Rješavanje primjera iz sličnosti na detaljan način

Marijana Špoljarić[1], Vlado Halusek[2], Azra Razlog[3]

Uvod

Poljak [8] udžbenik definira kao temeljnu školsku knjigu napisanu na osnovi propisanog nastavnog plana i programa, koji učenici upotrebljavaju gotovo svakodnevno u svom školovanju i koja je didaktički oblikovana radi racionalnijeg, ekonomičnijeg i efikasnijeg obrazovanja. Istraživanja pokazuju da se udžbenici uvelike koriste pri planiranju i izvedbi nastavnog procesa, odnosno većina nastavnika svoj nastavni sat temelji na izvođenju tipičnih primjera i zadataka po uzoru na lekcije napisane u udžbeniku. U isto vrijeme istraživanja [2] pokazuju da se 39.5 % učenika izjasnilo kako ne razumiju udžbenik pri učenju.

Sve vrste matematičkih zadataka i problema trebale bi se rješavati na sustavan način postavljanjem pravih pitanja na pravome mjestu. Odgovore na pitanja učenici dobiju na nastavnome satu matematike, no postoji mogućnost da neki odgovori nisu dobro shvaćeni. Analizom učeničkih odgovora na prvoj državnoj maturi 2009./2010. uočene su poteškoće i nerazumijevanje pojedinih ključnih ishoda koje su imali učenici i više i osnovne razine [6]. Zbog toga bi svaki udžbenik trebao imati više primjera riješenih zadataka od lakših ka težem kako bi se svakom učeniku pružila prilika da dio gradiva svlada i sam. Samim time bolje će usvojiti nastavno gradivo i povezati ga s već naučenim. Kurnik [4] navodi kako su neuspjesi učenika u matematici i neznanje koje pokazuju nakon završenog školovanja dobrim dijelom posljedica činjenice da se nastava većinom izvodi na nižoj razini, gdje se suviše inzistira samo na usvajanju gradiva. Drugim riječima, uočava se dobro poznat problem u nastavi matematike, a to je „učiti kako se uči" [7]. Stoga se ovdje daje prijedlog za detaljno pojašnjavanje više tipova zadataka, a ne samo jednog ili dva kao što je u pojedinim udžbenicima. Pritom ovo detaljno pojašnjavanje ne bi smjelo imati dijelove u smislu „podrazumijeva se" ili „lako se pokaže". Sve treba objasniti tako da učenici dobiju priliku da nauče jer ima dosta učenika koji bi željeli naučiti, ali zapinju upravo ne nedovoljno objašnjenim primjerima u

[1]Marijana Špoljarić, Visoka škola za menadžment u turizmu i informatici u Virovitici
[2]Vlado Halusek, Osnovna škola Kloštar Podravski, Kloštar Podravski
[3]Azra Razlog, Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica

udžbenicima, zbog čega moraju ići na instrukcije. Također se događa da i učitelji imaju problema sa shvaćanjem pojedinih zadataka namijenjenih učenicima [3].

Pravilnom obradom i istinskim razumijevanjem matematičkih pojmova i poučaka u osnovnim i srednjim školama omogućit će se brži razvoj matematičkog mišljenja potrebnog za život.

U nastavku će se prikazati dva primjera rješavanja zadataka iz područja sličnosti za sedmi razred osnovne škole i dva primjera za prvi razred gimnazije. Prvo je prikaz uobičajenog načina rješavanja prema aktualnim udžbenicima, a zatim detaljan način njihova rješavanja.

Prijedlog rješavanja zadataka iz područja sličnosti.

Primjer 1. Trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C$ su slični. Izračunajmo duljine ostalih stranica trokuta $\Delta A'B'C$ ako je $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $c = 4$ cm i $b' = 3$ cm.

Rješenje prema [9]*:*

Budući da su trokuti slični, vrijedi: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobit ćemo: $\frac{7}{a'} = \frac{6}{3} = \frac{4}{c'}$.

$$6 \cdot a' = 21 \qquad 6 \cdot c' = 12$$
$$a' = 3.5 \text{ cm} \qquad c' = 2 \text{ cm}.$$

Prijedlog načina rješavanja:

Matematički zapis:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\Delta ABC: \quad a = 7\text{ cm} \quad b = 6\text{ cm} \quad c = 4\text{ cm}$$

$$\Delta A'B'C': a' = ? \quad b' = 3\text{cm} \quad c' = ?$$

$$\frac{7}{a'} = \frac{6}{3} = \frac{4}{c'}$$

$$\frac{7}{a'} = \frac{6}{3} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4}{c'}$$

$$6a' = 7 \cdot 3 \qquad 6c' = 4 \cdot 3$$

$$6a' = 21 \quad / : 6 \qquad 6c' = 12 \quad / : 6$$

$$a' = 3.5\text{ cm} \qquad c' = 2\text{ cm}$$

Objašnjenje:

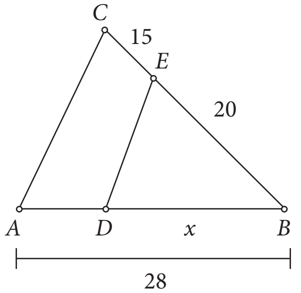
U zadatku je zadano da su trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$ slični, zbog toga su im omjeri duljina odgovarajućih stranica jednaki:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Uvrštavanjem zadanih podataka u omjer možemo izračunati potrebne podatke tako da prvo izjednačimo omjer u kojem je nepoznanica a' s omjerom u kojem nema nepoznanica, a zatim izjednačimo omjer u kojem je nepoznanica c' s omjerom u kojem nema nepoznanica.

Unakrsnim množenjem, to jest primjenom pravila za jednakost razlomaka i rješavanjem jednadžbe s jednom nepoznanicom izračunat ćemo nepoznate duljine stranica trokuta $\Delta A'B'C'$.

Primjer 2. Koliki je x ako je $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$?



Rješenje prema [9]:

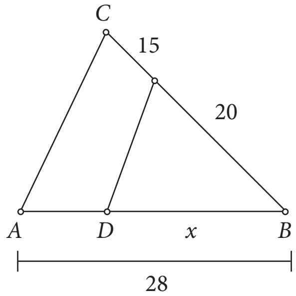
Kutove jednake veličine u trokutima ΔABC i ΔDBE označimo jednakom vrstom lukova. (Kutovi s paralelnim kracima jednake su veličine.) Prema K – K poučku ti su trokuti slični, tj. $\Delta ABC \sim \Delta DBE$. Odgovarajuće stranice nalaze se nasuprot kutovima jednake veličine:

$$\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|AB|}{|BD|}$$

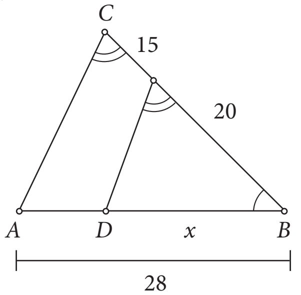
$$\frac{20+15}{20} = \frac{28}{x}$$

$$35 \cdot x = 20 \cdot 28$$

$$x = 16 .$$



Prijedlog načina rješavanja:



Matematički zapis:

$$|\measuredangle ABC| = |\measuredangle DBE|$$

$$|\measuredangle BCA| = |\measuredangle BED|$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ADC$$

Objašnjenje:

Uočimo trokut ΔABC i trokut ΔDBE. Primijetite da zadani trokuti imaju jedan zajednički kut (u vrhu B). Kutovi $\measuredangle BCA$ i $\measuredangle BED$ istih su mjera jer su kutovi iste vrste s međusobno usporednim kracima jednakih veličina.
Zaključimo da su trokuti slični prema pravilu za sličnost kut – kut.

Matematički zapis:

$\Delta ABC: \ |AB| = 28$

$|BC| = 20 + 15 = 35$

$\Delta DBE: \ |BD| = x$

$|BE| = 20$

$$\frac{28}{x} = \frac{35}{20}$$

$35x = 28 \cdot 20$

$35x = 560 \quad / : 35$

$x = 16$

Objašnjenje:

U trokutu ΔABC: na stranici $\overline{AB}$ leže kutovi označeni s jednim lukom (s vrhom B) i kut koji nije označen lukom (s vrhom A). U trokutu ΔDBE tražimo stranicu na kojoj su označeni kutovi s jednim lukom i kut koji nije označen. Jednim lukom označen je kut pri vrhu B, a kut pri vrhu D nije označen. Zaključimo da je tražena stranica $\overline{DB}$. Isto tako u trokutu ΔABC na stranici $\overline{BC}$ leži kut označen s dva luka (s vrhom C) i kut označen s jednim lukom(s vrhom B). U trokutu ΔDBE tražimo stranicu na kojoj su označeni kutovi s dva luka i kut označen jednim lukom. S dva luka označen je kut pri vrhu E, a kut pri vrhu B označen je jednim lukom. Zaključimo da je tražena stranica $\overline{BE}$. Promatrane stranice možemo složiti u omjer proporcije na temelju kojega ćemo dobiti duljinu stranice $\overline{DB}$.

Primjer 3. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ΔABC nalaze se točke D i E, takve da je $|AD| = 7$ cm, $|DC| = 8$ cm, $|EC| = 5$ cm i $|BE| = 19$ cm. Dokaži da je $\measuredangle EDC \cong \measuredangle BED$.

Rješenje prema udžbeniku [1]:

Pokažimo da su trokuti ΔABC i ΔEDC slični. Kut γ im je zajednički, a za duljine stranica uz taj kut vrijedi $|AC| : |CE| = |BC| : |DC|$ jer je 15 : 5 = 24 : 8, dakle, slični su prema poučku S-K-S. Zaključujemo da su odgovarajući kutovi $\measuredangle CDE$ i $\measuredangle ABC$ sukladni.

Prijedlog načina rješavanja:

Matematički zapis:

$\Delta ABC: |AC| = 15 \text{ cm}$

$|BC| = 24 \text{ cm}$

$\Delta EDC: |EC| = 5 \text{ cm}$

$|DC| = 8 \text{ cm}$

$$\frac{15}{5} = \frac{24}{8} = 3$$

$\measuredangle EDC \cong \measuredangle BED$

Objašnjenje:

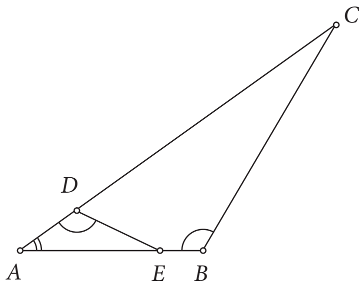
Kako bismo riješili zadatak, potrebno je stranice staviti u omjere. Kako bi stranice bile u potrebnim omjerima, služit ćemo se skicom.

U trokutu ΔABC zadane su duljine stranica $|AC| = 7 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$ i $|BC| = 5 \text{ cm} + 19 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$. Promotrimo trokut ΔEDC u kojemu su nam zadane duljine stranica $|EC| = 5$ cm i $|DC| = 8$ cm. Omjer ćemo dobiti tako da uspoređujemo kraću stranicu trokuta ΔABC ($|AC| = 15$ cm) s kraćom zadanom stranicom trokuta ΔDEC ($|EC| = 5$ cm). Isto ćemo napraviti i s duljim stranicama zadanih trokuta. Budući da vrijedi proporcija pa smo za obje stranice dobili isti koeficijent sličnosti, zaključujemo da su kutovi $\measuredangle EDC$ i $\measuredangle ABC$ sukladni.

Primjer 4. U trokutu ΔABC je $|AB| = 15$ cm, $|AC| = 30$ cm. Iz točke D na stranici $\overline{AC}$ nacrtan je pravac koji stranicu $\overline{AB}$ siječe u točki E tako da je $|\measuredangle EDA| = |\measuredangle ABC|$. Odredi $|AD|$ i $|AE|$ ako je $|AE|$ dulja od $|AD|$ za 5 cm.

Rješenje prema [1]:

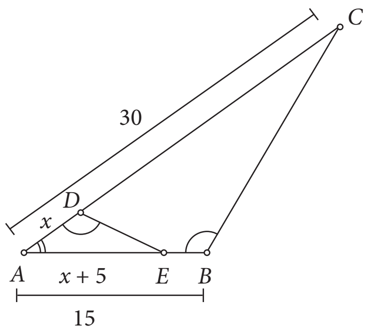
Iz $\Delta AED \sim \Delta ABC$ slijedi $|AE| : |AD| = |AC| : |AB|$, odatle $|AE| = 2|AD|$ (slika 3.). Sada iz $|AE| = |AD| + 5$ dobijemo $|AD| = 5$ cm, a potom $|AE| = 10$ cm.



Slika 3.

Prijedlog načina rješavanja:

Prvo se nacrta skica.



Slika 4.

Matematički zapis:

$|\measuredangle ABC| = |\measuredangle EDA|$

$|\measuredangle CAB| = |\measuredangle DAE|$

$\Delta ABC \sim \Delta AED$

Objašnjenje:

Uočimo trokut ΔABC i trokut ΔAED. U zadatku je zadano da je $|\measuredangle EDA| = |\measuredangle ABC|$.

Primijetite da zadani trokuti imaju jedan zajednički kut (u vrhu A).
Zaključimo da su trokuti slični prema pravilu za sličnost kut – kut.

Matematički zapis:

$$\Delta ABC : |AB| = 15 \text{ cm}$$

$$|AC| = 30 \text{ cm}$$

$$\Delta AED : |AD| = x$$

$$|AE| = x + 5 \text{ cm}$$

$$\frac{15}{x} = \frac{30}{x+5}$$

$$15 \cdot (x+5) = 30 \cdot x$$

$$15 \cdot x + 75 = 30 \cdot x$$

$$30x - 15x = 75$$

$$15x = 75$$

$$x = 5\text{cm} \Rightarrow |AD| = 5 \text{ cm}$$

$$|AE| = x + 5\text{cm} = 5\text{cm} + 5\text{cm} = 10\text{cm}.$$

Objašnjenje:

Kako bismo riješili zadatak, potrebno je stranice staviti u omjere. Kako bi stranice bile u potrebim omjerima, služit ćemo se skicom. U trokutu ΔABC na stranici $\overline{AB}$ leže kutovi označeni s jednim lukom (s vrhom *B*) i kut označen s dva luka (s vrhom *A*). U trokutu ΔAED tražimo stranicu na kojoj su označeni kutovi s jednim i dva luka. Jednim lukom označen je kut pri vrhu *D*, a s dva luka označen je kut pri vrhu A. Zaključimo da je tražena stranica $\overline{AD}$. Isto tako u trokutu ΔABC na stranici $\overline{AC}$ leži kut označen s dva luka (u vrhu *A*) i kut koji nije označen (s vrhom *C*). U trokutu ΔAED tražimo stranicu na kojoj su označeni kutovi s dva luka i kut koji nije označen. S dva luka označen je kut pri vrhu *A*, a kut pri vrhu *E* nije označen. Zaključimo da je tražena stranica $\overline{AE}$. Promatrane stranice možemo složiti u omjer proporcije na temelju kojega ćemo dobiti duljinu stranice $\overline{AD}$, odnosno stranice $\overline{AE}$.

Zaključak

Teško je očekivati da će ovaj članak nešto bitno promijeniti u načinu pisanja budućih udžbenika, ali svaki doprinos u poboljšanju nastave matematike je dobrodošao. To je naročito važno ako se uzme u obzir da veliki broj učenika u našoj državi uzima instrukcije iz matematike na svim razinama obrazovanja. Potreba za instrukcijama bila bi znatno manja ako bi učenici mogli svrhovitije koristiti udžbenik koji im je namijenjen. U ovom slučaju dan je prikaz obrade sličnosti na detaljan način jer je uočena važnost za to u praksi. Boljim učenicima to će izgledati suvišno jer shvaćaju problem i bez takvog detaljnog opisa. Ti učenici ionako manje koriste udžbenik za učenje, a više za same zadatke. Ovakav način objašnjavanja zadataka usmjeren je na prosječne i slabije učenike kojih je većina. Također može dobro doći učiteljima kao pomoć pri obradi ovih nastavnih sadržaja jer si učenici mogu kod kuće objasniti detalje koje nisu uspjeli shvatiti tijekom nastave.

Literatura

1. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije*, Element, Zagreb 2006.
2. D. Glasnović Gracin, V. Domović, Upotreba matematičkih udžbenika u nastavi viših razreda osnovne škole, Odgojne znanosti, 11 (2009.), 45-65.
3. V. Halusek, M. Špoljarić, Osposobljenost učitelja razredne nastave za pripremanje učenika za natjecanja iz matematike // Četvrti kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske / Ivanšić, Ivan (ur.). Zagreb : Hrvatsko matematičko društvo i Školska knjiga, 2010. 215-222.
4. V. Kadum, Neke paradigme za uspješnu nastavu i usmjeravanje učenja u matematici, Metodički ogledi, 11 (2005.), 95-110.
5. Z. Kurnik, *Znanstvenost u nastavi matematike*, Metodika 17, 9 (2008.), 318-327.
6. Ž. Milin Šipuš, *Osvrt na ispit iz matematike na državnoj maturi – ljetni ispitni rok školske godine 2009./2010.,* Poučak, 46 (2011.), 4-15.
7. M. Matijević, *(Na)učiti kako se uči (matematika)*, Poučak, 45 (2011.), 30-38.
8. V. Poljak, *Didaktičko oblikovanje udžbenika i priručnika*, Školska knjiga, Zagreb, 1980.
9. Z. Šikić, I. Golac-Jakopović, M. Vuković, L. Krnić, *Matematika 7, udžbenik i zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole,* Profil, 2007.