

**Mirjana Lenček***Sveučilište u Zagrebu, Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet, Odsjek za logopediju***Iva Sladović***Sveučilište u Zagrebu, Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet, studentica*

## Uspješnost osnovnoškolaca u osnovnim aritmetičkim operacijama

### Mastering basic mathematical operations in elementary school students

Izvorni znanstveni rad UDK: 373.3:51

#### SAŽETAK

U istraživanju poznavanja osnovnih aritmetičkih operacija sudjelovalo je 145 osnovnoškolaca bez teškoća u matematici, polaznika trećeg do osmog razreda, s ciljem dobivanja uvida u razinu ukupne ovladanosti temeljnom matematikom u svakom od razreda. U radu se razmatra uspješnost rješavanja pojedinih aritmetičkih zadataka u domeni zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja te poznavanja pravila izvođenja računskih radnji prema porastu obrazovne dobi. Rezultati su pokazali da se skupina učenika trećih razreda statistički značajno razlikuje od učenika na ostalim obrazovnim razinama. Stoga je moguće pretpostaviti da se upravo u trećem razredu mijenjaju strategije rješavanja zadataka kod temeljnih matematičkih operacija, što je u skladu s drugim sličnim istraživanjima. Čini se da strategije prizivanja podataka zamjenjuju strategije temeljene na brojenju. Nema statistički značajnih razlika u uspješnosti rješavanja zadataka osnovnih aritmetičkih operacija učenika od četvrtog do osmog razreda. Stoga je moguće pretpostaviti da su razine temeljnih matematičkih kompetencija ujednačene s aspekta točnosti za ove obrazovne razine. Kako je ispitivanje provedeno na relativno malom uzorku u odnosu na razrede, generalizacija rezultata je ograničena, a oni mogu biti korisni za oblikovanje smjernica u izradi ispitnog materijala za prepoznavanje teškoća u matematici i određivanje pravca intervencija kod navedenih teškoća ili diskalkulije.

**Cljučne riječi:**

- matematika
- zbrajanje
- oduzimanje
- množenje
- dijeljenje
- slijed računskih operacija
- osnovna škola

#### ABSTRACT

145 elementary school students from third to eighth grade with no difficulties in mathematics have been tested for their abilities in basic arithmetic operations. The aim of the examination was to gain insight into the level of mastery in mathematics in each of the grades. The observed variable in this experiment is the success in solving arithmetic problems in addition, subtraction, multiplying and dividing, as well as in applying the rules of mathematical operations depending on ascending educational age. The observed results showed that the group of third graders statistically significantly differs from all other educational levels, so it can be concluded that the strategies of problem solving in basic mathematical operations shift exactly in the third grade, which is consistent with other similar studies. It seems that counting based strategies give way to data retrieval strategies. As no statistically significant differences in problem solving of basic arithmetical operations from fourth to eighth grade were observed, it can be concluded that the levels of basic mathematical competences are levelled out in terms of accuracy. As the research has been performed on a relatively small sample in each grade, it is not possible to generalise the results. However, they can provide guidelines for shaping the examination material for recognising difficulties in mathematics, as well as for determining the direction of intervention in those difficulties or in dyscalculia.

**Keywords:**

- mathematics
- addition
- subtraction
- multiplication
- division
- order of mathematical operations
- elementary school

## UVOD

### Temeljna matematička znanja

Istraživanja uspješnosti u matematici uglavnom su usmjerena na osobe s teškoćama u matematici ili diskalkulijom (Chin i Aschroft, 2017), specifične kognitivne sposobnosti (Ramirez, Gunderson, Levine, Beilock, 2013; Chen i Li, 2014), te neke osobitosti funkcioniranja koje utječu na uspjeh u matematici (npr. emocionalnu osnovu nerješavanja matematičkih zadataka, Hirvonen, Tolvanen, Aunola, Nurmi, 2012). Malo je istraživačkih podataka o temeljnim i općim matematičkim znanjima (Ai, 2002; Aunola, Leskinen, Lerkkanen, Nurmi, 2004). Navode se uglavnom podaci istraživanja, poput onih iz procjena unutar The Programme for International Student Assessment – PISA; Program internacionalne procjene učenika ili podaci studija u sklopu Trends in International Mathematics and Science Study – TIMS; Internacionalne studije trendova u matematici i znanosti. PISA-podaci daju uvid u razine matematičke pismenosti petnaestogodišnjaka u zemljama uključenima u ispitivanja i svojevrsna su zamjena za matematičke olimpijade, koje su od 1959. davale uvid u kvalitetu obrazovnih sustava općenito (Sahlberg, 2011). Od godine 2000., kada počinje ciklus PISA-istraživanja, na osnovi dobivenih podataka mogu se izdvojiti one zemlje čiji učenici imaju dobra, točnije odlična opća znanja iz matematike – uobičajeno se navode uspjesi Singapura, Japana, Koreje, Estonije. Populacije učenika u tim zemljama tradicionalno postižu visoke rezultate - tako je npr. najmanje jedan od četiri učenika iz Singapura i Hong Konga vrhunski uspješan u matematici i može rješavati zadatke koji zahtijevaju oblikovanje matematičkih situacija korištenjem simboličkih reprezentacija (PISA 2016). Suprotno tome, u većini zemalja pokazalo se da postoji niz pojedinaca koji su zapravo neuspješni u ovim testiranjima i imaju neku vrstu teškoća u stjecanju matematičkih vještina (Gonzalez-Castro, Cueli, Cabeza, Alvarez-Garcia, Rodriguez, 2014). U 90 % zemalja u kojima je provedeno PISA-ispitivanje, čak je 10 % ili više učenika postizalo samo prvu razinu (od šest mogućih, pritom je šesta razina najviša), odnosno rezultate znatno ispod očekivanih. Prema zadnjem ispitivanju provedenom 2015., podaci koje je objavio OECD (PISA, 2016) pokazuju da je u Hrvatskoj čak 11,5 % 15-godišnjaka ispod prve razine, dok je 20,5 % na prvoj razini matematičkih znanja. Na ovoj razini učenici mogu odgovoriti na pitanja ako je jasno definirano i poznat kontekst te mogu izvoditi matematičke radnje prema izravnim uputama (PISA, 2009). Uz ove podatke važno je i da samo 17,1 % naših učenika postiže matematičke rezultate od četvrte do šeste razine (PISA, 2016). Time se Hrvatska ubraja u one zemlje koje postižu ispodprosječne rezultate. Neke zemlje iz te skupine provode nacionalna ispitivanja matematičkih znanja kako bi pronašli i definirali razloge loših rezultata i usmjerili se na promjene. Reese, Miller, Mazzeo, Dossey, 1997. navode američke podatke Nacionalne procjene edukacijskog napredovanja (National Assessment of Educational Progress -NAEP), prema kojima više od 80 % učenika osmih razreda ne uspijeva riješiti jednostavne probleme – npr. računanje s decimalama, postotke, prepoznavanje geometrijskih likova, jednadžbe. Anrig i Lapoint (1989) utvrdili su da je u osmom

razredu samo 16 % učenika svladalo sadržaj američkog matematičkog kurikuluma za osmi razred, a 8 % učenika može riješiti matematičke zadatke koji traže vještine rješavanja problema. Analizom podataka četvrtog i osmog razreda vidljivo je da samo 25 % učenika postiže rezultat koji pokazuje da su uspješno svladali program (Thurber, Shinn i Smolkowski, 2002). Iz ovih, kao i niza podataka drugih zemalja (Atweh, Forgasz i Nebres, 2010), vidljivo je da se objašnjenja uspjeha ili neuspjeha uglavnom vežu uz standarde usvajanja matematike, kurikulumu, nastavničke kompetencije, metode poučavanja, poznavanje bazičnih matematičkih koncepata, ulogu roditelja, genetsku osnovu, čak i sama obilježja testova (Jerrim, 2014).

### Uspjeh u matematici, standardi školskog usvajanja matematike i kurikulumu

O vrijednosti standarda govori se i u singapurskoj politici obrazovanja (Chia, 2015), koja se zasniva na visokom ulaganju u nastavnike kao najkvalitetnije snage. Ta zemlja odabire nastavnike od 5 % najboljih maturanata u visoko centraliziranom sustavu, a svi se nastavnici obučavaju u Nacionalnom institutu za odgoj i obrazovanje. Uspoređujući takav sustav i spomenute vrhunske rezultate s uspjesima drugih zemalja, razina nastavnčkih kompetencija stavlja se u središte samih standarda. Neki projekti praćenja uspješnih nastavnika matematike (Lemov, 2010) pokazuju značajnost doprinosa nastavnčkih kompetencija za uspjeh pojedinaca u matematičkim testiranjima, ali postavljaju i pitanja: koja su znanja potrebna za uspješno poučavanje matematike (Loewenberg Bal, Hill i Bass, 2005).

Nastavnici često, u skladu s kurikulumima, zahtijevaju usvajanje velikog broja pojmova, pri čemu kao posljedica može nastati nedostatan konceptualno razumijevanje osnovnih vještina (Hudson, Kadan, Lavin, Vasquez, 2010). Uz to, oni prednost nerijetko daju upamćivanju u odnosu na konceptualno mišljenje (Welsh, 2008 prema Hudson i sur., 2010), a što je vezano uz činjenicu da je za rješavanje zadataka na višoj razini potrebna automatizacija temeljnih matematičkih vještina. Powel (2014) iznosi stav National Council of Teachers of Mathematics – NCTM – Nacionalnog vijeća nastavnika matematike u SAD-u, prema kojem je upravo odabir kurikuluma matematike jedna od najkritičnijih odluka koje voditelji obrazovnih politika donose. Mnoge zemlje s niskim postignućima u matematici, svjesne važnosti matematike za ekonomiju (Schoenfeld, 2002) mijenjaju kurikulume, prateći tako zemlje s visokim postignućima. Za vrednovanje uspješnosti kurikuluma i njihove usporedbe potrebna su duža razdoblja praćenja učinkovitosti pa je takvih istraživačkih radova malo. Jednu od usporedbi daje Powel (2014), ističući upravo odrednice tzv. singapurskog kurikuluma kao kvalitetne promjene, zahvaljujući kojima se postižu iznimno dobri rezultati učenika na međunarodnim testiranjima matematike. Singapurski kurikulum naglašava razvoj konceptualnog razumijevanja kroz rješavanje strukturiranih matematičkih problema u više koraka, usko povezivanje konkretnih i slikovnih primjera za predstavljanje matematičkih ideja, uravnoteženost konceptualnih, računskih i strategijskih problema. Naglašava važnost dobrih temeljnih znanja zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, koja se provjeravaju od prvog do šestog razreda.

Kurikulum naglašava i heurističke strategije za rješavanje problema, povezivanje matematičkih tema i ishoda kroz razrede, spiralni pristup koji ograničava ponavljanje i usvajanje novih tema prema prethodnima (Powel, 2014; Ginsburg, Leinwand, Anstrom, Pollock, 2005; Hoven i Garelick, 2007).

Raščlambom kurikularnih očekivanja visoko uspješnih zemalja poput Singapura, Hong Konga i Belgije, zemalja čiji su učenici postizali iznimne rezultate na TIMS-ispitivanjima, Schmidt (2008) je izdvojio standarde koji bi trebali osigurati dobro matematičko znanje: 1. usmjerenost na točan, mali broj tema koje nastavnici trebaju obraditi, 2. veća očekivanja kurikuluma i njihovu zahtjevnost na pojedinoj razini, npr. ranije podučavanje algebre i geometrije, a ne samo aritmetike, 3. bolju povezanost matematike s ostalim nastavnim cjelinama (poput geografije) i logički slijed učenja cjelina. Standardi i kurikulumi pokazuju da je matematika kumulativna (Rousselle i Noel, 2007; Fuchs, Compton, Fuchs, Powell, Schumacher, 2012), a samo ako postoji usvojenost temeljnih matematičkih koncepata i vještina, moguće je svladavati složenije koncepte i procedure (Entwisle i Alexander, 1990). Premda na usvajanje matematike utječu mnogi čimbenici, školski sustav doista ima mogućnost veće neposredne kontrole usvajanja matematičkih vještina kroz kurikulum, odnosno program koji je odabran i koji provode nastavnici (Slavin, Lake i Groff, 2009).

Kurikulum ima iznimnu ulogu u obrazovnoj praksi jer ostvaruje presudnu vezu između standarda i mjera odgovornosti, a oni su ključni za rezultate matematičkih testiranja (Kilpatrick, 2014).

### Testiranja i mjerenja temeljnih matematičkih znanja

Različite vrste matematičkih testiranja i mjerenja u pravilu se usklađuju sa zahtjevima kurikuluma i usmjerena su na računanje i opće matematičko postignuće (Thurber, Shinn i Smolkowski, 2002). Računanje – zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, kao temeljna znanja matematike, trebala bi biti relativno laka za svladavanje i automatizirana kod većine djece. I danas su aktualna pitanja koja su još 1992. postavili Miller i Heward: *kako zaista znamo da je učenik svladao temeljne matematičke činjenice, koja razina uspješnosti, odnosno točnosti je dostatna da se s temeljnih koncepata prijeđe na složenije*. Ovi autori, uz točnost, presudnom smatraju brzinu kojom se izvode određene radnje jer upravo ona određuje funkcionalnost samih matematičkih znanja. Naime, možemo potpuno točno npr. množiti brojeve, ali ako nam je za to potrebno značajno više vremena od očekivanog, onda to znanje nije funkcionalno u danom trenutku. Točnost i tečnost izvođenja operacija definiraju matematičku uspješnost (Miller i Heward, 1992). Tečnost je vezana uz automatizaciju koja uključuje zadržavanje i prizivanje informacija kao najznačajnije prediktore uspjeha na standardiziranim testovima (Hasselbring, Lott i Zydney, 2006).

Hudson i sur. (2010) zaključili su da razlozi nedostatnog zadržavanja i prizivanja informacija kod učenika mogu biti u manjkavim početnim znanjima, negativnim stavovima prema matematici i različitim metodama poduke. Početna znanja u matematici temelje se na razumijevanju pojma broja (Jordan, Hanich, Kaplan, 2007), odnosno shvaćanju količine i

vrijednosti te procesu koji se može oslanjati na korak po korak razmišljanju o matematičkom problemu i konceptualizaciju ili na razumijevanje problema (Das i Janzen, 2004). Razumijevanje pojma broja se, prema dijelu istraživača (Dehaen, 1992; Fuhs i McNeil, 2013; Bonny i Lourenco, 2013) zasniva na intuitivnom osjećaju za broj ("approximate number system – ANS"). On je vidljiv kroz mogućnosti procjene i usporedbe količina već u ranom djetinjstvu, a kasnije u sposobnosti prepoznavanja neprihvatljivih rezultata, mogućnosti predstavljanja rezultata na različite načine i sposobnosti za prilagodljivo izvođenje mentalnih izračuna (Faulkner, 2009). Zadaci procjene količina uključuju provjere funkcioniranja kroz dvije jezgre (Feigenson, Dehaene, Spelke; 2004): prva je određena procjenom razlika u količinama koje su već u ranoj dobi vidljive kad su omjeri tih vezika "relativno veliki" (npr. količine 8 i 16), dok je druga vezana uz male količine (do 3 objekta). Niz rezultata istraživanja pokazao je da upravo vrlo rane mogućnosti procjene količina utječu na kasniju uspješnost u matematici (Halberda, Mazzocco, Feigenson, 2008; Feigenson, Libertus, Hallberda, 2013). Ovakvom postavkom ide se u prilog tvrdnjama da je uspješnost u matematici urođena te su stoga neka djeca i odrasli uspješni u matematici, a neki nisu (Stevenson, Cheng, Lee, 1993). Suprotno ovoj postavci, prema kojoj je procjena količina osnova za simboličku matematiku (Dehaen, 1992; Lyons i Beilock, 2011) i razvoj aritmetičkih vještina (Piazza i Dehaen, 2004), su nalazi metaanalize DeSmet, Noel, Ansari (2013). Oni nisu našli dovoljno podataka za prethodnu tvrdnju, već ističu da je veći broj studija prema kojima učenje aritmetike dovodi do poboljšanja u preciznosti kodiranja u ANS-u (Halberda, Mazzocco, Feigenson, 2008). Tako su Piazza, Pica, Izard, Spelke, Dehaene (2013) utvrdili da je preciznost kodiranja u ANS-u bila veća kod ispitanika koji su formalno obrazovani u usporedbi s onima koji nisu.

Istraživanje Göbel, Watson, Lervag i Hulme (2014) pokazuje da učenje simboličkog sustava arapskih brojeva snažno određuje rani aritmetički razvoj (Purpura, Baroody, Lonigan, 2013), bez obzira kakav je utjecaj ANS-a.

Broj i brojenje osnova su uspjeha u aritmetičkim zadacima zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Značajan je doprinos matematičkog učenja i usvajanja matematičkih znanja (Das i Janzen, 2004), te čak i ona djeca koja počinju školovanje s ograničenim i nedostatnim temeljnim konceptima o broju, mogu uz intenzivne nastavne aktivnosti dosegnuti razine vršnjake s dobrim matematičkim osnovama (Griffin, Case i Siegler, 1994).

Kako bi se mogao razmatrati doprinos različitih čimbenika za uspjeh u temeljnim aritmetičkim operacijama, potreban je uvid u njihovu razinu. Takav uvid omogućava raščlambu podataka za pojedinca i "pozicioniranje" rezultata u odnosu na grupu. Stoga je cilj ovog istraživanja usmjeren na eventualne razlike u razini matematičkih znanja učenika različitih obrazovnih razina i mogućnosti da se upravo ove temeljne aritmetičke operacije primjenjuju u postupcima prepoznavanja i dijagnosticiranja teškoća u matematici, odnosno diskalkulije (Geary, 2004).

### CILJ ISTRAŽIVANJA I PRETPOSTAVKA

Cilj rada je uvid u razinu uspješnosti rješavanja aritmeti-

čkih zadataka – zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, poznavanja pravila izvođenja računskih radnji - učenika od trećeg do osmog razreda osnovne škole bez teškoća u matematiци. Razmatrano je kakva je razina usvojenosti matematičkih znanja za pojedine vrste zadataka prema navedenim matematičkim operacijama. Utvrdit će se mijenja li se, odnosno raste li razina točnosti rješavanja s porastom obrazovne dobi.

Cilj ovog istraživanja je prikupljanje podataka o mogućnostima korištenja navedenih zadataka kao osnove za probir i procjenu matematičkih znanja te odjeljivanje učenika bez teškoća od učenika s teškoćama u matematiци i diskalkulijom.

U skladu s postavljenim ciljem, oblikovana je pretpostavka istraživanja:

P1: Postojat će statistički značajne razlike u ukupnom broju bodova na ispitnim zadacima iz matematičke, oblikovanim za potrebe istraživanja kod učenika bez teškoća u matematiци u korist učenika starijih razreda.

## METODE RADA

### Uzorak ispitanika

Uzorak ispitanika čini 145-ero učenika od trećeg do osmog razreda dviju redovnih osnovnih škola u Zagrebu. Ispitanici su, prema pripadnosti razredu koji pohađaju, podijeljeni u šest skupina – polaznici trećih, četvrtih, petih, šestih, sedmih i osmih razreda.

U ispitanim razredima izdvojeni su učenici s teškoćama u matematiци/diskalkulijom, odnosno oni koji se školuju prema individualiziranom i/ili prilagođenom programu iz matematičke – zbog navedenih dijagnoza teškoća ili diskalkulije – i oni nisu uključeni u analizu podataka u ovom istraživanju.

**Tablica 1.** Prikaz uzorka ispitanika: učenici Bez teškoća u matematiци (BTUM) (N = 145) podijeljeni prema razredima

Razred	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Ukupno
<b>Bez teškoća (BTUM)</b>	22	29	15	26	44	9	145

### Mjerni instrument – ispitni zadaci

Zadaci usvojenosti osnovnih aritmetičkih vještina zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i poznavanja pravila izvođenja računskih radnji oblikovani su prema kurikulumu matematičke za osnovne škole, odnosno Nastavnom planu i programu matematičke za osnovnu školu iz 2013., te su sadržani u udžbenicima matematičke. Uključivali su:

(a) 13 zadataka zbrajanja - jednoznamenkastih brojeva do 10, zbrajanje s nulom, zbrajanje brojeva do 20 (s i bez prijelaza preko desetice), zbrajanje desetica, zbrajanje dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja, zbrajanje

dvoznamenkastih brojeva do 100, zbrajanje dvoznamenkastih brojeva, zbrajanje troznamenkastih brojeva. Svaki zadatak nosi jedan bod ako je uspješno riješen, te je na zadacima zbrajanja ukupno bilo moguće ostvariti 0 do 13 bodova.

(b) 9 zadataka oduzimanja – jednoznamenkastih brojeva do 10, oduzimanje s nulom, oduzimanje brojeva do 20 (s i bez prijelaza preko desetice), oduzimanje desetica, oduzimanje dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja, oduzimanje dvoznamenkastih brojeva do 100, oduzimanje troznamenkastih brojeva. Svaki zadatak nosi jedan bod ako je uspješno riješen, te je na zadacima oduzimanja ukupno bilo moguće ostvariti 0 do 9 bodova.

(c) 10 zadataka množenja – brojeva do 10 (poznavanje tablice množenja), množenje s 0 i 1, te množenje dvoznamenkastog s jednoznamenkastim brojem. Svaki zadatak nosi jedan bod ako je uspješno riješen, te je na zadacima množenja ukupno bilo moguće ostvariti 0 do 10 bodova.

(d) 10 zadataka dijeljenja – dvoznamenkastog broja jednoznamenkastim bez ostatka (poznavanje tablice množenja), dijeljenje dvoznamenkastog broja jednoznamenkastim s ostatkom, dijeljenje s brojevima 0 i 1, te dijeljenje troznamenkastog broja jednoznamenkastim s i bez ostatka. Svaki zadatak nosi jedan bod ako je uspješno riješen, te je na zadacima dijeljenja ukupno bilo moguće ostvariti 0 do 10 bodova.

(e) 4 zadatka s više računskih radnji i zagradama kojim se ispituje poznavanje slijeda izvođenja računskih radnji i poznavanje funkcije zagrada. Svaki zadatak nosi jedan bod ako je uspješno riješen, te je na ovim zadacima ukupno bilo moguće ostvariti 0 do 4 boda.

Uspjeh na svim zadacima je ukupan broj bodova pojedinca.

U ispitivanje ciljano nisu bili uključeni zadaci riječima, kako bi se umanjila jezična komponenta, a uputa za svaki zadatak sadržavala je riječ “izračunaj”. Ispitanici su se za rješavanje zadataka trebali oslanjati na dekodiranje matematičkih simbola.

Zadaci su primijenjeni tijekom grupnog ispitivanja, a vrijeme rješavanja svih zadataka je ograničeno na 45 minuta.

### Varijable istraživanja

Varijable istraživanja definirane su operacionalno, prema korištenim zadacima:

1. RAZ (razred koji učenik pohađa; nezavisna varijabla)
2. UBB (ukupan broj bodova na testu aritmetike; zavisna varijabla)
3. ZU (ukupan broj bodova na zadacima zbrajanja; zavisna varijabla)
4. OU (ukupan broj bodova na zadacima oduzimanja; zavisna varijabla)
5. MU (ukupan broj bodova na zadacima množenja; zavisna varijabla)
6. DU (ukupan broj bodova na zadacima dijeljenja; zavisna varijabla)
7. SRR (ukupan broj bodova na zadacima poznavanja pravila redoslijeda izvođenja računskih operacija; zavisna varijabla).

## REZULTATI I RASPRAVA

Izračunani su osnovni statistici za varijablu Ukupan broj bodova (UBB) za učenike Bez teškoća u matematici (BTUM) na svakoj od obrazovnih razina (tablica 2), kako bi se dobio uvid u razine postignuća.

**Tablica 2.** Osnovni statistici za varijablu Ukupan broj bodova na aritmetičkim zadacima (UBB) za učenike Bez teškoća u matematici (BTUM) za svaki ispitanik razred (od trećeg do osmog)

Učenici bez teškoća u matematici (BTUM)	N	X	SD	MIN	MAX	TR
<b>Razred</b>						
<b>3</b>	22	37,05	4,845	25	44	0-46
<b>4</b>	29	42,34	2,319	36	46	0-46
<b>5</b>	15	43,40	2,165	38	46	0-46
<b>6</b>	26	42,04	3,423	35	46	0-46
<b>7</b>	44	42,23	2,778	35	46	0-46
<b>8</b>	9	43,00	4,330	35	46	0-46

Napomena: N=broj ispitanika; X=aritmetička sredina za skupinu učenika bez teškoća u matematici; SD=standardna devijacija; MIN=najniži postignuti rezultat; MAX=najviši postignuti rezultat; TR=teorijski/mogući raspon rezultata

Podaci pokazuju da učenici trećih razreda postižu niži prosječni rezultat od učenika ostalih razreda (od četvrtog do osmog), te da su rezultati na ostalim obrazovnim razinama uglavnom ujednačeni. Kod učenika trećih razreda prisutno je značajno veće raspršenje rezultata, što govori o neujednačenosti njihovih postignuća i značajnim individualnim varijacijama. Ove razine postignuća su očekivane, posebno za treći razred jer je to obrazovno razdoblje upravo ono u kojem bi se trebala dovršiti automatizacija navedenih aritmetičkih procesa. Naime, u početnim fazama usvajanja aritmetičkih znanja, učenici se oslanjaju na strategije kao što su glasno računanje, brojenje i računanje pomoću prstiju kao i razlaganje zadatka na dijelove radi izračuna. Ove eksplicitne postupke postupno zamjenjuju učinkovitije strategije, poput dohvaćanja rješenja iz dugoročnog pamćenja (Ashcraft, 1982), što se događa upravo u razdoblju treće godine formalnog obrazovanja te je prizivanje pohranjenih rezultata odlika kasnijih obrazovnih razdoblja (Siegler, 1986). Između učenika četvrtog, petog, šestog, sedmog i osmog razreda nema većih razlika u prosječnom broju bodova na testu aritmetike. Ovi učenici postižu uglavnom ujednačene prosječne rezultate i ujednačena odstupanja (standardne devijacije), osim učenika osmih razreda čija je standardna devijacija veća i pokazuje neujednačeniji uspjeh, odnosno veće individualne razlike. Kako se radi o svega devet ispitanih učenika, rezultat nije moguće generacijski generalizirati. Premda se s porastom dobi

i obrazovne razine očekuje porast uspješnosti na zadacima kojima se ispituje usvojenost aritmetičkih operacija, prema dobivenim aritmetičkim sredinama razlike nisu značajnije, osim kod učenika trećeg razreda u odnosu na ostale.

Prije daljih analiza, testirana je normalnost dobivenih distribucija rezultata Shapiro-Wilk-testom za svaki pojedinačni razred, te je utvrđeno da one nisu u skladu s normalnom distribucijom. Stoga su za dalje analize primijenjeni neparametrijski testovi za testiranje značajnosti razlika između skupina.

Razlike između uspjeha ispitanika pojedinih razreda izračunane su primjenom Mann-Whitney-U - testa, u skladu s postavljenom pretpostavkom: uspoređeni su uspjesi učenika trećeg i četvrtog, četvrtog i petog, petog i šestog, šestog i sedmog te sedmog i osmog razreda (tablica 3).

**Tablica 3.** Vrijednosti Mann-Whitney-U-testa (MWU) i značajnosti testa (MWU - P) pri usporedbi trećih i četvrtih, četvrtih i petih, petih i šestih, šestih i sedmih te sedmih i osmih razreda na varijabli Ukupan broj bodova (UBB)

Uspoređeni razredi	U	p
<b>3. / 4.</b>	98,000	0,000
<b>4. / 5.</b>	155,500	0,121
<b>5. / 6.</b>	155,500	0,274
<b>6. / 7.</b>	560,500	0,888
<b>7. / 8.</b>	137,500	0,149

Napomena: U= Mann-Whitney-U - test; p=značajnost

Rezultati Mann-Whitney-U-testa u skladu su s očekivanjima i podacima literature – dobivena je statistički značajna razlika u uspjehu na aritmetičkim zadacima između učenika bez teškoća u matematici trećih razreda u odnosu na učenike četvrtih razreda ( $p = 0,000$ ) na varijabli Ukupan broj bodova na aritmetičkim zadacima. Nisu nađene statistički značajne razlike rezultata učenika ostalih razreda (četvrti u odnosu na peti, peti u odnosu na šesti, šesti u odnosu na sedmi, sedmi u odnosu na osmi razred) na varijabli Ukupan broj bodova (UBB).

Prema Aschraftovim i Fiermanovim podacima (1982) o strategijama zbrajanja, moguće je da djeca trećih razreda koriste drukčije strategije i više različitih strategija (različite strategije temeljene na brojenju kao i strategije prizivanja) za rješavanje aritmetičkih zadataka u odnosu na starije učenike. U trećem razredu počinje oslanjanje na prizivanje matematičkih činjenica, a pohranjeni podaci postaju sve značajniji jer rastu zahtjevi kurikulumu za *fluentnim* računanjem, koji najznačajnije određuje upravo mogućnost točnog i brzog prizivanja podataka iz pamćenja (Petrill, Logan, Hart, Vincent, Thompson, Kovas, Plomin, 2012). Kako bi djeca postala kompetentna u rješavanju aritmetičkih zadataka, nužno je, kao što je već napomenuto, da sa spomenutih strategija prebrojavanja prijedju na prizivanje aritmetičkih činjenica iz dugoročnog pamćenja (Temple i Sherwood, 2002). To ne znači da ona neće primijeniti i druge strategije. Naime, s porastom dobi, ali i obrazovne razine, učenici postaju i sve učinkovitiji u primjeni različitih procedura i strategija koje osiguravaju dobre matematičke izračune (Baroody, 1994). Čini se da nakon desete godine,

odnosno u četvrtom razredu, postižu izvjesnu stabilnost i ujednačenost u učinkovitoj primjeni različitih strategija, pri čemu je temeljna strategija prizivanja činjenica iz dugoročnog pamćenja.

**Tablica 4.** Osnovni statistici za varijable Zbrajanje ukupno (ZU), Oduzimanje ukupno (OU), Množenje ukupno (MU), Dijeljenje ukupno (DU) te za poznavanje Slijeda računskih radnji (SRR) za učenike Bez teškoća u matematici (BTUM) za svaki ispitani razred (od trećeg do osmog)

Razred		N	X	SD	MIN	MAX	TR
3.	ZU	22	12,27	1,723	5	13	0-13
	OU	22	7,18	1,368	5	9	0-9
	MU	22	8,05	1,133	5	10	0-10
	DU	22	7,55	2,041	4	10	0-10
	SRR	22	1,95	1,290	0	4	0-4
4.	ZU	29	12,45	0,686	10	13	0-13
	OU	29	8,34	0,936	6	9	0-9
	MU	29	9,41	0,780	7	10	0-10
	DU	29	9,14	1,093	7	10	0-10
	SRR	29	2,97	0,981	0	4	0-4
5.	ZU	15	12,60	0,632	11	13	0-13
	OU	15	8,93	0,258	8	9	0-9
	MU	15	9,73	0,594	8	10	0-10
	DU	15	9,00	1,000	7	10	0-10
	SRR	15	3,13	0,834	2	4	0-4
6.	ZU	26	12,77	0,514	11	13	0-13
	OU	26	8,46	0,948	6	9	0-9
	MU	26	9,27	0,827	8	10	0-10
	DU	26	8,23	1,818	4	10	0-10
	SRR	26	3,27	0,874	1	4	0-4
7.	ZU	44	12,57	0,625	11	13	0-13
	OU	44	8,43	0,900	6	9	0-9
	MU	44	9,57	0,587	8	10	0-10
	DU	44	8,32	1,491	5	10	0-10
	SRR	44	3,36	0,942	0	4	0-4
8.	ZU	9	12,78	0,667	11	13	0-13
	OU	9	8,89	0,333	8	9	0-9
	MU	9	9,11	1,054	7	10	0-10
	DU	9	9,11	1,833	5	10	0-10
	SRR	9	3,11	1,269	0	4	0-4

Napomena: N=broj ispitanika; X=aritmetička sredina za skupinu učenika bez teškoća u matematici; SD=standardna devijacija; MIN=najniži postignuti rezultat; MAX=najviši postignuti rezultat; TR=teorijski/mogući raspon rezultata

Varijabla Ukupan broj bodova, osim zadataka zbrajanja i oduzimanja (koji se mogu „transformirati“ u zadatke zbrajanja pa strategije za njihovo rješavanje imaju zajedničke osnove), uključuje i bodove iz zadataka množenja i dijeljenja. Ove operacije se, prema propisanom Nastavnom planu, usvajaju u drugom razredu, te je razdoblje trećeg razreda upravo vrijeme u kojem se nerijetko još primjenjuju strategije koje se oslanjaju na prebrojavanje i zbrajanje, a manje one koje se temelje na prizivanju umnožaka (Baroody, 1999). Moguće je da miješanje strategija dovodi do manje učinkovitosti, a zbog nedovoljnog vremena za njihovu automatizaciju, učenici trećih razreda nedovoljno točno ili nedovoljno brzo rješavaju zadatke množenja i dijeljenja. U prilog tome idu zadaci na kojima nije bilo rješenja (odustajanje od rješavanja), odnosno rezultati koje je bilo teško povezati s točnim izračunom (nagađanje). Starija djeca imaju više mogućnosti uvježbavanja, odabira učinkovitih strategija i automatizacije prizivanja te stoga postižu i bolje rezultate. Mullis, Martin, Foy, Arora (2012) navode rezultate Trećeg međunarodnog istraživanja uspješnosti rješavanja matematičkih zadataka (International Association for the Evaluation of Educational Achievement, Third International Mathematics and Science Study – IEA - TIMS) iz 1995., prema kojem su vidljive značajne razlike između učenika trećih i četvrtih razreda kod svih zemalja koje su bile uključene u ispitivanje (bez obzira kada su počele s formalnom podukom matematike). To govori u prilog činjenici postojanja „prijelomnog razdoblja“. Ovi autori navode i da je povećanje uspješnosti između trećeg i četvrtog razreda značajno veće usporedimo li ga s razlikama između četvrtog i osmog razreda na zadacima koji ispituju osnovne aritmetičke operacije (Mullis i sur., 2012).

Svi dobiveni podaci našeg istraživanja govore u prilog djelomičnom prihvaćanju postojeće hipoteze: uspješnost rješavanja zadataka raste između trećeg i četvrtog razreda, ali ne i u kasnijim razredima kada razina matematičke kompetencije u području temeljnih matematičkih kompetencija ostaje približno jednaka.

Kako bi se dobio uvid u skupine zadataka koje generiraju postojanje odnosno nepostojanje razlika za različite razrede, te zbog boljeg uvida u uspješnost rješavanja pojedinih aritmetičkih operacija s obzirom na razred, izračunani su osnovni statistici na varijablama Zbrajanje ukupno (ZU), Oduzimanje ukupno (OU), Množenje ukupno (MU), Dijeljenje ukupno (DU) te Slijed računskih radnji (SRR) (tablica 4) za svaki ispitani razred. Mann-Whitney-U-testom utvrđene su razlike između ispitnika pojedinih razreda na ovim varijablama (tablica 5).

Iz podataka deskriptivne statistike vidljivo je kako je prosječan broj bodova na varijabli Zbrajanje ukupno (ZU) relativno ujednačen prema razredima, dok se prema prosječnom broju bodova na varijablama Oduzimanje ukupno (OU), Množenje ukupno (MU), Dijeljenje ukupno (DU) i Slijed računskih radnji (SRR) čini kako postoje razlike među razredima u korist viših razreda. Slično kao i na varijabli Ukupan broj bodova (UBB), standardne devijacije i rasponi između najmanjeg i najvećeg rezultata na ovim su varijablama najveći upravo kod učenika trećeg razreda. To je ujedno i jedini razred kod kojeg postoje veće vrijednosti raspršenja rezultata (standardne devijacije) od same vrijednosti aritmetičke sredine na zadacima zbrajanja, dok su kod ostalih razreda rezultati na tim zadacima relativno ujednačeni. Veće varijacije kod četvrtog, petog,

**Tablica 5.** Vrijednosti Mann-Whitney-U - testa (U) i značajnosti testa (p) pri usporedbi učenika Bez teškoća u matematici (BTUM) polaznika trećih i četvrtih, četvrtih i petih, petih i šestih, šestih i sedmih te sedmih i osmih razreda na varijablama Zbrajanje ukupno (ZU), Oduzimanje ukupno (OU), Množenje ukupno (MU), Dijeljenje ukupno (DU) i Slijed računskih radnji (SRR)

Varijabla		Uspoređeni razredi				
		3. / 4.	4. / 5.	5. / 6.	6. / 7.	7. / 8.
ZU	U	291,00	189,00	167,50	474,50	154,50
	p	0,543	0,418	0,320	0,139	0,209
OU	U	166,50	146,00	152,50	546,00	148,50
	p	0,002	0,024	0,096	0,700	0,147
MU	U	105,00	165,00	134,00	469,00	151,50
	p	0,000	0,126	0,058	0,157	0,207
DU	U	170,00	195,00	153,50	570,00	127,00
	p	0,003	0,550	0,245	0,980	0,080
SRR	U	174,00	202,50	174,000	521,500	174,500
	p	0,004	0,693	0,540	0,492	0,530

Napomena: U= Mann-Whitney-U - test; p=značajnost

šestog, sedmog i osmog razreda prisutne su na zadacima dijeljenja, što može značiti da učenici nakon trećeg razreda ovom operacijom ovladavaju s najvećim individualnim razlikama.

Rezultati Mann-Whitney-U-testa za utvrđivanje razlika pokazuju da postoje statističke značajne razlike između učenika trećeg i četvrtog razreda na skupnim rezultatima - zadacima oduzimanja, množenja, dijeljenja i zadacima koji ispituju poznavanje pravila redoslijeda izvođenja računskih operacija. Nema statistički značajnih razlika na zadacima zbrajanja. Statistički značajne razlike između četvrtog i petog razreda nađene su samo na zadacima oduzimanja. Nisu nađene statistički značajne razlike između petog, šestog, sedmog i osmog razreda niti na jednoj od navedenih skupina zadataka. Zaključno, nema razlike u postignućima na zadacima za provjeru aritmetičkih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja od petog do osmog razreda.

Ovi rezultati pokazuju da je zbrajanje aritmetička operacija koju učenici prvu usvoje jer im je najlakša. Vilette (2002) nalazi razlike u uspješnosti rješavanja zadataka zbrajanja u odnosu na zadatke oduzimanja, pri čemu su se zadaci oduzimanja pokazali težima za rješavanje. Istraživanje Brush (1978) govori u prilog podjednakoj uspješnosti na jednostavnim zadacima zbrajanja i oduzimanja kod djece.

No, kada se uspoređuju složeniji zadaci zbrajanja i složeniji zadaci oduzimanja, istraživači nalaze statistički značajne razlike u uspješnosti rješavanja navedenih zadataka, koji pokazuju da učenici imaju više problema s oduzimanjem kako raste složenost zadataka. Kao razlog nejednakoj ovladanošću zbrajanjem i oduzimanjem navodi se dječje iskustvo – djeca imaju više iskustva s brojenjem

prema “više” nego brojenjem prema “manje”. U zadacima primijenjenima u našem istraživanju razlog može biti u tzv. pisanom zbrajanju i oduzimanju koje uključuje brojeve veće od 10 (obje vrste zadataka u sklopu su varijabli ZU – zbrajanje ukupno i OU – oduzimanje ukupno). U pisanom zbrajanju moguće je zamijeniti mjesta pribrojnicima, a da pritom rezultat ostane isti – svojstvo koje se naziva komutativnost. Međutim, kod pisanog oduzimanja, smjer rješavanja odozgo prema dolje igra važnu ulogu u dobivanju točnog rezultata, te zamjena brojki prilikom računanja (tako da donja brojka postaje umanjitelj, a gornja umanjitelj u slučaju kada je gornja brojka manja od donje) daje pogrešni rezultat. Van Lehn (1982) naziva ovu vrstu grešaka proceduralnom greškom, a Fuson i Kwom (1992) ističu kako su one česte kod djece koja tek počinju ovladavati pisanim zbrajanjem i oduzimanjem, kao što je to kod naše djece trećih razreda.

Radi objašnjenja dobivenih rezultata napravljen je i izračun postotaka točnih odgovora samo na zadacima pisanog oduzimanja kod učenika trećeg i kod učenika četvrtog razreda: učenici trećih razreda u zadacima s pogrešnim rezultatima kod oduzimanja imaju čak 72,72 % pogrešaka upravo na zadacima koji se odnose na tzv. pisano oduzimanje (zadaci prelaska preko desetice), dok učenici četvrtih razreda imaju neuspješno riješenih svega 12,5 % zadataka u pisanom oduzimanju. Geary (2004) ove nedostatke veže uz svladavanje sustavom desetica u aritmetici, koje trebaju imati svoje podržavajuće kompetencije: konceptualne – koje se odnose na razumijevanje sustava desetice i proceduralne – odnose se na tzv. prenošenje desetice. Učenici trećih razreda nisu u potpunosti ovladali ovim kompetencijama i značajno su lošiji od učenika četvrtih razreda. Aritmetičke vještine koje se koriste pri oduzimanju zahtjevnije su od prethodnih vještina zbrajanja i nerijetko prođe određeno vrijeme dok ih djeca ne svladaju. Značajan dio djece treba duže vrijeme za svladavanje mogućnosti da zadatke oduzimanja rješava zbrajanjem i potrebno im je posebno poučavanje taj strategiji (Armstrong, 1991).

Zadaci množenja često su najviše isticali kao oni koji dobro odjeljuju učenike s teškoćama u matematici u odnosu na učenike bez teškoća (Lenček, Peretić i Arapović i 2010). Učenici trećih razreda u našem istraživanju postižu statistički značajno lošije rezultate u množenju od učenika četvrtih razreda, što pokazuje da nisu automatizirali ove vještine. Nema statistički značajnih razlika u rješavanju zadataka množenja kod djece od četvrtog do osmog razreda. To bi značilo da je tijekom četvrtog razreda množenje svladano i znanja koja djeca imaju “održavaju” do osmog razreda. Usvajanje tablice množenja podložno je korištenju vrlo različitih strategija te kod neke djece prođe izvjesno vrijeme dok ne usvoje najučinkovitiji način. Čini se da je vrijeme trećeg razreda upravo to vrijeme traženja učinkovitih strategija, ali i njihove automatizacije, posebno prizivanja iz pamćenja.

Kod učenika koji nisu svladali množenje, očekivano je i neuspješno rješavanje zadataka dijeljenja. To se i pokazalo prema osnovnim statističkim za varijablu Dijeljenje ukupno (DU), odnosno kroz statistički značajne razlike trećih u odnosu na četvrte razrede u zadacima Dijeljenja ukupno (DU). Moguće je zaključiti da u trećem razredu operacije množenja i dijeljenja nisu usvojene na razini automatiziranosti te da većina djece bez teškoća u

matematici još traži učinkovite strategije rješavanja ovih zadataka. Oni se nedostavno oslanjaju na prizivanje rezultata iz pamćenja, jer taj proces nije automatiziran. Ashcraft i Fierman (1982) navode rezultate istraživanja, prema kojima se 50 % učenika trećih razreda oslanja na strategije brojenja, odnosno dodavanja i oduzimanja kod zadataka množenja, dok drugih 50 % priziva informacije iz dugoročnog pamćenja. Koshmider i Ashcraft (1991) ističu da se učenici trećih razreda ipak snažnije oslanjaju na strategije prizivanja u zadacima množenja nego na strategije brojanja, no ova strategija nije učinkovita pa je moguće da zbog nje imaju lošije rezultate u toj dobi. Dio istraživača smatra da je svladavanje tablice množenja vezano uz verbalne asocijacije, u odnosu na zbrajanje i oduzimanje koje je moguće riješiti kroz manipulacije neverbalnim brojevnim reprezentacijama (Cohen, Dehaene, Cohochon, Lehericy, Naccache, 2000; Jordan, Hanich i Kaplan, 2003). Takvo tumačenje može upućivati da verbalni dio nije dostatno usvojen kod učenika trećih razreda, dok učenici četvrtih razreda i oni stariji mogu uspješnije primjenjivati verbalni oslonac.

Uspjeh u zadacima dijeljenja ima iznimno važnu ulogu u osnovnoškolskom svladavanju matematike jer zajedno s rezultatima zadataka razlomaka najsnažnije predviđa uspjeh u algebri i cjelokupnom matematičkom znanju pet i šest godina kasnije, čak i kada se kontroliraju varijable poput ostalih matematičkih znanja, opće inteligencije, radnog pamćenja, obiteljskog okruženja i obrazovanja (Siegler, Duncan, Davis-Kean, Duckworth, Claessens, Engel, Susperreguy, Chen, 2012). Podaci našeg istraživanja pokazuju da je kod djece trećih razreda postignuće u dijeljenju niže nego u ostalim razredima. U prosjeku su učenici trećeg razreda postizali 7,55 bodova, dok su učenici ostalih razreda, od četvrtog do osmog, prosječno postizali 8,76 bodova od 10 mogućih. Ovi podaci, kao i podaci testiranja značajnosti razlika između postignuća učenika od trećeg do osmog razreda, pokazuju da - kao što je i očekivano - učenici trećeg razreda tek svladavaju strategije uspješnog dijeljenja te ih tijekom kasnijih obrazovnih razdoblja učvršćuju, baš kao što je dobiveno i za druge aritmetičke operacije. Usvojene strategije se bitnije ne mijenjaju i ne razlikuju s porastom obrazovne dobi, baš kao što je to vidljivo i za strategije zbrajanja, oduzimanja i množenja.

Zadaci koji provjeravaju znanje slijeda izvođenja računskih operacija pokazuju da su, prema sličnim istraživanjima koja su obuhvaćala učenike trećih razreda (Ashcraft i Fierman, 1982), ovi učenici lošiji u odnosu na starije učenike u uspješnosti rješavanja zadataka koji uključuju niz matematičkih operacija i poznavanje i primjenu pravila vezanih uz zgrade. Učenici trećih razreda postizali su u prosjeku 1,95 bodova, dok su učenici ostalih razreda postizali u prosjeku od 2,97 do 3,36 bodova od mogućih 4. Mann-Whitney-U-test potvrdio je značajnost razlika u postignuću na ovim zadacima između trećeg u odnosu na četvrti razred, dok nije bilo razlike između četvrtog i ostalih razreda.

Mann-Whitney-U-testom dobivena je statistički značajna razlika na varijabli Oduzimanje ukupno između učenika u četvrtom i petom razredu. Moguće je da oduzimanje preko desetice, koje zahtijeva niz učinkovitih strategija koje se oslanjaju na radno pamćenje, utječe na manju uspješnost djece u ovim zadacima i ona se "produžava" u smislu slabijeg postignuća od trećeg razreda na četvrti. Učenicima je

potrebno duže vrijeme za svladavanje svih koraka koji se provode kod oduzimanja višeznamenastih brojeva s tzv. posudbom desetice.

Čini se da je razdoblje četvrtog razreda vrijeme u kojem se utvrđuje poznavanje osnovnih matematičkih operacija i stječu kompetencije u računanju, koje se tijekom idućih godina učvršćuju. Pregledom svih rezultata vidljiva je relativno visoka uspješnost učenika svih obrazovnih razina u rješavanju zadanih čestica. Ujednačenost rezultata u dobi nakon četvrtog razreda upućuje na svojevrsno postizanje praga u smislu točnosti rješavanja tijekom četvrtog razreda, no upitna je brzina izvođenja operacija.

Ograničenje provedenog istraživanja je u činjenici vremenskog rješavanja zadataka – 45 minuta – te nije mjerena brzina kojom pojedinci primjenjuju znanja i strategije. Stoga se iz podataka ne može zaključivati o matematičkoj fluentnosti za temeljne operacije, već samo o poznavanju postupaka i strategija koje mogu dovesti do točnih rezultata. Ovi podaci su bitni za procjenu teškoća jer osiguravaju uvid u razine znanja, koje svladaju svi učenici neke obrazovne razine i daju osnovu za očekivanja u pogledu točnosti.

Relativno mali uzorak ispitanika u svakoj obrazovnoj skupini onemogućava generalizaciju rezultata.

## ZAKLJUČAK

Osnovne matematičke činjenice uključuju rješavanje jednostavnih zadataka zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja i počinju računanjem s jednoznamenastim brojevima (Hasselbring, Goin, Bradford, 1987). Učinkovitost računanja s tim brojevima vidljiva je već tijekom prvog i drugog razreda formalnog obrazovanja (Geary, Brown, Samaranayake, 1991). Rezultati niza istraživanja pokazuju da je treći razred svojevrsno "prijelazno razdoblje", u kojem se usvajaju strategije koje će većini djece osigurati uspješno rješavanje različitih vrsta aritmetičkih zadataka tijekom školovanja. Rezultati našeg istraživanja govore u prilog ovoj postavci jer su ispitana djeca bez teškoća u matematici pokazala statistički značajno niže rezultate na primijenjenim aritmetičkim zadacima u odnosu na djecu četvrtih, a onda i petih, šestih, sedmih i osmih razreda. U razdoblju od četvrtog do osmog razreda nema bitnijih pomaka ni u statističkih razlika u razini aritmetičkih znanja kod ispitanih učenika, osim za zadatke oduzimanja kod učenika četvrtih u odnosu na učenike petih razreda. Podaci govore u prilog tvrdnjama da se usvojene strategije i razina koju djeca ostvare u četvrtom razredu samo prenose u kasnija obrazovna razdoblja i mogu služiti kao dobar (ili loš) temelj za dalje usvajanje matematičkih kompetencija. Ovi podaci upozoravaju i na mogućnosti da se tijekom ranog razdoblja – do trećeg razreda – provodi intervencija kod one djece kod koje se uoče bilo kakva odstupanja u jednostavnim zadacima računanja i poznavanja pravila slijeda matematičkih operacija. Na vrijednost rane intervencije u domeni matematičkih znanja upozorava niz istraživanja (Bryant, Bryant, Roberts, Vaughn, Hughes Pfannenstiel, Porterfield, Gersten, 2011). Ključno značenje trećeg u odnosu na razdoblje četvrtog razreda proizlazi i iz činjenice da se upravo u tom razdoblju najčešće javljaju učenici s teškoćama zbog "taloženja" teškoća, sve veće



zahtjevnosti koje pred njih postavlja kurikulum, ali i mogućnosti da se upravo u tom razdoblju pouzdanije utvrde teškoće u učenju jer je prošla dovoljna količina formalne poduke.

Prema značajnom dijelu određenja specifičnih teškoća učenja u matematici, odnosno diskalkulije, za dijagnosticiranje odstupanja potrebno je zaostajanje od barem dvije godine u odnosu na redovni program te je treći razred prvo razdoblje kad je donošenje dijagnoze – prema ovim definicijama – opravdano.

Podaci o još uvijek nižoj učinkovitosti učenika trećeg razreda u odnosu na četvrte razrede i kasnije obrazovne razine, daju izvjesnu mogućnost opravdanja da se konačna dijagnoza specifičnih teškoća u matematici ili diskalkulije postavlja nešto kasnije, u četvrtom razredu, a što nikako ne odgađa provođenje intervencije, odnosno pružanja podrške i pomoći.

Podaci stručnih praćenja u Hrvatskoj (Lenček, 2017), kao i malobrojni istraživački radovi (Lenček, Peretić i Arapović, 2010; Lenček i Peretić, 2015) pokazuju da se dijagnoza specifičnih teškoća u matematici, odnosno diskalkulije zaista donosi znatno kasnije nego npr. dijagnoza disleksije. To može biti vezano i uz razdoblje potrebno za automatizaciju temeljnih matematičkih vještina i očekivanja u pogledu kurikuluma, odnosno pokazatelje neautomatiziranosti procesa. Razlog kasnijem donošenju dijagnoza može biti i u manjku nacionalnih testiranja iz matematike i “referentnih podataka”, kao i nedostatnom broju logopeda koji provode procjenu teškoća u području matematike, ali i nedostatnom općem interesu za uspjeh učenika u matematici – zbog uvjerenja da su “samo pojedinci nadareni za matematiku (Lynn i Meisenberg, 2010) i da je matematika općenito teška za usvajanje svima”.

Nacionalna testiranja uspješnosti u matematici trebala bi obuhvatiti niz parametara koji bi pomogli lakšem, ranijem i točnijem otkrivanju teškoća. Podaci takvih testiranja i istraživanja osigurali bi osnovu postupaka namijenjenih probiru i dijagnosticiranju djece s teškoćama, s obzirom na ostvarene razine učenika urednog razvoja, kao i postavljene zahtjeve nastavnih planova. Zadaci oblikovani za navedena testiranja svakako trebaju uključiti temeljne matematičke vještine jer su one osnova za rješavanje složenih matematičkih zadataka, a uspješno rješavanje složenih matematičkih problema govori o uspjehu u matematici općenito. Sastavnica takvih testiranja treba biti ne samo točnost, već i brzina rješavanja problema (Ysseldyke, Thill, Pohl, Bolt, 2005) jer one zajedno daju uvid u primjenjivost matematičkih znanja.

Spoznaja da je niska matematička kompetencija povezana s nižim općim indeksom životnog uspjeha (Parsons i Bynner, 2005), a povećanje matematičkih kompetencija povezano s rastom iznosa tzv. bruto domaćeg proizvoda, upozorava na potrebu sustavnije nacionalne brige za uspjeh u matematici, a onda i u domeni teškoća. Uvažavanje matematičke kompetencije znači i brigu za prepoznavanje razloga varijabilnosti u matematičkoj uspješnosti. Sustavna briga i ulaganje u matematičke kompetencije nužna je za poboljšanje općih rezultata matematičke pismenosti, što bi pridonijelo brizi i podršci osobama s teškoćama u matematici.

## LITERATURA

- 1) Ai, X. (2002). Gender differences in growth in mathematics achievement: Three-level longitudinal and multilevel analyses of individual, home, and school influences. *Mathematical Thinking and Learning*, 4, 1-22.
- 2) Anrig, G. R. i Lapoint, A. E. (1989). What we know about what students don't know. *Educational Leadership*. [http://ascd.com/ASCD/pdf/journals/ed\\_lead/el\\_198911\\_anrig.pdf](http://ascd.com/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el_198911_anrig.pdf). Pristupljeno ožujak 2017.
- 3) Armstrong, G.A. (1990). Use of the part-whole concept for teaching word problems to grade three children. Doctoral dissertation. USA: National College of Education. Dissertation Abstracts International, 52(03) 833A.
- 4) Ashcraft, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review*, 2, 3, 213-236.
- 5) Ashcraft, M. H. i Fierman, B. A. (1982). Mental addition in third, fourth, and sixth graders. *Journal of Experimental Child Psychology* 33, 2, 216-234.
- 6) Atweh, B., Forgasz, H., Nebres, B. (eds.) (2010). (digital printing) Sociocultural Research on Mathematics Education: An International Perspective. NY, Routledge, Taylor & Francis Group. [https://books.google.hr/books?hl=hr&lr=&id=dZ3fCwUZBuAC&oi=fnd&pg=PP2&dq=math+curriculum+in+different+countries+scholarly+articles&ots=fjAvKQV4Zh&sig=hEcsr9IX0xxquaHSnVuYzlgZD2M&redir\\_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.hr/books?hl=hr&lr=&id=dZ3fCwUZBuAC&oi=fnd&pg=PP2&dq=math+curriculum+in+different+countries+scholarly+articles&ots=fjAvKQV4Zh&sig=hEcsr9IX0xxquaHSnVuYzlgZD2M&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false). Pristupljeno ožujak, 2017.
- 7) Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M. K., Nurmi, J. E. (2004). Developmental Dynamics of Math Performance From Preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96, 4, 699–713.
- 8) Baroody, A.J. (1994). An evaluation of evidence supporting fact-retrieval models. *Learning and Individual Differences*, 6, 1-36.
- 9) Baroody, A.J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 17, 137-175.
- 10) Bonny J.W. i Lourenco S.F. (2013). The approximate number system and its relation to early math achievement: Evidence from the preschool years. *Journal of Experimental Child Psychology*, 114,3, 375 – 388.
- 11) Bryant, D. P., Bryant, B. R., Roberts, G., Vaughn, S., Hughes Pfannenstiel, K., Porterfield, J., Gersten, R. (2011). Early Numeracy Intervention Program for First-Grade Students With Mathematics Difficulties. *Council for Exceptional Children*, 78, 1, 7-23.
- 12) Brush, L. R. (1978). Preschool children's knowledge of addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 1, 44-54.
- 13) Chen, Q. i Li, J. (2014). Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance: A meta-analysis. *Acta Psychologica* 148, 163 - 172.
- 14) Chia, Y. (2015). *Education, Culture and the Singapore Developmental State. „Word soul“ Lost or Regained?*. Hampshire, UK; NY, USA: Palgrave Macmillan.
- 15) Chinn, S. i Ashcroft, R. (2017). *Mathematics for Dyslexics and Dyscalculics. A Teaching Handbook*. Chishester, UK: John Wiley & Sohns.
- 16) Cohen, L., Dehaene, S., Cohochon, F., Lehericy, S.,

- Naccache, L. (2000) Language and calculation within the parietal lobe: A combined cognitive, anatomical and fMRI study. *Neuropsychologia*, 38, 1426–1440.
- 17) Das, J. P. i Janzen, C. (2004). Learning Math: Basic concepts, math difficulties, and suggestions for intervention. *Developmental Disabilities Bulletin*, 32, 2, 191-205
- 18) Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1- 42.
- 19) De Smedt, B., Noel, M. P., Ansari, D. (2013). The relationship between symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing and the typical and atypical development of mathematics: evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 48 – 55. <http://www.psy.cmu.edu/~siegler/121-DeSmedt-et-al-13.pdf>, pristupljeno ožujak 2017.
- 20) Entwisle, D. R. i Alexander, K. L. (1990). Beginning school math competence: Minority and majority comparisons. *Child Development*, 61, 454–471.
- 21) Faulkner, V. (2009). The components of number sense: An instructional model for teachers. *Teaching Exceptional Children*, 41, 5, 24-30.
- 22) Feigenson, L., Dehaene, S., Spelke, E. S. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, Vol. 8, 307–314. doi:10.1016/j.tics.2004.05.002
- 23) Feigenson, L., Libertus, M.E., Halberda, J. (2013). Links between the intuitive sense of number and formal mathematics ability. *Child Development Perspective*, 7,2, 74- 79.
- 24) Fuhs, M.W. i McNeil, N.M. (2013). ANS acuity and mathematics ability in preschoolers from low-income homes: Contributions of inhibitory control. *Developmental Science*, 16, 1,136 – 148.
- 25) Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Powell, S R., Schumacher, R. F., Hamlett, C. L., Vernier, E., Namkung, J. M., Rose K., Vukovic, R. K. (2012): Contributions of domain-general cognitive resources and different forms of arithmetic development to pre-algebraic knowledge. *Developmental Psychology*, 48, 5, 1315-1326.
- 26) Fuson K.C. i Kwon Y. (1992). Learning addition and subtraction: Effects of number words and other cultural tools. In: Bideaud J., Meljac C., Fischer J.P. (Eds.): *Pathways to number: Children's developing numerical abilities*. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 283–306.
- 27) Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37, 1, 4-15.
- 28) Geary, D. C., Brown, S. C., Samaranayake, V. A. (1991). Cognitive addition: A short longitudinal study of strategy choice and speed-of-processing differences in normal and mathematically disabled children. *Developmental Psychology*, 27, 787– 797.
- 29) Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T., Pollock, E. (2005). *What the United States can learn from Singapore's world-class mathematics system*. Washington: American Institutes for Research.
- 30) Göbel, S. M., Watson, S. E., Lervåg, A., Hulme, C. (2014). Children's Arithmetic Development. It Is Number Knowledge, Not the Approximate Number Sense, That Counts. *Psychological Science*, 25, 3, 789-798.
- 31) Gonzales-Castro, P., Cueli, M., Cabeza, L., Alvarez-Garcia, D., Rodriguez, C. (2014). Improving basic math skills through integrated dynamic representation strategies. *Psicothema*, 26, 3, 378-384.
- 32) Griffin, S.A., Case, R., Siegler, R.S. (1994). Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure. In: K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice*. Cambridge, MA: MIT Press. 25-49.
- 33) Halberda, J., Mazocco, M., Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, 455, 665-668.
- 34) Hasselbring, T. S., Goin, L. I., Bradsford, J. D. (1987). Developing automaticity. *Teaching Exceptional Children*, 1, 30–33.
- 35) Hasselbring, T.S., Lott, A.C., Zydney, J.M. (2006). *Technology-supported math instruction for students with disabilities: Two decades of research and development*. Washington, DC: CITED, Center for Implementing Technology in Education.
- 36) Hirvonen, R., Tolvanen, A., Aunola, K., Nurmi, J.E. (2012). The developmental dynamics of task-avoidant behavior and math performance in kindergarten and elementary school. *Learning and Individual Differences*, 22, 6, 715-723.
- 37) Hoven, J., i Garelick, B. (2007). Singapore math: Simple or complex? *Educational Leadership*, 65, 3, 28-36.
- 38) Hudson, S., Kadan, S., Lavin, K., Vasquez, T. (2010). *Improving basic math skills using technology*. Chicago, Illinois: Saint Xavier University.
- 39) Jerrim, J. (2014). Why do East Asian children perform so well in PISA? An investigation of Western-born children of East Asian descent. Institute of Education, University of London. [https://johnjerrim.files.wordpress.com/2013/07/australia\\_asia\\_paper.pdf](https://johnjerrim.files.wordpress.com/2013/07/australia_asia_paper.pdf), pristupljeno ožujak, 2017.
- 40) Jordan, N., Kaplan, D., Locuniak, M., Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research and Practice*, 22, 1, 36-46.
- 41) Jordan, N. C., Hanich, L. B., Kaplan, D. (2003). Arithmetic fact mastery in young children: A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85, 2, 103–119
- 42) Kilpatrick, F. (2014). History of Research in Mathematics Education. U: Lerman, S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. London: Springer. 267-272.
- 43) Koshmider, J. W. i Ashcraft, M. H. (1991). The development of children's mental multiplication skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 51, 1, 53–89.
- 44) Lenček, M. (2017). Sumnjam na disleksiju. Predavanje; *Stručni skup Agencije za odgoj i obrazovanje*. Pula, 23.-24. 2.2017.
- 45) Lenček, M. i Peretić, M. (2015). ANS - Approximate Number System – što nam govori o matematici kod predškolaca. *Usmeno izlaganje na 5. kongresu hrvatskih logopeda*. Osijek, 24.-26. 9. 2015.
- 46) Lenček, M., Peretić, M., Arapović, D. (2010). Od “matematika mi ne ide” do diskalkulije. *Zbornik radova s međunarodnog znanstveno-stručnog skupa Perspektive cjeloživotnog obrazovanja učitelja i odgojitelja*. Sveučilište u Zadru. Zadar.
- 47) Lemov, D. (2010). *Teach Like a Champion: 49 Techniques that Put Students on the Path to College*. San Francisco: Jossey - Bass.
- 48) Loewenberg Ball, D., Hill, H. C., Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. American Educator, Fall 2005. *The Quarterly Journal of the American Federation of Teachers*, AFL-CIO.
- 49) Lynn, R. i Meisenberg, G. (2010). The average IQ of sub-Saharan Africans: Comments on Wicherts, Dolan and

- Van der Maas. *Intelligence*, 38, 21–29.
- 50) Lyons, I. i Beilock, S. (2011). Numerical ordering ability mediates the relation between number-sense and arithmetic competence. *Cognition*, 121, 256-261.
- 51) Mazzocco, M., Feigenson, L., Halberda, J. (2011). Impaired Acuity of the Approximate Number System Underlies Mathematical Learning Disability (Dyscalculia). *Child Development*, 82 (4), 1224–1237.
- 52) Miller, A. D. i Heward, W. L. (1992). Do your students really know their math facts? Using Daily Time Mais to Build Fluency Guidelines for conducting an effective method of building fluency – Guidelance for conducting an effective method of building fluency - the time trial. *Intervention in School and Clinic*, 2, 2, 98-104.
- 53) Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International results in mathematics*. Boston: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
- 54) Parsons, S., Bynner, J. (2005). *Does numeracy matter more?* London: National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy. Institute of Education.
- 55) Petrill, S., Logan, J., Hart, S., Vincent, P., Thompson, L., Kovas, Y., Plomin, R. (2012). Math Fluency Is Etiologically Distinct From Untimed Math Performance, Decoding Fluency, and Untimed Reading
- 56) Performance: Evidence From a Twin Study. *Journal of Learning Disability*, 45, 4, 371–381.
- 57) Powel, T. L. (2014). A comaprative Analysis of the Singapore Math Curriculum and the Everyday Mathematics Curriculum on Fifth Grade Achievement in a Large Northeastern Urban Public School District. Seton Hall University Dissertations and Theses ETDS. <http://scholarship.shu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2999&context=dissertations>
- 58) Piazza, M. i Dehaene, S. (2004). From number neurons to mental arithmetic: The cognitive neuroscience of number sense. In: M. S. Gazzaniga (Ed.) *The Cognitive Neurosciences* (3rd ed). Cambridge, MA: MIT Press. 865-857.
- 59) Piazza M., Pica, P., Izard, V., Spelke, E., Dehaene, S. (2013). Education enhances the acuity of the non-verbal approximate number system. *Psychological Science*; 24, 6, 1037–1043.
- 60) PISA (2009) Program for International Student Assessment – dostupno: <http://dx.doi.org/10.1787/888932343152>. Pristupljeno veljača, 2017.
- 61) PISA (2016) PISA 2015. Results in Focus. OECD. <https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf>. Pristupljeno veljača 2017.
- 62) Purpura, D. J., Baroody, A. J., Lonigan, C. J. (2013). The transition from informal to formal mathematical knowledge: Mediation by numeral knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 105, 2, 453-464.
- 63) Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., Beilock, S. L. (2013). Math Anxiety, Working Memory and Math Achievement in Early Elementary School. Achievement in Early Elementary School. *Journal of Cognition and Development*, 14, 2, 187-202.
- 64) Reese, C. M., Miller, K. F., Mazzeo, J., Dossey, J. A. (1997). *National assessment of educational progress 1996 mathematics report card for the nation and the states*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.
- 65) Rousselle, L., Noel, M.P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, 102, 361–395.
- 66) Sahlberg, P. (2011). PISA in Finland: An Education Miracle or an Obstacle to Change? *CEPS Journal*, 1, 3, 119-140.
- 67) Schmidt, W. H. (2008). What's Missing from Math Standards - Focus. Rigor and Coherence. *American Educator*, Spring 2008. <https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/schmidt.pdf>. Pristupljeno ožujak 2017.
- 68) Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematic work for all children. Issues of standards, testing and equity. *Educational Researcher*, 31, 1, 13-25.
- 69) Siegler, R. S. (1986). Unities across domains in children's strategy choices. In M. Perlmutter (Ed.), *Minnesota Symposium on Child Psychology: Perspectives on intellectual development*. NJ, Hillsdale: Erlbaum. 1-48.
- 70) Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, 23, 7, 691–697.
- 71) Slavin, R.E., Lake, C., Groff, C. (2009). Effective programs in middle and high school mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research*, 79, 2, 839-911.
- 72) Stevenson, H. W., Cheng, C., Lee, S. (1993). Mathematics Achievement of Chinese, Japanese, and American Children: Ten Years Later. *Science*, 259, 5091, 53-58.
- 73) Temple, C.M. i Sherwood, S. (2002). Representation and retrieval of arithmetical facts: Developmental difficulties. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 55A, 733-762.
- 74) Thurber, R. S., Shinn, M. R., Smolkowski, K. (2002). What is Measured in Mathematics Tests? Construct Validity of Curriculum-Based Mathematics Measures. *School Psychology Review*, 31, 4, 498-513.
- 75) van Lehn K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses, and repairs in procedural skills. *Journal of Mathematical Behavior*, 3, 3–71.
- 76) Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development*, 17, 1365-1383.
- 77) Ysseldyke, J., Thill, T., Pohl, J., Bolt, D. (2005). Using MathFacts in a Flash to enhance computational fluency. *Journal of Evidence-Based Practices for Schools*, 6, 59-89.