

Assumindo que a família  $\text{Mendel}(r; p, q)$ , apresentada em (5.1.1), é adequada para modelar uma amostra de valores de prova- $p$  em que alguns dos valores são problemáticos, conclui-se que apesar de ser difícil estimar adequadamente os parâmetros quando a mistura é dominada por uma das suas

componentes Beta não Uniforme (*i.e.*  $p \approx 1$  ou  $q \approx 1$ ), os resultados obtidos deixam bons indícios, sobretudo quando a componente de mistura tem um sinal fraco, quando a dimensão da amostra é grande ou quando se admite um maior número de réplicas das experiências.

Não parece existir um método de estimação que se possa afirmar funcionar *melhor* em todos os cenários estudados. No entanto, as simulações efetuadas parecem sugerir que o estimador  $M^t$ , pela sua simplicidade, poderá ser sempre uma boa aproximação ao problema (caso a estimativa seja admissível), em especial quando a componente de mistura é dominada pela Uniforme ( $p, q \approx 0$ ). Por outro lado, o estimador MSp, apresenta em geral bons resultados, havendo pontualmente situações em que também se destaquem o estimador ML ou o AD. Na verdade, as diferenças existentes entre os diversos métodos estudados não são muito significativas.

Como acontece em qualquer problema de estimação real, o investigador não sabe, à partida, o cenário em que se encontra. Sendo necessário escolher um estimador, parece-nos que o estimador M, ou o MSp, constituirão uma boa escolha. É interessante notar que o popular estimador de ML, que habitualmente apresenta bons resultados, não sendo o que mais se destaca, tem bons desempenhos quanto ao viés e ao e.q.m.. Note-se ainda que o e.q.m. e o viés tendem a diminuir com o aumento do valor de  $r$ .

Destaca-se ainda o comportamento do e.q.m. e do viés de todos os métodos estudados: quando a componente mistura é *equilibrada*, ou seja  $p \approx q$ , os valores do e.q.m., do viés e dos erros padrão respetivos, para  $\tilde{p}_\bullet$  e para  $\tilde{q}_\bullet$ , são muito aproximados. Tendem a desequilibrar quando uma das componentes Beta não Uniforme passa a dominar a mistura, sendo em geral mais elevado o e.q.m. associado à estimativa do parâmetro que domina a mistura.



## Capítulo 6

### Considerações finais

*“Impossible to read them all, you know. It seemed to me that the fairest thing would be to shake them together, stick my hand in, and take out one by chance. If it didn’t seem very promising, I would try a second time.”*

George Gissing, *New Grub Street* (The Way Hither, pág. 62)

O excerto do livro *New Grub Street* de 1981, escrito por George Gissing, relata um desabafo que traduz um comportamento *tentador* que poderá ser considerado inadequado na condução de um concurso — espera-se que o júri de um concurso seja imparcial, avaliando de forma justa o mérito de todos os candidatos e que a escolha recaia sobre o que *melhor* se adequa ao lugar.

O jovem que entrevistou Reardon tinha em mente alguém mais jovem para o lugar, mas a verdade é que recebeu cerca de 500 ou 600 cartas de resposta ao anúncio. Durante a entrevista diz ter baralhado as cartas e tirado uma ao acaso. Pareceu-lhe que, apesar de tudo, seria justo chamar o autor da primeira carta (Reardon), antes de tirar uma segunda...

Neste breve trecho do livro, na impossibilidade de avaliar todos os concorrentes, o autor sugere, com humor, que o acaso se encarregou de selecionar Reardon e que o mais justo seria dar-lhe uma oportunidade, antes de procurar outro candidato. Este exemplo permite ilustrar que em múltiplas situações são tomadas decisões, de forma consciente (ou inconsciente), aparentemente lógicas e fundamentadas, que introduzem um enviesamento difícil de corrigir.

Note-se que o ponto de partida deste trabalho não é o de levantar dúvidas sobre os procedimentos de combinação de testes independentes, ou sobre a

idoneidade dos investigadores. Pretende-se, antes de mais, contribuir para que sejam repensadas as abordagens tradicionais, de forma a assegurar um tratamento adequado dos dados, considerando a possibilidade de existirem *valores de prova problemáticos*.

Como foi referido ao longo desta tese, em meta análise, os procedimentos habitualmente utilizados para combinar informação proveniente de estudos independentes, planeados para responder a questões similares por diferentes equipas de investigadores, são fundamentados no pressuposto da uniformidade dos valores de prova- $p$  reportados. É esperado que os resultados publicados sejam provenientes de realizações de uma única experiência. Este pressuposto parece-nos ser, nalguns casos, difícil de observar. Pois, como refere o jovem personagem do livro de George Gissing, anteriormente citado, haverá a *tentação* de replicar experiências para confirmar o resultado obtido, ou para eliminar qualquer dúvida que exista quanto à condução da investigação, sobretudo se o primeiro resultado contrariar a expectativa inicial.

Para além de haver casos em que poderá ser *forçado* admitir a uniformidade dos valores de prova- $p$ , a polémica em torno dos valores de prova- $p$ , apresentada no Capítulo 3, constitui também uma fragilidade desta abordagem. Não esquecendo que a dimensão da amostra pode desempenhar um papel determinante no resultado final e que a *significância estatística*, tipicamente avaliada através do valor de prova- $p$ , não implica necessariamente que exista um efeito grande ou importante.

A combinação de valores de prova- $p$  é uma abordagem de meta análise não paramétrica útil em diversas situações, uma vez que o número de observações utilizado é, de um modo geral, pequeno, não é necessário verificar os habituais pressupostos de normalidade e permite avaliar a veracidade da hipótese nula combinada que se sustenta na assunção de que todas as hipóteses nulas individuais são verdadeiras.

Apresentou-se, no Capítulo 3, o conceito de *valor de prova generalizado*, recomendado para combinar a evidência estatística sob a validade da hipótese alternativa,  $H_1$ , quando existe um número significativo de resultados que levantam dúvidas sobre a veracidade da hipótese global. Como sugere Brillhante (2013), este conceito é mais abrangente, podendo ser utilizado para substituir a hipótese de uniformidade por uma alternativa mais adequada, quando se suspeita da existência de valores de prova problemáticos, contaminados por observações que não têm distribuição Uniforme padrão.

Num estudo de meta análise será importante avaliar se há evidência de que existem valores de prova problemáticos. Assim, estimar a proporção de valores de prova- $p$  não Uniformes numa amostra assume um papel determi-



nante para escolher as metodologias estatísticas apropriadas. Na verdade, se existir evidência que contrarie a hipótese de uniformidade, a informação deverá ser combinada sob a hipótese alternativa ou admitindo um modelo que considere a existência dos valores problemáticos. Em qualquer dos casos aumenta o grau de complexidade do problema.

O trabalho desenvolvido ao longo desta tese está relacionado com a síntese meta analítica de valores de prova, abandonando a ideia ingênua de que são observações Uniformes (mesmo sob  $H_0$ , devido ao que apelidamos de valores de prova problemáticos). Mais uma vez, os métodos analíticos são frequentemente inadequados, sendo o relato exaustivo do trabalho de simulação e das conclusões que dele se podem extrair o foco da nossa exposição.

Parece-nos que a família Mendel( $m$ ) (1.3.1), com  $m \in [-2, 2]$ , ou de um modo mais geral a família Mendel( $r; p, q$ ) (1.4.1), com  $p, q, p + q \in [0, 1]$ , poderão ser consideradas para modelar os valores de prova, quando se admite a possibilidade de alguns investigadores, perante resultados que contrariam a sua hipótese de investigação, terem replicado experiências, reportando valor de prova que consideram mais conveniente — o *melhor* resultado será então o mínimo ou o máximo de Uniformes independentes.

Tendo em consideração que o parâmetro  $m$  do modelo (1.3.1) está diretamente relacionado com a proporção de valores de prova- $p$  problemáticos, no Capítulo 4 foram estudados os diferentes estimadores propostos. Alguns bastante populares, como o estimador do M, o do ML e o do LS; dada a dificuldade do problema foram explorados outros estimadores menos utilizados como o do MSp (Ranneby, 1984), ou mesmo o do PWM (Greenwood *et al.*, 1979). No entanto, os diferentes estimadores apresentaram resultados modestos quanto ao e.q.m. e ao viés. Em especial, quando a componente de mistura tem um sinal forte, i.e.  $|m| \rightarrow 2$ , mesmo quando perante amostras de dimensão grande.

O estimador LS apresentou os piores resultados. A estimação de  $m$  demonstrou desafios assinaláveis, sendo os melhores resultados obtidos para  $|m| < 1$ , ou seja quando a proporção de valores de prova- $p$  problemáticos não excede os 0.5. A dificuldade associada à estimação do parâmetro  $m$  parece sugerir que estamos perante um parâmetro não identificável.

No Capítulo 5 foi apresentado o modelo Mendel( $r; p, q$ ) (1.4.1), significativamente mais complexo, que inclui a família Mendel( $m$ ) como um caso particular — na notação utilizada para a família Mendel( $r; p, q$ ), (1.3.1) será uma v.a. Mendel( $2; \frac{m}{2}, 0$ ) se  $m \in [0, 2]$  ou, Mendel( $2; 0, \frac{|m|}{2}$ ) se  $m \in [-2, 0]$ .

Neste estudo, tivemos oportunidade de verificar que no caso mais geral,

admitir a realização de duas réplicas da experiência ( $r = 2$ ), mesmo que se considere a possibilidade de que o *melhor* resultado para alguns investigadores seja o mínimo e para outros seja o máximo, será equivalente a considerar o modelo Mendel( $m$ ) — em jogo na Mendel( $2; p, q$ ) está o parâmetro que designamos  $k$ , que corresponde à diferença entre  $p$  e  $q$ , com  $k \in [-1, 1]$ .

Uma outra particularidade desta família, reveladora da dificuldade inerente a este exercício de estimação, é a constatação de que se poderá admitir a uniformidade quando existe igual proporção de investigadores a reportarem o máximo e o mínimo de duas réplicas das experiências, ou seja, Mendel( $2; p, p$ )  $\stackrel{d}{=} \text{Uniforme}(0,1)$ . Neste caso, manter-se-á válida a asserção inicial de que os valores reportados são provenientes de uma distribuição Uniforme padrão.

Foi estudado o caso particular do modelo Mendel( $2; p, q$ ), estimando o parâmetro  $k = p - q$  através dos testes de ajustamento de KS e de AD. Efetuou-se em simultâneo um teste de ajustamento do modelo e a estimação do parâmetro, *invertendo* os testes de ajustamento de forma a identificar o valor do parâmetro que apresenta maior *concordância* com o modelo ajustado. Esta poderá ser mais uma das abordagens possíveis para fornecer informação sobre a possibilidade de existirem valores de prova problemáticos, no conjunto de dados que se pretender combinar. Os resultados obtidos dão indicação de que o teste de ajustamento de AD fornece estimativas melhores do o teste de KS, sendo a diferença entre os dois métodos mais notória nas amostras de menor dimensão. Destaca-se, no entanto, que só se rejeitou a hipótese de ajustamento da Uniforme ( $k = 0$ ) para amostras de grande dimensão e para valores de  $|k| \approx 1$ .

A estimação dos parâmetros  $p, q$  da família Mendel( $r; p, q$ ), considerando  $r = 3, 4, 5$ , forneceram indicações interessantes. Este foi o mais complexo dos modelos analisados e apesar deste ser um exercício de dificuldade elevada, os resultados obtidos deixam bons indícios, em especial quando a mistura tem um sinal fraco (a componente Uniforme é dominante), quando a dimensão da amostra é grande ou quando se admite um maior número de réplicas das experiências. Não se pode afirmar que haja um método de estimação que funcione *melhor* em todos os cenários estudados. Sugerimos, com base nos resultados e na simplicidade do estimador, a utilização do estimador  $M^t$  como uma boa primeira aproximação ao problema, podendo ser complementado por um outro método que poderá ser o MSp que também se destaca (o ML, ou mesmo o AD), em função dos resultados obtidos. Na verdade, as diferenças entre os diversos métodos estudados não são muito significativas.

Os resultados obtidos demonstram a dificuldade deste problema de esti-

mação. Conseqüentemente, as implicações a nível de meta análise ganham novo relevo, mostrando a necessidade de reequacionar a teoria de valores de prova- $p$  combinados, tendo em linha de conta não só a possibilidade de  $H_{1j}$  ser verdadeira para alguns  $j$  como também a possibilidade de haver *batota* (possivelmente involuntária) no reporte dos valores de prova- $p$  originais.

A abordagem seguida é útil no modelo  $X_{r;p,q}$ , sobretudo se houver uma *intuição* sobre o número de réplicas ( $r$ ) que poderão ter sido realizadas pelos investigadores, um modelo um pouco mais complexo pode vir a ser equacionado incorporando a possibilidade do número de réplicas ( $r$ ) ser também um parâmetro aleatório do modelo. Poderá ser interessante tentar uma abordagem semelhante à de Anderson (1962), em que tratou um problema de otimização numa perspectiva de multi-decisão, para todos os polinómios de grau menor ou igual do que um  $m$  dado.

Obviamente, a introdução do conceito de valores de prova problemáticos implica a necessidade de investigar também valores de prova problemáticos generalizados — isto é, a distribuição sob  $H_1$  dos valores de prova problemáticos.

A organização desta tese segue o rumo da investigação desenvolvida, sendo assim possível acompanhar um percurso de trabalho ao longo do qual se partilham os resultados, as dúvidas e as dificuldades encontradas. Depois dum empreendimento desta natureza é natural que surjam novas questões, outras sugestões e muitas alternativas.



# Bibliografia

- S. M. Aleixo, J. L. Rocha, and D. D. Pestana. Probabilistic Methods in Dynamical Analysis: Populations Growths Associated to Models Beta( $p$ ,  $q$ ) with Allee Effect. In M. M. Peixoto, A. A. Pinto, and A. D. Rand, editors, *Dynamics, Games and Science II: DYNA 2008, in Honor of Maurício Peixoto and David Rand, University of Minho, Braga, Portugal, September 8-12, 2008*, pages 79–95, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer. ISBN 978-3-642-14788-3. doi: 10.1007/978-3-642-14788-3\_5. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-14788-3\\_5](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-14788-3_5).
- T. W. Anderson. The choice of the degree of a polynomial regression as a multiple decision problem. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(1): 255–265, 1962. ISSN 00034851. URL <http://www.jstor.org/stable/2237656>.
- G. Arslan. On a Characterization of the Uniform Distribution by Generalized Order Statistics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (16):4532–4536, 2011.
- C. J. G. Bellosta. *ADGofTest: Anderson-Darling GoF test*, 2011. URL <http://CRAN.R-project.org/package=ADGofTest>. R package version 0.3.
- D. D. Boos and L. A. Stefanski. P-value precision and reproducibility. *The American Statistician*, 65(4):213–221, 2011. doi: 10.1198/tas.2011.10129. URL <http://dx.doi.org/10.1198/tas.2011.10129>.
- M. F. Brilhante. Generalized  $p$  Values and Random  $p$  Values when the Alternative to Uniformity is a Mixture of a Beta(1,2) and Uniform. In P. E. Oliveira, M. da Graça Temido, C. Henriques, and M. Vichi, editors, *Recent Developments in Modeling and Applications in Statistics*, pages 159–167. Springer, Heidelberg, 2013.
- M. F. Brilhante, S. Mendonça, D. Pestana, and F. Sequeira. Using products and powers of products to test uniformity. In V. Luzar-Stiffler, I. Jarec,

- and Z. Bekic, editors, *Proceedings of the ITI 2010, 32nd International Conference on Information Technology Interfaces*, pages 509–514. IEEE CFP10498-PRT, 2010a.
- M. F. Brillhante, D. Pestana, and F. Sequeira. Combining  $p$ -values and random  $p$ -values. In V. Luzar-Stiffler, I. Jarec, and Z. Bekic, editors, *Proceedings of the ITI 2010, 32nd International Conference on Information Technology Interfaces*, pages 515–520. IEEE CFP10498-PRT, 2010b. ISBN 978-1-4244-5732-8.
- M. F. Brillhante, I. Gomes, and D. Pestana. BetaBoop Brings in Chaos. *Chaotic Modeling and Simulation*, pages 39–50, 2011a.
- M. F. Brillhante, D. Pestana, and M. L. Rocha. Betices. In *Número Especial (Actas do Encontro Nacional da SPM 2010)*, pages 238–246, 2011b.
- M. F. Brillhante, M. I. Gomes, and D. Pestana. Extensions of Verhulst Model in Population Dynamics and Extremes. In C. Skiadas, editor, *Proceedings of 5th Chaotic Modeling and Simulation International Conference*, pages 115–122, 2012.
- M. F. Brillhante, M. Malva, S. Mendonça, Sandra, D. Pestana, F. Sequeira, and S. Velosa. Uniformity. In J. Lita da Silva, F. Caeiro, I. Natrio, and C. Braumann, editors, *Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications*, pages 73–81. Springer, Berlin, 2013a.
- M. F. Brillhante, D. Pestana, and F. Sequeira. Combining  $p$ -values: an overview, with a discussion on uniform and on mixtures of uniform and Beta(1,2) or Beta(2,1). *Notas e Comunicações* 23, CEAUL, 2013b.
- M. F. Brillhante, D. Pestana, P. Semblano, and F. Sequeira. On the Proportion of Non Uniform Reported  $p$ -values. In T. E. Tsimos, G. Psihoyios, C. Tsitouras, and Z. Anatassi, editors, *Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2014, AIP Conference Proceedings (in press)*. ICNAAM, 2014.
- M. F. Brillhante, D. Pestana, P. Semblano, and F. Sequeira. The estimation of the proportion of messy  $p$ -values — a challenging problem. Presented at 9th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation, 2015a.
- M. F. Brillhante, D. Pestana, P. Semblano, and F. Sequeira. Autoregressive Mendel Processes. Presented at 9th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation, 2015b.

- M. F. Brillhante, D. Pestana, P. Semblano, and F. Sequeira. Mendel Processes, Mendel Mixtures and Meta Analysis. Presented at 9th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation, 2015c.
- M. F. Brillhante, D. Pestana, P. Semblano, and F. Sequeira. Dinâmica Populacional Mendeliana. Presented at II Encontro Galaico–Português de Biometria, con aplicación ás Ciencias da Saúde, á Ecoloxía e ás Ciencias do Medio Ambiente, 2016.
- A. Canty and B. D. Ripley. *boot: Bootstrap R (S-Plus) Functions*, 2015. R package version 1.3-15.
- L. Carvalho. An Improved Evaluation of Kolmogorov’s Distribution. *Journal of Statistical Software*, 65(3):1–7, 2015. URL <http://www.jstatsoft.org/v65/c03/>.
- S. Das Gupta, A. Goswami, and B. V. Rao. On a Characterization of Uniform Distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 44(1):102–114, 1993.
- H. A. David and H. N. Nagaraja. *Order Statistics*. Wiley, 2 edition, 2003.
- A. C. Davison and D. V. Hinkley. *Bootstrap Methods and Their Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. URL <http://statwww.epfl.ch/davison/BMA/>. ISBN 0-521-57391-2.
- A. P. Dempster and M. Schatzoff. Expected significance level as a sensitivity index for test statistics. *Journal of the American Statistical Association*, 60(310):420–436, 1965. ISSN 01621459. URL <http://www.jstor.org/stable/2282680>.
- L.-Y. Deng and E. O. George. Some Characterizations of the Uniform Distribution with Applications to Random Number Generation. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 44(2):379–385, 1992.
- B. Efron. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):pp. 1–26, 1979. ISSN 00905364. URL <http://www.jstor.org/stable/2958830>.
- B. Efron and R. J. Tibshirani. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, 1993.
- M. Ekström. Alternatives to maximum likelihood estimation based on spacings and the Kullback–Leibler divergence. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138(6):1778–1791, 2008.

- W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume II. John Wiley & Sons, second edition, 1971.
- D. Ferrari and Y. Yang. Maximum Lq-likelihood Estimation. *The Annals of Statistics*, 38(2):753–783, April 2010. doi: 10.1214/09-AOS687. URL <http://dx.doi.org/10.1214/09-AOS687>.
- R. A. Fisher. *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver & Boyd, Edinburg, 4th edition, 1932.
- R. A. Fisher. Has Mendel’s Work been rediscovered? 1:115–137, 1936.
- A. Franklin, A. Edwards, D. J. Fairbanks, D. L. Hartl, and T. Seidenfeld. *Ending the Mendel-Fisher Controversy*. University of Pittsburgh Press, 2008. URL <https://books.google.pt/books?id=C4m6NlmGhjgC>.
- J. Galambos and S. Kotz. *Characterizations of Probability Distributions: A Unified Approach With an Emphasis on Exponential and Related Models*. Number 675 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1978.
- G. V. Glass. Primary, Secondary, and Meta-Analysis of Research. *Educational Researcher*, 5(10):3–8, 1976. ISSN 0013189X, 1935102X. URL <http://www.jstor.org/stable/1174772>.
- M. I. Gomes, D. Pestana, F. Sequeira, S. Mendonça, and S. Velosa. Uniformity of Offsprings from Uniform and Non-Uniform Parents. In V. Luzar-Stiffler, I. Jarec, and Z. Bekic, editors, *Proceedings of the ITI 2009, 31st International Conference on Information Technology Interfaces*, pages 243–248. IEEE, 2009. ISBN 978-953-7138-15-8. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/iti/iti2009.html#GomesPSMV09>.
- S. N. Goodman. A comment on replication, p-values and evidence. *Statistics in Medicine*, 11(7):875–879, 1992. ISSN 1097-0258. URL <http://dx.doi.org/10.1002/sim.4780110705>.
- J. A. Greenwood, J. M. Landwehr, N. C. Matalas, and J. R. Wallis. Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resources Research*, 15(5): 1049–1054, 1979. ISSN 1944-7973. URL <http://dx.doi.org/10.1029/WR015i005p01049>.
- G. G. Hamedani and H. Volkmer. Certain Characterizations of the Uniform Distribution. *Metrika*, 61(2):117–125, 2005. ISSN 0026-1335. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s001840400244>.



- G. G. Hamedani and H. Volkmer. On the Distributions of Certain Spacings. *Communications in Statistics — Theory and Methods*, 40(3):510–514, 2011.
- J. Hannig, H. Iyer, and P. Patterson. Fiducial Generalized Confidence Intervals. *Journal of the American Statistical Association*, 101(473):254–269, 2006.
- J. Hartung, G. Knapp, and B. K. Sinha. *Statistical meta-analysis with applications*, volume 738. John Wiley & Sons, New York, 2008.
- J. R. M. Hosking and J. F. Wallis. Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics*, 29(3):339–349, September 1987. ISSN 0040-1706. doi: 10.2307/1269343. URL <http://dx.doi.org/10.2307/1269343>.
- H. M. J. Hung, R. T. O’Neill, B. Peter, and K. Kohne. The behavior of the p-value when the alternative hypothesis is true. *Biometrics*, 53(1):11–22, 1997. ISSN hung1997. URL <http://www.jstor.org/stable/2533093>.
- H. K. Iyer and P. D. Patterson. A Recipe for Constructing Generalized Pivotal Quantities and Generalized Confidence Intervals. Technical Report 2002/10, Colorado State University Department of Statistics, 2002. URL [http://www.stat.colostate.edu/statresearch/stattechreports/Technical%20Reports/2002/02\\_10.pdf](http://www.stat.colostate.edu/statresearch/stattechreports/Technical%20Reports/2002/02_10.pdf).
- N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Continuous Univariate Distributions*, volume 2. John Wiley & Sons, 2 edition, 1995.
- S. G. Johnson. The NLOpt nonlinear-optimization package. 2008. URL <http://ab-initio.mit.edu/nlopt>.
- A. M. Kagan, C. R. Rao, and Y. V. Linnik. *Characterization Problems in Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, 1973.
- A. I. Khuri, T. Mathew, and B. K. Sinha. Tests Using Generalized p-values. *Statistical Texts for Mixed Linear Models*, pages 236–255, 1998.
- I. Kovalenko. On a class of limit distributions for rarefied flows of homogeneous events. *Lit. Mat. Sbornik*, 5:569–573, 1965.
- T. J. Kozubowski. Representation and properties of geometric stable laws. In *Approximation, Probability, and Related Fields*, pages 321–337. Springer, 1994.

- E. Kulinskaya, S. Morgenthaler, and R. G. Staudte. *Meta analysis: a guide to calibrating and combining statistical evidence*, volume 756. John Wiley & Sons, Chichester, 2008.
- J. V. Linnik. *Statistical Problems with Nuisance Parameters*, volume 20 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1968.
- C. C. A. G. Monteiro. Combinação de valores de prova e de valores de prova aleatórios. Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2013.
- D. J. Murdoch, Y.-L. Tsai, and J. Adcock. P-values are Random Variables. *The American Statistician*, 62(3):242–245, 2008. ISSN 00031305. URL <http://www.jstor.org/stable/27644033>.
- J. C. Nash. On Best Practice Optimization Methods in R. *Journal of Statistical Software*, 60(2):1–14, 2014. URL <http://www.jstatsoft.org/v60/i02/>.
- J. C. Nash and R. Varadhan. Unifying Optimization Algorithms to Aid Software System Users: optimx for R. *Journal of Statistical Software*, 43(9):1–14, 2011. URL <http://www.jstatsoft.org/v43/i09/>.
- A. Paul. Characterizations of the uniform distribution via sample spacings and nonlinear transformations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 284(1):397–402, 2003.
- D. Pestana. Combining p-values. In M. Lovric, editor, *International Encyclopaedia of Statistical Science*, pages 1145–1147. Springer Verlag, 2011.
- D. Pestana and S. Velosa. *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, volume I. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.
- D. Pestana, S. Aleixo, and J. L. Rocha. Regular variation, paretian distributions, and the interplay of light and heavy tails in the fractality of asymptotic models. *Chaos Theory: Modeling, Simulation and Applications*, *World Scientific Books*, pages 309–316, 2011.
- D. Pestana, M. L. Rocha, R. Vasconcelos, and S. Velosa, Silvio. Publication bias and meta-analytic syntheses. In J. Lita da Silva, F. Caeiro, I. Natrio, and C. Braumann, editors, *Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications*, pages 347–354. Springer, Berlin, 2013.

- A. M. Pires and J. A. Branco. A Statistical Model to Explain the Mendel–Fisher Controversy. *Statistical Science*, 25(4):545–565, November 2010. URL <http://www.jstor.org/stable/23061101>.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2015. URL <https://www.R-project.org/>.
- S. Rachev and S. Resnick. Max-geometric infinite divisibility and stability. *Stochastic Models*, 7(2):191–218, 1991.
- B. Ranneby. The maximum spacing method. an estimation method related to the maximum likelihood method. *Scandinavian Journal of Statistics*, 11(2):93–112, 1984.
- A. Rényi. A characterization of Poisson processes. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl*, 1:519–527, 1956.
- J. L. Rocha and S. M. Aleixo. An extension of Gompertzian Growth Dynamics Weibull and Fréchet models. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 10(2):379–398, 2013.
- H. Sackrowitz and E. Samuel-Cahn. P values as random variables—expected p values. *The American Statistician*, 53(4):326–331, 1999. URL <http://dx.doi.org/10.1080/00031305.1999.10474484>.
- M. J. Schervish. P values: What They Are and What They Are Not. *The American Statistician*, 50(3):203–206, 1996. ISSN 00031305. URL <http://www.jstor.org/stable/2684655>.
- P. Semblano, M. F. Brilhante, D. Pestana, and F. Sequeira. Pseudo-valores-p e meta-análise. In *Livro de resumos do XXII Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística*, pages 201–202, 2015.
- F. Sequeira. *Meta-Análise: Harmonização de Testes Usando os Valores de Prova*. PhD thesis, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2009.
- K. Soetaert. *rootSolve: Nonlinear root finding, equilibrium and steady-state analysis of ordinary differential equations*, 2009. R package 1.6.
- K. Soetaert and P. M. Herman. *A Practical Guide to Ecological Modelling. Using R as a Simulation Platform*. Springer, 2009. ISBN 978-1-4020-8623-6.

- S. A. Stouffer, S.A. Stouffer, E. A. Schuman, L. C. DeVinney, S. Star, and R. M. Williams. *The American soldier. Vol. 1: Adjustment during army life*. Studies in Social Psychology in World War II. Princeton University Press, 1949.
- P. V. Sukhatme. Tests of significance for samples of the  $\chi^2$  population with two degrees of freedom. *Annals of Eugenics*, 8(1):52–56, 1937.
- G. Székely and T. Móri. An Extremal Property of Rectangular Distributions. *Statistics Probability Letters*, 3(2):107–109, 1985. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167715285900355>.
- R. Team. *RStudio: Integrated Development for R [Computer software]*, 2014. URL <http://www.rstudio.org/>. version 0.98.1091.
- G. R. Terrell. A Characterization of Rectangular Distributions. *The Annals of Probability*, 11(3):823–826, 08 1983. URL <http://dx.doi.org/10.1214/aop/1176993533>.
- L. H. C. Tippett. *The methods of statistics*. Williams & Norgate, London, 1931.
- A. Tsoularis. Analysis of logistic growth models. *Res. Lett. Inf. Math. Sci*, 179(2):23–46, 2001.
- K.-W. Tsui and S. Weerahandi. Generalized p-values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters. *Journal of the American Statistical Association*, 84(406):602–607, 1989.
- J. Utts. Replication and meta-analysis in parapsychology. *Statistical Science*, 6(4):363–378, 11 1991. URL <http://dx.doi.org/10.1214/ss/1177011577>.
- B. Venables, K. Hornik, and M. Maechler. *polynom: A Collection of Functions to Implement a Class for Univariate Polynomial Manipulations*, 2014. URL <http://CRAN.R-project.org/package=polynom>. R package version 1.3-8. S original by Bill Venables, packages for R by Kurt Hornik and Martin Maechler.
- P. F. Verhulst. Recherches mathématiques sur la loi d’accroissement de la population. *Nouveaux Mémoires de l’Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 18:14–54, 1845.

- P. F. Verhulst. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. *Mémoires de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, 20:1–32, 1847.
- R. L. Wasserstein and N. A. Lazar. The ASA's statement on p-values: context, process, and purpose. *The American Statistician*, 2016. doi: 10.1080/00031305.2016.1154108. URL <http://dx.doi.org/10.1080/00031305.2016.1154108>.
- S. Weerahandi. *Exact statistical methods for data analysis*. Springer, 1995.
- H. Wickham. Reshaping Data with the reshape package. *Journal of Statistical Software*, 21(12):1–20, 2007. URL <http://www.jstatsoft.org/v21/i12/>.
- H. Wickham. *ggplot2: elegant graphics for data analysis*. Springer New York, 2009. ISBN 978-0-387-98140-6. URL <http://had.co.nz/ggplot2/book>.
- H. Wickham. The Split-Apply-Combine Strategy for Data Analysis. *Journal of Statistical Software*, 40(1):1–29, 2011. URL <http://www.jstatsoft.org/v40/i01/>.
- B. Wilkinson. A statistical consideration in psychological research. *Psychological Bulletin*, 48(2):156–158, 1951.



# Apêndice A

## Tabelas com o viés dos estimadores

Tabela .0.1: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.089 (0.0007)	0.088 (0.0008)	0.065 (0.0007)	-0.059 (0.0010)	0.044 (0.0006)	-0.199 (0.0014)	0.026 (0.0005)	-0.332 (0.0016)	0.012 (0.0002)	-0.448 (0.0019)	0.002 (0.0001)	-0.557 (0.0021)
	ML	0.255 (0.0012)	0.256 (0.0012)	0.186 (0.0009)	0.185 (0.0012)	0.132 (0.0008)	0.126 (0.0013)	0.087 (0.0007)	0.076 (0.0013)	0.046 (0.0004)	0.020 (0.0013)	0.006 (0.0001)	-0.052 (0.0006)
	MSp	0.321 (0.0013)	0.322 (0.0011)	0.259 (0.0010)	0.234 (0.0012)	0.203 (0.0009)	0.149 (0.0012)	0.149 (0.0007)	0.068 (0.0012)	0.094 (0.0005)	-0.017 (0.0011)	0.033 (0.0002)	-0.105 (0.0006)
	KS	0.247 (0.0011)	0.246 (0.0013)	0.173 (0.0009)	0.174 (0.0011)	0.115 (0.0007)	0.108 (0.0013)	0.066 (0.0007)	0.045 (0.0016)	0.030 (0.0004)	-0.030 (0.0012)	0.008 (0.0002)	-0.125 (0.0008)
	AD	0.268 (0.0011)	0.267 (0.0013)	0.199 (0.0009)	0.191 (0.0011)	0.143 (0.0007)	0.121 (0.0013)	0.093 (0.0007)	0.055 (0.0014)	0.049 (0.0004)	-0.020 (0.0012)	0.012 (0.0002)	-0.110 (0.0007)
	0.2	$M^t$	-0.059 (0.0012)	0.066 (0.0008)	-0.090 (0.0010)	-0.092 (0.0008)	-0.117 (0.0009)	-0.235 (0.0011)	-0.142 (0.0006)	-0.369 (0.0015)	-0.164 (0.0006)	-0.499 (0.0023)	
ML		0.183 (0.0013)	0.184 (0.0009)	0.093 (0.0012)	0.095 (0.0014)	0.026 (0.0013)	0.019 (0.0012)	-0.031 (0.0008)	-0.046 (0.0015)	-0.081 (0.0006)	-0.111 (0.0010)		
MSp		0.232 (0.0011)	0.257 (0.0009)	0.159 (0.0009)	0.162 (0.0013)	0.099 (0.0013)	0.069 (0.0009)	0.039 (0.0008)	-0.021 (0.0011)	-0.019 (0.0007)	-0.114 (0.0009)		
KS		0.172 (0.0014)	0.175 (0.0009)	0.085 (0.0012)	0.085 (0.0010)	0.010 (0.0009)	0.013 (0.0012)	-0.056 (0.0007)	-0.054 (0.0013)	-0.114 (0.0006)	-0.124 (0.0013)		
AD		0.190 (0.0013)	0.201 (0.0009)	0.110 (0.0012)	0.110 (0.0010)	0.041 (0.0010)	0.032 (0.0011)	-0.020 (0.0007)	-0.043 (0.0012)	-0.078 (0.0006)	-0.118 (0.0012)		
0.4		$M^t$	-0.199 (0.0014)	0.044 (0.0006)	-0.234 (0.0014)	-0.117 (0.0009)	-0.268 (0.0010)	-0.266 (0.0013)	-0.300 (0.0011)	-0.411 (0.0015)			
	ML	0.127 (0.0013)	0.132 (0.0008)	0.021 (0.0012)	0.028 (0.0010)	-0.064 (0.0011)	-0.064 (0.0010)	-0.133 (0.0009)	-0.145 (0.0014)				
	MSp	0.149 (0.0011)	0.203 (0.0008)	0.070 (0.0010)	0.099 (0.0009)	-0.002 (0.0010)	-0.002 (0.0010)	-0.065 (0.0008)	-0.099 (0.0011)				
	KS	0.108 (0.0015)	0.116 (0.0007)	0.015 (0.0014)	0.010 (0.0009)	-0.075 (0.0013)	-0.072 (0.0013)	-0.156 (0.0012)	-0.149 (0.0014)				
	AD	0.121 (0.0013)	0.144 (0.0007)	0.034 (0.0013)	0.041 (0.0009)	-0.049 (0.0011)	-0.046 (0.0012)	-0.121 (0.0011)	-0.131 (0.0013)				
	0.6	$M^t$	-0.326 (0.0018)	0.026 (0.0004)	-0.369 (0.0016)	-0.143 (0.0008)	-0.410 (0.0018)	-0.299 (0.0008)					
ML		0.078 (0.0011)	0.086 (0.0006)	-0.046 (0.0015)	-0.031 (0.0007)	-0.143 (0.0013)	-0.133 (0.0010)						
MSp		0.068 (0.0010)	0.147 (0.0006)	-0.021 (0.0012)	0.038 (0.0008)	-0.099 (0.0012)	-0.066 (0.0009)						
KS		0.045 (0.0012)	0.066 (0.0007)	-0.052 (0.0015)	-0.057 (0.0008)	-0.147 (0.0014)	-0.155 (0.0011)						
AD		0.055 (0.0011)	0.094 (0.0007)	-0.040 (0.0013)	-0.021 (0.0008)	-0.129 (0.0013)	-0.121 (0.0010)						
0.8		$M^t$	-0.447 (0.0020)	0.012 (0.0003)	-0.496 (0.0018)	-0.164 (0.0007)							
	ML	0.021 (0.0011)	0.045 (0.0004)	-0.110 (0.0013)	-0.080 (0.0007)								
	MSp	-0.015 (0.0009)	0.093 (0.0006)	-0.113 (0.0010)	-0.019 (0.0007)								
	KS	-0.030 (0.0012)	0.030 (0.0004)	-0.123 (0.0012)	-0.116 (0.0006)								
	AD	-0.020 (0.0011)	0.050 (0.0004)	-0.116 (0.0012)	-0.079 (0.0006)								
	1.0	$M^t$	-0.557 (0.0017)	0.002 (0.0001)									
ML		-0.053 (0.0006)	0.006 (0.0001)										
MSp		-0.105 (0.0007)	0.033 (0.0002)										
KS		-0.124 (0.0008)	0.008 (0.0001)										
AD		-0.109 (0.0007)	0.012 (0.0001)										



Tabela .0.2: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 25$ .  
Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.099 (0.0008)	0.099 (0.0007)	0.074 (0.0008)	-0.026 (0.0012)	0.050 (0.0005)	-0.136 (0.0012)	0.028 (0.0004)	-0.232 (0.0016)	0.011 (0.0002)	-0.318 (0.0020)	0.001 (0.0000)	-0.398 (0.0020)
	ML	0.192 (0.0010)	0.193 (0.0011)	0.143 (0.0008)	0.139 (0.0011)	0.109 (0.0006)	0.107 (0.0010)	0.076 (0.0005)	0.079 (0.0009)	0.041 (0.0003)	0.038 (0.0008)	0.003 (0.0001)	-0.027 (0.0003)
	MSP	0.243 (0.0010)	0.244 (0.0011)	0.195 (0.0008)	0.184 (0.0010)	0.156 (0.0006)	0.135 (0.0010)	0.116 (0.0005)	0.083 (0.0009)	0.070 (0.0003)	0.018 (0.0007)	0.017 (0.0001)	-0.058 (0.0004)
	KS	0.196 (0.0008)	0.195 (0.0010)	0.142 (0.0007)	0.138 (0.0010)	0.102 (0.0007)	0.098 (0.0013)	0.063 (0.0004)	0.057 (0.0009)	0.028 (0.0003)	0.005 (0.0010)	0.006 (0.0001)	-0.083 (0.0006)
	AD	0.205 (0.0009)	0.205 (0.0010)	0.155 (0.0008)	0.148 (0.0009)	0.118 (0.0007)	0.107 (0.0011)	0.079 (0.0005)	0.063 (0.0009)	0.040 (0.0003)	0.012 (0.0009)	0.006 (0.0001)	-0.069 (0.0005)
	0.2	$M^t$	-0.027 (0.0012)	0.074 (0.0006)	-0.060 (0.0009)	-0.060 (0.0008)	-0.092 (0.0008)	-0.175 (0.0011)	-0.127 (0.0007)	-0.281 (0.0015)	-0.156 (0.0005)	-0.376 (0.0015)	
ML		0.139 (0.0009)	0.145 (0.0007)	0.060 (0.0011)	0.060 (0.0011)	0.007 (0.0007)	0.001 (0.0010)	-0.034 (0.0007)	-0.047 (0.0011)	-0.079 (0.0005)	-0.096 (0.0009)		
MSP		0.184 (0.0009)	0.197 (0.0007)	0.115 (0.0011)	0.115 (0.0011)	0.061 (0.0007)	0.046 (0.0009)	0.014 (0.0007)	-0.018 (0.0009)	-0.038 (0.0005)	-0.087 (0.0008)		
KS		0.139 (0.0011)	0.142 (0.0007)	0.059 (0.0011)	0.059 (0.0008)	0.000 (0.0009)	0.003 (0.0009)	-0.058 (0.0008)	-0.045 (0.0013)	-0.112 (0.0006)	-0.097 (0.0011)		
AD		0.149 (0.0011)	0.155 (0.0008)	0.074 (0.0011)	0.075 (0.0008)	0.021 (0.0009)	0.016 (0.0009)	-0.032 (0.0008)	-0.037 (0.0011)	-0.083 (0.0006)	-0.094 (0.0009)		
0.4		$M^t$	-0.134 (0.0013)	0.050 (0.0005)	-0.175 (0.0012)	-0.093 (0.0007)	-0.218 (0.0011)	-0.219 (0.0011)	-0.260 (0.0011)	-0.331 (0.0016)			
	ML	0.106 (0.0010)	0.108 (0.0006)	0.002 (0.0009)	0.008 (0.0008)	-0.072 (0.0009)	-0.072 (0.0010)	-0.127 (0.0008)	-0.135 (0.0008)				
	MSP	0.133 (0.0009)	0.154 (0.0007)	0.048 (0.0009)	0.062 (0.0008)	-0.022 (0.0009)	-0.022 (0.0009)	-0.080 (0.0008)	-0.097 (0.0008)				
	KS	0.100 (0.0010)	0.101 (0.0006)	0.004 (0.0012)	-0.001 (0.0007)	-0.075 (0.0009)	-0.074 (0.0011)	-0.145 (0.0010)	-0.133 (0.0011)				
	AD	0.109 (0.0009)	0.117 (0.0006)	0.017 (0.0011)	0.019 (0.0008)	-0.056 (0.0008)	-0.056 (0.0010)	-0.119 (0.0009)	-0.121 (0.0011)				
	0.6	$M^t$	-0.229 (0.0015)	0.029 (0.0004)	-0.281 (0.0014)	-0.126 (0.0007)	-0.329 (0.0014)	-0.262 (0.0010)					
ML		0.077 (0.0009)	0.076 (0.0004)	-0.044 (0.0010)	-0.034 (0.0008)	-0.137 (0.0010)	-0.128 (0.0008)						
MSP		0.082 (0.0008)	0.116 (0.0004)	-0.016 (0.0009)	0.013 (0.0008)	-0.098 (0.0010)	-0.081 (0.0007)						
KS		0.061 (0.0011)	0.065 (0.0004)	-0.046 (0.0009)	-0.057 (0.0007)	-0.133 (0.0010)	-0.147 (0.0007)						
AD		0.066 (0.0010)	0.081 (0.0004)	-0.038 (0.0008)	-0.031 (0.0007)	-0.120 (0.0010)	-0.121 (0.0008)						
0.8		$M^t$	-0.318 (0.0016)	0.011 (0.0002)	-0.377 (0.0018)	-0.157 (0.0005)							
	ML	0.039 (0.0008)	0.041 (0.0003)	-0.098 (0.0009)	-0.078 (0.0005)								
	MSP	0.019 (0.0007)	0.071 (0.0003)	-0.090 (0.0008)	-0.038 (0.0005)								
	KS	0.005 (0.0009)	0.028 (0.0003)	-0.097 (0.0008)	-0.113 (0.0005)								
	AD	0.011 (0.0008)	0.040 (0.0003)	-0.095 (0.0007)	-0.083 (0.0005)								
	1.0	$M^t$	-0.400 (0.0018)	0.001 (0.0001)									
ML		-0.028 (0.0003)	0.003 (0.0001)										
MSP		-0.058 (0.0004)	0.017 (0.0001)										
KS		-0.082 (0.0006)	0.006 (0.0001)										
AD		-0.069 (0.0004)	0.006 (0.0001)										

Tabela .0.3: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 50$ .  
Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.099 (0.0008)	0.099 (0.0008)	0.077 (0.0006)	-0.006 (0.0011)	0.055 (0.0005)	-0.085 (0.0011)	0.032 (0.0004)	-0.153 (0.0013)	0.012 (0.0002)	-0.223 (0.0013)	0.001 (0.0000)	-0.286 (0.0011)
	ML	0.148 (0.0008)	0.147 (0.0008)	0.114 (0.0006)	0.108 (0.0009)	0.094 (0.0005)	0.091 (0.0009)	0.070 (0.0004)	0.073 (0.0007)	0.038 (0.0003)	0.041 (0.0006)	0.002 (0.0000)	-0.017 (0.0002)
	MSp	0.182 (0.0009)	0.181 (0.0008)	0.149 (0.0006)	0.141 (0.0009)	0.125 (0.0005)	0.114 (0.0009)	0.097 (0.0004)	0.083 (0.0007)	0.058 (0.0003)	0.033 (0.0006)	0.010 (0.0001)	-0.036 (0.0002)
	KS	0.156 (0.0008)	0.156 (0.0008)	0.117 (0.0006)	0.112 (0.0009)	0.095 (0.0006)	0.089 (0.0008)	0.066 (0.0003)	0.060 (0.0007)	0.029 (0.0002)	0.018 (0.0006)	0.004 (0.0001)	-0.058 (0.0003)
	AD	0.160 (0.0009)	0.160 (0.0009)	0.122 (0.0006)	0.117 (0.0009)	0.100 (0.0006)	0.093 (0.0008)	0.073 (0.0004)	0.064 (0.0006)	0.037 (0.0002)	0.022 (0.0006)	0.004 (0.0001)	-0.047 (0.0003)
	0.2	$M^t$	-0.006 (0.0009)	0.078 (0.0006)	-0.036 (0.0009)	-0.036 (0.0008)	-0.071 (0.0006)	-0.124 (0.0009)	-0.107 (0.0006)	-0.202 (0.0014)	-0.143 (0.0005)	-0.282 (0.0016)	
ML		0.107 (0.0010)	0.113 (0.0008)	0.040 (0.0009)	0.038 (0.0009)	0.000 (0.0008)	-0.004 (0.0009)	-0.030 (0.0005)	-0.039 (0.0008)	-0.071 (0.0004)	-0.085 (0.0006)		
MSp		0.140 (0.0010)	0.148 (0.0008)	0.080 (0.0010)	0.079 (0.0009)	0.039 (0.0007)	0.031 (0.0008)	0.002 (0.0005)	-0.015 (0.0007)	-0.044 (0.0004)	-0.074 (0.0006)		
KS		0.112 (0.0009)	0.117 (0.0008)	0.041 (0.0008)	0.040 (0.0008)	-0.003 (0.0007)	0.000 (0.0009)	-0.047 (0.0005)	-0.037 (0.0009)	-0.102 (0.0005)	-0.086 (0.0007)		
AD		0.117 (0.0008)	0.122 (0.0007)	0.050 (0.0009)	0.050 (0.0008)	0.011 (0.0007)	0.010 (0.0008)	-0.028 (0.0005)	-0.030 (0.0008)	-0.077 (0.0006)	-0.083 (0.0006)		
0.4		$M^t$	-0.082 (0.0013)	0.055 (0.0005)	-0.125 (0.0011)	-0.070 (0.0008)	-0.170 (0.0010)	-0.171 (0.0010)	-0.220 (0.0008)	-0.258 (0.0011)			
	ML	0.091 (0.0008)	0.094 (0.0005)	-0.003 (0.0009)	0.002 (0.0007)	-0.060 (0.0008)	-0.060 (0.0008)	-0.109 (0.0008)	-0.115 (0.0008)				
	MSp	0.114 (0.0008)	0.125 (0.0006)	0.032 (0.0009)	0.040 (0.0007)	-0.024 (0.0007)	-0.024 (0.0007)	-0.078 (0.0007)	-0.089 (0.0008)				
	KS	0.090 (0.0009)	0.095 (0.0006)	-0.001 (0.0010)	-0.003 (0.0008)	-0.065 (0.0011)	-0.065 (0.0009)	-0.127 (0.0008)	-0.117 (0.0009)				
	AD	0.095 (0.0009)	0.101 (0.0006)	0.009 (0.0010)	0.011 (0.0008)	-0.051 (0.0010)	-0.051 (0.0009)	-0.107 (0.0007)	-0.106 (0.0008)				
	0.6	$M^t$	-0.153 (0.0012)	0.031 (0.0003)	-0.206 (0.0013)	-0.109 (0.0008)	-0.260 (0.0010)	-0.221 (0.0009)					
ML		0.072 (0.0008)	0.069 (0.0004)	-0.039 (0.0007)	-0.030 (0.0006)	-0.117 (0.0007)	-0.109 (0.0007)						
MSp		0.081 (0.0007)	0.096 (0.0004)	-0.015 (0.0007)	0.002 (0.0006)	-0.090 (0.0006)	-0.078 (0.0006)						
KS		0.061 (0.0010)	0.065 (0.0003)	-0.040 (0.0007)	-0.048 (0.0006)	-0.116 (0.0008)	-0.126 (0.0009)						
AD		0.064 (0.0009)	0.073 (0.0004)	-0.033 (0.0007)	-0.029 (0.0006)	-0.106 (0.0007)	-0.106 (0.0008)						
0.8		$M^t$	-0.220 (0.0011)	0.012 (0.0002)	-0.283 (0.0017)	-0.144 (0.0006)							
	ML	0.042 (0.0006)	0.038 (0.0002)	-0.085 (0.0007)	-0.071 (0.0004)								
	MSp	0.034 (0.0006)	0.058 (0.0003)	-0.074 (0.0006)	-0.044 (0.0004)								
	KS	0.020 (0.0005)	0.029 (0.0003)	-0.085 (0.0007)	-0.103 (0.0006)								
	AD	0.024 (0.0005)	0.038 (0.0002)	-0.081 (0.0007)	-0.077 (0.0005)								
	1.0	$M^t$	-0.287 (0.0012)	0.001 (0.0000)									
ML		-0.017 (0.0002)	0.002 (0.0000)										
MSp		-0.036 (0.0002)	0.010 (0.0001)										
KS		-0.059 (0.0004)	0.004 (0.0001)										
AD		-0.047 (0.0003)	0.004 (0.0001)										

Tabela .0.4: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 3$  e amostras de dimensão  $n = 100$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.084 (0.0006)	0.084 (0.0006)	0.075 (0.0004)	0.007 (0.0009)	0.056 (0.0004)	-0.041 (0.0009)	0.035 (0.0003)	-0.082 (0.0011)	0.013 (0.0001)	-0.141 (0.0011)	0.000 (0.0000)	-0.204 (0.0011)
	ML	0.109 (0.0005)	0.109 (0.0006)	0.087 (0.0005)	0.082 (0.0006)	0.077 (0.0004)	0.077 (0.0007)	0.060 (0.0003)	0.063 (0.0006)	0.035 (0.0002)	0.041 (0.0004)	0.002 (0.0000)	-0.012 (0.0001)
	MSP	0.128 (0.0005)	0.128 (0.0006)	0.108 (0.0005)	0.102 (0.0006)	0.096 (0.0005)	0.093 (0.0007)	0.077 (0.0004)	0.073 (0.0006)	0.049 (0.0002)	0.040 (0.0004)	0.006 (0.0000)	-0.022 (0.0001)
	KS	0.115 (0.0007)	0.116 (0.0007)	0.093 (0.0006)	0.088 (0.0008)	0.084 (0.0004)	0.077 (0.0007)	0.065 (0.0004)	0.059 (0.0008)	0.032 (0.0002)	0.027 (0.0006)	0.003 (0.0000)	-0.042 (0.0003)
	AD	0.114 (0.0007)	0.115 (0.0007)	0.093 (0.0006)	0.088 (0.0008)	0.083 (0.0004)	0.078 (0.0007)	0.065 (0.0004)	0.061 (0.0006)	0.036 (0.0002)	0.029 (0.0005)	0.003 (0.0000)	-0.033 (0.0002)
	0.2	$M^t$	0.007 (0.0008)	0.074 (0.0005)	-0.015 (0.0007)	-0.015 (0.0007)	-0.046 (0.0007)	-0.075 (0.0008)	-0.085 (0.0005)	-0.134 (0.0008)	-0.128 (0.0005)	-0.202 (0.0010)	
ML		0.082 (0.0008)	0.086 (0.0006)	0.023 (0.0007)	0.024 (0.0007)	-0.001 (0.0007)	-0.003 (0.0007)	-0.023 (0.0005)	-0.028 (0.0006)	-0.062 (0.0004)	-0.073 (0.0004)		
MSP		0.102 (0.0009)	0.107 (0.0006)	0.051 (0.0007)	0.052 (0.0007)	0.026 (0.0007)	0.021 (0.0007)	-0.002 (0.0005)	-0.011 (0.0005)	-0.044 (0.0004)	-0.063 (0.0005)		
KS		0.088 (0.0007)	0.093 (0.0005)	0.025 (0.0007)	0.025 (0.0008)	-0.002 (0.0007)	0.000 (0.0007)	-0.037 (0.0006)	-0.031 (0.0006)	-0.090 (0.0004)	-0.075 (0.0005)		
AD		0.089 (0.0007)	0.093 (0.0006)	0.031 (0.0007)	0.031 (0.0008)	0.007 (0.0007)	0.006 (0.0007)	-0.023 (0.0005)	-0.024 (0.0005)	-0.069 (0.0004)	-0.070 (0.0005)		
0.4		$M^t$	-0.041 (0.0010)	0.056 (0.0004)	-0.075 (0.0007)	-0.046 (0.0006)	-0.119 (0.0008)	-0.120 (0.0009)	-0.174 (0.0007)	-0.190 (0.0009)			
	ML	0.076 (0.0007)	0.077 (0.0005)	-0.002 (0.0007)	0.001 (0.0007)	-0.045 (0.0007)	-0.045 (0.0007)	-0.085 (0.0006)	-0.090 (0.0006)				
	MSP	0.092 (0.0007)	0.096 (0.0005)	0.022 (0.0007)	0.027 (0.0006)	-0.021 (0.0007)	-0.022 (0.0007)	-0.067 (0.0006)	-0.074 (0.0006)				
	KS	0.077 (0.0008)	0.084 (0.0005)	-0.002 (0.0007)	-0.003 (0.0005)	-0.049 (0.0007)	-0.049 (0.0007)	-0.100 (0.0005)	-0.093 (0.0007)				
	AD	0.078 (0.0008)	0.082 (0.0004)	0.005 (0.0007)	0.007 (0.0006)	-0.038 (0.0006)	-0.039 (0.0006)	-0.085 (0.0005)	-0.085 (0.0006)				
	0.6	$M^t$	-0.086 (0.0010)	0.034 (0.0002)	-0.133 (0.0010)	-0.085 (0.0005)	-0.190 (0.0009)	-0.174 (0.0007)					
ML		0.064 (0.0005)	0.061 (0.0003)	-0.029 (0.0006)	-0.025 (0.0005)	-0.090 (0.0006)	-0.086 (0.0006)						
MSP		0.073 (0.0005)	0.078 (0.0003)	-0.012 (0.0006)	-0.003 (0.0005)	-0.074 (0.0006)	-0.068 (0.0005)						
KS		0.058 (0.0006)	0.065 (0.0004)	-0.030 (0.0009)	-0.037 (0.0006)	-0.092 (0.0007)	-0.100 (0.0005)						
AD		0.059 (0.0005)	0.065 (0.0004)	-0.024 (0.0008)	-0.023 (0.0005)	-0.084 (0.0006)	-0.085 (0.0004)						
0.8		$M^t$	-0.142 (0.0009)	0.013 (0.0001)	-0.200 (0.0011)	-0.128 (0.0005)							
	ML	0.041 (0.0004)	0.036 (0.0002)	-0.073 (0.0005)	-0.062 (0.0004)								
	MSP	0.040 (0.0004)	0.049 (0.0002)	-0.064 (0.0005)	-0.045 (0.0004)								
	KS	0.026 (0.0005)	0.031 (0.0002)	-0.074 (0.0007)	-0.090 (0.0004)								
	AD	0.028 (0.0004)	0.035 (0.0002)	-0.069 (0.0006)	-0.069 (0.0004)								
	1.0	$M^t$	-0.204 (0.0009)	0.000 (0.0000)									
ML		-0.011 (0.0002)	0.002 (0.0000)										
MSP		-0.022 (0.0001)	0.006 (0.0001)										
KS		-0.042 (0.0003)	0.003 (0.0001)										
AD		-0.033 (0.0002)	0.003 (0.0000)										

Tabela .0.5: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.106 (0.0010)	0.106 (0.0007)	0.083 (0.0007)	-0.004 (0.0011)	0.059 (0.0006)	-0.101 (0.0015)	0.036 (0.0004)	-0.187 (0.0017)	0.016 (0.0003)	-0.265 (0.0015)	0.001 (0.0000)	-0.339 (0.0016)
	ML	0.185 (0.0011)	0.185 (0.0010)	0.139 (0.0008)	0.130 (0.0013)	0.105 (0.0006)	0.093 (0.0014)	0.073 (0.0006)	0.064 (0.0013)	0.039 (0.0004)	0.024 (0.0008)	0.002 (0.0001)	-0.034 (0.0004)
	MSp	0.242 (0.0011)	0.243 (0.0010)	0.201 (0.0009)	0.178 (0.0012)	0.164 (0.0006)	0.118 (0.0012)	0.125 (0.0006)	0.058 (0.0011)	0.078 (0.0005)	-0.011 (0.0006)	0.021 (0.0001)	-0.085 (0.0005)
	KS	0.191 (0.0010)	0.190 (0.0008)	0.139 (0.0008)	0.133 (0.0012)	0.097 (0.0006)	0.090 (0.0014)	0.059 (0.0005)	0.047 (0.0012)	0.027 (0.0003)	-0.017 (0.0009)	0.006 (0.0001)	-0.103 (0.0007)
	AD	0.202 (0.0011)	0.200 (0.0008)	0.155 (0.0008)	0.143 (0.0012)	0.117 (0.0007)	0.097 (0.0013)	0.081 (0.0005)	0.051 (0.0012)	0.043 (0.0003)	-0.011 (0.0008)	0.007 (0.0001)	-0.089 (0.0006)
	0.2	$M^t$	-0.006 (0.0013)	0.082 (0.0006)	-0.037 (0.0008)	-0.037 (0.0009)	-0.071 (0.0010)	-0.143 (0.0014)	-0.104 (0.0008)	-0.234 (0.0015)	-0.136 (0.0006)	-0.319 (0.0016)	
ML		0.129 (0.0013)	0.140 (0.0009)	0.064 (0.0011)	0.063 (0.0011)	0.017 (0.0010)	0.010 (0.0013)	-0.023 (0.0008)	-0.041 (0.0012)	-0.065 (0.0007)	-0.092 (0.0007)		
MSp		0.177 (0.0012)	0.202 (0.0009)	0.126 (0.0010)	0.125 (0.0010)	0.081 (0.0009)	0.058 (0.0012)	0.037 (0.0007)	-0.015 (0.0010)	-0.014 (0.0007)	-0.092 (0.0007)		
KS		0.134 (0.0015)	0.139 (0.0008)	0.066 (0.0011)	0.064 (0.0011)	0.004 (0.0009)	0.007 (0.0013)	-0.055 (0.0008)	-0.038 (0.0014)	-0.110 (0.0007)	-0.095 (0.0011)		
AD		0.145 (0.0015)	0.155 (0.0008)	0.084 (0.0010)	0.083 (0.0011)	0.032 (0.0009)	0.021 (0.0012)	-0.018 (0.0008)	-0.031 (0.0013)	-0.068 (0.0007)	-0.093 (0.0010)		
0.4		$M^t$	-0.103 (0.0012)	0.059 (0.0005)	-0.139 (0.0012)	-0.071 (0.0010)	-0.182 (0.0011)	-0.181 (0.0014)	-0.222 (0.0011)	-0.283 (0.0014)			
	ML	0.092 (0.0012)	0.105 (0.0006)	0.012 (0.0011)	0.017 (0.0009)	-0.052 (0.0011)	-0.053 (0.0010)	-0.103 (0.0010)	-0.114 (0.0011)				
	MSp	0.118 (0.0011)	0.164 (0.0006)	0.059 (0.0010)	0.081 (0.0008)	0.002 (0.0010)	0.002 (0.0009)	-0.051 (0.0009)	-0.079 (0.0010)				
	KS	0.088 (0.0011)	0.097 (0.0007)	0.013 (0.0013)	0.003 (0.0011)	-0.060 (0.0010)	-0.060 (0.0011)	-0.135 (0.0011)	-0.114 (0.0012)				
	AD	0.095 (0.0011)	0.117 (0.0008)	0.027 (0.0012)	0.031 (0.0011)	-0.037 (0.0010)	-0.036 (0.0010)	-0.099 (0.0010)	-0.101 (0.0010)				
	0.6	$M^t$	-0.184 (0.0013)	0.036 (0.0004)	-0.232 (0.0015)	-0.104 (0.0010)	-0.281 (0.0015)	-0.225 (0.0011)					
ML		0.062 (0.0012)	0.074 (0.0006)	-0.039 (0.0011)	-0.024 (0.0008)	-0.114 (0.0009)	-0.105 (0.0010)						
MSp		0.056 (0.0010)	0.126 (0.0006)	-0.014 (0.0008)	0.036 (0.0007)	-0.079 (0.0008)	-0.053 (0.0008)						
KS		0.047 (0.0012)	0.059 (0.0003)	-0.036 (0.0013)	-0.053 (0.0007)	-0.113 (0.0014)	-0.133 (0.0010)						
AD		0.052 (0.0010)	0.081 (0.0004)	-0.029 (0.0011)	-0.017 (0.0008)	-0.100 (0.0012)	-0.098 (0.0009)						
0.8		$M^t$	-0.264 (0.0016)	0.016 (0.0002)	-0.322 (0.0018)	-0.136 (0.0007)							
	ML	0.025 (0.0009)	0.039 (0.0004)	-0.090 (0.0009)	-0.067 (0.0006)								
	MSp	-0.009 (0.0008)	0.078 (0.0004)	-0.092 (0.0008)	-0.016 (0.0006)								
	KS	-0.015 (0.0010)	0.027 (0.0003)	-0.095 (0.0011)	-0.110 (0.0005)								
	AD	-0.009 (0.0009)	0.043 (0.0003)	-0.094 (0.0010)	-0.069 (0.0005)								
	1.0	$M^t$	-0.341 (0.0015)	0.001 (0.0001)									
ML		-0.034 (0.0004)	0.002 (0.0001)										
MSp		-0.084 (0.0005)	0.021 (0.0002)										
KS		-0.105 (0.0006)	0.006 (0.0001)										
AD		-0.091 (0.0006)	0.007 (0.0001)										

Tabela .0.6: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 25$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.089 (0.0006)	0.090 (0.0006)	0.077 (0.0006)	0.011 (0.0009)	0.058 (0.0005)	-0.044 (0.0010)	0.036 (0.0003)	-0.093 (0.0012)	0.015 (0.0002)	-0.152 (0.0010)	0.001 (0.0000)	-0.216 (0.0010)
	ML	0.120 (0.0007)	0.121 (0.0007)	0.092 (0.0006)	0.079 (0.0007)	0.078 (0.0005)	0.067 (0.0009)	0.060 (0.0004)	0.058 (0.0008)	0.034 (0.0002)	0.034 (0.0006)	0.001 (0.0000)	-0.017 (0.0002)
	MSP	0.154 (0.0007)	0.154 (0.0008)	0.129 (0.0006)	0.113 (0.0007)	0.112 (0.0006)	0.090 (0.0008)	0.089 (0.0004)	0.063 (0.0007)	0.058 (0.0003)	0.019 (0.0006)	0.010 (0.0001)	-0.044 (0.0003)
	KS	0.134 (0.0006)	0.134 (0.0007)	0.101 (0.0007)	0.093 (0.0009)	0.084 (0.0006)	0.072 (0.0011)	0.059 (0.0004)	0.050 (0.0009)	0.027 (0.0002)	0.010 (0.0008)	0.004 (0.0001)	-0.069 (0.0004)
	AD	0.134 (0.0006)	0.135 (0.0007)	0.105 (0.0007)	0.095 (0.0009)	0.087 (0.0006)	0.074 (0.0010)	0.066 (0.0004)	0.051 (0.0009)	0.036 (0.0002)	0.013 (0.0007)	0.004 (0.0001)	-0.056 (0.0004)
0.2	$M^t$	0.011 (0.0008)	0.078 (0.0006)	-0.012 (0.0008)	-0.012 (0.0009)	-0.043 (0.0007)	-0.078 (0.0010)	-0.079 (0.0007)	-0.138 (0.0011)	-0.118 (0.0005)	-0.210 (0.0013)		
	ML	0.079 (0.0008)	0.093 (0.0006)	0.031 (0.0007)	0.031 (0.0006)	0.005 (0.0007)	-0.001 (0.0010)	-0.020 (0.0005)	-0.030 (0.0007)	-0.057 (0.0005)	-0.071 (0.0006)		
	MSP	0.113 (0.0008)	0.129 (0.0007)	0.074 (0.0007)	0.074 (0.0006)	0.046 (0.0007)	0.035 (0.0010)	0.016 (0.0005)	-0.008 (0.0006)	-0.027 (0.0005)	-0.065 (0.0006)		
	KS	0.094 (0.0008)	0.102 (0.0006)	0.035 (0.0007)	0.034 (0.0008)	-0.001 (0.0008)	0.002 (0.0010)	-0.045 (0.0007)	-0.027 (0.0008)	-0.102 (0.0004)	-0.071 (0.0009)		
	AD	0.096 (0.0008)	0.105 (0.0006)	0.045 (0.0007)	0.045 (0.0009)	0.016 (0.0007)	0.012 (0.0010)	-0.018 (0.0006)	-0.021 (0.0008)	-0.065 (0.0004)	-0.071 (0.0008)		
0.4	$M^t$	-0.044 (0.0012)	0.057 (0.0004)	-0.078 (0.0009)	-0.044 (0.0006)	-0.119 (0.0008)	-0.121 (0.0010)	-0.168 (0.0011)	-0.192 (0.0012)				
	ML	0.066 (0.0010)	0.077 (0.0005)	0.000 (0.0008)	0.005 (0.0008)	-0.041 (0.0009)	-0.041 (0.0007)	-0.082 (0.0007)	-0.088 (0.0007)				
	MSP	0.089 (0.0009)	0.111 (0.0006)	0.036 (0.0008)	0.047 (0.0008)	-0.006 (0.0008)	-0.006 (0.0006)	-0.053 (0.0006)	-0.067 (0.0006)				
	KS	0.073 (0.0009)	0.083 (0.0005)	0.003 (0.0011)	-0.002 (0.0007)	-0.047 (0.0008)	-0.049 (0.0008)	-0.108 (0.0008)	-0.090 (0.0009)				
	AD	0.075 (0.0009)	0.087 (0.0005)	0.012 (0.0010)	0.015 (0.0007)	-0.030 (0.0008)	-0.032 (0.0008)	-0.081 (0.0007)	-0.081 (0.0008)				
0.6	$M^t$	-0.092 (0.0009)	0.036 (0.0003)	-0.140 (0.0010)	-0.080 (0.0005)	-0.193 (0.0010)	-0.169 (0.0010)						
	ML	0.057 (0.0009)	0.059 (0.0004)	-0.030 (0.0009)	-0.022 (0.0006)	-0.087 (0.0008)	-0.080 (0.0007)						
	MSP	0.062 (0.0009)	0.090 (0.0004)	-0.007 (0.0008)	0.015 (0.0006)	-0.066 (0.0007)	-0.051 (0.0006)						
	KS	0.050 (0.0008)	0.059 (0.0004)	-0.027 (0.0009)	-0.044 (0.0005)	-0.089 (0.0009)	-0.107 (0.0008)						
	AD	0.051 (0.0008)	0.066 (0.0004)	-0.022 (0.0008)	-0.019 (0.0005)	-0.080 (0.0008)	-0.082 (0.0008)						
0.8	$M^t$	-0.150 (0.0010)	0.015 (0.0002)	-0.211 (0.0012)	-0.119 (0.0007)								
	ML	0.036 (0.0006)	0.034 (0.0002)	-0.073 (0.0006)	-0.056 (0.0005)								
	MSP	0.020 (0.0005)	0.058 (0.0003)	-0.067 (0.0005)	-0.026 (0.0005)								
	KS	0.010 (0.0007)	0.027 (0.0002)	-0.072 (0.0009)	-0.102 (0.0005)								
	AD	0.014 (0.0007)	0.036 (0.0003)	-0.072 (0.0008)	-0.065 (0.0005)								
1.0	$M^t$	-0.216 (0.0011)	0.001 (0.0000)										
	ML	-0.017 (0.0002)	0.001 (0.0000)										
	MSP	-0.044 (0.0003)	0.010 (0.0001)										
	KS	-0.069 (0.0004)	0.004 (0.0001)										
	AD	-0.055 (0.0003)	0.004 (0.0001)										

Tabela .0.7: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 50$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.068 (0.0005)	0.068 (0.0004)	0.063 (0.0004)	0.010 (0.0008)	0.053 (0.0004)	-0.014 (0.0010)	0.036 (0.0003)	-0.043 (0.0007)	0.016 (0.0002)	-0.091 (0.0006)	0.000 (0.0000)	-0.153 (0.0007)
	ML	0.084 (0.0005)	0.084 (0.0005)	0.066 (0.0004)	0.054 (0.0007)	0.059 (0.0004)	0.054 (0.0007)	0.048 (0.0003)	0.047 (0.0007)	0.030 (0.0002)	0.034 (0.0004)	0.001 (0.0000)	-0.010 (0.0001)
	MSp	0.103 (0.0005)	0.103 (0.0005)	0.087 (0.0005)	0.075 (0.0007)	0.079 (0.0004)	0.068 (0.0007)	0.067 (0.0003)	0.054 (0.0007)	0.046 (0.0002)	0.030 (0.0004)	0.006 (0.0000)	-0.026 (0.0001)
	KS	0.097 (0.0005)	0.097 (0.0005)	0.074 (0.0005)	0.067 (0.0008)	0.071 (0.0005)	0.059 (0.0008)	0.058 (0.0004)	0.046 (0.0007)	0.029 (0.0002)	0.018 (0.0005)	0.003 (0.0001)	-0.050 (0.0003)
	AD	0.094 (0.0005)	0.095 (0.0005)	0.073 (0.0005)	0.066 (0.0007)	0.066 (0.0004)	0.057 (0.0008)	0.055 (0.0003)	0.045 (0.0007)	0.033 (0.0002)	0.019 (0.0005)	0.002 (0.0000)	-0.038 (0.0002)
	0.2	$M^t$	0.010 (0.0007)	0.063 (0.0004)	-0.002 (0.0007)	-0.001 (0.0007)	-0.024 (0.0007)	-0.038 (0.0009)	-0.057 (0.0005)	-0.085 (0.0007)	-0.100 (0.0006)	-0.148 (0.0008)	
ML		0.054 (0.0007)	0.066 (0.0004)	0.013 (0.0006)	0.014 (0.0007)	0.001 (0.0005)	-0.001 (0.0006)	-0.015 (0.0006)	-0.019 (0.0006)	-0.046 (0.0003)	-0.059 (0.0005)		
MSp		0.075 (0.0007)	0.087 (0.0004)	0.042 (0.0006)	0.042 (0.0007)	0.028 (0.0005)	0.023 (0.0006)	0.008 (0.0006)	-0.003 (0.0005)	-0.028 (0.0003)	-0.053 (0.0005)		
KS		0.067 (0.0007)	0.074 (0.0005)	0.017 (0.0007)	0.018 (0.0008)	-0.001 (0.0008)	0.002 (0.0009)	-0.033 (0.0005)	-0.021 (0.0006)	-0.089 (0.0004)	-0.059 (0.0006)		
AD		0.066 (0.0007)	0.073 (0.0004)	0.023 (0.0007)	0.024 (0.0007)	0.009 (0.0007)	0.008 (0.0009)	-0.014 (0.0005)	-0.016 (0.0006)	-0.056 (0.0004)	-0.056 (0.0005)		
0.4		$M^t$	-0.014 (0.0007)	0.053 (0.0003)	-0.038 (0.0006)	-0.024 (0.0006)	-0.074 (0.0007)	-0.075 (0.0007)	-0.125 (0.0008)	-0.137 (0.0009)			
	ML	0.052 (0.0006)	0.059 (0.0004)	0.000 (0.0007)	0.001 (0.0006)	-0.025 (0.0006)	-0.025 (0.0006)	-0.059 (0.0006)	-0.064 (0.0006)				
	MSp	0.066 (0.0007)	0.079 (0.0005)	0.024 (0.0007)	0.029 (0.0006)	-0.003 (0.0005)	-0.004 (0.0006)	-0.044 (0.0005)	-0.052 (0.0005)				
	KS	0.060 (0.0007)	0.071 (0.0005)	0.002 (0.0006)	-0.001 (0.0006)	-0.030 (0.0007)	-0.030 (0.0007)	-0.081 (0.0006)	-0.068 (0.0006)				
	AD	0.058 (0.0006)	0.067 (0.0004)	0.008 (0.0006)	0.009 (0.0006)	-0.019 (0.0007)	-0.020 (0.0007)	-0.062 (0.0006)	-0.061 (0.0005)				
	0.6	$M^t$	-0.042 (0.0008)	0.037 (0.0003)	-0.082 (0.0007)	-0.057 (0.0005)	-0.137 (0.0007)	-0.125 (0.0007)					
ML		0.047 (0.0005)	0.048 (0.0004)	-0.019 (0.0006)	-0.014 (0.0004)	-0.064 (0.0006)	-0.060 (0.0005)						
MSp		0.054 (0.0005)	0.066 (0.0004)	-0.003 (0.0005)	0.009 (0.0004)	-0.052 (0.0006)	-0.044 (0.0005)						
KS		0.047 (0.0006)	0.059 (0.0004)	-0.019 (0.0007)	-0.032 (0.0005)	-0.067 (0.0005)	-0.080 (0.0006)						
AD		0.046 (0.0006)	0.055 (0.0004)	-0.013 (0.0007)	-0.013 (0.0004)	-0.061 (0.0005)	-0.062 (0.0005)						
0.8		$M^t$	-0.091 (0.0007)	0.016 (0.0002)	-0.149 (0.0009)	-0.101 (0.0005)							
	ML	0.033 (0.0004)	0.030 (0.0002)	-0.058 (0.0005)	-0.046 (0.0003)								
	MSp	0.029 (0.0004)	0.045 (0.0002)	-0.052 (0.0004)	-0.028 (0.0003)								
	KS	0.019 (0.0005)	0.029 (0.0002)	-0.060 (0.0007)	-0.089 (0.0004)								
	AD	0.020 (0.0004)	0.033 (0.0002)	-0.056 (0.0006)	-0.056 (0.0003)								
	1.0	$M^t$	-0.153 (0.0008)	0.000 (0.0000)									
ML		-0.010 (0.0001)	0.001 (0.0000)										
MSp		-0.026 (0.0001)	0.006 (0.0000)										
KS		-0.049 (0.0003)	0.003 (0.0000)										
AD		-0.038 (0.0003)	0.002 (0.0000)										

Tabela .0.8: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 100$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.049 (0.0003)	0.049 (0.0003)	0.046 (0.0004)	0.004 (0.0006)	0.043 (0.0003)	-0.003 (0.0005)	0.035 (0.0002)	-0.013 (0.0006)	0.017 (0.0001)	-0.048 (0.0006)	0.000 (0.0000)	-0.108 (0.0005)
	ML	0.059 (0.0003)	0.059 (0.0003)	0.046 (0.0003)	0.037 (0.0005)	0.043 (0.0003)	0.038 (0.0005)	0.037 (0.0002)	0.037 (0.0004)	0.025 (0.0002)	0.029 (0.0004)	0.000 (0.0000)	-0.006 (0.0001)
	MSP	0.069 (0.0003)	0.069 (0.0003)	0.057 (0.0003)	0.048 (0.0006)	0.054 (0.0004)	0.046 (0.0005)	0.047 (0.0002)	0.042 (0.0004)	0.035 (0.0002)	0.030 (0.0004)	0.003 (0.0000)	-0.015 (0.0001)
	KS	0.069 (0.0004)	0.069 (0.0003)	0.052 (0.0004)	0.047 (0.0006)	0.055 (0.0003)	0.044 (0.0005)	0.054 (0.0003)	0.041 (0.0004)	0.032 (0.0002)	0.023 (0.0005)	0.002 (0.0000)	-0.035 (0.0002)
	AD	0.066 (0.0004)	0.066 (0.0003)	0.050 (0.0004)	0.045 (0.0005)	0.047 (0.0003)	0.041 (0.0005)	0.044 (0.0002)	0.037 (0.0004)	0.030 (0.0002)	0.023 (0.0004)	0.002 (0.0000)	-0.026 (0.0002)
	0.2	$M^t$	0.003 (0.0006)	0.046 (0.0003)	0.000 (0.0005)	0.001 (0.0006)	-0.009 (0.0004)	-0.013 (0.0005)	-0.035 (0.0005)	-0.045 (0.0007)	-0.079 (0.0004)	-0.106 (0.0005)	
ML		0.036 (0.0004)	0.046 (0.0002)	0.005 (0.0005)	0.004 (0.0006)	0.001 (0.0005)	0.000 (0.0006)	-0.009 (0.0004)	-0.010 (0.0004)	-0.035 (0.0003)	-0.043 (0.0003)		
MSP		0.047 (0.0004)	0.056 (0.0003)	0.022 (0.0005)	0.021 (0.0006)	0.017 (0.0005)	0.015 (0.0006)	0.005 (0.0004)	0.000 (0.0004)	-0.025 (0.0003)	-0.039 (0.0003)		
KS		0.046 (0.0005)	0.052 (0.0004)	0.005 (0.0005)	0.005 (0.0006)	0.000 (0.0005)	0.001 (0.0006)	-0.021 (0.0005)	-0.013 (0.0006)	-0.073 (0.0003)	-0.049 (0.0005)		
AD		0.044 (0.0005)	0.050 (0.0003)	0.009 (0.0005)	0.009 (0.0006)	0.005 (0.0005)	0.005 (0.0005)	-0.007 (0.0005)	-0.008 (0.0006)	-0.045 (0.0003)	-0.044 (0.0004)		
0.4		$M^t$	-0.002 (0.0007)	0.043 (0.0003)	-0.012 (0.0005)	-0.009 (0.0004)	-0.040 (0.0005)	-0.040 (0.0005)	-0.089 (0.0004)	-0.097 (0.0006)			
	ML	0.037 (0.0005)	0.043 (0.0003)	0.000 (0.0006)	0.001 (0.0006)	-0.013 (0.0004)	-0.013 (0.0005)	-0.042 (0.0005)	-0.045 (0.0004)				
	MSP	0.045 (0.0005)	0.054 (0.0003)	0.014 (0.0006)	0.017 (0.0006)	-0.001 (0.0004)	-0.001 (0.0005)	-0.034 (0.0004)	-0.039 (0.0004)				
	KS	0.045 (0.0006)	0.056 (0.0004)	0.001 (0.0006)	0.000 (0.0005)	-0.014 (0.0005)	-0.015 (0.0005)	-0.059 (0.0004)	-0.049 (0.0005)				
	AD	0.042 (0.0006)	0.048 (0.0003)	0.005 (0.0006)	0.005 (0.0005)	-0.009 (0.0005)	-0.009 (0.0005)	-0.046 (0.0003)	-0.044 (0.0004)				
	0.6	$M^t$	-0.014 (0.0007)	0.034 (0.0002)	-0.044 (0.0006)	-0.034 (0.0005)	-0.097 (0.0007)	-0.090 (0.0005)					
ML		0.037 (0.0005)	0.036 (0.0002)	-0.010 (0.0005)	-0.008 (0.0005)	-0.046 (0.0004)	-0.042 (0.0003)						
MSP		0.042 (0.0005)	0.047 (0.0002)	0.001 (0.0005)	0.006 (0.0004)	-0.040 (0.0003)	-0.035 (0.0003)						
KS		0.040 (0.0006)	0.054 (0.0003)	-0.012 (0.0006)	-0.020 (0.0005)	-0.048 (0.0005)	-0.059 (0.0004)						
AD		0.036 (0.0006)	0.043 (0.0003)	-0.007 (0.0006)	-0.007 (0.0005)	-0.044 (0.0005)	-0.046 (0.0004)						
0.8		$M^t$	-0.049 (0.0006)	0.016 (0.0001)	-0.105 (0.0005)	-0.079 (0.0005)							
	ML	0.030 (0.0004)	0.026 (0.0001)	-0.044 (0.0004)	-0.035 (0.0003)								
	MSP	0.030 (0.0004)	0.035 (0.0002)	-0.040 (0.0004)	-0.025 (0.0003)								
	KS	0.023 (0.0004)	0.032 (0.0002)	-0.049 (0.0004)	-0.073 (0.0004)								
	AD	0.022 (0.0004)	0.029 (0.0002)	-0.043 (0.0003)	-0.045 (0.0003)								
	1.0	$M^t$	-0.108 (0.0006)	0.000 (0.0000)									
ML		-0.006 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
MSP		-0.015 (0.0001)	0.003 (0.0000)										
KS		-0.036 (0.0002)	0.002 (0.0000)										
AD		-0.026 (0.0002)	0.002 (0.0000)										

Tabela .0.9: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	M <sup>t</sup>	0.100 (0.0007)	0.100 (0.0007)	0.083 (0.0007)	0.012 (0.0010)	0.062 (0.0005)	-0.055 (0.0010)	0.041 (0.0004)	-0.117 (0.0013)	0.018 (0.0003)	-0.179 (0.0012)	0.001 (0.0000)	-0.242 (0.0011)
	ML	0.140 (0.0007)	0.141 (0.0009)	0.110 (0.0007)	0.092 (0.0009)	0.088 (0.0006)	0.067 (0.0010)	0.064 (0.0005)	0.050 (0.0010)	0.035 (0.0003)	0.025 (0.0008)	0.000 (0.0000)	-0.024 (0.0003)
	MSp	0.188 (0.0007)	0.189 (0.0009)	0.162 (0.0007)	0.136 (0.0009)	0.138 (0.0006)	0.091 (0.0010)	0.109 (0.0005)	0.045 (0.0009)	0.071 (0.0004)	-0.007 (0.0007)	0.016 (0.0001)	-0.073 (0.0004)
	KS	0.157 (0.0009)	0.158 (0.0007)	0.118 (0.0006)	0.106 (0.0011)	0.088 (0.0005)	0.078 (0.0011)	0.057 (0.0004)	0.042 (0.0013)	0.026 (0.0003)	-0.010 (0.0008)	0.005 (0.0001)	-0.094 (0.0006)
	AD	0.161 (0.0008)	0.162 (0.0007)	0.127 (0.0007)	0.112 (0.0011)	0.101 (0.0006)	0.080 (0.0010)	0.074 (0.0005)	0.043 (0.0011)	0.040 (0.0003)	-0.006 (0.0008)	0.006 (0.0001)	-0.080 (0.0005)
	0.2	M <sup>t</sup>	0.011 (0.0009)	0.082 (0.0005)	-0.012 (0.0009)	-0.014 (0.0009)	-0.044 (0.0008)	-0.090 (0.0013)	-0.078 (0.0008)	-0.161 (0.0014)	-0.114 (0.0007)	-0.229 (0.0013)	
ML		0.092 (0.0012)	0.110 (0.0007)	0.046 (0.0009)	0.045 (0.0009)	0.012 (0.0008)	0.005 (0.0010)	-0.017 (0.0007)	-0.029 (0.0012)	-0.053 (0.0005)	-0.075 (0.0009)		
MSp		0.136 (0.0011)	0.163 (0.0007)	0.101 (0.0008)	0.100 (0.0008)	0.068 (0.0008)	0.046 (0.0010)	0.035 (0.0006)	-0.010 (0.0010)	-0.009 (0.0004)	-0.080 (0.0007)		
KS		0.106 (0.0011)	0.117 (0.0005)	0.052 (0.0009)	0.050 (0.0010)	0.004 (0.0008)	0.012 (0.0012)	-0.048 (0.0007)	-0.026 (0.0011)	-0.106 (0.0007)	-0.075 (0.0009)		
AD		0.111 (0.0010)	0.126 (0.0005)	0.066 (0.0008)	0.065 (0.0010)	0.029 (0.0008)	0.023 (0.0011)	-0.012 (0.0007)	-0.023 (0.0010)	-0.060 (0.0007)	-0.076 (0.0009)		
0.4		M <sup>t</sup>	-0.055 (0.0013)	0.063 (0.0005)	-0.090 (0.0010)	-0.043 (0.0009)	-0.129 (0.0012)	-0.130 (0.0009)	-0.173 (0.0011)	-0.208 (0.0014)			
	ML	0.070 (0.0013)	0.088 (0.0006)	0.004 (0.0011)	0.013 (0.0009)	-0.040 (0.0010)	-0.039 (0.0009)	-0.082 (0.0009)	-0.089 (0.0010)				
	MSp	0.093 (0.0011)	0.139 (0.0007)	0.046 (0.0010)	0.069 (0.0008)	0.004 (0.0009)	0.004 (0.0008)	-0.042 (0.0008)	-0.066 (0.0008)				
	KS	0.076 (0.0010)	0.088 (0.0006)	0.011 (0.0010)	0.003 (0.0009)	-0.048 (0.0012)	-0.049 (0.0011)	-0.116 (0.0010)	-0.091 (0.0011)				
	AD	0.079 (0.0010)	0.101 (0.0006)	0.022 (0.0010)	0.029 (0.0009)	-0.026 (0.0010)	-0.027 (0.0010)	-0.079 (0.0008)	-0.081 (0.0009)				
	0.6	M <sup>t</sup>	-0.118 (0.0014)	0.041 (0.0004)	-0.160 (0.0012)	-0.077 (0.0007)	-0.207 (0.0014)	-0.172 (0.0011)					
ML		0.049 (0.0010)	0.064 (0.0005)	-0.030 (0.0011)	-0.017 (0.0008)	-0.090 (0.0010)	-0.084 (0.0009)						
MSp		0.045 (0.0009)	0.109 (0.0006)	-0.011 (0.0010)	0.034 (0.0007)	-0.066 (0.0009)	-0.044 (0.0007)						
KS		0.042 (0.0012)	0.057 (0.0004)	-0.027 (0.0012)	-0.048 (0.0007)	-0.094 (0.0011)	-0.114 (0.0009)						
AD		0.043 (0.0012)	0.074 (0.0004)	-0.022 (0.0011)	-0.011 (0.0007)	-0.082 (0.0010)	-0.078 (0.0008)						
0.8		M <sup>t</sup>	-0.181 (0.0013)	0.018 (0.0003)	-0.231 (0.0015)	-0.113 (0.0008)							
	ML	0.025 (0.0008)	0.035 (0.0003)	-0.073 (0.0008)	-0.053 (0.0006)								
	MSp	-0.008 (0.0007)	0.071 (0.0003)	-0.078 (0.0007)	-0.009 (0.0006)								
	KS	-0.011 (0.0010)	0.026 (0.0003)	-0.076 (0.0011)	-0.104 (0.0006)								
	AD	-0.007 (0.0009)	0.041 (0.0003)	-0.077 (0.0009)	-0.059 (0.0007)								
	1.0	M <sup>t</sup>	-0.243 (0.0011)	0.001 (0.0000)									
ML		-0.024 (0.0004)	0.000 (0.0000)										
MSp		-0.073 (0.0004)	0.016 (0.0001)										
KS		-0.093 (0.0005)	0.005 (0.0001)										
AD		-0.079 (0.0005)	0.006 (0.0001)										



Tabela .0.10: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 25$ .  
Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.071 (0.0005)	0.071 (0.0004)	0.065 (0.0005)	0.011 (0.0007)	0.054 (0.0004)	-0.014 (0.0009)	0.038 (0.0003)	-0.045 (0.0009)	0.017 (0.0002)	-0.091 (0.0008)	0.000 (0.0000)	-0.153 (0.0007)
	ML	0.088 (0.0005)	0.088 (0.0005)	0.069 (0.0005)	0.050 (0.0008)	0.059 (0.0004)	0.043 (0.0008)	0.047 (0.0003)	0.040 (0.0008)	0.028 (0.0002)	0.026 (0.0005)	0.000 (0.0000)	-0.011 (0.0001)
	MSP	0.113 (0.0006)	0.113 (0.0006)	0.096 (0.0006)	0.077 (0.0008)	0.085 (0.0005)	0.059 (0.0008)	0.068 (0.0004)	0.038 (0.0007)	0.045 (0.0003)	0.006 (0.0005)	0.007 (0.0001)	-0.037 (0.0002)
	KS	0.104 (0.0005)	0.105 (0.0005)	0.079 (0.0005)	0.067 (0.0008)	0.072 (0.0004)	0.057 (0.0008)	0.058 (0.0004)	0.042 (0.0008)	0.028 (0.0002)	0.011 (0.0006)	0.004 (0.0001)	-0.062 (0.0004)
	AD	0.101 (0.0005)	0.102 (0.0005)	0.078 (0.0005)	0.067 (0.0008)	0.069 (0.0004)	0.056 (0.0009)	0.057 (0.0003)	0.040 (0.0007)	0.033 (0.0002)	0.012 (0.0005)	0.003 (0.0000)	-0.049 (0.0003)
	0.2	$M^t$	0.011 (0.0008)	0.065 (0.0004)	0.000 (0.0008)	0.001 (0.0007)	-0.022 (0.0006)	-0.038 (0.0008)	-0.052 (0.0007)	-0.082 (0.0009)	-0.093 (0.0005)	-0.145 (0.0010)	
ML		0.050 (0.0009)	0.069 (0.0004)	0.017 (0.0007)	0.016 (0.0006)	0.003 (0.0007)	0.000 (0.0008)	-0.014 (0.0007)	-0.021 (0.0006)	-0.047 (0.0004)	-0.063 (0.0006)		
MSP		0.077 (0.0009)	0.096 (0.0005)	0.051 (0.0007)	0.050 (0.0006)	0.034 (0.0007)	0.023 (0.0007)	0.011 (0.0007)	-0.014 (0.0006)	-0.030 (0.0004)	-0.070 (0.0006)		
KS		0.068 (0.0008)	0.078 (0.0005)	0.023 (0.0007)	0.024 (0.0008)	-0.001 (0.0006)	0.005 (0.0009)	-0.036 (0.0006)	-0.017 (0.0007)	-0.095 (0.0004)	-0.054 (0.0008)		
AD		0.067 (0.0008)	0.078 (0.0005)	0.030 (0.0007)	0.031 (0.0008)	0.012 (0.0006)	0.011 (0.0008)	-0.010 (0.0006)	-0.012 (0.0007)	-0.053 (0.0004)	-0.053 (0.0007)		
0.4		$M^t$	-0.017 (0.0010)	0.053 (0.0004)	-0.037 (0.0008)	-0.020 (0.0006)	-0.073 (0.0008)	-0.071 (0.0008)	-0.119 (0.0008)	-0.133 (0.0009)			
	ML	0.044 (0.0008)	0.059 (0.0004)	0.000 (0.0008)	0.002 (0.0007)	-0.025 (0.0007)	-0.026 (0.0008)	-0.058 (0.0005)	-0.065 (0.0006)				
	MSP	0.060 (0.0008)	0.085 (0.0005)	0.023 (0.0007)	0.033 (0.0007)	-0.009 (0.0006)	-0.010 (0.0007)	-0.048 (0.0005)	-0.069 (0.0005)				
	KS	0.055 (0.0009)	0.072 (0.0004)	0.006 (0.0009)	0.001 (0.0007)	-0.031 (0.0008)	-0.031 (0.0008)	-0.085 (0.0006)	-0.065 (0.0008)				
	AD	0.053 (0.0009)	0.068 (0.0004)	0.013 (0.0008)	0.014 (0.0007)	-0.018 (0.0008)	-0.017 (0.0008)	-0.059 (0.0005)	-0.058 (0.0007)				
	0.6	$M^t$	-0.044 (0.0009)	0.038 (0.0003)	-0.083 (0.0007)	-0.052 (0.0006)	-0.134 (0.0009)	-0.120 (0.0009)					
ML		0.039 (0.0009)	0.047 (0.0003)	-0.020 (0.0008)	-0.015 (0.0006)	-0.065 (0.0006)	-0.059 (0.0006)						
MSP		0.038 (0.0008)	0.068 (0.0003)	-0.013 (0.0007)	0.010 (0.0006)	-0.069 (0.0006)	-0.049 (0.0006)						
KS		0.043 (0.0008)	0.057 (0.0003)	-0.017 (0.0008)	-0.036 (0.0006)	-0.066 (0.0008)	-0.087 (0.0007)						
AD		0.041 (0.0007)	0.057 (0.0003)	-0.013 (0.0007)	-0.010 (0.0005)	-0.059 (0.0007)	-0.060 (0.0007)						
0.8		$M^t$	-0.092 (0.0007)	0.017 (0.0002)	-0.146 (0.0009)	-0.093 (0.0005)							
	ML	0.026 (0.0006)	0.029 (0.0002)	-0.064 (0.0005)	-0.046 (0.0005)								
	MSP	0.006 (0.0005)	0.045 (0.0003)	-0.071 (0.0005)	-0.028 (0.0004)								
	KS	0.011 (0.0006)	0.028 (0.0003)	-0.054 (0.0005)	-0.096 (0.0004)								
	AD	0.012 (0.0006)	0.033 (0.0002)	-0.054 (0.0005)	-0.054 (0.0003)								
	1.0	$M^t$	-0.152 (0.0009)	0.000 (0.0000)									
ML		-0.012 (0.0002)	0.000 (0.0000)										
MSP		-0.037 (0.0002)	0.007 (0.0001)										
KS		-0.061 (0.0004)	0.004 (0.0001)										
AD		-0.048 (0.0003)	0.003 (0.0000)										

Tabela .0.11: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 50$ .  
Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.051 (0.0004)	0.051 (0.0004)	0.047 (0.0003)	0.004 (0.0006)	0.043 (0.0003)	-0.002 (0.0007)	0.034 (0.0003)	-0.014 (0.0007)	0.017 (0.0002)	-0.049 (0.0005)	0.000 (0.0000)	-0.108 (0.0005)
	ML	0.061 (0.0004)	0.061 (0.0004)	0.047 (0.0003)	0.031 (0.0006)	0.043 (0.0003)	0.033 (0.0005)	0.034 (0.0003)	0.028 (0.0005)	0.022 (0.0002)	0.020 (0.0005)	0.000 (0.0000)	-0.007 (0.0001)
	MSp	0.075 (0.0005)	0.075 (0.0004)	0.062 (0.0004)	0.047 (0.0006)	0.057 (0.0003)	0.042 (0.0005)	0.044 (0.0003)	0.026 (0.0005)	0.029 (0.0001)	0.007 (0.0005)	0.004 (0.0000)	-0.021 (0.0001)
	KS	0.075 (0.0004)	0.075 (0.0004)	0.054 (0.0004)	0.046 (0.0006)	0.057 (0.0004)	0.043 (0.0008)	0.055 (0.0003)	0.037 (0.0007)	0.030 (0.0002)	0.017 (0.0005)	0.003 (0.0000)	-0.044 (0.0003)
	AD	0.071 (0.0004)	0.072 (0.0004)	0.052 (0.0003)	0.044 (0.0006)	0.049 (0.0003)	0.040 (0.0007)	0.044 (0.0002)	0.033 (0.0006)	0.029 (0.0002)	0.016 (0.0005)	0.002 (0.0000)	-0.033 (0.0002)
	0.2	$M^t$	0.004 (0.0006)	0.047 (0.0003)	0.003 (0.0006)	0.001 (0.0006)	-0.008 (0.0005)	-0.012 (0.0006)	-0.032 (0.0005)	-0.044 (0.0006)	-0.074 (0.0004)	-0.103 (0.0006)	
ML		0.032 (0.0005)	0.048 (0.0004)	0.005 (0.0006)	0.004 (0.0005)	0.002 (0.0005)	0.000 (0.0006)	-0.008 (0.0005)	-0.009 (0.0005)	-0.040 (0.0004)	-0.057 (0.0004)		
MSp		0.048 (0.0005)	0.063 (0.0004)	0.025 (0.0005)	0.025 (0.0005)	0.019 (0.0005)	0.013 (0.0006)	0.003 (0.0004)	-0.008 (0.0005)	-0.045 (0.0004)	-0.075 (0.0004)		
KS		0.046 (0.0005)	0.055 (0.0004)	0.010 (0.0006)	0.008 (0.0006)	0.000 (0.0005)	0.003 (0.0006)	-0.024 (0.0005)	-0.010 (0.0007)	-0.081 (0.0004)	-0.044 (0.0006)		
AD		0.044 (0.0005)	0.052 (0.0003)	0.014 (0.0006)	0.012 (0.0006)	0.008 (0.0005)	0.007 (0.0006)	-0.006 (0.0005)	-0.006 (0.0006)	-0.044 (0.0003)	-0.041 (0.0005)		
0.4		$M^t$	-0.002 (0.0007)	0.043 (0.0003)	-0.012 (0.0006)	-0.008 (0.0005)	-0.040 (0.0005)	-0.040 (0.0005)	-0.086 (0.0007)	-0.092 (0.0007)			
	ML	0.031 (0.0005)	0.043 (0.0003)	0.001 (0.0006)	0.002 (0.0004)	-0.011 (0.0006)	-0.010 (0.0005)	-0.040 (0.0004)	-0.042 (0.0004)				
	MSp	0.041 (0.0005)	0.057 (0.0003)	0.014 (0.0005)	0.019 (0.0004)	-0.012 (0.0005)	-0.011 (0.0004)	-0.051 (0.0004)	-0.070 (0.0004)				
	KS	0.043 (0.0007)	0.058 (0.0004)	0.003 (0.0006)	0.001 (0.0006)	-0.016 (0.0005)	-0.016 (0.0005)	-0.063 (0.0005)	-0.047 (0.0006)				
	AD	0.039 (0.0006)	0.049 (0.0003)	0.007 (0.0006)	0.008 (0.0005)	-0.008 (0.0005)	-0.008 (0.0005)	-0.045 (0.0004)	-0.042 (0.0005)				
	0.6	$M^t$	-0.014 (0.0006)	0.034 (0.0002)	-0.043 (0.0005)	-0.031 (0.0005)	-0.094 (0.0007)	-0.085 (0.0006)					
ML		0.028 (0.0005)	0.035 (0.0002)	-0.009 (0.0006)	-0.008 (0.0005)	-0.042 (0.0005)	-0.040 (0.0004)						
MSp		0.026 (0.0005)	0.045 (0.0003)	-0.008 (0.0006)	0.003 (0.0005)	-0.070 (0.0005)	-0.050 (0.0003)						
KS		0.037 (0.0007)	0.054 (0.0003)	-0.009 (0.0006)	-0.024 (0.0005)	-0.047 (0.0005)	-0.062 (0.0005)						
AD		0.033 (0.0006)	0.044 (0.0003)	-0.005 (0.0005)	-0.006 (0.0005)	-0.042 (0.0005)	-0.044 (0.0005)						
0.8		$M^t$	-0.049 (0.0005)	0.017 (0.0002)	-0.102 (0.0006)	-0.073 (0.0005)							
	ML	0.019 (0.0005)	0.022 (0.0002)	-0.057 (0.0004)	-0.040 (0.0004)								
	MSp	0.006 (0.0005)	0.029 (0.0002)	-0.075 (0.0004)	-0.044 (0.0004)								
	KS	0.017 (0.0005)	0.030 (0.0002)	-0.043 (0.0006)	-0.080 (0.0004)								
	AD	0.017 (0.0005)	0.029 (0.0002)	-0.040 (0.0004)	-0.043 (0.0003)								
	1.0	$M^t$	-0.108 (0.0006)	0.000 (0.0000)									
ML		-0.007 (0.0001)	0.000 (0.0000)										
MSp		-0.021 (0.0001)	0.004 (0.0000)										
KS		-0.045 (0.0003)	0.003 (0.0000)										
AD		-0.033 (0.0002)	0.002 (0.0000)										

Tabela .0.12: Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 100$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés.

$p$	Estimador	$q$											
		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
		$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$	$\tilde{p}_\bullet$	$\tilde{q}_\bullet$
0.0	$M^t$	0.036 (0.0002)	0.036 (0.0003)	0.034 (0.0002)	0.001 (0.0005)	0.032 (0.0002)	0.000 (0.0005)	0.028 (0.0002)	-0.002 (0.0005)	0.017 (0.0001)	-0.021 (0.0005)	0.000 (0.0000)	-0.076 (0.0004)
	ML	0.043 (0.0003)	0.043 (0.0003)	0.033 (0.0002)	0.021 (0.0004)	0.030 (0.0002)	0.022 (0.0004)	0.025 (0.0002)	0.022 (0.0003)	0.017 (0.0001)	0.015 (0.0003)	0.000 (0.0000)	-0.004 (0.0001)
	MSP	0.050 (0.0003)	0.050 (0.0003)	0.041 (0.0002)	0.029 (0.0004)	0.038 (0.0002)	0.028 (0.0004)	0.030 (0.0002)	0.020 (0.0004)	0.023 (0.0002)	0.012 (0.0003)	0.002 (0.0000)	-0.012 (0.0001)
	KS	0.054 (0.0003)	0.053 (0.0003)	0.038 (0.0003)	0.032 (0.0004)	0.042 (0.0002)	0.030 (0.0005)	0.046 (0.0003)	0.030 (0.0005)	0.033 (0.0002)	0.020 (0.0005)	0.002 (0.0000)	-0.032 (0.0003)
	AD	0.050 (0.0002)	0.050 (0.0003)	0.036 (0.0002)	0.030 (0.0004)	0.034 (0.0002)	0.027 (0.0005)	0.032 (0.0002)	0.025 (0.0004)	0.025 (0.0002)	0.017 (0.0004)	0.001 (0.0000)	-0.023 (0.0002)
	0.2	$M^t$	0.001 (0.0004)	0.034 (0.0002)	0.001 (0.0004)	0.001 (0.0004)	-0.001 (0.0004)	-0.001 (0.0005)	-0.015 (0.0004)	-0.020 (0.0004)	-0.054 (0.0003)	-0.072 (0.0005)	
ML		0.021 (0.0004)	0.033 (0.0002)	0.001 (0.0004)	0.001 (0.0005)	0.001 (0.0004)	0.000 (0.0004)	-0.003 (0.0004)	-0.003 (0.0003)	-0.028 (0.0003)	-0.040 (0.0003)		
MSP		0.029 (0.0004)	0.041 (0.0003)	0.013 (0.0004)	0.013 (0.0005)	0.011 (0.0004)	0.008 (0.0004)	0.003 (0.0004)	-0.001 (0.0003)	-0.043 (0.0004)	-0.067 (0.0003)		
KS		0.033 (0.0003)	0.038 (0.0002)	0.002 (0.0004)	0.002 (0.0004)	0.002 (0.0004)	0.003 (0.0005)	-0.013 (0.0004)	-0.005 (0.0005)	-0.063 (0.0003)	-0.035 (0.0004)		
AD		0.030 (0.0003)	0.036 (0.0002)	0.005 (0.0004)	0.005 (0.0004)	0.005 (0.0004)	0.004 (0.0005)	-0.001 (0.0003)	-0.002 (0.0004)	-0.033 (0.0002)	-0.030 (0.0003)		
0.4		$M^t$	0.001 (0.0005)	0.032 (0.0003)	-0.002 (0.0004)	-0.001 (0.0004)	-0.018 (0.0004)	-0.018 (0.0004)	-0.060 (0.0004)	-0.066 (0.0005)			
	ML	0.023 (0.0003)	0.030 (0.0002)	0.001 (0.0004)	0.001 (0.0004)	-0.003 (0.0004)	-0.003 (0.0005)	-0.028 (0.0003)	-0.030 (0.0003)				
	MSP	0.028 (0.0003)	0.038 (0.0003)	0.009 (0.0004)	0.011 (0.0003)	-0.008 (0.0004)	-0.009 (0.0004)	-0.052 (0.0003)	-0.069 (0.0003)				
	KS	0.032 (0.0005)	0.043 (0.0003)	0.002 (0.0005)	0.001 (0.0004)	-0.006 (0.0005)	-0.006 (0.0005)	-0.045 (0.0003)	-0.034 (0.0004)				
	AD	0.028 (0.0005)	0.034 (0.0003)	0.004 (0.0005)	0.005 (0.0004)	-0.002 (0.0004)	-0.002 (0.0004)	-0.033 (0.0003)	-0.030 (0.0004)				
	0.6	$M^t$	-0.001 (0.0005)	0.028 (0.0002)	-0.019 (0.0005)	-0.015 (0.0004)	-0.067 (0.0005)	-0.061 (0.0004)					
ML		0.021 (0.0004)	0.025 (0.0002)	-0.003 (0.0004)	-0.002 (0.0003)	-0.030 (0.0003)	-0.028 (0.0003)						
MSP		0.019 (0.0004)	0.030 (0.0002)	-0.001 (0.0004)	0.004 (0.0003)	-0.069 (0.0003)	-0.051 (0.0003)						
KS		0.030 (0.0005)	0.046 (0.0003)	-0.005 (0.0005)	-0.012 (0.0004)	-0.034 (0.0004)	-0.045 (0.0004)						
AD		0.025 (0.0004)	0.032 (0.0002)	-0.002 (0.0005)	-0.001 (0.0003)	-0.031 (0.0004)	-0.033 (0.0003)						
0.8		$M^t$	-0.022 (0.0005)	0.017 (0.0001)	-0.073 (0.0004)	-0.053 (0.0003)							
	ML	0.015 (0.0003)	0.017 (0.0001)	-0.039 (0.0003)	-0.029 (0.0003)								
	MSP	0.013 (0.0003)	0.023 (0.0001)	-0.067 (0.0003)	-0.044 (0.0004)								
	KS	0.019 (0.0005)	0.032 (0.0002)	-0.035 (0.0004)	-0.063 (0.0003)								
	AD	0.016 (0.0004)	0.025 (0.0002)	-0.030 (0.0003)	-0.033 (0.0002)								
	1.0	$M^t$	-0.077 (0.0003)	0.000 (0.0000)									
ML		-0.004 (0.0000)	0.000 (0.0000)										
MSP		-0.012 (0.0001)	0.002 (0.0000)										
KS		-0.032 (0.0002)	0.002 (0.0000)										
AD		-0.023 (0.0001)	0.001 (0.0000)										



# Lista de Figuras

1.1.1 Mendel <i>vs</i> Fisher — a cronologia de uma controvérsia. . . . .	5
2.4.1 Diagrama de Feigenbaum para a solução de $x = cx(1 - x)$ pelo método do ponto fixo. . . . .	26
2.4.2 Diferentes regiões de comportamento para a solução de $x = cx^p(1 - x)$ . . . . .	27
4.1.1 Função densidade de probabilidade $f_{X_m}$ , quando $m = -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5$ e $2$ . . . . .	44
4.1.2 Função de distribuição $F_{X_m}$ quando $m = -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5$ e $2$ . . . . .	45
4.2.1 Valor médio de $X_m$ . . . . .	46
4.2.2 Variância de $X_m$ . . . . .	47
4.2.3 Coeficiente de Variação de $X_m$ . . . . .	47
4.4.1 Percentagem de estimativas inadmissíveis obtidas utilizando os estimadores $\tilde{m}_M, \tilde{m}_{LS}, \tilde{m}_{PWM}$ (com base em $M_{1,1,0}$ ) e $\tilde{m}_{PWM}$ (com base em $M_{1,2,0}$ ), para amostras de diversas dimensões e para $m = -2$ . . . . .	57
4.4.2 Percentagem de estimativas inadmissíveis obtidas utilizando $\tilde{m}_M, \tilde{m}_{LS}, \tilde{m}_{PWM}$ (com base em $M_{1,1,0}$ ) e $\tilde{m}_{PWM}$ (com base em $M_{1,2,0}$ ), para amostras de diversas dimensões com $m = 2$ . . . . .	58
4.4.3 Comparação da percentagem de estimativas inadmissíveis obtidas utilizando $\tilde{m}_M, \tilde{m}_{LS}, \tilde{m}_{PWM}$ (com base em $M_{1,1,0}$ ) e $\tilde{m}_{PWM}$ (com base em $M_{1,2,0}$ ), para diversos valores de $m$ e $n = 4, 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	58

4.4.4	Viés dos estimadores $\tilde{m}_M, \tilde{m}_{LS}, \tilde{m}_{PWM}$ (com base em $M_{1,1,0}$ ) e $\tilde{m}_{PWM}$ (com base em $M_{1,2,0}$ ), $\tilde{m}_{ML}$ e $\tilde{m}_{MSp}$ para diversos valores de $m$ e para amostras de diferentes dimensões. . . . .	59
4.4.5	Viés dos estimadores $\tilde{m}_M, \tilde{m}_{ML}, \tilde{m}_{MSp}$ para diversos valores de $m$ e para amostras de diferentes dimensões. . . . .	60
4.4.6	Erro quadrático médio dos estimadores $\tilde{m}_M, \tilde{m}_{ML}, \tilde{m}_{MSp}$ para diversos valores de $m$ e para amostras de diferentes dimensões. . . . .	60
4.4.7	Probabilidade de cobertura do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método do percentil para $\tilde{m}_{LS^t}$ . A tracejado representa-se a probabilidade de cobertura nominal. . . . .	63
4.4.8	Probabilidade de cobertura do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método do percentil para $\tilde{m}_{M^t}, \tilde{m}_{PWM120^t}, \tilde{m}_{ML}$ e $\tilde{m}_{MSp}$ . A tracejado representa-se a probabilidade de cobertura nominal. . . . .	63
4.4.9	Sobreposição dos diversos intervalos de confiança bootstrap calculados pelo método percentil, para $m$ conhecido, considerando os casos “puros” ( $m = -2, 0$ e $2$ ) e diferentes dimensões de amostra. A vermelho representam-se os intervalos de confiança obtidos para $m = -2$ ; a verde para $m = 0$ ; a azul para $m = 2$ . . . . .	64
4.4.10	Amplitude média do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método do percentil para $\tilde{m}_{M^t}, \tilde{m}_{LS^t}, \tilde{m}_{PWM120^t}, \tilde{m}_{ML}$ e $\tilde{m}_{MSp}$ , para diversos valores de $m$ e $n = 4, 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	65
4.4.11	Probabilidade de cobertura do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método BCa para $\tilde{m}_{M^t}, \tilde{m}_{LS^t}, \tilde{m}_{PWM120^t}, \tilde{m}_{ML}$ e $\tilde{m}_{MSp}$ , para diversos valores de $m$ e $n = 4, 10, 25, 50$ e $100$ . A tracejado representa-se a probabilidade de cobertura nominal. . . . .	66
4.4.12	Amplitude média do intervalo de confiança bootstrap a 95% calculado pelo método BCa para $\tilde{m}_{M^t}, \tilde{m}_{LS^t}, \tilde{m}_{PWM120^t}, \tilde{m}_{ML}$ e $\tilde{m}_{MSp}$ , para diversos valores de $m$ e $n = 4, 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	67
5.1.1	Valor médio de $X_{r;p,q}$ , para $r = 2$ (amarelo), $3$ (vermelho), $4$ (verde) e $5$ (azul). . . . .	77
5.1.2	Variância de $X_{r;p,q}$ , para $r = 2$ (amarelo), $3$ (vermelho), $4$ (verde) e $5$ (azul). . . . .	77

5.2.1	Função de distribuição da v.a. Mendel(2; $p, q$ ). . . . .	78
5.2.2	Erro quadrático médio das estimativas para $k$ obtidas através dos testes de ajustamento de AD e de KS, para diversos valores de $k$ , com $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	82
5.2.3	Viés das estimativas para $k$ obtidas através dos testes de ajustamento de AD e de KS, para diversos valores de $k$ com $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	83
5.2.4	Valor médio das estimativas para $k$ obtidas através do teste de ajustamento de AD, para os diversos valores de $k$ e para amostras de dimensão $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	84
5.2.5	Valor médio das estimativas para $k$ obtidas através do teste de ajustamento de KS, para diversos valores de $k$ com $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	84
5.2.6	Amplitude média dos intervalos de confiança de <i>score</i> , utilizando os testes de ajustamento de AD e de KS, para os diversos valores de $k$ e para amostras de dimensão $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	85
5.2.7	Proporção dos intervalos de confiança de <i>score</i> que incluem $k = 0$ . Intervalos de confiança de <i>score</i> obtidos, utilizando os testes de ajustamento de AD e de KS, para diversos valores de $k$ com $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	86
5.3.1	Função de distribuição da v.a. Mendel( $r; p, q$ ), com $r = 3, 4, 5$ . . . . .	87
5.3.2	Proporção de estimativas inadmissíveis de $p_{M^t}$ e $q_{M^t}$ , para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 10, 25, 50, 100$ . . . . .	92
5.3.3	Proporção de estimativas inadmissíveis de $p_{M^t}$ e $q_{M^t}$ , para $r = 4$ e amostras de dimensão $n = 10, 25, 50, 100$ . . . . .	92
5.3.4	Proporção de estimativas inadmissíveis de $p_{M^t}$ e $q_{M^t}$ , para $r = 5$ e amostras de dimensão $n = 10, 25, 50, 100$ . . . . .	93
5.3.5	Erro quadrático médio de $\tilde{q}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0, r = 3$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	94
5.3.6	Erro quadrático médio de $\tilde{q}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0, r = 4$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	95
5.3.7	Erro quadrático médio de $\tilde{q}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0, r = 5$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	95
5.3.8	Erro quadrático médio de $\tilde{q}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0.4, r = 3$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	96

5.3.9	Erro quadrático médio de $\tilde{q}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0.4$ , $r = 5$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	97
5.3.10	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0$ , $r = 3$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	98
5.3.11	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0$ , $r = 5$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	98
5.3.12	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0.6$ , $r = 4$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	99
5.3.13	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 10$ . As linhas de contorno representam o viés de $\tilde{p}_\bullet$ ; As regiões coloridas representam o viés de $\tilde{q}_\bullet$ . . . . .	101
5.3.14	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 25$ . As linhas de contorno representam o viés de $\tilde{p}_\bullet$ ; As regiões coloridas representam o viés de $\tilde{q}_\bullet$ . . . . .	102
5.3.15	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 100$ . As linhas de contorno representam o viés de $\tilde{p}_\bullet$ ; As regiões coloridas representam o viés de $\tilde{q}_\bullet$ . . . . .	103
5.3.16	Viés de $\tilde{q}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0$ , $r = 3$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	104
5.3.17	Viés de $\tilde{q}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0$ , $r = 4$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	105
5.3.18	Viés de $\tilde{q}_\bullet$ para $q \in [0, 1]$ , com $p = 0$ , $r = 5$ e $n = 10, 25, 50$ e $100$ . . . . .	105



# Lista de Tabelas

4.4.1	Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador $\tilde{m}_{Mt}$ . . . . .	68
4.4.2	Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador $\tilde{m}_{LSt}$ . . . . .	69
4.4.3	Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador $\tilde{m}_{PWM120t}$ . . . . .	70
4.4.4	Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador $\tilde{m}_{ML}$ . . . . .	71
4.4.5	Resumo dos resultados dos intervalos de confiança bootstrap para o estimador $\tilde{m}_{MSp}$ . . . . .	72
5.3.1	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_{\bullet}$ e de $\tilde{q}_{\bullet}$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	106
5.3.2	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_{\bullet}$ e de $\tilde{q}_{\bullet}$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 25$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	107
5.3.3	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_{\bullet}$ e de $\tilde{q}_{\bullet}$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 50$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	108
5.3.4	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_{\bullet}$ e de $\tilde{q}_{\bullet}$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 100$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	109
5.3.5	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_{\bullet}$ e de $\tilde{q}_{\bullet}$ para $r = 4$ e amostras de dimensão $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	110

5.3.6	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 4$ e amostras de dimensão $n = 25$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	111
5.3.7	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 4$ e amostras de dimensão $n = 50$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	112
5.3.8	Erro quadrático médio $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 4$ e amostras de dimensão $n = 100$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	113
5.3.9	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 5$ e amostras de dimensão $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	114
5.3.10	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 5$ e amostras de dimensão $n = 25$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	115
5.3.11	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 5$ e amostras de dimensão $n = 50$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	116
5.3.12	Erro quadrático médio de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 5$ e amostras de dimensão $n = 100$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do e.q.m.. . . . .	117
.0.1	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . .	138
.0.2	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 25$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . .	139
.0.3	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 50$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . .	140
.0.4	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 3$ e amostras de dimensão $n = 100$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . .	141
.0.5	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 4$ e amostras de dimensão $n = 10$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . .	142
.0.6	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 4$ e amostras de dimensão $n = 25$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . .	143
.0.7	Viés de $\tilde{p}_\bullet$ e de $\tilde{q}_\bullet$ para $r = 4$ e amostras de dimensão $n = 50$ . Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . .	144

- .0.8 Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 4$  e amostras de dimensão  $n = 100$ .  
Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . . 145
- .0.9 Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 10$ .  
Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . . 146
- .0.10 Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 25$ .  
Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . . 147
- .0.11 Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 50$ .  
Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés . . . 148
- .0.12 Viés de  $\tilde{p}_\bullet$  e de  $\tilde{q}_\bullet$  para  $r = 5$  e amostras de dimensão  $n = 100$ .  
Entre parêntesis está representado o erro padrão do viés. . . . 149



# Abreviaturas

**AD** Anderson-Darling.

**BCa** *bias-corrected and accelerated*.

**e.o.** estatística ordinal.

**e.q.m.** erro quadrático médio.

**f.d.** função de distribuição.

**f.d.e.** função de distribuição empírica.

**f.d.p.** função densidade de probabilidade.

**i.i.d.** independentes identicamente distribuídas.

**KS** Kolmogorov-Smirnov.

**LS** método dos mínimos quadrados.

**M** método dos momentos.

**ML** método de máxima verosimilhança.

**MSp** método do espaçamento máximo.

**PWM** método dos momentos probabilisticamente ponderados.

**TTU** Teorema da Transformação Uniformizante.

**v.a.** variável aleatória.



# Índice Remissivo

## A

American Statistical Association  
34

## C

combinação  
de testes independentes .....**6**  
de valores de prova ..... 9, 18  
controvérsia Mendel-Fisher ...4, 6

## D

distribuição  
Beta ..... **14**, 43  
BetaBoop ..... **15**, 28, 43  
Uniforme ..... 13

## E

estatística de teste .....2, **34**, 36  
estatística generalizada ..... 36  
estimador ..... 50  
de máxima verosimilhança **52**,  
89  
do espaçamento máximo ..**53**,  
89  
dos mínimos quadrados ... **53**  
dos momentos .....**51**, 88  
dos momentos  
probabilisticamente  
ponderados ..... **55**

## F

Fisher, Ronald .....4-6

função

Beta de Euler ..... 43

## M

Mendel, Gregor .....4-6, 8  
meta análise **1**, 2, 3, 6, 9, 122, 125

método

baseado na média geométrica

**6**

de Fisher .....**7**

de Stouffer ..... **7**

mínimo de Tippet ..... **6**

mistura

pseudo-convexa .....11

modelo

A ..... 8

B ..... 8

Mendel . 9, **10**, **13**, 20, 38, 41,  
43, 50, 75

Verhulst ..... 15, **25**

$X_m$  .....9

## P

princípio da falsificabilidade ...**35**

## T

teste de ajustamento

de Anderson-Darling ..... **80**

de Kolmogorov-Smirnov ... **79**

testes

de hipóteses .....**35**

## V

valor de prova ..17, **33**, 34, 35, 39  
aleatório ..... 18, **40**  
generalizado ....11, 18, 36, 39  
problemático **7**, 11, 18, 20, 36,

38, 50

variável de teste ..... **34**  
generalizada .....**36**, 39  
viés de publicação .....2