

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Buchi neri e singolarità in Relatività Generale

Relatore:
Dott. Roberto Casadio

Presentata da:
Federico De Lillo

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

In questo lavoro di tesi triennale si vanno a studiare le soluzioni di Schwarzschild e Kerr per le equazioni di Einstein nel vuoto nell'ambito della Teoria della Relatività Generale. In particolare si esaminano in maniera critica i concetti di buco nero e di singolarità dello spazio-tempo che emergono nel corso di tale studio.

Il "Capitolo 1" è focalizzato sullo studio della soluzione di Schwarzschild, la prima ad essere stata trovata storicamente alle equazioni di Einstein. A partire dall'analisi classica del moto geodetico di corpi di prova si introducono in maniera qualitativa i concetti di orizzonte degli eventi e di buco nero, esaminando mediante diagrammi conformi la causalità nella soluzione di Schwarzschild.

Il "Capitolo 2" è centrato sull'esposizione del concetto di buco nero e di singolarità nello spazio-tempo. In seguito ad aver visto come cambia la struttura causale nell'ambito della Relatività Generale, si procede alla ricerca di una definizione soddisfacente del concetto di singolarità di uno spazio-tempo e delle condizioni affinché essa esista: tale ricerca termina con l'enunciazione dei teoremi sulle singolarità di Penrose e Hawking. Si conclude il capitolo con l'introduzione formale della nozione di buco nero, studiando poi in maniera molto qualitativa il collasso gravitazionale che dà origine ai buchi neri ed i possibili modi per rilevarne la presenza.

Il "Capitolo 3" infine tratta la meccanica di un buco nero rotante di Kerr alla luce dei concetti visti nei due capitoli precedenti. Dall'analisi delle proprietà geometriche di tale soluzione si ricordano i risultati principali per il moto geodetico di corpi di prova e ci si sofferma, in particolare, sul processo di Penrose che in linea teorica permette l'estrazione di energia da buchi neri rotanti e sullo studio delle singolarità della metrica della soluzione mediante diagrammi conformi.

Indice

Introduzione	4
1 Le equazioni di Einstein e la soluzione di Schwarzschild	7
1.1 La Teoria della Relatività Generale e le equazioni di Einstein	7
1.2 La soluzione di Schwarzschild	9
1.3 Studio del moto geodetico in Schwarzschild	11
1.4 Estensione massimale della geometria di Schwarzschild	18
2 Il concetto di buco nero	22
2.1 La struttura causale in Relatività Generale	22
2.2 Singolarità e teoremi	23
2.3 La genesi di un buco nero e la congettura del censore cosmico	29
3 La soluzione di Kerr	33
3.1 Introduzione alla metrica di Kerr	33
3.2 Proprietà della geometria di Kerr e studio delle geodetiche	34
3.3 Il processo di Penrose	38
3.4 Estensione massimale della geometria di Kerr	41
3.5 Buchi neri rotanti carichi	44
Conclusione	46
A Tetradi	49
B Diagrammi di Penrose	51
Bibliografia	52

Notazione

Nel corso del testo, si è fatto riferimento come notazione prevalentemente al Wald [1], tuttavia si ritiene opportuno fare una lista delle convenzioni usate.

- Nel sistema di unità di misure adottato, si è posta la velocità della luce $c = 1$, se non indicato diversamente.
- Data una grandezza tensoriale, si usano gli indici greci per indicare le componenti di tale grandezza fissato un sistema di coordinate, mentre si usano gli indici latini per la notazione indiciale astratta indipendente dalla scelta di una base coordinata.
- Data una grandezza tensoriale T^{abc}_{de} , gli indici “in alto” sono di natura vettoriale, mentre quelli “in basso” di natura duale. A titolo di esempio, v^a è un vettore, mentre ω_a è una 1-forma.
- Data una grandezza tensoriale T_{ab} , si indicano con $T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba})$ e $T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba})$ rispettivamente la parte simmetrica e la parte antisimmetrica di tale grandezza, con logica generalizzazione a dimensioni superiori.
- In generale si indicherà la *metrica* di uno spazio tempo come g_{ab} con segnatura $(-+++)$.
- Data una grandezza tensoriale T^a_b è possibile “alzare” ed “abbassare” gli indici mediante l’uso della metrica e della sua inversa, in modo tale che $T^{ab} = T^a_c g^{cb}$ e $T_{ab} = g_{ac} T^c_b$.
- L’operatore di *derivata covariante* si indica con ∇_a e la sua azione su un vettore è definita come $\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac} v^c$, con Γ^b_{ac} il *simbolo di Christoffel*.
- Il *tensore di Riemann* è definito con l’aiuto di un vettore ausiliario v^a come $R_{abc}{}^d v^c = [\nabla_a, \nabla_b]V^d$ nel caso di torsione nulla.

Introduzione

Il termine "buco nero", coniato da J. A. Wheeler nel 1967, indica una regione dello spazio-tempo caratterizzata da un campo gravitazionale eccezionalmente intenso dalla quale nulla può sfuggire, nemmeno la luce. Tale oggetto è indubbiamente tra i più esotici tra quelli previsti dalla Teoria della Relatività Generale di Einstein, tuttavia il concetto embrionale di buco nero nasce molto prima di tale teoria.

Bisogna tornare indietro all'ultimo ventennio del XVIII secolo, quando due scienziati, J. Mitchell e P.-S. de Laplace, a partire dalla formula di Newton per la velocità di fuga di un corpo da una sorgente gravitazionale

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R_s}}, \quad (1)$$

(con G la costante di gravitazione universale di Newton, M la massa della sorgente ed R_s il raggio della sorgente), arrivarono a congetturare in maniera indipendente l'esistenza di corpi celesti sufficientemente massivi da avere una velocità di fuga addirittura superiore alla velocità della luce. Tali corpi acquisirono l'appellativo di "dark star", in quanto non sarebbero stati visibili. In particolare, per $v_F = c$ un tale corpo avrebbe dovuto avere un raggio

$$R_s = R_S = \frac{2GM}{c^2} : \quad (2)$$

(tale grandezza verrà ribattezzata a posteriori *raggio di Schwarzschild* e compare in molte situazioni come indicatore dell'intensità del campo gravitazionale). Il concetto di dark star era indubbiamente affascinante, ma fu abbandonato in seguito alla scoperta che la radiazione luminosa non possedeva massa, pertanto si riteneva che non potesse venire influenzata dalla gravità di un corpo.

Tutto cambiò in seguito alla pubblicazione nel 1915 della Teoria della Relatività Generale di Einstein, nella quale lo spazio-tempo viene visto come una varietà lorentziana non piatta, la cui metrica è intrinsecamente legata al tensore energia-impulso della materia in esso contenuto mediante le celebri equazioni di campo di Einstein: un corpo, per il solo fatto di possedere massa, modifica la metrica dello spazio-tempo che lo circonda e, di conseguenza, anche le traiettorie possibili. (Pertanto anche la luce viene influenzata dal campo gravitazionale!)

Pochi mesi dopo la pubblicazione della teoria, nel 1916 K. Schwarzschild trovò la prima soluzione alle equazioni di Einstein, la quale descrive lo spazio-tempo attorno ad una sorgente gravitazionale sferica. Il carattere peculiare di questa soluzione è l'essere caratterizzata da una superficie sferica proprio di raggio R_S , tale che qualunque cosa entri non ne può più sfuggire, in analogia con la dark star. Tale superficie in seguito prese il nome di “*orizzonte degli eventi*”: ci si trovava (anche se con nome diverso) alla prima possibile descrizione di un buco nero. Poiché R_S risultava essere anche una singolarità della metrica, la comunità scientifica era scettica sull'esistenza di tale superficie, inoltre R_S nel caso dei corpi celesti noti all'epoca era molto più piccolo del raggio effettivo di tali corpi. Ciò alimentava i dubbi anche sull'esistenza di corpi sufficientemente massivi e densi da avere un raggio inferiore a R_S e sull'utilità di studiarne il comportamento (Schwarzschild purtroppo non poté partecipare a questo dibattito in quanto morì pochi mesi in seguito alla pubblicazione della sua soluzione).

Sul fatto che R_S fosse effettivamente una singolarità della metrica, nel 1924 A. Eddington, prima, e D. Finkelstein nel 1958, poi, dimostrarono che tale singolarità era eliminabile con un opportuno cambio di coordinate ed era possibile studiare quanto accadesse all'interno della superficie individuata da R_S , ritrovando quanto anticipato sopra. Per quanto concerne invece l'esistenza di corpi celesti con raggio minore di R_S , risposte in tal senso arrivarono negli Anni Trenta dall'astrofisica dal lavoro di vari scienziati, tra i quali è d'obbligo citare S. Chandrasekhar e R. Oppenheimer, sul collasso gravitazionale delle stelle al termine della loro esistenza. Il succo di tali lavori teorici fu che se la stella di partenza è sufficientemente massiva, niente può fermarne il collasso gravitazionale, il quale prosegue fino a concentrare tutta la massa in un punto, in una singolarità.

Negli anni a seguire il dibattito sull'esistenza di queste singolarità finali proseguì e la situazione non migliorò dal punto di vista teorico quando si scoprì che potevano anche ruotare (soluzione di Kerr, 1963) ed essere elettricamente carichi (soluzione di Kerr-Newman, 1965). Le acque si calmarono verso la fine degli Anni Sessanta in seguito alla raccolta di dati sull'esistenza di oggetti estremamente compatti, quali le pulsar, ed alla dimostrazione teorica da parte di Hawking e Penrose dei teoremi sull'esistenza delle singolarità. Sebbene rimanessero difficili da osservare, l'esistenza dei buchi neri venne accettata dalla maggioranza della comunità scientifica.

La storia dello studio dei buchi neri ovviamente ha un seguito ed è continuata e continua fino ai giorni nostri, ma per gli scopi di questo testo ci si ferma qui. Quello che si vuole è infatti esaminare il concetto di buco nero e di singolarità che nascono dallo studio della soluzione di Schwarzschild e di Kerr.

Il “Capitolo 1” è dedicato alla metrica di Schwarzschild. Inizialmente vengono illustrati i passaggi principali per ricavare tale soluzione. Dopo brevi considerazioni di carattere geometrico, si studia il moto geodetico di corpi di prova massivi arrivando a prevedere la precessione del perielio di Mercurio e la deflessione della luce. In particolare, dalla discussione del moto geodetico radiale, emerge la natura di orizzonte degli eventi di R_S e di singolarità di $r = 0$. Si studia infine, tramite l'estensione di Kruskal e diagrammi

conformi, la causalità della soluzione, introducendo il concetto di buco nero.

Nel “Capitolo 2” ci si concentra in maniera formale e pratica a chiarire i concetti di buco nero e singolarità. In seguito ad aver discusso come trattare la causalità in Relatività Generale, si ricerca una definizione soddisfacente di singolarità di uno spazio-tempo e si introducono le condizioni sull’energia, per arrivare poi ad enunciare i teoremi sulle singolarità di Hawking e di Penrose. Nell’ultima parte del capitolo si definiscono da un punto di vista geometrico-topologico cosa siano un buco nero ed un orizzonte degli eventi, per poi passare a studiare in maniera qualitativa e fenomenologica la genesi di un buco nero da collasso gravitazionale e su come rilevare la presenza di un buco nero. Si enuncia infine la congettura del censore cosmico di Penrose.

Nel “Capitolo 3” si studia la soluzione di Kerr per buchi neri rotanti alla luce di quanto appreso nel capitolo precedente. Dallo studio della geometria della soluzione si recuperano i principali risultati dello studio del moto geodetico di corpi di prova e sulle regioni in cui è divisa la soluzione, introducendo anche i concetti di *ergosfera* e di superficie stazionaria limite. Dalle proprietà peculiari dell’ergosfera si descrive un possibile meccanismo per effettuare il così detto “*processo di Penrose*” che permette in linea teorica l’estrazione di energia da buchi neri rotanti, discutendo i limiti di applicabilità e di energia massima estraibile. Si studia poi mediante diagrammi conformi la causalità della soluzione nelle varie configurazioni. Si accenna infine all’esistenza di buchi neri rotanti carichi con la soluzione di Kerr-Newman ed al fatto che i “buchi neri non hanno peli”.

Questo conclude l’introduzione. Si comincia.

Capitolo 1

Le equazioni di Einstein e la soluzione di Schwarzschild

In questo capitolo vengono fatti brevi richiami ai principi alla base della teoria della Relatività Generale di Einstein ed alle equazioni omonime.

In seguito viene studiata la soluzione di Schwarzschild, la prima ad essere trovata storicamente alle equazioni di Einstein in seguito alla pubblicazione della teoria della Relatività Generale.

1.1 La Teoria della Relatività Generale e le equazioni di Einstein

La Teoria della Relatività Generale di Einstein pubblicata nel 1915 fu rivoluzionaria per l'epoca, cambiando radicalmente la concezione della gravità e dello spazio-tempo. Sarebbe bello ripercorrere in maniera approfondita il percorso che portò alla genesi di questa teoria ed alle equazioni di Einstein per la metrica dello spazio-tempo, ma ciò esula dagli scopi di questo scritto. Ci si limita pertanto a riportare alcuni principi che influenzarono Einstein nella formulazione della sua teoria e a presentare le equazioni omonime, il cui significato viene brevemente discusso.

È difficile inquadrare con chiarezza i principi alla base della Relatività Generale e ciò causa controversie anche tra i fisici di alto livello. Un principio che però mette d'accordo tutti sulla sua importanza è il seguente

Principio di equivalenza [3]” Non è possibile elaborare un esperimento locale in grado di distinguere tra un moto di caduta libera in un campo gravitazionale e un moto uniformemente accelerato in assenza di un campo gravitazionale.”

Tale principio ha una sua prova nella classe di esperimenti mentali dell'ascensore di Einstein. Esso ha anche una formulazioni più deboli, tra le quali si ricordano l'equivalenza

tra il valore numerico della massa inerziale e della massa gravitazionale o il fatto che il campo gravitazionale si accoppia a tutto.

Quest'ultimo concetto può essere ripreso in qualche modo nel più controverso *principio di Mach* [2], secondo cui (Wheeler, 1964 [5]) le proprietà inerziali di un corpo sono determinate dalla distribuzione di energia ed impulso in tutto lo spazio. Esso può essere riformulato (Eistein, 1955, p 107 [6]) in termini di connessione tra metrica e contenuto di energia-impulso:

”La geometria dello spazio-tempo è interamente determinata dal tensore energia-impulso della materia.”

Un altro importante principio è il seguente

Principio di covarianza generale [2]: ”Tutte le leggi della fisica devono essere scritte sotto forma di equazioni covarianti rispetto alle trasformazioni generali di coordinate.”

Ciò si traduce nel fatto che le equazioni della fisica devono avere una forma tensoriale e che tutti gli osservatori sono equivalenti, visto che (covarianza) le equazioni hanno sempre la stessa forma.

Si riportano infine due principi che in realtà sono più delle prescrizioni da adottare nella ricerca e formulazione delle equazioni di Einstein.

Principio di corrispondenza: ”Nei limiti di campi gravitazionali deboli e di basse velocità rispetto a quella della luce, la teoria della relatività generale deve ridursi alla teoria newtoniana della gravitazione, mentre in assenza di campi gravitazionali deve ridursi alla teoria della relatività speciale.”

Principio di accoppiamento gravitazionale minimo [3]: ”Nel passaggio dalla teoria della relatività speciale alla teoria della relatività generale non bisogna aggiungere alcun termine che tenga conto in maniera esplicita della curvatura dello spazio-tempo.”

Dopo aver enunciato questi ”principi” si presentano le *equazioni di campo di Einstein*¹ per la metrica dello spazio-tempo

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi GT_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \quad (1.1)$$

dove nell'ultima uguaglianza è stata esplicitata la velocità della luce c , R_{ab} è il tensore di Ricci, g_{ab} la metrica, $R = R^c_c$ lo scalare di curvatura di Ricci e T_{ab} il tensore energia-impulso.

¹A rigore dovrebbero essere dette Hilbert-Einstein, in quanto anche Hilbert le ricavò in maniera indipendente, addirittura qualche giorno prima di Einstein (Pais 1982[7]).

Prendendo la traccia di (1.1) si trova $R = -8\pi GT$, dove $T \equiv T^c_c$, e le equazioni sono riscrivibili come

$$R_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right). \quad (1.2)$$

Ricordando che il tensore di Ricci e l'invariante di curvatura di Ricci sono esprimibili come contrazioni del tensore di Riemann R_{abc}^d , risultano funzioni delle derivate seconde della metrica, pertanto le equazioni di Einstein sono un sistema di dieci PDE (Partial Differential Equations) del secondo ordine non lineari, per le quali non esiste un metodo risolutivo generale. A tale difficoltà matematica si aggiunge quella di non conoscere a priori le nature della metrica e del tensore energia-impulso, le quali devono essere congetturate. Questo fa emergere la doppia natura sulla interpretazione delle equazioni di Einstein, le quali possono essere viste come il fatto che il campo gravitazionale (la metrica) è determinato dalla distribuzione di materia ed energia (tensore energia-impulso) o viceversa quest'ultima distribuzione è determinata dal campo gravitazionale (di fatto si rivede quanto scritto nel principio di Mach).

Il numero di PDE può essere ridotto a sei sfruttando l'*identità di Bianchi* per il tensore di Einstein $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$

$$\nabla_b G_{ab} = 0 = \nabla_b T_{ab}. \quad (1.3)$$

Nei prossimi paragrafi si andranno a studiare soluzioni alle equazioni di Einstein nel vuoto ($T_{ab} = 0$)

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0, \quad (1.4)$$

le quali si riducono a, dal momento che $R = 0$ (dalla traccia di (1.4)),

$$R_{ab} = 0. \quad (1.5)$$

1.2 La soluzione di Schwarzschild

Si consideri una sorgente gravitazionale a simmetria sferica, elettricamente neutra, non rotante e lo spazio vuoto attorno ad essa. Si vogliono trovare le soluzioni alle equazioni di Einstein che descrivano lo spazio-tempo all'esterno della sorgente. Date le caratteristiche della sorgente in esame, tali soluzioni dovranno essere statiche e a simmetria sferica. Prima di procedere si vogliono ricordare i significati di spazio-tempo statico e a simmetria sferica. [1]

Uno spazio-tempo è detto *stazionario* se esiste un gruppo di isometrie a un parametro ϕ_t le cui orbite sono curve di tipo tempo o, equivalentemente, possiede un campo di vettori di killing di tipo tempo ξ^a (ovvero la metrica che lo descrive è indipendente dal tempo). Uno spazio-tempo stazionario è detto essere *statico* se esiste un'ipersuperficie (di tipo spazio) Σ ortogonale alle orbite dell'isometria o, equivalentemente (per il teorema di

Frobenius), ξ^a soddisfi $\xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]} = 0$, (ovvero la metrica, oltre a non dipendere dal tempo è invariante sotto trasformazioni di parità temporale).

Uno spazio-tempo è detto a simmetria sferica se il suo gruppo di isometrie è un sottogruppo isomorfo a $SO(3)$ e le orbite del sottogruppo sono 2-sfere (ovvero la metrica è invariante sotto rotazioni e possiede i tre vettori di Killing di tipo spazio ψ^a corrispondenti).

In particolare, se uno spazio-tempo è sia statico che a simmetria sferica, assunto il campo di Killing statico ξ^a unico, segue che esso deve essere ortogonale alle 2-sfere orbite. Ciò permette di scegliere le coordinate polari t, r, θ, ϕ per lo spazio-tempo e l'elemento di linea assume la forma

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.6)$$

dove r è la coordinata radiale definita come $r = (\frac{\mathcal{A}}{4\pi})^{\frac{1}{2}}$ (con \mathcal{A} l'area di una 2-sfera) e $A(r)$ e $B(r)$ da determinare risolvendo le equazioni di Einstein (1.5).

Si osserva prima di procedere che la richiesta di staticità della soluzione sarebbe potuta essere omessa in luce del *Teorema di Birkhoff*, il quale afferma che ogni soluzione a simmetria sferica delle equazioni di Einstein nel vuoto è statica.

Procedendo a determinare A e B , si trovano le seguenti quattro componenti del tensore di Ricci non nulle che devono soddisfare le altrettante equazioni ($0 = t, 1 = r, 2 = \theta, 3 = \phi, ' = \frac{d}{dr}$):

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{A'}{B} = 0 \quad (1.7)$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{B'}{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$R_{22} = 1 - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{B} = 0 \quad (1.9)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22} = 0. \quad (1.10)$$

Dividendo (1.7) per A e (1.8) per B , sommandole ed richiedendo la piatezza asintotica della metrica per $r \rightarrow +\infty$ (osservando in tal caso $A = B = 1$), si ottiene la condizione

$$B = A^{-1}, \quad (1.11)$$

la quale, sostituita in (1.9) porta a

$$A = 1 - \frac{k}{r}, \quad (1.12)$$

con k una costante d'integrazione. Richiedendo infine le condizioni di campo debole $g_{00} = -1 - \phi$, con $\phi = -\frac{2G_N M}{r}$, (1.12) diventa

$$A = 1 - \frac{2G_N M}{r}. \quad (1.13)$$

Infine, sostituendo (1.13) in (1.6) è possibile scrivere la metrica di Schwarzschild come

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.14)$$

Essa ha le seguenti caratteristiche: è statica e a simmetria sferica; è asintoticamente piatta; è singolare in $r = 0$ e $r = R_S \equiv 2G_N M$. La natura di queste due singolarità verrà approfondita in seguito (Paragrafo 1.4). Per ora ci si limita ad osservare che per sorgenti gravitazionali, quali le stelle ed i pianeti, R_S è molto minore del loro raggio e che la soluzione di Schwarzschild è una soluzione di vuoto non valida all'interno del raggio delle sorgenti, e quindi è possibile ignorare le singolarità della metrica in tali casi. Ciò naturalmente non potrà essere fatto nel caso di sorgenti puntiformi.

1.3 Studio del moto geodetico in Schwarzschild

In questo paragrafo si studia il moto geodetico di corpi di prova massivi (geodetiche di tipo tempo) e non massivi (geodetiche di tipo luce) nella regione esterna $r > R_S$ della soluzione di Schwarzschild.

Innanzitutto si osserva che per la simmetria sferica della soluzione è sempre possibile ricondursi al caso di geodetiche equatoriali ($\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$) e pertanto questo sarà il caso esaminato. Usando il parametro τ per parametrizzare le curve, le componenti della 4-velocità u^a tangente alla curva e dell'equazione geodetica assumono la forma

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \dot{x}^\mu \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (1.16)$$

Nel caso di particelle massive τ sarà il tempo proprio; nel caso particelle non massive un parametro affine.

Invece di risolvere (1.16), si sfrutta la seguente

Proposizione: *Sia ξ^a un campo vettoriale di Killing e sia γ una geodetica con tangente u^a . Allora $\xi_a u^a$ è costante lungo γ .*

Dimostrazione: Si ha

$$u^b \nabla_b (\xi_a u^a) = u^b u^a \nabla_b \xi_a + \xi_a u^b \nabla_b u^a = 0$$

in virtù dell' *equazione di Killing*

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$$

e dell'equazione delle geodetiche

$$u^a \nabla_a u^b = 0, \quad c.v.d.$$

Da ciò risulta che le seguenti quantità sono integrali primi di moto:

$$\tilde{E} = -g_{ab} \xi^a u^b = \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) \dot{t}; \quad (1.17)$$

$$\tilde{J} = g_{ab} \psi^a u^b = r^2 \dot{\phi}; \quad (1.18)$$

$$-\varepsilon = g_{ab} u^a u^b = -\left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right), \quad (1.19)$$

dove $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ il campo vettoriale di Killing statico, $\psi^a = \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a$ il campo di Killing rotazionale e $\varepsilon = 1$ per le geodetiche di tipo tempo e $\varepsilon = 0$ per le geodetiche di tipo luce. La quantità \tilde{E} è interpretabile come energia per unità di massa a riposo misurata da un osservatore all'infinito, mentre \tilde{J} come momento angolare per unità di massa. Sostituendo (1.17) e (1.18) in (1.19), con un po' di algebra si ottiene

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{\tilde{J}^2}{r^2} + \varepsilon\right) = \tilde{E}^2, \quad (1.20)$$

la quale mostra che il moto geodetico lungo r è descrivibile come moto unidimensionale di una particella soggetta al potenziale efficace

$$V = \left(\varepsilon + \frac{\tilde{J}^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_S}{r}\right). \quad (1.21)$$

Nel caso di particelle massive (1.21) diventa ($\varepsilon = 1$)

$$V = \left(1 + \frac{\tilde{J}^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_S}{r}\right), \quad (1.22)$$

dalla quale, imponendo $\frac{dV}{dr} = 0$, segue che i punti estremanti di (1.22) sono

$$r_{\pm} = \frac{\tilde{J}^2 \pm \tilde{J} \sqrt{\tilde{J}^2 - 3R_S^2}}{R_S}, \quad (1.23)$$

rispettivamente minimo (orbita circolare stabile) e massimo (orbita circolare instabile) di (1.22) nel caso in cui $\tilde{J}^2 > 3R_S^2$. Se $\tilde{J}^2 = 3R_S^2 \Rightarrow r_+ = r_- = r_{min} = 3R_S$ e vi è un unico punto di minimo (orbita circolare stabile), mentre se $\tilde{J}^2 < 3R_S^2$ non vi sono punti estremanti e se $\dot{r} < 0$ la particella è destinata a venire catturata superando $r = R_S$ fino a giungere alla singolarità in $r = 0$ (vedi Paragrafo 1.4).

In particolare da (1.23) si osserva che esistono orbite stabili solo per $r > 3R_S$, mentre le orbite instabili sono ristrette all'intervallo $\frac{3}{2}R_S < r < 3R_S$ (cfr Fig.1.1). Ciò segue dal fatto che nel caso di un'orbita circolare di raggio R (manipolando (1.20)) si ha che una particella massiva ha energia per unità di massa a riposo pari a

$$\tilde{E}(R) = V(R)^{1/2} = \frac{R - R_S}{[R(R - \frac{3}{2}R_S)]^{1/2}}, \quad (1.24)$$

dove si è utilizzata la relazione

$$\tilde{J}^2 = \frac{R^2 R_S}{3R_S - 2R} \quad (1.25)$$

(ottenuta risolvendo in \tilde{J}^2 l'equazione $\frac{dV}{dr}|_{r=R_{\pm}}$) per eliminare \tilde{J}^2 .

Da quest'ultima relazione si può notare che $\tilde{E} \geq 1$ per $R \leq 2R_S$ e che $E \rightarrow +\infty$ per $R \rightarrow \frac{3}{2}R_S$ e che quindi le particelle in orbite circolari instabili con $\frac{3}{2}R_S \leq r \leq 2R_S$ se perturbate in uscita fuggirebbero all'infinito.

Considerando l'ultima orbita stabile per $R = 3R_S$ è infine possibile calcolare l'energia di legame per unità di massa a riposo

$$E_B = 1 - E = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{1/2} \simeq 0.06. \quad (1.26)$$

Questo permette di congetturare che una particella su un'orbita circolare ad $R \gg 3R_S$ emette il 6% della sua massa in radiazione gravitazionale spiraleggiando verso l'orbita $R = 3R_S$ per poi cadere verso $r = 0$. Per concludere lo studio del moto geodetico di particelle massive si considera il caso delle "piccole oscillazioni attorno ad R_+ ". In tal caso la particella ha un moto armonico semplice di frequenza

$$\omega_r^2 = k_{eff} = \frac{d^2V}{dr^2} \Big|_{r=R_+} = \frac{R_S (R_+ - 3R_S)}{R_+^3 (R_+ - \frac{3}{2}R_S)}, \quad (1.27)$$

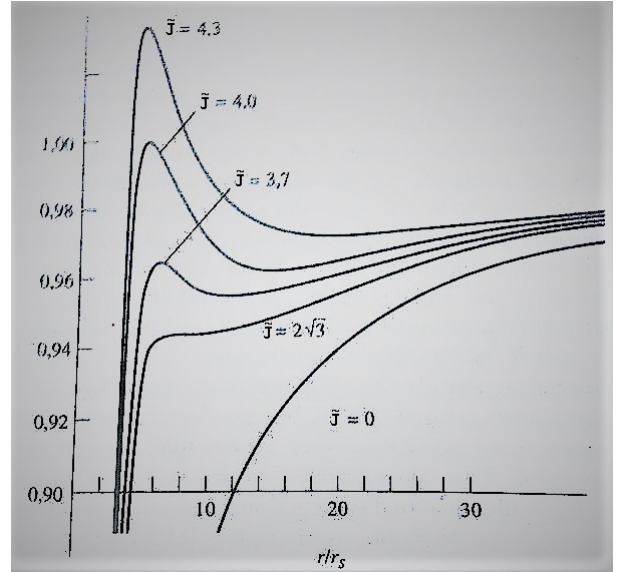


Figura 1.1: [2] Il potenziale efficace $V(r)$ per le particelle massive per alcuni valori di \tilde{J} .

dove si è utilizzata (1.25) per eliminare \tilde{J}^2 , mentre per un'orbita circolare si ha una frequenza angolare

$$\omega_\phi^2 = \dot{\phi}^2 = \frac{\tilde{J}^2}{R_+^4} = \frac{R_S}{2R_+^2 \left(R_+ - \frac{3}{2}R_S\right)}, \quad (1.28)$$

dove si è utilizzata nuovamente (1.25) per eliminare \tilde{J}^2 . Poichè le due frequenze non sono in rapporto razionale tra di loro, le orbite limitate risultanti non sono ellissi chiuse, bensì vi è una precessione dell'angolo (Fig.1.2) a cui corrispondono il valore massimo e minimo di r . È possibile dimostrare [2], (Weinberg, 1972 [8]) che la frequenza di tale precessione all'ordine perturbativo più basso è data da

$$\omega_p = \frac{3(GM)^{\frac{3}{2}}}{c^2(1-e^2)a^{\frac{5}{2}}}, \quad (1.29)$$

con a il semiasse maggiore dell'ellissi ed e la sua eccentricità.

Si ricorda che questo ha permesso di spiegare i 43" per secolo della precessione del perielio di Mercurio che la teoria della gravitazione newtoniana non era in grado di giustificare. Ciò costituì uno dei primi grandi successi della teoria della relatività generale nonchè una delle prime conferme sperimentali della teoria. Con questo si conclude lo studio delle geodetiche di tipo tempo.

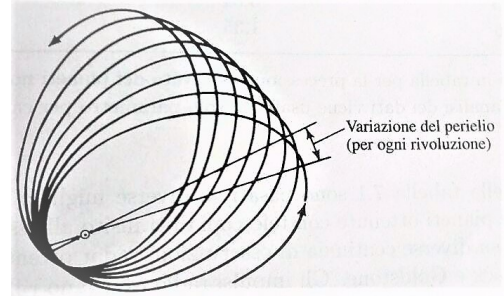


Figura 1.2: [2] Esempio di orbita planetaria con precessione del perielio.

Nel caso di particelle non massive (fotoni) il potenziale (1.21) (Fig.1.3) assume la forma ($\varepsilon = 0$)

$$V = \frac{\tilde{J}^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right), \quad (1.30)$$

per il quale, procedendo in maniera analoga al caso delle particelle massive, si trova che ammette come unico punto estremante il punto di massimo

$$r_{max} = \frac{3}{2}R_S, \quad (1.31)$$

per il quale si hanno orbite circolari instabili per i fotoni. Da ciò segue che il campo gravitazionale influenza in maniera più o meno significativa anche il moto di corpi non massivi, a differenza di quanto si possa pensare classicamente. Pertanto la luce in presenza di sorgenti gravitazionali viene deflessa dalla traiettoria originale: tale fenomeno è trattabile

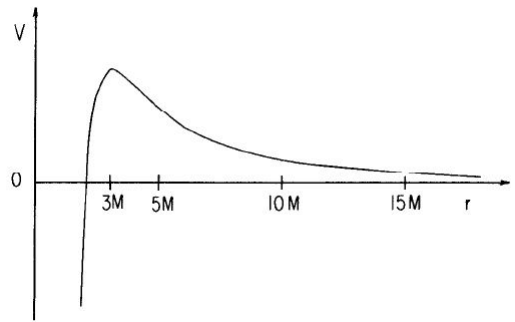


Figura 1.3: [1] Potenziale efficace $V(r)$ per particelle non massive ($G = c = 1$).

quindi come scattering.

Osservando che l'energia minima necessaria a superare la barriera è

$$\tilde{E}^2 = V(r)|_{r=\frac{3}{2}R_S} = \frac{4\tilde{J}^2}{27R_S^2}, \quad (1.32)$$

si può introdurre un parametro d'impatto apparente

$$b \equiv \frac{\tilde{J}}{\tilde{E}}. \quad (1.33)$$

Dalle considerazioni energetiche fatte in precedenza si deduce che i fotoni con un parametro d'impatto apparente minore del valore critico (Fig.1.4)

$$b_c = 3^{\frac{3}{2}} \frac{R_S}{2} \quad (1.34)$$

vengono catturati dalla sorgente gravitazionale.

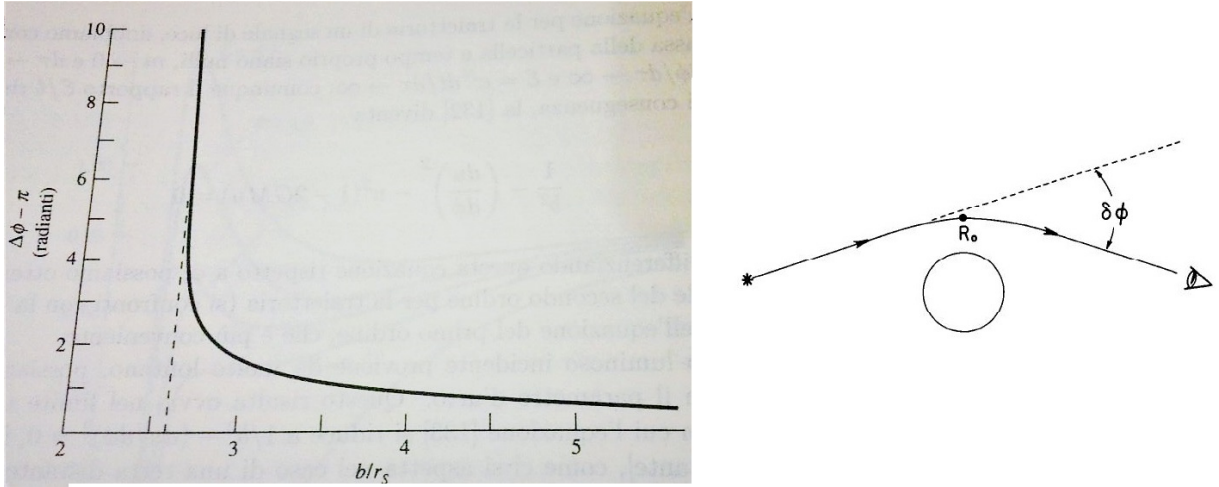


Figura 1.4: Nella figura di sinistra vi è il grafico dell'angolo di deflessione in funzione del parametro d'impatto[2]. Nella figura a destra vi è un'illustrazione pittorica dell'effetto di deflessione della luce da parte di una sorgente gravitazionale[1].

Tale processo ha in particolare una sezione d'urto pari a

$$\sigma = \pi b_c^2 = \frac{27}{4} \pi R_S^2. \quad (1.35)$$

Nel caso dei fotoni non catturati, avviene il fenomeno di deviazione della luce che si analizza di seguito.

Riprendendo le equazioni (1.18) e (1.20) risolte rispettivamente per $\dot{\phi}$ e \dot{r} e dividendo la prima per la seconda, si ottiene

$$d\phi = \frac{dr}{\sqrt{\frac{\tilde{E}^2 r^4}{J^2} - r^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)}}, \quad (1.36)$$

dalla quale è possibile determinare l'angolo di deflessione rispetto al caso di metrica piatta come

$$\delta\phi = \Delta\phi - \pi, \quad (1.37)$$

con

$$\Delta\phi = \int_{r_0}^{r_\infty} \frac{dr}{\sqrt{(-r^2) \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) + \frac{\tilde{E}^2 r^4}{J^2}}}, \quad (1.38)$$

dove r_0 è determinato da

$$\frac{d\phi}{dr}(r_0) = 0 \quad (1.39)$$

e risulta essere [1]

$$r_0 = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{3^{\frac{3}{2}} M}{b} \right) \right]. \quad (1.40)$$

Al primo ordine in R_S risulta

$$\delta\phi \approx \frac{2R_S}{b}, \quad (1.41)$$

la quale prevede nel caso del Sole una deflessione di $1.75''$. Tale deflessione fu misurata per la prima volta da Sir Arthur Eddington durante un'eclissi totale di Sole nel 1919 e fu la prima conferma sperimentale della teoria della relatività generale di Einstein ².

Si consideri infine una particella in caduta radiale verso la sorgente gravitazionale ($\tilde{J} = 0$). L'equazione del moto (1.20) risolta per $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}$ assume allora la forma (nel caso di geodetiche radiali uscenti non c'è il segno "-")

$$d\tau = - \frac{dr}{\sqrt{-\varepsilon \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) + \tilde{E}^2}}. \quad (1.42)$$

Da (1.42) si osserva che la funzione integranda in r non presenta singolarità per come è definita \tilde{E}^2 . Da ciò, integrando, si può dedurre che la particella raggiunge R_S in una quantità finita di tempo proprio (Fig.1.5), lo supera e prosegue la sua caduta fino a giungere alla singolarità in $r = 0$: per $r < R_S$ infatti g_{00} e g_{11} cambiano di segno e le coordinate t ed r diventano coordinate rispettivamente di tipo spazio e di tipo tempo e fisicamente ciò significa che

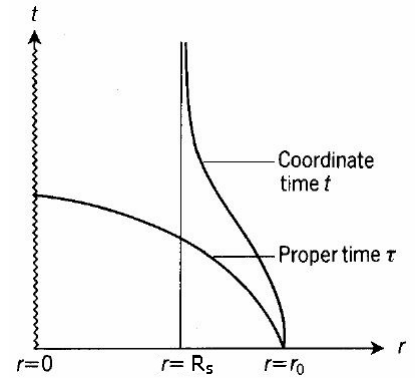


Figura 1.5: [3] *Particella in caduta radiale nei tempi t e τ .*

²Si consiglia a questo proposito la visione del film "Il mio amico Einstein" del 2008 che racconta l'impresa per l'epoca di Eddington (figura dimenticata negli anni a venire) con anche una panoramica a livello storico sulla rivalità anglo-tedesca nella scienza durante la Prima Guerra Mondiale

al passare del tempo diminuisce la coordinata radiale r senza che si possa fare alcunchè per impedirlo. Tuttavia ciò è in contrasto con quanto vede un osservatore statico O a grande distanza ($r \gg R_S$) dalla sorgente. Risolvendo (1.17) ed esplicitando $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$ per poi moltiplicarla per (1.42), si ottiene (nel caso di geodetiche radiali uscenti non c'è il segno"-")

$$dt = - \frac{\tilde{E} dr}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \sqrt{-\varepsilon \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) + \tilde{E}^2}}, \quad (1.43)$$

chiaramente singolare in $r = R_S$. Integrando, si conclude che per l'osservatore la particella impiega un tempo infinito (in particolare, si dimostra che l'integrale diverge logaritmicamente) per raggiungere R_S e di conseguenza l'osservatore non la vedrà mai attraversare la superficie da esso individuata perchè neanche i fotoni sono in grado di uscire da tale superficie una volta che l'hanno attraversata.

Supponendo infatti di avere una sonda S in caduta radiale che emette fotoni ad una lunghezza d'onda fissata λ_S , si può dimostrare, sfruttando la presenza di vettori di Killing di tipo tempo ξ^a , che l'osservatore statico O misura una lunghezza d'onda λ_O tale che

$$\frac{\lambda_O}{\lambda_S} = \sqrt{\frac{-\xi^a(O)\xi_a(O)}{-\xi^a(S)\xi_a(S)}}. \quad (1.44)$$

Poiché $\xi^a \xi_a = g_{00} = -(1 - \frac{R_S}{r})$, (1.44) diventa

$$\frac{\lambda_O}{\lambda_S} = \sqrt{\frac{1 - \frac{R_S}{r_O}}{1 - \frac{R_S}{r_S}}} = 1 + z, \quad (1.45)$$

dove r_S e r_O sono le coordinate radiali della sorgente e dell'osservatore, mentre con z si definisce il *parametro di redshift*.

La lunghezza d'onda misurata dall'osservatore statico è quindi spostata verso il rosso a causa del campo gravitazionale generato dalla sorgente secondo il fenomeno di redshift gravitazionale, caratterizzante delle teorie di gravitazione e misurato mediante z . In particolare per $r_S \rightarrow R_S$ si osserva $z \rightarrow +\infty$ e che pertanto la superficie definita da $r = R_S$, che viene chiamata *orizzonte di Schwarzschild* (Fig. 1.6, Fig.1.7) è una *superficie di redshift infinito*. Essa inoltre è anche un esempio di

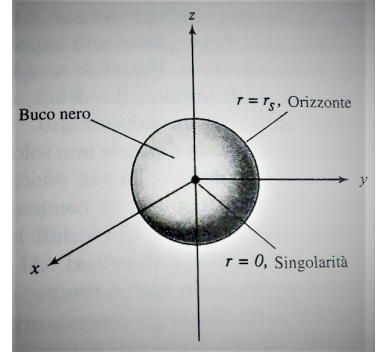


Figura 1.6: [2] *Buco nero di Schwarzschild con orizzonte degli eventi in coordinate x, y, z .*

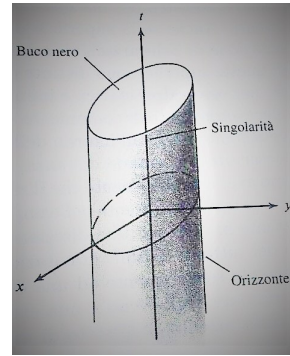


Figura 1.7: [2] *Buco nero di Schwarzschild con orizzonte degli eventi in coordinate x, y, t .*

orizzonte degli eventi, in quanto agisce come una sorta di membrana semipermeabile divide lo spazio-tempo in due regioni distinte in cui le informazioni possono essere inviate solo in un verso, ed offre una prima descrizione qualitativa di quanto può accadere in prossimità di un *buco nero*. Questi ultimi due concetti verranno ripresi ed approfonditi nel "Capitolo 2".

Quello che segue da quanto visto nel caso delle geodetiche radiali fa intuire che la natura delle singolarità $r = 0$ e $r = R_S$ nella metrica di Schwarzschild non è la stessa.

Serve quindi fare chiarezza.

1.4 Estensione massimale della geometria di Schwarzschild

Come osservato nel paragrafo precedente, la metrica di Schwarzschild nella forma (1.14) ha singolarità in $r = 0$ ed in $r = R_S$. Ci si domanda se tali singolarità siano effettivamente singolarità fisiche dello spazio-tempo o se siano dovute alla scelta del sistema di coordinate effettuata e pertanto rimovibili mediante una qualche trasformazione di coordinate.

Per rispondere a questo quesito, si studia l'invariante scalare di Kretschmann derivato dal tensore di Riemann

$$K = R^{abcd}R_{abcd} = \frac{12R_S^2}{r^6}. \quad (1.46)$$

Si osserva che K non è singolare in $r = R_S$ ed assume il valore $K|_{r=R_S} = \frac{12}{R_S^4}$, mentre diventa singolare in $r = 0$, infatti per $r \rightarrow 0$, $K \rightarrow +\infty$.

Ciò porta a concludere che $r = 0$ è una vera singolarità fisica, non rimovibile, mentre $r = R_S$ è una singolarità delle coordinate, pertanto rimovibile.

Resta da trovare una trasformazione di coordinate adatta per rimuovere la singolarità in $r = R_S$ ed estendere così il dominio di definizione della metrica di Schwarzschild che si ricorda essere limitato alla regione $R_S < r < +\infty$ dello spazio-tempo. In particolare, si è qui interessati a trovare un'*estensione massimale*, cioè un'estensione in cui la varietà abbia ogni geodetica di lunghezza infinita in entrambe le direzioni o terminante in una singolarità.

Per le simmetrie della soluzione di Schwarzschild, ci si può concentrare su uno spazio-tempo r-t bidimensionale avente la metrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (1.47)$$

dalla quale si ricava la seguente equazione per le geodetiche di tipo luce radiali ($ds^2 = 0$)

$$t = \pm r_* + \text{costante}, \quad (1.48)$$

dove il ”+” è per le geodetiche entranti ed il ”-” per le geodetiche uscenti e

$$r_* = r + R_S \ln \left(\frac{r}{R_S} - 1 \right). \quad (1.49)$$

Introducendo poi le coordinate di tipo luce

$$u = t - r_* \quad (1.50)$$

$$v = t + r_* \quad (1.51)$$

la metrica assume la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) du dv, \quad (1.52)$$

con r definito implicitamente come funzione di u e v tramite $r_* = \frac{v-u}{2}$, quindi

$$ds^2 = - \frac{R_S e^{-\frac{r}{R_S}}}{r} e^{\frac{v-u}{R_S}} du dv. \quad (1.53)$$

Si osserva a questo punto che la singolarità in $r = R_S$ (corrispondente a $u = +\infty$ e $v = -\infty$) è già stata rimossa, tuttavia non si è ancora in condizioni di estensione massimale, raggiungibile mediante l'introduzione delle coordinate

$$U = -e^{-\frac{u}{2R_S}} \quad (1.54)$$

$$V = e^{\frac{v}{2R_S}}. \quad (1.55)$$

Infine mediante le trasformazioni

$$T = \frac{U + V}{2} \quad (1.56)$$

$$X = \frac{V - U}{2} \quad (1.57)$$

la metrica di Schwarzschild quadridimensionale assume la forma di Kruskal(-Szekeres)

$$ds^2 = \frac{4R_S^3 e^{-\frac{r}{R_S}}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.58)$$

con (r, t) dati implicitamente da

$$\left(\frac{r}{R_S} - 1 \right) e^{\frac{r}{R_S}} = X^2 - T^2 \quad (1.59)$$

$$\frac{t}{R_S} = \ln \left(\frac{T+X}{X-T} \right) = 2 \operatorname{arctgh} \left(\frac{T}{X} \right), \quad (1.60)$$

dalle quali segue che il range di valori che possono assumere X e T è dato dalla condizione $r > 0$, la quale si traduce in

$$X^2 - T^2 > 1. \quad (1.61)$$

In Fig. 1.8 è rappresentato un diagramma dello spazio-tempo per l'estensione di Kruskal, in cui si ricorda che ad ogni punto corrisponde una 2-sfera di raggio r . È possibile

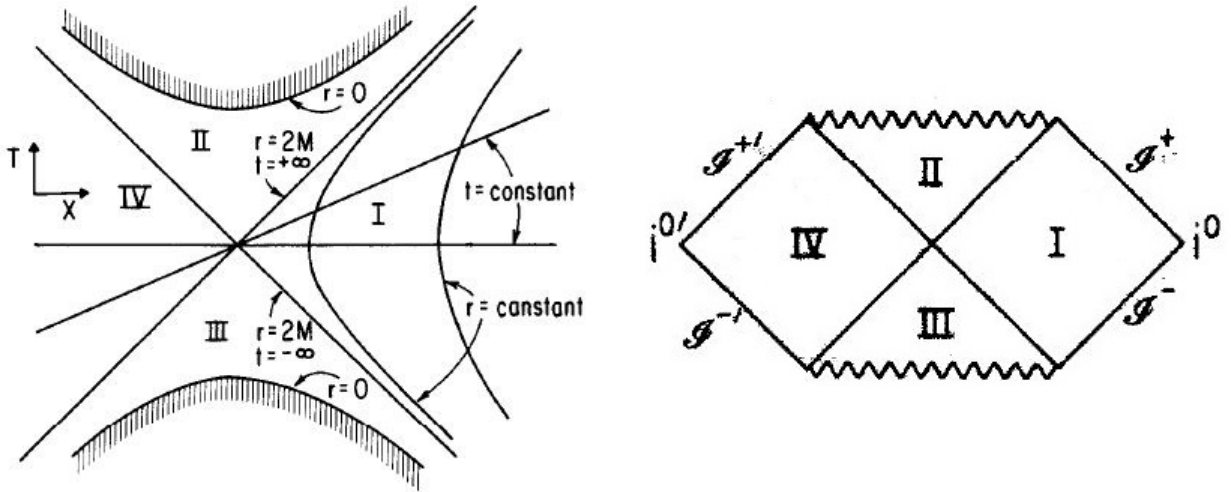


Figura 1.8: [1] Nella figura di sinistra è rappresentata l'estensione massima di Kruskal dello spazio-tempo di Schwarzschild ($G = 1$).

Nella figura di destra compare il diagramma conforme dell'estensione massima di Kruskal.

vedere come la struttura causale della soluzione di Schwarzschild venga semplificata: le geodetiche radiali di tipo luce sono rette a 45; le geodetiche a $t = costante$ sono delle rette, le geodetiche con $r = costante$ sono delle iperboli e la singolarità in $r = 0$ si rivela essere un insieme di singolarità dato da $X = \pm \sqrt{T^2 - 1}$. Lo spazio-tempo di Kruskal è suddiviso in quattro regioni e la sua struttura fa emergere questioni interessanti.

La regione I corrisponde a quella che nella soluzione di Schwarzschild era la regione $r > R_S$ ed è fisicamente interpretabile come la rappresentazione del campo gravitazionale all'esterno di un corpo sferico. La regione II viene denominata *buco nero* in quanto un osservatore in caduta radiale all'interno della regione I attraversa la superficie $X = T$ ed entra nella regione, dalla quale non può più uscire. Inoltre è destinato a cadere nella singolarità in $X = \sqrt{T^2 - 1}$ così come qualsiasi segnale luminoso che egli emetta in regione II. Le regioni III e IV probabilmente non hanno significato fisico, tuttavia si osserva che la regione III è geometricamente identica alla regione I ma non può comunicare con essa, mentre la regione IV è temporalmente invertita rispetto alla regione II ed è denominata

buco bianco: qualunque osservatore appartenente a tale regione deve essere stato originato nella singolarità $X = -\sqrt{T^2 - 1}$ e deve abbandonarla in una quantità di tempo proprio finita.

Se si vuole analizzare la regione asintoticamente piatta $r \rightarrow +\infty$ della soluzione di Schwarzschild, le coordinate di Kruskal risultano non adatte a tale descrizione. Tuttavia è possibile fare tale descrizione tramite una *trasformazione conforme* della metrica che conduce al *diagramma di Penrose* (vedi "Appendice B") in Fig.1.8.

Questo conclude l'analisi sulla soluzione di Schwarzschild.

Capitolo 2

Il concetto di buco nero

In questo capitolo ci si propone di introdurre alcuni concetti più geometrico-matematici della Relatività Generale, atti a definire in maniera formale alcuni concetti, tra i quali quelli di singolarità, di buco nero e di orizzonte degli eventi emersi nel capitolo precedente durante lo studio della soluzione di Schwarzschild.

2.1 La struttura causale in Relatività Generale

In Relatività Speciale la struttura causale dello spazio-tempo di Minkowski è relativamente semplice da definire: ad ogni evento p dello spazio-tempo viene infatti associato un cono luce e gli altri eventi contenuti al suo interno sono quelli connessi causalmente con p . Nel caso della Relatività Generale la struttura causale dello spazio-tempo è localmente quella dello spazio-tempo piatto in relatività speciale, tuttavia a livello globale possono insorgere differenze significative in termini di topologia non banale o singolarità fisiche (come nel caso $r = 0$ della soluzione di Schwarzschild).

Si consideri uno spazio-tempo (M, g_{ab}) *temporalmente orientabile*, dove è cioè possibile (cfr. Fig.2.1 per il caso non orientabile) definire con continuità il concetto di "passato" e "futuro" per ogni punto p della varietà (nel caso della relatività speciale, ciò si traduce nel designare una metà del cono luce di p come il futuro e l'altra metà come il passato ad esso causalmente connessi). In particolare la proprietà dell'essere temporalmente orientabile dello spazio-tempo risulta soddisfatta se è possibile definire su esso un campo vettoriale continuo di tipo tempo.

In particolare un vettore di tipo tempo o di tipo luce viene chiamato *futuro diretto* o *passato diretto*, se è contenuto rispettivamente nella metà futura o passata del cono luce

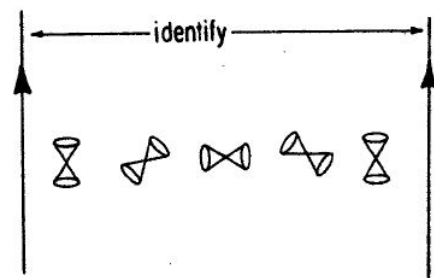


Figura 2.1: [1] Esempio di spazio-tempo non temporalmente orientabile.

di un evento.

Chiarito il concetto di orientabilità temporale, si può introdurre quello di *curva causale futuro/passato diretta* $\lambda(t)$, ovvero una curva differenziabile la cui tangente t^a ad ogni punto $p \in \lambda$ è un vettore di tipo luce o di tipo tempo futuro/passato diretto. Nel caso in cui il vettore sia di tipo tempo, si parla di *curva di tipo tempo futuro/passato diretta*. Fatto ciò, si definiscono il *futuro cronologico* $I^+(p)$ ed il *futuro causale* $J^+(p)$ di un evento $p \in M$ come gli insiemi degli eventi che possono essere raggiunti da una curva di tipo tempo futuro diretta e da una curva causale futura diretta. Tali definizioni sono estendibili ad ogni sottoinsieme $S \subset M$ definendo $I^+(S) = \cup_{p \in S} I^+(p)$ e $J^+(S) = \cup_{p \in S} J^+(p)$. In maniera analoga si definiscono i *passati cronologici* $I^-(p), I^-(S)$ ed i *passati causali* $J^-(p), J^-(S)$.

Alla luce di tali nozioni, un sottoinsieme $S \subset M$ viene definito come *acronale* se non esistono $p, q \in S$ tali che $q \in I^+(p)$, cioè se $I^+(S) \cap S = \emptyset$ (in pratica S è di tipo luce o spazio ovunque). Se tale sottoinsieme S oltre essere acronale è anche chiuso, si può definire il *dominio di dipendenza futuro (passato)* di S , $D^{+(-)}(S)$, come l'insieme degli eventi $p \in M$ tali che ogni curva causale passata/futura inestensibile passante per p interseca S (si ricorda che una curva futuro (passato) $\lambda(t)$ è detta *inestensibile* se non ha un *punto di fine futuro (passato)*, cioè un punto per cui per ogni suo intorno O esiste un tempo t_0 tale che $\lambda(t) \in O \forall t >(<) t_0$).

Osservando $S \subset D^{+(-)}(S) \subset J^{+(-)}(S)$ e che $D^{+(-)}(S) \cap I^{-(+)}(S) = \emptyset$, definendo il *dominio di dipendenza* di S , $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$, diventa chiaro che la natura di quest'ultimo sia l'insieme di tutti gli eventi influenzabili causalmente da S , cioè gli eventi il cui stato può essere previsto/ricostruito a partire da quello di S .

L'importanza del dominio di dipendenza di un insieme è dovuta al fatto che permette di introdurre il concetto di *superficie di Cauchy*, ovvero un insieme Σ chiuso e acronale che soddisfa $D(\Sigma) = M$ (il dominio di dipendenza di Σ è l'intera varietà). Uno spazio-tempo (M, g_{ab}) che posseda una superficie di Cauchy Σ viene detto *globalmente iperbolico*. Pertanto in un tale spazio-tempo, è possibile determinare l'intera storia passata e futura dell'universo dalle condizioni sull'istante di tempo contenuto implicitamente in Σ .

2.2 Singolarità e teoremi

Definire in maniera soddisfacente il concetto di singolarità in Relatività Generale non è così banale come potrebbe sembrare ad un primo sguardo. Si potrebbe pensare di definire una singolarità spaziotemporale come un "luogo" dello spazio-tempo in cui la curvatura vada all'infinito o la metrica non si comporti bene. Ci si rende conto però che il concetto di "luogo" non può essere una buona definizione in quanto in Relatività Generale, a differenza di altre teorie fisiche, la struttura di varietà metrica dello spazio-tempo non è nota a priori ma è da determinare risolvendo le equazioni di Einstein.

Questo fatto di non poter pensare una singolarità come un "luogo" acquisisce charez-

za se si tiene conto che fisicamente la nozione di evento è sensata solo quando attorno ad esso è definita la metrica dello spazio-tempo come varietà, cosa che porterebbe a rimuovere i punti singolari dal dominio di definizione della metrica. Pertanto, ammesso e non concesso che una singolarità sia un "luogo", essa non appartiene alla varietà dello spazio-tempo.

Tuttavia, come visto ad esempio nel caso della metrica di Schwarzschild per $r = 0$, tali singolarità esistono e, se non si può dire "dove" sono, ci si aspetta di poterle caratterizzare in qualche modo, ad esempio studiando il comportamento di qualche espressione scalare ottenibile dal tensore di curvatura. Purtroppo non si riescono a fare molti passi avanti in tal senso, in quanto un comportamento corrispondente alla presenza di una singolarità per uno spazio-tempo può non esserlo (ad esempio la non limitatezza nello spazio-tempo di uno scalare della curvatura).

A questo punto si può tentare di utilizzare come criterio per determinare la presenza di una singolarità i "buchi" lasciati dalla loro rimozione dal dominio della metrica dello spazio-tempo. Essi dovrebbero infatti essere rintracciabili per la presenza di *geodetiche incomplete*, ovvero geodetiche inestensibili almeno in una direzione ma hanno un range finito del parametro affine. In tal caso si potrebbe pensare di poter classificare tali singolarità a seconda del comportamento della curvatura, delle sue componenti e degli scalari di curvatura lungo tali geodetiche. Purtroppo anche in questo scenario insorgono delle complicazioni che non verranno qui trattate, pertanto la questione sulla localizzazione e classificazione delle singolarità rimane aperta.

Fortunatamente ci sono dei teoremi che permettono di dimostrare le condizioni per l'esistenza delle singolarità, anche se, sfortunatamente, non lasciano spazio ad alcuna classificazione. Prima di presentarli però, occorre introdurre alcune nozioni.

Sia $O \subset M$ un aperto: una *congruenza* in O è una famiglia di curve tali che attraverso ogni $p \in O$ passa esattamente una sola curva della famiglia.

Si consideri quindi una congruenza liscia di geodetiche di tipo tempo parametrizzate dal tempo proprio τ in modo tale che il campo vettoriale delle tangenti ξ^a sia normalizzato come $\xi^a \xi_a = -1$. Si definiscono poi il campo tensoriale

$$B_{ab} = \nabla_b \xi_a, \quad (2.1)$$

puramente spaziale ($B_{ab} \xi^a = B_{ab} \xi^b = 0$), e la "metrica spaziale"

$$h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b, \quad (2.2)$$

cosicché la traccia $h^a_a = g^{ac} h_{cb}$ è l'operatore di proiezione sul sottospazio dello spazio tangente perpendicolare a ξ^a . Si definiscono a questo punto l'*espansione*

$$\theta = B^{ab} h_{ab}, \quad (2.3)$$

lo *stiramento*

$$\sigma = B_{(ab)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \quad (2.4)$$

e la *torsione*

$$\omega_{ab} = B_{[ab]} \quad (2.5)$$

di una congruenza, in modo tale che B_{ab} risulta decomposto in

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}. \quad (2.6)$$

In particolare, per come è definito B_{ab} , si osserva che σ_{ab} e ω_{ab} sono spaziali ($\sigma_{ab}\xi^b = \omega_{ab}\xi^b = 0$). Lungo una geodetica della congruenza, queste tre grandezze appena definite misurano l'espansione media, lo stiramento e la torsione delle geodetiche infinitamente vicine, i cui tassi di deviazione sono dati dall'equazione di deviazione geodetica.

Essi possono essere derivati anche dall'equazione

$$\begin{aligned} \xi^c \nabla_c B_{ab} &= \xi^c \nabla_c \nabla_b \xi^a = \xi^c \nabla_b \nabla_c \xi^a + R_{cba}^d \xi^c \xi_d = \\ &= \nabla_b (\xi^c \nabla_c \xi^a) - (\nabla_b \xi^c) (\nabla_c \xi^a) + R_{cba}^d \xi^c \xi_d = \\ &= -B_b^c B_{ac} + R_{cba}^d \xi^c \xi_d, \end{aligned} \quad (2.7)$$

prendendone rispettivamente la traccia, la parte simmetrica senza traccia e la parte antisimmetrica. In particolare per la traccia si trova l'*equazione di Raychaudhuri*

$$\xi^c \nabla_c \theta = \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c \xi^d, \quad (2.8)$$

fondamentale nella dimostrazione dei teoremi sulle singolarità.

Prendendo in considerazione l'ultimo termine della (2.8), sfruttando le equazioni di Einstein lo si può riscrivere come

$$R_{ab}\xi^a \xi^b = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} \right) \xi^a \xi^b = 8\pi (T_{ab}\xi^a \xi^b), \quad (2.9)$$

dove $T_{ab}\xi^a \xi^b$ è la densità di energia misurata da un osservatore con 4-velocità ξ^a .

Le seguenti condizioni su (2.9) compaiono soventemente nella letteratura:

- la *condizione di energia dominante*, secondo cui per ogni ξ^a futuro diretto di tipo tempo $-T_b^a \xi^b$ è un vettore futuro diretto causale (ovvero la velocità del flusso di energia è sempre minore della velocità della luce);
- la meno restrittiva *condizione di energia debole*, secondo cui

$$T_{ab}\xi^a \xi^b \geq 0 \quad (2.10)$$

per ogni ξ^a di tipo tempo (cioè, come si pensa per la materia classica, la densità di energia è non negativa);

- la *condizione di energia forte*

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq -\frac{1}{2}T \quad (2.11)$$

per ogni ξ^a unitario di tipo tempo (equivalente a richiedere che nella parte destra di (2.9) la somma tra la densità di energia e le pressioni principali sia non negativa).

Si osserva che nel caso valga la condizione di energia forte, l'ultimo termine del secondo membro dell'equazione (2.8) risulta essere negativo. ciò è interpretabile fisicamente come il carattere attrattivo dell'interazione gravitazionale.

Un discorso analogo può essere fatto per una congruenza di geodetiche nulle parametrizzate dal parametro affine λ con campo tangente k^a . Prima di farlo si introducono, dato lo spazio tangente V_p di un punto $p \in M$, il sottospazio \tilde{V}_p dei vettori di V_p ortogonali a k^a e lo spazio vettoriale \hat{V}_p dei vettori della classe di equivalenza di vettori in \tilde{V}_p , la cui relazione di equivalenza tra due due vettori $x^a, y^a \in \tilde{V}_p$ è $x^a - y^a = ck^a$, con $c \in \mathbb{R}$.

Si definisce quindi il campo tensoriale agente su \hat{V}_p

$$\hat{B}_{ab} = \nabla_b k_a, \quad (2.12)$$

decomponibile come

$$\hat{B}_{ab} = \frac{1}{2}\theta\hat{h}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}_{ab}, \quad (2.13)$$

dove

$$\theta = \hat{h}_{ab}\hat{B}_{ab}, \quad (2.14)$$

$$\hat{\sigma}_{ab} = \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\theta\hat{h}_{ab}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\omega}_{ab} = \hat{B}_{[ab]} \quad (2.16)$$

hanno il medesimo significato fisico visto per le congruenze di tipo tempo e \hat{h}_{ab} è una metrica definita positiva su \hat{V}_p .

Procedendo come per le geodetiche di tipo tempo si trova l'equazione

$$k^c\nabla_c\hat{B}_{ab} = -\hat{B}_b^c\hat{B}_{ac} + \hat{R}_{cbad}k^ck^d, \quad (2.17)$$

la cui traccia porta all'analogia di (2.8)

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} + \hat{\omega}_{ab}\hat{\omega}^{ab} - R_{cd}k^ck^d, \quad (2.18)$$

dove però, usando nuovamente le equazioni di Einstein, si ha semplicemente

$$R_{ab}k^ak^b = 8\pi T_{ab}k^ak^b, \quad (2.19)$$

per la quale è possibile definire tre condizioni di energia del tutto analoghe al caso di congruenze di tipo tempo.

Si consideri ora una geodetica γ con tangente v^a definita su M . Una soluzione η^a dell'equazione di deviazione geodetica

$$v^a \nabla_a (v^b \nabla_b \eta^c) = -R_{abd} \eta^b v^a v^d \quad (2.20)$$

è detto *campo di Jacobi* su γ . Se esiste un campo di Jacobi non nullo che si annulla in due punti $p, q \in \gamma$, p e q sono detti *punti coniugati* (a livello intuitivo è possibile pensarli come i punti dove una geodetica infinitamente vicina a γ interseca γ , vedi Fig.2.2.)

L'importanza dei punti coniugati nello spazio-tempo è dovuta al fatto che caratterizzano le situazioni in cui le geodetiche di tipo tempo smettono di essere un massimo locale del del tempo proprio tra due punti e quelle di tipo luce di rimanere il bordo del futuro di un punto. Pertanto risulta utile determinare le condizioni che permettono l'esistenza di due punti coniugati.

Nel caso di geodetiche di tipo tempo vale la seguente

Proposizione: *Dati (M, g_{ab}) uno spazio-tempo che soddisfi la condizione $R_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0 \forall \xi^a$ di tipo tempo ed un punto $p \in \gamma$ geodetica di tipo tempo. Si supponga inoltre che l'espansione della congruenza di geodetiche di tipo tempo a partire da p nel futuro tenda al valore $\theta = \theta_0 < 0$ in $r \in \gamma$. Allora a partire da r esiste lungo γ un punto q coniugato a p entro un tempo proprio $\tau \leq \frac{3}{|\theta_0|}$, ammesso che la geodetica sia sufficientemente estesa.*

Per le geodetiche di tipo luce vale invece la

Proposizione: *Dati (M, g_{ab}) uno spazio-tempo che soddisfi la condizione $R_{ab} k^a k^b \geq 0 \forall k^a$ di tipo luce ed un punto $p \in \mu$ geodetica di tipo luce. Si supponga inoltre che l'espansione della congruenza di geodetiche di tipo luce a partire da p nel futuro tenda al valore $\theta = \theta_0 < 0$ in $r \in \mu$. Allora a partire da r esiste lungo μ un punto q coniugato a p entro una lunghezza affine $\tau \leq \frac{2}{|\theta_0|}$, ammesso che la geodetica sia sufficientemente estesa.*

Per la dimostrazione di tali proposizioni si rimanda a [1]. Un concetto simile di coniugazione può essere dato per un punto ed un'ipersuperficie liscia di tipo spazio Σ . Un punto $p \in \gamma$ geodetica della congruenza di geodetiche ortogonale a Σ è detto essere *coniugato* a Σ lungo γ se esiste un vettore ortogonale di deviazione η^a della congruenza che è non nullo su Σ ma si annulla in p (a livello intuitivo ciò è equivalente alla condizione in cui due geodetiche infinitamente vicine ortogonali a Σ si intersecano in p). Per quanto concerne l'esistenza di tali punti, valgono le seguenti due proposizioni analoghe alle due sopra presentate:

Proposizione: *Dati (M, g_{ab}) uno spazio-tempo che soddisfi la condizione $R_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0 \forall \xi^a$ di tipo tempo e Σ un'ipersuperficie di tipo spazio con curvatura estrinseca $K = \theta < 0$ in un punto $q \in \Sigma$. Allora esiste lungo la geodetica γ ortogonale a Σ e passante per q*

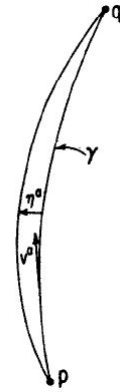


Figura 2.2: [1] Rappresentazione esplicativa di due punti coniugati.

un punto p coniugato a Σ entro un tempo proprio $\tau \leq \frac{3}{|\theta_0|}$, ammesso che la geodetica sia sufficientemente estesa.

Proposizione: *Dati (M, g_{ab}) uno spazio-tempo che soddisfi la condizione $R_{ab}k^ak^b \geq 0 \forall k^a$ di tipo luce e S una sottovarietà bidimensionale di tipo spazio tale che l'espansione θ delle geodetiche di tipo luce uscenti abbia un valore negativo θ_0 in $q \in S$. Allora esiste lungo la geodetica di tipo luce μ attraverso q un punto p coniugato a S entro una lunghezza affine $\tau \leq \frac{2}{|\theta_0|}$, ammesso che la geodetica sia sufficientemente estesa.*

Alla luce dei concetti sopra illustrati si è finalmente pronti ad enunciare i teoremi sull'esistenza di singolarità a partire dall'incompletezza di geodetiche di tipo tempo o luce.

In particolare si è qui interessati ai teoremi con condizioni rilevanti nel caso del collasso gravitazionale. Si ritiene pertanto opportuno introdurre il concetto di *superficie intrappolata* T , ovvero una sottovarietà di tipo spazio, compatta e liscia che abbia l'espansione θ delle geodetiche di tipo luce entranti ed uscenti, futuro dirette e ortogonali a T negativa ovunque. Un esempio di superficie intrappolata è una qualunque sfera all'interno della regione II della soluzione estesa di Schwarzschild.

Il primo teorema che si presenta (Penrose, 1965 [9]) è stato storicamente il primo ad essere dimostrato e mostra come in seguito alla formazione di una superficie intrappolata si venga a creare una singolarità.

Teorema *Sia (M, g_{ab}) uno spazio-tempo connesso con una superficie di Cauchy Σ . Si supponga la validità delle equazioni di Einstein sotto la condizione di energia forte o debole per la materia. Si supponga inoltre che M contenga una superficie intrappolata T . Allora, posto $\theta_0 < 0$ il valore massimo della curvatura θ per entrambi i set di geodetiche ortogonali su T , almeno una geodetica nulla da T , futuro diretta, ortogonale ed inestensibile ha lunghezza affine non più grande di $\frac{2}{|\theta_0|}$.*

L'esistenza di una singolarità è ancora garantita, rimuovendo l'ipotesi di spazio-tempo globalmente iperbolico e facendo altre assunzioni, nel seguente teorema (Hawking e Penrose, 1970 [10], [11]).

Teorema *Si supponga che uno spazio-tempo (M, g_{ab}) soddisfi le seguenti quattro condizioni.*

(1) *Le equazioni di Einstein sono soddisfatte sotto le condizioni di energia forte per la materia.*

(2) *Le condizioni generiche di tipo luce e di tipo tempo sono soddisfatte.*

(3) *Non esistono curve di tipo tempo chiuse.*

(4) *Vale almeno una delle seguenti tre condizioni: (a) (M, g_{ab}) possiede un insieme compatto acronale senza bordo, (b) (M, g_{ab}) possiede una superficie intrappolata o (c) esiste un punto $p \in M$ tale che l'espansione delle geodetiche di tipo luce futuro (passato) dirette emanate da p diventa negativa lungo ogni geodetica in questa congruenza.*

Allora (M, g_{ab}) deve contenere almeno una geodetica di tipo luce o di tipo tempo incompleta.

2.3 La genesi di un buco nero e la congettura del censore cosmico

Alla luce di quanto visto nei paragrafi 1.3 e 1.4 a proposito delle geodetiche radiali e della natura della superficie individuata dal raggio di Schwarzschild, si potrebbe concludere a livello intuitivo che se una stella sferica venisse compressa tramite un qualche fenomeno ad un raggio minore di quello di Schwarzschild, il collasso sferico della stessa diverrebbe inevitabile. Effettivamente tale condizione può venire a verificarsi nel corso della vita di una stella [2].

Come è noto, all'interno di una stella vi sono due pressioni in conflitto una con l'altra: quella gravitazionale dovuta alla massa della stella stessa, che tende a comprimerla, e quella termica dovuta alle reazioni termonucleari che avvengono all'interno della stella, che tende ad espanderla. Finché vi è sufficiente combustibile per alimentare le reazioni, le due pressioni si bilanciano mutuamente e la stella sussiste in una sorta di equilibrio idrostatico.

Tuttavia, una volta terminato tutto il combustibile nucleare, la pressione dovuta alle reazioni scompare e la stella inizia a collassare sotto il proprio peso, contraendosi lentamente o implodendo. Tale collasso può essere interrotto solo se, raggiungendo una densità ben precisa, si innesca un meccanismo per generare una sufficiente pressione in sostituzione a quella derivante dalle reazioni termonucleari.

Questo meccanismo esiste e risulta essere di natura quantistica: nel corso nel collasso, la stella diventa così densa da poter essere assimilata ad un gas degenero di Fermi di elettroni, la cui pressione quantomeccanica di punto zero riesce a controbilanciare quella gravitazionale, così la stella continua a esistere come nana bianca fino al suo spegnimento.

Per nane bianche sufficientemente massive (limite di Chandrasekhar di 1.44 masse solari) invece, la pressione di punto zero è insufficiente a fermare il collasso: a causa della pressione gravitazionale, gli elettroni cadono sui nuclei urtando i protoni e formando neutroni. La stella risulta ora essere un gas degenero di neutroni, la cui pressione quantomeccanica di punto zero riesce di nuovo a bloccare il collasso: tale stato è detto di stella di neutroni. Tuttavia, esiste di nuovo una massa critica (limite di Oppenheimer-Volkoff di 3.8 masse solari) oltre la quale neanche la pressione dei neutroni può impedire il proseguimento del collasso gravitazionale, che continua inesorabilmente.

Non vi sono ulteriori meccanismi a questo punto che possono opporsi al collasso e la stella si contrae fino a raggiungere e superare il raggio di Schwarzschild proseguendo fino a creare un singolarità in $r = 0$. Un osservatore esterno direbbe che la superficie della stella raggiunge asintoticamente il raggio di Schwarzschild da cui deriva l'appellativo di "stella congelata".

Tale "stella congelata" in un certo senso contiene la singolarità, la quale non può essere vista da un osservatore esterno, e diventa di fatto indistinguibile da un buco nero. Tutto

questo (la formazione da un collasso di un buco nero che nasconde all'osservatore la singolarità che si viene a creare) accade nel caso del collasso di una sorgente gravitazionale a simmetria sferica e ci si chiede se sia estendibile al caso non sferico. Se l'esperienza suggerisce una risposta affermativa, la discussione teorica risulta alquanto complessa ma fornisce risultati incoraggianti che si vanno ad esaminare di seguito [1].

Nello studio del collasso non sferico si deve definire la nozione di buco nero. Tale definizione deve essere analoga a quella fatta per la regione II dell'estensione massimale della metrica di Schwarzschild (vedi paragrafo 1.4), cioè una regione dello spazio-tempo nella quale la forza di gravità è così intensa da impedire la fuga da quella regione a qualunque particella massiva e non che ci entri.

Facendo riferimento per la notazione a quanto visto in questo capitolo ed alla teoria dei diagrammi conformi (Appendice B), si definisce uno spazio-tempo (M, g_{ab}) *fortemente predicibile asintoticamente* se nello spazio-tempo non fisico $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ ad esso associato esiste una regione aperta $\tilde{V} \subset \tilde{M}$, con $\overline{M \cap J^-(\mathcal{I}^+)} \subset \tilde{V}$, tale che $(\tilde{V}, \tilde{g}_{ab})$ sia globalmente iperbolico.

Uno spazio-tempo fortemente predicibile è detto contenente un *buco nero* se M non è contenuto in $J^-(\mathcal{I}^+)$ e la *regione di buco nero*¹ B di tale spazio-tempo è definita come $B = [M - J^+(\mathcal{I}^+)]$, mentre $H = \dot{J}^-(\mathcal{I}^+) \cap M$ è chiamato orizzonte degli eventi. La caratteristica di essere uno spazio-tempo fortemente predicibile asintoticamente si dimostra tradursi fisicamente nel fatto che tutti gli osservatori al di fuori di un buco nero o dell'orizzonte degli eventi non possono vedere l'originarsi di alcuna singolarità in un tempo finito. Al contrario, se uno spazio-tempo non è asintoticamente fortemente predicibile, si dice che esso possiede una *singolarità nuda*. Quindi l'esistenza di una singolarità spaziotemporale non garantisce l'esistenza di un buco nero, in quanto può essere nuda e di conseguenza lo spazio-tempo non asintoticamente fortemente predicibile.

Ora che si è chiarita la definizione di buco nero in uno spazio-tempo asintoticamente fortemente predicibile, si vuole brevemente indagare la sua rilevanza fisica. Nel caso a simmetria sferica il collasso gravitazionale effettivamente dà origine ad uno spazio-tempo asintoticamente fortemente predicibile con una singolarità contenuta in un buco nero. Cosa si può dire invece dello spazio-tempo risultante dal collasso gravitazionale nel caso non sferico? Sfruttando i teoremi sulle singolarità (vedi paragrafo 2.2) è possibile affermare che per piccole deviazioni dalla simmetria sferica, al termine del collasso deve esserci una singolarità. Tuttavia così non è ancora stata esclusa la possibilità che la singolarità prodotta sia nuda e non vi sia alcun buco nero. Un passo nella direzione della presenza di un buco nero viene fatto attraverso lo studio perturbativo del primo ordine dello spazio-tempo di Schwarzschild.

Sebbene vi siano altri argomenti a favore della presenza di un buco nero, una dimostrazione rigorosa non è ancora stata trovata e ci si deve affidare a delle congetture.

¹Analogamente la *regione di buco bianco* di uno spazio tempo "retrodiscibile" è definita in maniera analoga con $J^+(\mathcal{I}^-)$ al posto di $J^-(\mathcal{I}^+)$

Indubbiamente quella più famosa è la *congettura del censore cosmico* dovuta a Penrose (1969 [12]) della quale si riportano² in seguito la formulazione debole e forte in ottica fisica.

Congettura del Censore Cosmico (debole): “Il collasso gravitazionale completo di un corpo produce sempre un buco nero piuttosto che una singolarità nuda, ovvero tutte le singolarità di un collasso gravitazionale sono nascoste in un buco nero e non possono essere viste da osservatori lontani.”

Congettura del Censore Cosmico (forte)³ “Tutti gli spazi-tempo fisicamente ragionevoli sono globalmente iperbolici, cioè, a parte una possibile singolarità iniziale (del tipo “Big Bang”), nessuna singolarità è visibile ad alcuno osservatore.”

Dalla validità di queste congetture dipende largamente la rilevanza fisica dei buchi neri. Non risultano esserci prove contro queste congetture.

Alla luce di ciò ed assumendo come valida la prima, si illustrano di seguito tre esempi di collasso gravitazionale non sferico che possono dare origine in natura ad un buco nero. Il primo è il collasso di stelle particolarmente massive che è già stato discusso in precedenza: anche se tale processo nella realtà non rientra nel caso sferico (esempio: la rotazione delle stelle aumenta il limite inferiore alla massa necessaria per formare un buco nero), tale approssimazione funziona ed è più che sufficiente per descrivere il fenomeno. Le masse dei buchi neri prodotti in tal caso sono stimate variare tra qualche centinaio ed un centinaio di masse solari.

Il secondo processo è il collasso del nucleo centrale di un ammasso stellare, per il quale i nuclei galattici sono degli ottimi candidati. La massa dei buchi neri in tal caso può raggiungere un'importante frazione della massa dell'ammasso, dell'ordine di 10^{10} masse solari. L'ultimo processo, di carattere più speculativo è la produzione di buchi neri dal collasso di regioni ad alta densità nelle prime fasi di vita dell'universo. La massa di tali “buchi neri primordiali” può assumere una vasta scala di valori. Non esistono processi allo stato attuale dell'universo in grado di produrre tali buchi neri. Come rilevare tali buchi neri dal momento che non sono visibili? Una possibilità viene fornita nel caso in cui un'ingente quantità di materia cade in un buco nero: prima di entrarci dentro, essa si riscalda ed emette radiazione elettromagnetica (Gamma Ray Burst). In natura ciò può accadere se la stella che è collassata ed ha originato un buco nero fa parte di un sistema

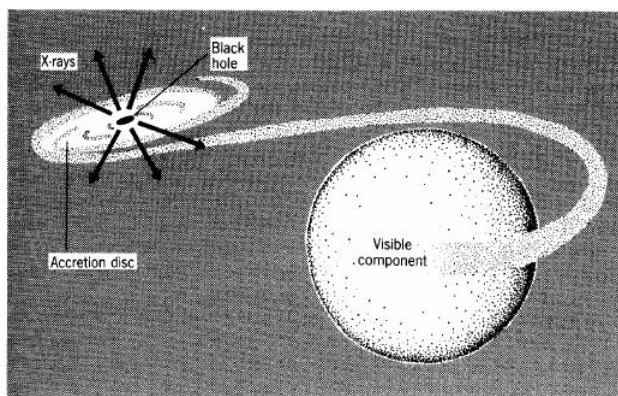


Figura 2.3: [3] *Rappresentazione di un sistema binario con una componente visibile ed un buco nero.*

²Le versioni riportate per come sono formulate qui risultano imprecise. Per la formulazione debole mancano le condizioni sull'energia e sul fatto che le equazioni di Einstein devono ammettere una formulazione ai valori iniziali ben posta. Nella seconda mancano delle specificazioni per avere soluzioni globalmente iperboliche. Una formulazione matematica più precisa e rigorosa naturalmente esiste, ma la si è voluta qui evitare poichè sarebbe stato necessario introdurre parecchie altre nozioni.

³La seconda versione è detta forte in quanto si applica a qualunque osservatore in qualunque spazio-tempo, tuttavia le due versioni sono matematicamente indipendenti.

binario (Fig.2.3): a causa della forte gravità, dalla stella compagna la materia fluisce verso il buco nero spiraleggiando, andando a formare un *disco di accrescimento* attorno al buco nero, il quale riscaldandosi può produrre raggi X osservabili da opportuni rilevatori. Un esempio in tale frangente è dato storicamente dal sistema binario Cygnus X-1. Per quanto riguarda invece il caso di buchi neri al centro di un ammasso stellare o di un nucleo galattico, effetti osservabili della sua presenza potrebbero essere l'alterarsi della distribuzione spaziale delle stelle vicino al centro dell'ammasso ed un aumento nella loro velocità media, nonché un piccolo aumento della luminosità vicino al centro. Alcuni di questi effetti per esempio sono stati osservati storicamente al centro della galassia M87. Nel caso di "buchi neri primordiali" invece il discorso si fa più complicato ed in assenza di osservazioni il dibattito sulla loro esistenza è ancora aperto. Si conclude questo paragrafo citando un ultimo risultato, molto importante nell'evoluzione di un buco nero. Si tratta del *teorema dell'area di Hawking* (1971, [13]), il quale afferma che l'area dell'orizzonte degli eventi è una funzione non decrescente del tempo sotto le condizioni di energia debole:

Teorema *Sia (M, g_{ab}) uno spazio-tempo asintoticamente fortemente predicibile soddisfacente $R_{ab}k^ak^b \geq 0$ per ogni k^a di tipo luce. Siano poi Σ_1 e Σ_2 superfici di Cauchy di tipo spazio per la regione globalmente iperbolica \tilde{V} con $\Sigma_2 \subset I^+(\Sigma_1)$ e $\mathcal{H}_1 = H \cap \Sigma_1$, $\mathcal{H}_2 = H \cap \Sigma_2$. Allora l'area di \mathcal{H}_2 è maggiore o uguale all'area di \mathcal{H}_1 .*

La validità effettiva o no di questo teorema apre orizzonti interessanti tra buchi neri, termodinamica e fisica quantistica.

Capitolo 3

La soluzione di Kerr

Nei due capitoli precedenti si sono studiate la soluzione di Schwarzschild ed il concetto di buco nero. Poichè il concetto di staticità e simmetria sferica sono delle idealizzazioni, la metrica di Schwarzschild si rivela inadeguata alla descrizione di molte sorgenti gravitazionali e pertanto va abbandonata.

In questo capitolo ci si introduce la metrica di Kerr per la descrizione di (alcune) sorgenti gravitazionali a simmetria assiale e se ne studiano le principali proprietà, con particolare riguardo al caso di buco nero.

3.1 Introduzione alla metrica di Kerr

Si consideri una sorgente gravitazionale massiva, non carica e rotante. Allora la soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto all'esterno della sorgente sono date dalla *metrica di Kerr* (1963 [14]), qui espressa nelle coordinate quasi-sferoidali di Boyer-Lindquist:

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.1)$$

dove

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.2)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GM r. \quad (3.3)$$

Le metrica di Kerr fornisce quindi una famiglia di soluzioni a due parametri (M e a). La prima osservazione che viene spontanea fare è che nel limite $a \rightarrow 0$, la metrica di Kerr si riduce a quella di Schwarzschild, fatto che consente di identificare il parametro M con la massa della sorgente. Dallo studio della soluzione in regime di campo debole si riesce

ad identificare il parametro a con il momento angolare per unità di massa della sorgente (misurato all'infinito) $\frac{J}{M}$. Poiché i coefficienti della metrica non dipendono dal parametro ϕ , essa risulta essere a simmetria assiale ed ammette il campo di Killing $\psi^a = \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^a$. Essa è inoltre stazionaria a causa del termine misto $dt d\phi$, sebbene i coefficienti siano indipendenti dal parametro temporale t , ed ammette quindi il campo di Killing $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$. In particolare, per quanto concerne i buchi neri non carichi, è possibile dimostrare che la famiglia di soluzioni di Kerr è l'unica stazionaria. Non è invece possibile affermare lo stesso per una generica sorgente gravitazionale non carica, a causa dei termini di multipolo gravitazionale che può possedere. La metrica è inoltre asintoticamente piatta, quindi si riduce a quella di Minkowski in coordinate sferiche nel limite $r \rightarrow +\infty$. Per concludere, secondo la classificazione algebrica di Petrov, le soluzioni sono di tipo II-II con i due vettori nulli principali ripetuti

$$l^a = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{a}{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \quad (3.4)$$

$$n^a = \frac{r^2 + a^2}{2\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{a}{2\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^a - \frac{\Delta}{2\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a, \quad (3.5)$$

normalizzati come $l^a n_a = -1$.

3.2 Proprietà della geometria di Kerr e studio delle geodetiche

Dallo studio della metrica nella forma (3.1), essa risulta singolare o degenerare per $\Delta = 0$ o $\Sigma = 0$. Si verifica subito se tra di esse vi siano effettivamente delle singolarità andando a calcolare lo scalare di curvatura di Kretschmann $R_{abcd}R^{abcd}$, dal quale risulta che si ha una singolarità fisica per $\Sigma = 0$, che si traduce nella condizione

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (3.6)$$

per $M \neq 0$.

A differenza della singolarità in $r = 0$ per la metrica di Schwarzschild, nel caso della metrica di Kerr essa non si riduce a un punto, bensì è interpretabile come singolarità ad anello. Tale interpretazione deriva dal fatto che per $M = 0, a \neq 0$, la metrica di Kerr si riduce a quella di Minkowski in coordinate sferoidali, dove la singolarità in $\Sigma = 0$ è una singolarità delle coordinate localizzata nell'anello di raggio $x^2 + y^2 = a$ nel piano equatoriale $z = 0$ (a partire dal fatto che (3.6) vale se e solo se $r = \cos \theta = 0$).

Passando al caso $\Delta = 0$ ci si attende di trovare, analogamente al caso della metrica di Schwarzschild, singolarità eliminabili con un opportuno cambio di coordinate. In

particolare le soluzioni di $\Delta = 0$ definiscono degli orizzonti degli eventi in quanto tale condizione implica $\frac{dr}{dt} = 0$ valida per gli orizzonti degli eventi. Si ha quindi

$$\Delta = r^2 - R_S r + a^2 = 0, \quad (3.7)$$

da cui

$$r = r_{\pm} \equiv \frac{R_S}{2} \pm \sqrt{\frac{R_S^2}{4} - a^2}, \quad (3.8)$$

dove $R_S = 2GM$. Si osserva immediatamente che per $R_S < 2a$ (o $GM < a$) non vi sono soluzioni all'equazione (3.7): in tal caso non vi sono orizzonti degli eventi e la singolarità ad anello è nuda (Fig.3.1), quindi la metrica di Kerr non è asintoticamente fortemente predicibile e non descrive un buco nero. Se si assume inoltre l'ipotesi del censore cosmico, il caso $R_S < 2a$ non pare fisicamente rilevante ed è da scartare nella trattazione. Si tornerà sull'argomento nel prossimo paragrafo.

Si considera quindi il caso $R_S \geq 2a$, per il quale vi sono due orizzonti degli eventi, uno esterno individuato da r_+ ed uno interno individuato da r_- , che vengono a coincidere per $R_S = 2a$. Ci si chiede se come nel caso di Schwarzschild gli orizzonti degli eventi coincidano con le superfici di redshift infinito. Tale quesito ha nel caso della metrica di Kerr risposta negativa, in quanto andando ad usare come condizione per le superfici di redshift infinito $g_{00} = 0$ (in alternativa), si ha

$$g_{00} = \frac{a^2 \sin^2 \theta - \Delta}{\Sigma} = 0, \quad (3.9)$$

da cui, esplicitando Δ ed imponendo l'annullarsi del numeratore, si giunge all'equazione

$$r^2 - R_S r + a^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (3.10)$$

la quale fornisce come soluzioni

$$r = r_{rs\pm} \equiv \frac{R_S}{2} \pm \sqrt{\frac{R_S^2}{4} - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.11)$$

I due valori r_{\pm} individuano due superfici di redshift infinito $S_{r_{s\pm}}$, con $S_{r_{s-}}$ contenuta in $S_{r_{s+}}$, che contengono i corrispettivi orizzonti degli eventi e li intersecano ai poli ($\theta = 0, \theta = \pi$), come visibile in (Figura). Si nota che per $r_{rs-} < r < r_{rs+}$ g_{00} ha segno positivo, pertanto in tale regione la coordinata t non è più di tipo tempo bensì di tipo spazio, mentre per $r = r_{\pm}$ è di tipo luce. Si osserva che nel limite $a \rightarrow 0, r_+ \rightarrow R_S, r_{rs+} \rightarrow R_S, r_- \rightarrow 0, r_{rs-} \rightarrow 0$ e si recupera come atteso la coincidenza tra superfici di redshift

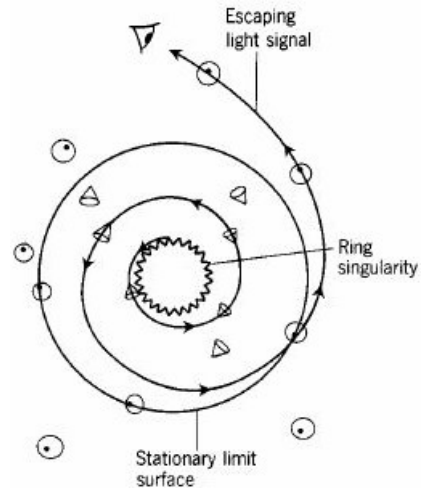


Figura 3.1: [3] Soluzione di Kerr ($R_S < 2a$) con singolarità nuda.

infinito ed orizzonti degli eventi in Schwarzschild.

Si fa ora un breve riepilogo di quanto trovato. La soluzione di Kerr nel caso $R_S \geq 2a$ ha una singolarità ad anello data dalla condizione $\Sigma = 0$, due singolarità delle coordinate per $r = r_{\pm}$ che si traducono in orizzonti degli eventi, e due superfici di redshift infinito in $r = r_{rs\pm}$. Per $R_S > 2a$, essa è quindi regolare nelle tre regioni (Fig.3.2)

- I. $r_+ < r < +\infty$;
- II. $r_- < r < r_+$;
- III. $0 < r < r_-$,

che si riducono a due nel caso $R_S = 2a$. In particolare, ricordando che r_+ è contenuto in r_{rs+} , si definisce *ergosfera* la regione $r_+ < r < r_{rs+}$, esterna al buco nero, la quale ha importanti proprietà connesse al *processo di Penrose*, trattato nel paragrafo 3.3. Si procede ora con una discussione qualitativa sulle geodetiche nella geometria di Kerr. Sfruttando la presenza dei due campi di Killing $\xi^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$ di tipo tempo e $\psi^a = (\frac{\partial}{\partial \phi})^a$ assiale, si introducono in analogia con quanto fatto per la soluzione di Schwarzschild gli integrali primi

$$\tilde{E} = -u^a \xi^a = \left(1 - \frac{R_S r}{\Sigma}\right) \dot{t} + \frac{R_S a r \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{\phi}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{J} = u^a \psi_a = -\frac{R_S a r \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t} + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta \dot{\phi}, \quad (3.13)$$

$$g_{ab} u^a u^b = -\kappa, \quad (3.14)$$

dove u^a , \tilde{E} , \tilde{J} , κ e \dot{x}^μ hanno lo stesso significato che avevano nel caso della metrica di Schwarzschild. Nel caso di geodetiche generali, le costanti del moto \tilde{E} e \tilde{J} non forniscono sufficienti integrali primi del moto, tuttavia la metrica di Kerr ammette il tensore di Killing (Walker e Penrose, 1970 [15])

$$K_{ab} = 2\Sigma l_{(a} n_{b)} + r^2 g_{ab}, \quad (3.15)$$

che porta ad un ulteriore integrale primo del moto, detto costante di Carter, dato da

$$C = K_{ab} u^a u^b \quad (3.16)$$

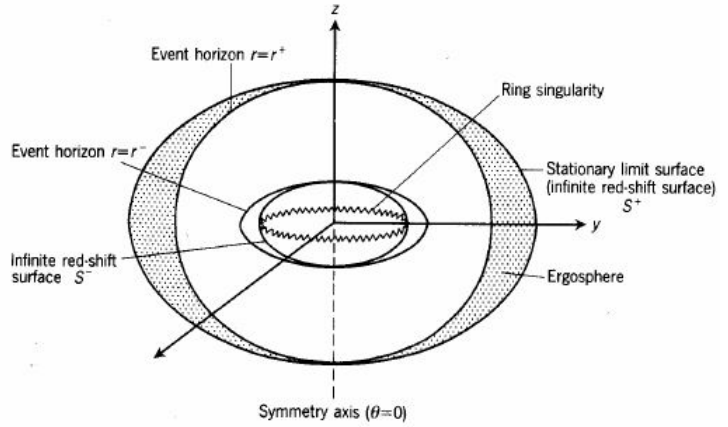


Figura 3.2: [3] Soluzione di Kerr nel caso $R_S > 2a$.

che permette l'integrazione esplicita delle equazioni geodetiche.

Per quanto riguarda le geodetiche equatoriali dopo aver ottenuto da (3.12) e (3.13) le espressioni di \dot{t} e $\dot{\phi}$ in funzione di \tilde{E} e \tilde{J} , le si sostituisce in (3.14), ottenendo così

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V(\tilde{E}, \tilde{J}, r) = 0, \quad (3.17)$$

dove

$$V = -\kappa \frac{R_s}{2r} + \frac{\tilde{J}^2}{2r} + \frac{1}{2} (\kappa - \tilde{E}) \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{R_s}{2r^3} (\tilde{J} - a\tilde{E})^2. \quad (3.18)$$

Ci si riconduce così, come nel caso di Schwarzschild, alla risoluzione di un problema unidimensionale di meccanica classica sotto un potenziale efficace, le cui orbite circolari sono date dalle soluzioni di $V = 0$ e $\frac{dV}{dr} = 0$. Non si fa qui una trattazione esplicita di tali soluzioni e del loro significato (discusso in Bardeen, Press e Teukolosky [16]), ma si riporta un interessante risultato per le energie di legame per orbite stabili attorno a un buco nero di Kerr, le quali risultano più alte che per un buco nero di Schwarzschild. Si trova infatti per un buco nero di Kerr con $a = \frac{R_s}{2}$ che l'ultima orbita stabile (con $\tilde{J} > 0$) ha $\tilde{E} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ciò implica che, dato un corpo di prova con $\tilde{J} > 0$ che spiraleggiando è giunto sull'ultima orbita circolare stabile perdendo energia tramite emissione di radiazione gravitazionale, esso ha perso $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 42\%$ della sua energia a riposo originale (si ricorda che nel caso di Schwarzschild tale perdita ammonta solo al 6%).

Si studia infine l'insieme di curve dato dalle condizioni $dr = d\theta = ds^2 = 0$ nella regione $r_+ < r$ (regione I per quanto visto in precedenza)[3]. In tal caso, l'elemento di linea della metrica di Kerr (3.1) diventa

$$0 = ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.19)$$

dalla quale, risolvendo per $\frac{d\phi}{dt}$, si ottiene

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{a \sin \theta \pm \Delta^{\frac{1}{2}}}{(r^2 + a^2) \sin \theta \pm a \Delta^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta}. \quad (3.20)$$

Tali curve non sono geodetiche, bensì sono tangenti alle linee di mondo di fotoni inizialmente vincolati ad orbitare attorno alla sorgente con r e θ costanti. Nel caso in cui $\frac{d\phi}{dt} > 0$ essi orbitano nella stessa direzione di rotazione della sorgente. Al contrario, per $\frac{d\phi}{dt} < 0$ la direzione di rotazione è opposta a quella della sorgente. Restringendosi al segno + si ha che $\frac{d\phi}{dt} > 0$, pertanto se si vuole studiare quando $\frac{d\phi}{dt} \leq 0$, ci si deve restringere al segno -. Poiché si è nella regione I c'è il vincolo aggiuntivo $r > r_+$, il quale si traduce nella condizione sul denominatore

$$(r^2 + a^2) \sin^2 \theta - a \sin^2 \theta - a \Delta^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta > 0. \quad (3.21)$$

Il denominatore nella regione I risulta così sempre positivo, pertanto resta da determinare quando il numeratore è negativo per ottenere il risultato cercato. Si ottiene

$$\frac{d\phi}{dt} \leq 0 \Leftrightarrow a \sin \theta - \Delta^{\frac{1}{2}} \leq 0 \Leftrightarrow r \geq r_{rs+}. \quad (3.22)$$

Questo risultato è abbastanza sorprendente: nella regione $r_+ < r < r_{rs+}$, cioè nell'ergosfera, i fotoni (e, di conseguenza, qualunque corpo massivo) sono obbligati a ruotare attorno al buco nero nella sua stessa direzione di rotazione. In particolare avvicinandosi all'orizzonte degli eventi $r = r_+$ la velocità angolare delle particelle tenderà a ($r \rightarrow r_+ \Rightarrow \Delta \rightarrow 0$)

$$\Omega_H = \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{r=r_+} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad (3.23)$$

interpretabile in un certo senso come la velocità di rotazione dell'orizzonte degli eventi $r = r_+$ di un buco nero di Kerr. Sulla superficie di redshift infinito individuata da r_{rs+} , invece, un fotone (e quindi nessuna particella massiva) può al più stare fermo (rispetto ad un osservatore all'infinito). Tale superficie è detta *superficie stazionaria limite* ed è di tipo tempo ovunque ad eccezione dei due suoi punti sull'asse di rotazione del buco nero coincidenti con l'orizzonte degli eventi nullo $r = r_+$. Nei punti in cui la superficie è di tipo tempo, la struttura dei coni luce rivela che la superficie può essere attraversata sia in direzione entrante che uscente (vedi figura).

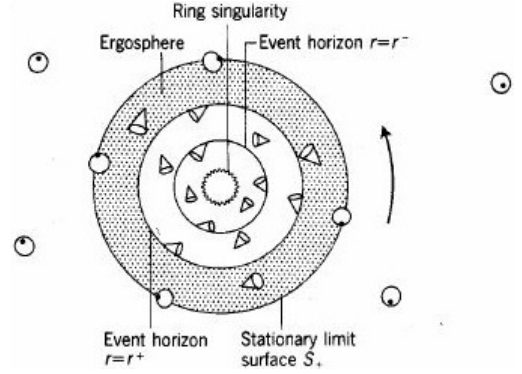


Figura 3.3: [3] *Diagramma spaziale della soluzione di Kerr ($R_S > 2a$) nel piano equatoriale.*

3.3 Il processo di Penrose

In questo paragrafo si va a trattare il processo di Penrose (1969, [12]) che rende possibile in linea teorica l'estrazione di energia da un buco nero dotato di ergosfera, un fatto che fece scalpore all'epoca, dal momento che il concetto di buco nero era associato a quello di regione dalla quale nulla può fuggire.

La base del ragionamento è il fatto che nell'ergosfera di un buco nero rotante il campo di Killing di tipo tempo ξ^a è di tipo spazio. Da ciò deriva che una particella di test con quadrimomento $p^a = mu^a$ ha un'energia

$$E = -p^a \xi_a \quad (3.24)$$

che deve essere non positiva quando essa si trova nell'ergosfera. Pertanto, se si introduce una particella ad energia negativa nel buco nero, risulta possibile estrarre energia da

esso. Lo si dimostra in maniera concreta mediante un esperimento mentale.

Si supponga di aver preparato in laboratorio a grande distanza dal buco una particella con quadrimomento p_0^a e di conseguenza un'energia ivi misurata

$$E_0 = -p_0^a \xi_a \quad (3.25)$$

e di lanciarla in direzione del buco nero in modo che sia in caduta libera (cioè sia la sua traiettoria una geodetica), in modo che così E_0 resti costante lungo il tragitto. Una volta che la particella è giunta nell'ergosfera, la si fa esplodere in modo da romperla in due frammenti (ciò può essere fatto mediante un dispositivo regolato da un timer). Per la conservazione del quadrimomento si ha localmente

$$p_0^a = p_1^a + p_2^a, \quad (3.26)$$

con p_1^a e p_2^a i quadrimomenti dei due frammenti.

Contraendo l'equazione con ξ^a , essa si traduce in termini di energia come

$$E_0 = E_1 + E_2. \quad (3.27)$$

Tuttavia, poiché ci si trova all'interno dell'ergosfera, si può fare in modo che in seguito all'esplosione un dei due frammenti abbia energia negativa $E_1 < 0$. In questo modo, il frammento a energia negativa cadrà all'interno del buco nero, mentre l'altro frammento tornerà, sempre tramite moto geodetico, al laboratorio, ma con un'energia $E_2 > E_0$ (Fig.3.4). In particolare per un buco nero di Kerr con massa M e $a \neq 0$ si può verificare in maniera esplicita che il processo avvenga nella maniera sopra descritta. In questo modo, al termine della procedura, si avrà che il frammento tornato in laboratorio ha energia $E_0 + |E_1|$ e la massa-energia del buco nero si è ridotta a $M - |E_1|$, cosicché si può effettivamente affermare di avere estratto energia dal buco nero (Fig.3.5). Ci si rende conto, tuttavia, che ci deve essere un limite superiore alla quantità di energia estraibile in questa maniera, in quanto il frammento a energia negativa che entra nel buco nero ha anche un momento angolare negativo che farà diminuire il momento angolare $J = Ma$ del buco nero. Pertanto, quando il momento angolare del buco nero si sarà ridotto a $J = 0$, esso non sarà più un

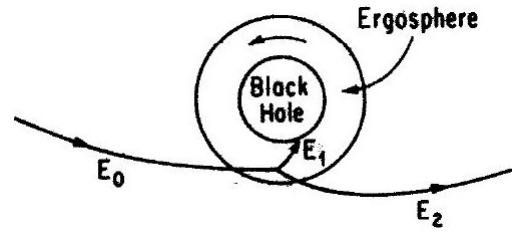


Figura 3.4: [1] *Rappresentazione diagrammatica del processo di Penrose per l'estrazione dell'energia da un buco nero rotante.*

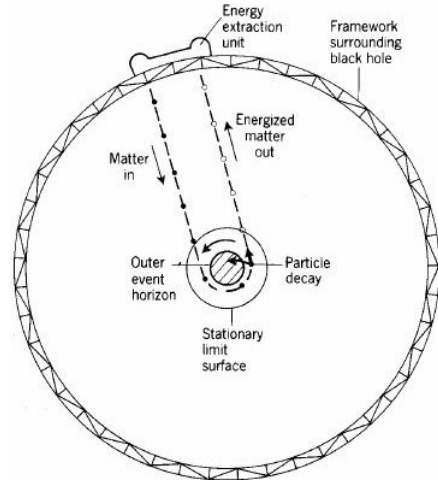


Figura 3.5: [3] *Rappresentazione artistica di un possibile dispositivo per l'estrazione di energia da un buco nero rotante.*

buco nero rotante di Kerr, bensì un buco nero di Schwarzschild, quindi senza ergosfera, e di il processo descritto in precedenza per l'estrazione di energia non potrà più essere effettuato.

Per vedere in dettaglio qual è questo limite per l'estrazione di energia si sfrutta il fatto che un buco nero di Kerr possiede il campo di Killig χ^a sull'orizzonte di tipo luce e futuro diretto, definito come

$$\chi^a = \xi^a + \Omega_H \psi^a, \quad (3.28)$$

dove Ω_H è data da (3.23). Da ciò segue che per ogni particella che entra nel buco nero vale

$$0 > p^a \chi_a = p^a (\xi_a + \Omega_H \psi_a) = E - \Omega_H J, \quad (3.29)$$

da cui segue

$$J < \frac{E}{\Omega_H} \quad (3.30)$$

che mostra in concreto che una particella con energia negativa che entra in buco nero porta anche momento angolare negativo. In seguito all'ingresso della particella nel buco nero, quest'ultimo si assesta nuovamente come soluzione di Kerr, i cui parametri di massa e momento angolare devono essere modificati rispettivamente delle quantità $\delta M = E$ e $\delta J = J$, sotto la restrizione

$$\delta J = \frac{\delta M}{\Omega_H}, \quad (3.31)$$

riscrivibile come (Christodoulou e Ruffini, 1971 [17]) come

$$\delta M_{irr} > 0, \quad (3.32)$$

dove M_{irr} è la cosiddetta *massa irriducibile*, definita come

$$M_{irr}^2 = \frac{1}{4G^2} \left[\left(GM + \sqrt{G^2 M^2} \right)^2 + a^2 \right]. \quad (3.33)$$

Quest'ultima equazione può essere invertita e riscritta come

$$M^2 = M_{irr}^2 + \frac{J^2}{(4GM_{irr})^2} > M_{irr}^2. \quad (3.34)$$

Pertanto, la massa di un buco nero non può essere ridotta ad un valore minore di quello M_{irr} attraverso il processo di Penrose. In particolare assumendo che il buco nero abbia una massa iniziale M_0 e momento angolare J_0 , quando sarà stata estratta l'energia $M_0 - M_{irr}$, il momento angolare del buco nero sarà zero. È possibile quindi interpretare la quantità $M - M_{irr}$ come l'energia rotazionale del buco nero. Nel caso di un buco nero rotante di Kerr estremo in cui $J_0 = M_0^2$, si ha che essa rappresenta circa il $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 29\%$ della massa-energia del buco nero. Ma da dove arriva questo limite della massa

irriducibile di un buco nero rotante? Per mostrarlo si fa uso del teorema dell'area di Hawking visto in 2.3. L'area dell'orizzonte degli eventi di un buco nero di Kerr è data da

$$A = \int_{r=r_+} \sqrt{g_{22}g_{33}} d\theta d\phi = \int (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\phi = 16\pi (GM_{irr})^2. \quad (3.35)$$

Dal teorema segue che poichè l'area dell'orizzonte degli eventi non può mai diminuire, così la massa irriducibile non può mai decrescere.

In particolare la validità di questo teorema applicato in questo frangente è a favore dell'ipotesi del censore cosmico, usata per affermare che la particella ad energia negativa si limita a cambiare i parametri del buco nero invece di trasformarlo in una singolarità nuda. Sebbene il processo di Penrose sia importante, in quanto serve a mostrare che vi è una quantità massima di energia estraibile da un buco nero rotante sotto i limiti imposti dal teorema dell'area, risulta essere un processo alquanto macchinoso e non ci si attende avvenga spontaneamente in natura. Vale la pena citare però un altro processo ad esso strettamente legato, detto di *super-radianza* [2], riguardante il processo di diffusione di un'onda di qualsiasi natura da parte di un buco nero rotante. Quando essa incide sul buco nero, se è presente l'ergosfera, quest'ultima diffonde in maniera selettiva le onde parziali di differente momento angolare (ovvero differenti multipoli) contenuti nell'onda incidente. Tra le onde parziali vengono rafforzate in particolare quelle con momento angolare nella stessa direzione di quello del buco nero, con un'energia maggiore di quella iniziale dovuta al calo della velocità di rotazione del buco nero rotante.

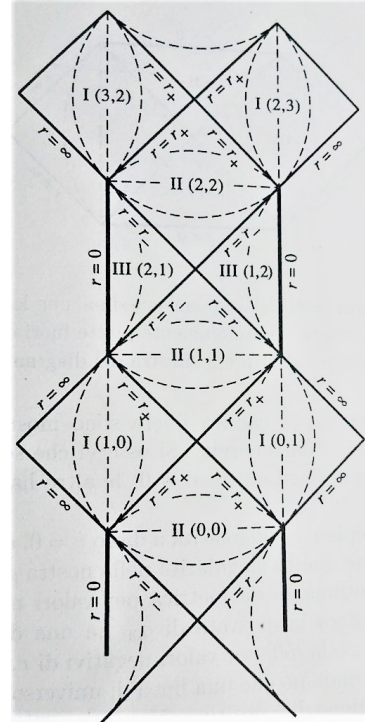


Figura 3.6: [2] *Rappresentazione conforme dell'estensione massima della geometria di Kerr nel caso $R_S > 2a$.*

3.4 Estensione massimale della geometria di Kerr

Come nel caso della soluzione di Schwarzschild è possibile ricercare un'estensione massimale della metrica di Kerr per rimuovere tramite un cambio di coordinate opportuno le singolarità fittizie in $r = r_{\pm}$. Non si riporta qui il cambio di coordinate ma ci si limita ad illustrare quanto ottenuto nel caso $(GM)^2 > a^2$. Il diagramma conforme inerente a questa configurazione è visibile in Figura 3.6 e si farà riferimento ad esso durante la discussione.

Già da un primo sguardo, ci si rende conto che la situazione è molto più complicata di

quanto non sia nel caso Schwarzschild, ma si proceda con ordine. Innanzitutto si osserva che vi è una struttura ripetuta di regioni, raggruppabili nelle tre categorie viste nel paragrafo 3.2: le regioni di tipo I(n,m) $r > r_+$, asintoticamente piatte; le regioni di tipo II(k,k) $r_- < r < r_+$, che a seconda dei casi presi in esame risultano regioni di buco nero o di buco bianco; le regioni di tipo III(n,m) $r < r_-$, contenenti la singolarità ad anello.

Si consideri ora una particella con linea d'universo di tipo tempo e futura diretta in moto lungo l'asse di rotazione del buco nero. Se ne descrive il moto illustrato in Fig.3.7. La particella comincia il moto in regione I(0,1), raggiunge e supera in una quantità di tempo proprio finito $r = r_+$ e poi $r = r_-$, entrando quindi prima nella regione II(1,1) e poi nella regione III(1,2) (o III(2,1)), la più interna del buco nero. A differenza di quanto accade in Schwarzschild, però, la particella non è condannata a cadere nella singolarità ad anello, la quale è evitabile, essendo di tipo tempo. Pertanto la particella può nuovamente dirigersi verso la superficie $r = r_-$, tuttavia non potrà tornare nella regione di buco nero II(1,1), in quanto tale superficie è semipermeabile e può essere attraversata solo dall'esterno verso l'interno.

Questo fa supporre che la particella, se attraversa $r = r_-$, giunge nella regione di buco bianco II(2,2) di un secondo universo, nel quale la superficie è sempre semipermeabile, ma attraversabile dall'interno all'esterno. Infine la particella uscirà dal buco bianco attraversando la superficie $r = r_- +$ giungendo nella regione asintoticamente piatta I(2,3) (o I(3,2)). Se si dovesse proseguire con la descrizione della traiettoria, la particella potrebbe entrare nella regione di buco nero (III(3,3)) del secondo universo e, ripetendo un percorso analogo al precedente, entrare in un terzo, quarto universo e così via. Il fatto che il secondo universo debba possedere anch'esso un buco nero è dovuto alla richiesta di completezza delle geodetiche.

Pertanto questa analisi della geometria porta a concludere che l'estensione geodetica più completa della soluzione di Kerr è una sequenza di universi, ognuno contenente un buco nero ed un buco bianco, i quali li connettono. Nel caso in cui la particella finisca sulla singolarità ad anello invece che evitarla, non è detto che termini la sua esistenza in quanto, con un'ulteriore continuazione della metrica (Fig.

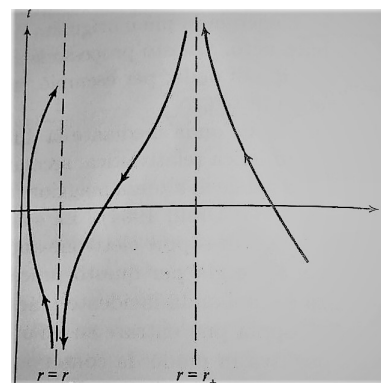


Figura 3.7: *Linea di universo possibile per una particella in moto lungo l'asse del buco nero di Kerr.*

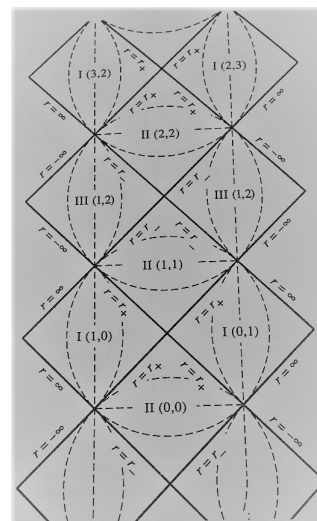


Figura 3.8: [2] *Rappresentazione conforme dell'estensione massimale della geometria di Kerr nel caso $R_S > 2a$ estesa a valori negativi $r < 0$.*

3.8) per valori negativi $r < 0$ (si ricorda che la singolarità ad anello è in $r = 0$) si può ipotizzare che la particella riesca ad attraversare la singolarità e a raggiungere indenne un altro universo, distinto dal primo, asintoticamente piatto e privo di superfici di redshift infinito e di orizzonti degli eventi.

Quest'ultima estensione ha senso fisicamente parlando? La risposta appare essere negativa in quanto nell'equazione (3.1) un cambio nel segno di r implica un cambio nel segno di M . Quindi un osservatore nel nuovo universo misurerà una massa negativa per la particella entrata. Quest'ultima invece sentirà una forza gravitazionale repulsiva dal buco nero di Kerr che la spingerà lontano da $r = 0$. Naturalmente questa possibilità deve essere scartata sulle basi delle conoscenze fisiche odierne. Se potessero infatti esistere particelle a massa negativa, dal vuoto per fluttuazioni quantistiche potrebbero prodursi infinite coppie di particelle massa positiva e massa negativa. Poiché però non sono mai state trovate particelle con massa negativa, tali fluttuazioni sono impedito dal principio di conservazione dell'energia [2].

Un'altra obiezione ai valori di r negativi viene dal fatto che per valori di r e di θ prossimi rispettivamente a 0 e $\frac{\pi}{2}$, risulta $g_{33} < 0$ e la coordinata ϕ diventa di tipo tempo. Ma poiché ϕ risulta essere periodica in 2π , ciò implica l'esistenza di curve chiuse di tipo tempo vicino alla singolarità, le quali, per quanto visto nel "Capitolo 2", portano ad una violazione della causalità.

Si afferma questo perché il punto in cui tale curva si chiude corrisponde al fatto che la particella incontra nuovamente se stessa, ovvero può tornare nel proprio passato (nello specifico la curva deve essere percorsa in verso opposto a quello di rotazione del buco nero). Un argomento simile si usa per mostrare la violazione di causalità nel caso in cui si volessero per esempio identificare tra loro le regioni I(0,1) e I(3,2) per il fatto che hanno la geometria identica. Tale identificazione implica infatti nel caso in cui una particella cade in un buco nero rotante che essa emerga dal buco bianco rotante dello stesso universo, tuttavia è possibile che ciò avvenga ad un tempo precedente a quello dell'ingresso nel buco nero.

Per quanto riguarda il caso $(GM)^2 = a^2$ del buco nero di Kerr estremo la geometria estesa non ha le regioni di tipo II dal momento che $r_- = r_+$ e gli orizzonti coincidono (Fig.3.9). Si riporta in Fig. 3.10 per completezza anche il caso $(GM)^2 < a^2$.

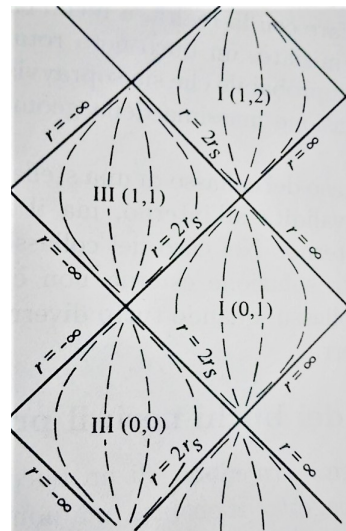


Figura 3.9: [2] Rappresentazione conforme dell'estensione massimale la geometria di Kerr nel caso di buco nero estremo ($R_S = 2a$).

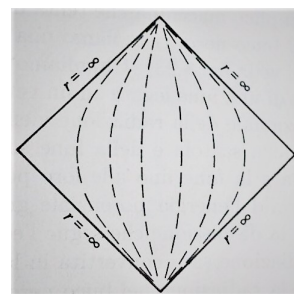


Figura 3.10: [2] Rappresentazione conforme dell'estensione massimale della geometria di Kerr nel caso $R_S < 2a$.

In conclusione si può affermare che la geometria di Kerr completa non è rilevante ai fini pratici dal punto di vista fisico come d'altro canto non lo era quella di Schwarzschild. Infatti, a differenza del caso di collasso sferico, nel caso non sferico la soluzione di Kerr non è valida all'esterno della sorgente collassante fino al termine dello stesso e pertanto non si è in grado di descrivere quanto accade alla superficie della sorgente una volta che ha raggiunto le superfici r_+ o r_- . Una descrizione sarà possibile solo alla fine del collasso, dopo il sistema si sarà assestato nello stato di buco nero di Kerr.

3.5 Buchi neri rotanti carichi

Come visto, la soluzione di Kerr è la soluzione più generale alle equazioni di Einstein nel vuoto in grado di descrivere un buco nero massivo ed in rotazione, privo di carica elettrica.

Nel caso in cui il buco nero sia anche carico, la soluzione di Kerr non è più adatta a descrivere ciò che accade attorno alla sorgente, poiché non si è più in condizioni di vuoto, bensì di di elettrinvuoto, nel quale oltre alle equazioni di Einstein si devono risolvere anche le equazioni per il campo elettromagnetico. Senza tirarla per le lunghe, si giunge alla seguente famiglia di soluzioni a tre parametri, detta di *Kerr-Newman* [1]

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.36)$$

$$A_a = \frac{er}{\Sigma} [(dt)_a - a \sin^2 \theta (d\phi)_a], \quad (3.37)$$

dove A_a è il potenziale vettore del campo elettromagnetico, Σ è lo stesso della metrica di Kerr, mentre Δ diventa

$$\Delta = r^2 + a^2 + e^2 - 2GMr \quad (3.38)$$

e e, a e M sono i tre parametri della famiglia. Nuovamente a e M sono interpretabili come il momento angolare per unità di massa a riposo e la massa del buco nero, mentre e è interpretabile come la carica elettrica del buco nero. Nel caso $a = 0$ tale soluzione si riduce a quella di *Reissner-Nordstrom*, che di fatto è la generalizzazione della soluzione di Schwarzschild per un buco nero a simmetria sferica, non rotante, carico.

La soluzione di Kerr-Newmann ha proprietà analoghe a quella di Kerr e rappresenta la soluzione stazionaria per un buco nero più generale che esista. Si è ritenuto importante citarla non solo per una ragione di completezza, quanto piuttosto per mettere in evidenza il fatto che al termine di un qualunque collasso gravitazionale si formerà un buco nero

stazionario caratterizzato dai tre parametri M , a ed e , perdendo completamente qualunque informazione sul corpo o l'insieme di corpi collassati. Quanto appena scritto infatti altro non è se non una riformulazione di un teorema di Wheeler che etichettato come *un buco nero non ha peli*.

Conclusioni

Si riepiloga quanto si è fatto. Si è cominciato nel “Capitolo 1” studiando la soluzione di Schwarzschild per le equazioni di Einstein nel vuoto che descrive lo spazio-tempo al di fuori di una sorgente gravitazionale sferica statica. Da un breve esame della geometria della soluzione ci si è resi conto la metrica ad essa associata è singolare in $r = 0$ ed $r = R_S$, la cui natura di singolarità fisica o no è già intuibile dallo studio del moto geodetico di corpi prova.

A partire dal moto geodetico nel caso generale, sfruttando la simmetria sferica della soluzione, ci si è ricondotti allo studio del moto geodetico equatoriale, scoprendo che esso si riduce ad un problema unidimensionale risolvibile con i metodi della meccanica classica. Dall’analisi di tali moti si è arrivati a dedurre la precessione del perielio di un corpo massivo in orbita attorno ad una sorgente gravitazionale e la deflessione della luce ad opera della stessa.

Ci si è poi posti nella condizione particolare di moti geodetici radiali, in particolare di “caduta”. Studiandoli è emersa la natura di superficie di redshift infinito e di orizzonte degli eventi della superficie individuata da $r = R_S$. Poiché è un orizzonte degli eventi, essa si comporta come membrana semipermeabile: una volta che un corpo, massivo o non, è entrato all’interno della regione in essa contenuta non può più uscirne ed è condannato a cadere nella singolarità in $r = 0$.

Da tali risultati si è intuito che la singolarità della metrica di Schwarzschild in $r = R_S$ non è una singolarità fisica, bensì delle coordinate utilizzate. Tale intuizione ha avuto conferma dallo studio dell’invariante di Kretschmann, il quale ha anche permesso di affermare che la singolarità in $r = 0$ è effettivamente una singolarità dello spazio-tempo di Schwarzschild. Si è quindi cercato un sistema di coordinate per eliminare la singolarità in $r = R_S$, trovando nelle coordinate di Kruskal-Szekeres la soluzione cercata.

Dallo studio della causalità in tale sistema di coordinate è emersa la natura di buco nero di una sorgente gravitazionale sferica il cui raggio è minore del raggio di Schwarzschild. In particolare, estendendo il sistema di coordinate anche a valori negativi di $r < 0$, si è ottenuta l’estensione massimale della geometria di Schwarzschild, il cui studio con diagrammi conformi ha permesso di introdurre il concetto di buco bianco, ritenuto non fisico.

Concluso lo studio della soluzione di Schwarzschild si sono voluti approfondire i concetti

di buco nero, orizzonte degli eventi e singolarità nel “Capitolo 2” cercando di scoprire, in particolare per quest’ultime, se possano esistere in natura. Cominciando con un approccio teorico, si sono cercate delle condizioni per garantire l’esistenza di tali singolarità. In seguito ad aver discusso come varia la causalità in Relatività Generale introducendo i concetti di spazio-tempo temporalmente orientabile e globalmente iperbolico, si è andati ad esaminare cosa si intenda per singolarità dello spazio-tempo, cercando una definizione opportuna e soddisfacente. Osservando la difficoltà di tale compito, ci si è limitati ad individuare delle condizioni per la loro esistenza enunciando i teoremi sulle singolarità di Hawking e Penrose introducendo prima alcuni concetti, quali quelli di congruenza di geodetiche, di punti coniugati, di condizioni dell’energia e di superfici intrappolate, utilizzati in teoremi minori e necessari per la dimostrazione dei teoremi sulle singolarità. Dopo averne enunciati i teoremi sull’esistenza, ci si è domandati come si possano formare in natura, trovando nel collasso gravitazionale la risposta a tale quesito. Si è quindi andati a riepilogare le principali fasi di collasso gravitazionale di stelle sufficientemente massive per averne uno totale. Ci si è poi interrogati se, nel caso generale di collasso gravitazionale non sferico, le singolarità finali che si vengono a creare siano effettivamente associate ad un buco nero. Pertanto, a partire da quanto trovato nel caso di Schwarzschild, si è introdotto il concetto di spazio-tempo fortemente predicibile asintoticamente e le condizioni topologiche necessarie affinché esso contenga un buco nero. Si è trovato che si può parlare di buco nero solo se la regione contenente la singolarità dello spazio-tempo è circondata da un orizzonte degli eventi (e la regione prende il nome di regione di buco nero) e quindi non risulta visibile ad un osservatore esterno a tale orizzonte. In caso contrario la singolarità è visibile ed è detta “nuda” e si parla semplicemente di “buco”. Vi è quindi la possibilità che da un collasso gravitazionale completo non sferico non si origini un buco nero, bensì una singolarità nuda. Tale possibilità è stata esclusa assumendo la congettura del censore cosmico di Penrose. Una volta appurato che i buchi neri esistono da un punto di vista teorico, ci si è chiesti come rivellarli, dal momento che sono molto difficili da osservare, citando l’esempio dei GRB nei sistemi binari in cui una delle due stelle è un buco nero. Occorre sottolineare che la recente osservazione da parte di LIGO delle onde gravitazionali costituisce una prova dell’esistenza dei buchi neri. Si è concluso il capitolo enunciando il teorema dell’area di Hawking.

Alla luce di quanto visto nei capitoli precedenti, nel “Capitolo 3” si è proceduto a studiare la meccanica dei buchi neri rotanti di Kerr. In seguito ad aver esaminato il carattere della singolarità in $r = 0$ ed aver individuato gli orizzonti degli eventi in corrispondenza di $r = r_{\pm}$, si è proceduto con lo studio del buco nero di Kerr nel caso $R_S \geq 2a$ dopo aver osservato che il caso $R_S < 2a$ conduceva ad avere una singolarità nuda in $r = 0$ e non risultava fisicamente avere senso, avendo assunto come valida la congettura del censore cosmico. Imponendo $g_{00} = 0$ si sono trovate le due superfici di redshift infinito $r = r_{rs\pm}$ che coincidono con gli orizzonti degli eventi $r = r_{\pm}$ solo nel caso di buco nero di Kerr estremo $R_S = 2a$. Ciò ha permesso di dividere la soluzione in tre regioni (cfr. Par. 3.2). Dopo aver ricordato i principali risultati dello studio del moto geodetico di corpi di prova

si è proceduti con lo studio dei moti nella regione I nel caso $ds^2 = d\theta = dr = 0$, il quale ha portato ad individuare la regione di ergosfera $r_+ < r < r_{rs+}$, nella quale qualunque corpo è obbligato ad orbitare attorno al buco nero nel suo stesso senso di rotazione, e la superficie stazionaria limite r_{rs+} , sulla quale solo i fotoni riescono a stare "fermi".

Esaminando le proprietà dell'ergosfera, si è discusso il processo di Penrose, il quale in linea teorica permette l'estrazione di energia da un buco nero rotante sfruttando la presenza di orbite ad energia negativa nell'ergosfera. Un possibile modo di attuare tale processo è stato illustrato mediante un esperimento mentale. Si è poi esaminato se vi sia una quantità massima di energia che si può estrarre con tale processo e si è trovato, introducendo il concetto di massa irriducibile di un buco nero, che tale massimo esiste. Esso è intrinsecamente legato al teorema dell'area di Hawking e una volta estratto tale quantitativo di energia, il buco nero rotante diventa un buco nero di Schwarzschild.

Infine si è andati a studiare il processo di caduta assiale di un corpo in un buco nero di Kerr, con riguardo particolare per la causalità di tale processo. Per trattarlo si è dovuto introdurre l'estensione massimale della geometria di Kerr ed i diagrammi conformi ad essa corrispondenti. Dallo studio di tale estensione, si è concluso come nel caso di Schwarzschild che essa in gran parte non dovrebbe avere senso fisico.

Il capitolo si conclude con un breve paragrafo che ricorda che il caso più generale di buco nero è il buco nero rotante carico di Kerr-Newmann e che "I buchi neri non hanno peli". Questo è quello che si è fatto. Come si è potuto osservare, ci si è concentrati principalmente sulla "Meccanica" dei buchi neri, ma, come anticipato nell'"Introduzione", la storia dei buchi neri non termina qui. È infatti possibile fare un parallelismo tra le caratteristiche di un buco nero e la termodinamica classica entrando nella così detta "Termodinamica dei buchi neri" e, mediante effetti quantistici, appurare che effettivamente i buchi neri non sono così neri come sembrano...

Appendice A

Tetradi

Spesso per calcolare le componenti del tensore di Riemann che compare nelle equazioni di Einstein, si fissa una base coordinata per la metrica e si sfruttano le relazioni che la legano ai simboli di connessione e quest'ultimi alle componenti del tensore di Riemann. Questo metodo ha il vantaggio di fornire una procedura meccanica che porta direttamente al risultato cercato. Tuttavia esso risulta anche in casi relativamente semplici alquanto laborioso in termini di calcoli e fa perdere il significato geometrico di quanto si sta facendo.

In molti casi si usa quindi il così detto metodo delle tetradi, il quale permette di comprendere meglio il problema da un punto di vista geometrico. Dato uno spazio-tempo M, g_{ab} , si comincia fissando una base non olonoma (cioè una base sul fibrato tangente) di campi vettoriali lisci $(e_\mu)^a$ soddisfacenti la relazione di ortonormalità

$$(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

dove $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ (qui si usano gli indici greci come etichette dei vettori di base, quindi μ, ν assumono i valori da 1 a n , mentre gli indici latini indicano la natura vettoriale di e_μ). In quattro dimensioni l'insieme $(e_\mu)^a$ è detto *tetrade* (figura?) e $\eta_{\mu\nu}$ si riduce alla metrica di Minkowski con segnatura $-+++$. Dalla (A.1) è possibile inoltre ricavare la relazione per l'inversa di $\eta_{\mu\nu}$, denotata con $\eta^{\mu\nu}$

$$\eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_b = \delta_b^a, \quad (\text{A.2})$$

con δ_b^a la mappa identità.

Si ricorda che nel calcolo delle componenti del tensore di curvatura si usano le seguenti condizioni per l'operatore di derivata covariante:

1. $\nabla_a g_{bc} = 0$ (compatibilità con la metrica),
2. $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f, f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ (assenza di torsione),

3. $\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_c$ campo vettoriale duale (definizione del tensore di Riemann).

Si definiscono le 1-forme di connessione $\omega_{a\mu\nu}$ come

$$\omega_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b, \quad (\text{A.3})$$

le quali soddisfano la seguente proprietà di simmetria

$$\omega_{a\mu\nu} = -\omega_{a\nu\mu}, \quad (\text{A.4})$$

che si verifica usando la condizione di ortonormalità (A.1) e la condizione (1).

Le componenti $\omega_{\lambda\mu\nu}$ delle 1-forme di connessione sono dette *coefficienti di rotazione di Ricci*, ovvero

$$\omega_{\lambda\mu\nu} = (e_\mu)^a (e_\nu)^b \nabla_a (e_\nu)_b. \quad (\text{A.5})$$

Il tensore di Riemann può essere espresso in termini dei coefficienti di rotazione di Ricci come

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} = & (e_\rho)^a \nabla_a \omega_{\sigma\mu\nu} - (e_\sigma)^a \nabla_a \omega_{\rho\mu\nu} - \\ & - \eta^{\alpha\beta} (\omega_{\rho\beta\mu} \omega_{\sigma\alpha\nu} - \omega_{\sigma\beta\mu} \omega_{\rho\alpha\nu}) + \omega_{\rho\beta\sigma} \omega_{\alpha\mu\nu} - \omega_{\sigma\beta\rho} \omega_{\alpha\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

a partire da $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{abcd} (e_\rho)^a (e_\sigma)^b (e_\mu)^c (e_\nu)^d$ con un po' di algebra, sfruttando in sequenza la condizione (3), le proprietà della derivata covariante, la condizione di ortonormalità della tetrad e la definizione delle 1-forme di connessione e dei coefficienti di rotazione di Ricci. Da ciò segue che le componenti del tensore di Ricci possono essere calcolate come

$$R_{\rho\mu} = \eta^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

La condizione (2) di assenza di torsione può essere implementata mediante le relazioni di commutazione dei campi vettoriali di base

$$(e_\sigma)_a [e_\mu, e_\nu]^a = (e_\sigma)^a \{ (e_\mu)^b \nabla_b (e_\nu)^a - (e_\nu)^b \nabla_b (e_\mu)^a \} = \omega_{\mu\sigma\nu} - \omega_{\nu\sigma\mu}, \quad (\text{A.8})$$

oppure, a partire dalla definizione delle 1-forme di connessione e applicando (2), segue

$$\nabla_{[a} (e_\sigma)_{b]} = \eta^{\sigma\nu} (e_\mu)_{[a} \omega_{b]\sigma\nu} = \partial_{[a} (e_\sigma)_{b]}. \quad (\text{A.9})$$

In particolare le equazioni (A.6) e (A.9) vengono dette *equazioni di struttura*.

Appendice B

Diagrammi di Penrose

Spesso, per riuscire a comprendere il significato di una soluzione alle equazioni di Einstein, è necessario trovare una tecnica che permetta la comprensione della struttura causale della geometria della stessa. Tale tecnica si ritrova in quei diagrammi detti *diagrammi di Penrose*.

L'idea è la seguente: a partire da una metrica g_{ab} “fisica” si introduce una metrica “non fisica” \tilde{g}_{ab} collegata alla prima mediante una *trasformazione conforme o di Weyl*

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}, \quad (\text{B.1})$$

con Ω^2 il fattore conforme che dipende dal punto a cui è applicato ed è in generale definito positivo. Si ricorda che una trasformazione è detta conforme quando lascia invariati gli angoli tra le tangenti alle curve passanti in un punto. Ciò si traduce a livello di spazio-tempo nel fatto che, sebbene la distanza tra due punti possa cambiare, la causalità della soluzione viene preservata dalla trasformazione, così come il carattere delle geodetiche. In particolare si può dimostrare che le geodetiche di tipo luce restano invariate. Scegliendo il fattore conforme in modo tale che

$$\Omega \longrightarrow 0 \quad (\text{B.2})$$

asintoticamente, è possibile mappare i punti all'infinito in un diagramma finito, cosicché una distanza infinita nella metrica fisica g_{ab} diventa una distanza finita nella metrica non fisica \tilde{g}_{ab} . Tale processo è detto di *compattificazione conforme* ed il diagramma ottenuto è un diagramma di Penrose.

Per chiarire le idee si porta come esempio il caso dello spazio-tempo di Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{B.3})$$

Introducendo le coordinate nulle $u = t + r$ e $v = t - r$, la (B.3) assume la forma

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(u - v)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\phi^2), \quad (\text{B.4})$$

da cui, con l'ulteriore trasformazione $\tilde{u} = \arctan u$ e $\tilde{v} = \arctan v$, si giunge a

$$ds^2 = \frac{-4d\tilde{u}d\tilde{v} + \sin^2(\tilde{u} - \tilde{v})(d\theta^2 + \sin^2\theta\phi^2)}{(2\cos\tilde{u}\cos\tilde{v})^2}. \quad (\text{B.5})$$

Definendo il fattore conforme come $\Omega^2 = (2\cos\tilde{u}\cos\tilde{v})^2$, si giunge infine alla metrica non fisica

$$d\tilde{s}^2 = -4d\tilde{u}d\tilde{v} + \sin^2(\tilde{u} - \tilde{v})(d\theta^2 + \sin^2\theta\phi^2). \quad (\text{B.6})$$

Introducendo infine i parametri $t' = \frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}$ e $r' = \frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}$ si ottiene il diagramma in Figura B.1, il cui bordo rappresenta la struttura conforme dell'infinito dello spazio-tempo di Minkowski. Dallo studio di tale diagramma è possibile definire cinque tipi di infinito:

- il punto di *infinito di tipo tempo futuro* i^+ ($t' = \frac{\pi}{2}$, $r' = 0$);
- il punto di *infinito di tipo tempo passato* i^- ($t' = -\frac{\pi}{2}$, $r' = 0$);
- il punto di *infinito di tipo spazio* i^0 ($t' = 0$, $r' = \frac{\pi}{2}$);
- la superficie *infinito nullo futuro* \mathcal{I}^+ ($t' = -r' + \frac{\pi}{2}$);
- la superficie *infinito nullo passato* \mathcal{I}^- ($t' = r' - \frac{\pi}{2}$).

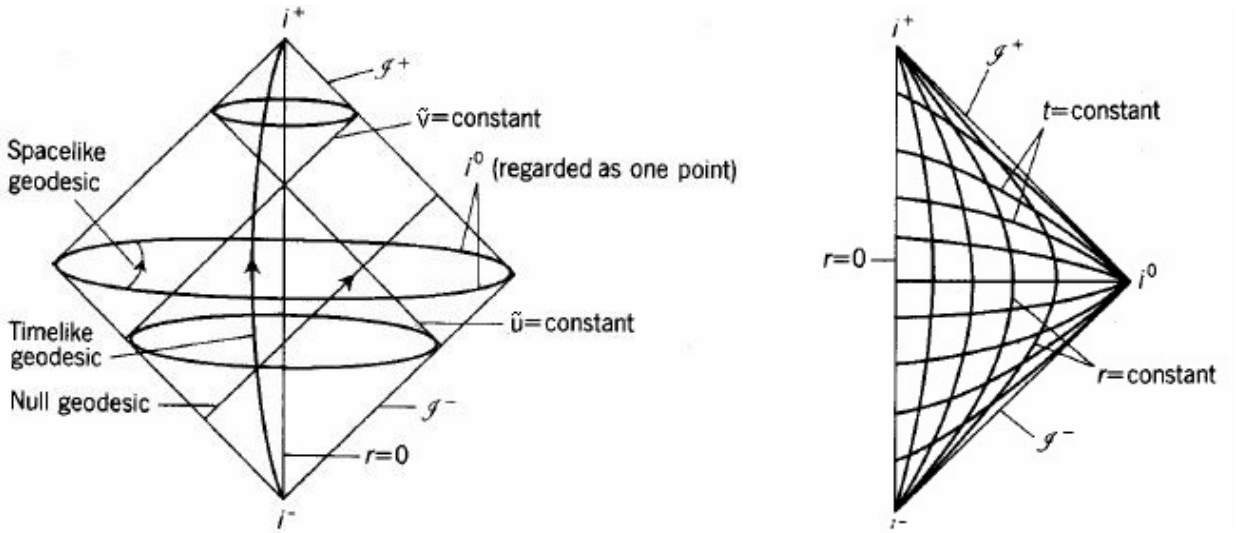


Figura B.1: [3] Nella figura a sinistra si vedono l'origine ed il termine delle geodetiche compatificate nello spazio-tempo di Minkowski con una dimensione soppressa. Nella figura a destra vi è raffigurato il diagramma di Penrose dello spazio-tempo di Minkowski (due dimensioni sopresse).

Bibliografia

- [1] Robert M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984)
- [2] Hans C. Ohanian - Remo Ruffini, *Gravitazione e spazio-tempo*, Zanichelli (1997)
- [3] Ray d'Inverno, *Introduzine alla Relatività di Einstein*, CLUEB (2001)
- [4] Bernard Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press (2009)
- [5] J. A. Wheeler, "Mach's Principle as Boundary Condition for Einstein's Equations" in Chiu, H.-Y., e Hoffmann, W.F., ed., *Gravitation and Relativity* (Benjamin, New York, 1964)
- [6] A. Einstein, *The Meaning of Relativity* (V ed., Princeton University Press, Princeton, 1955)
- [7] A. Pais, *Subtle is the Lord* (Clarendon Press, Oxford, 1982)
- [8] S. Weinberg 1972, *Gravitation and Cosmology* (New York; Wiley)
- [9] R. Penrose 1965, "Gravitational Collapse and Space-Time Singularities" *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 57-59
- [10] S. W. Hawking e R. Penrose 1970 "The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology", *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A314**, 529-548
- [11] S. W. Hawking e G.F. R. Ellis 1973, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge; Cambridge University Press)
- [12] R. Penrose 1969, "Gravitational Collapse: The Role of General Relativity", *Rev. del Nuovo Cimento*, **1**, 252-276
- [13] D. W. Hawking 1971, "Gravitational Radiation from Colliding Black Holes", *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 1344-1346

- [14] R. P. Kerr 1963, “Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics”, *Phys. Rev. Lett.*, **11**, 237-238
- [15] M. Walker e R. Penrose 1970, “On Quadratic First Integrals of the Geodesic Equation for Type [22] Spacetimes”, *Commun. Math. Phys.*, **18**, 265-274
- [16] J. M. Bardeen, W. H. Press e S. A. Teukolsky 1972, “Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation”, *Astrophys. J.*, **178**, 347-349
- [17] D. Christodoulou e R. Ruffini 1971, “Reversible Trasformations of a Charged Black Hole”, *Phys. Rev.*, **D4**, 3553-3555