



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

ÜÇ BOYUTLU ELASTİK KİRİŞLERİN GEOMETRİ BAKIMINDAN DOĞRUSAL OLMAYAN ANALİZİ: ASAL EKSEN TRANSFORMASYON YÖNTEMİ

Murat Yılmaz¹

İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, Maslak, İstanbul

ABSTRACT

This presents the development of an initially straight beam element for geometric non-linear analysis of elastic structures considering large deflection and finite rotations. There are many popular finite element formulations for solving nonlinear beams. Finite rotational transformation of variables became a challenging task because of the non-linear character of space of 3D rotations. In this study, the space configuration of the element is directly interpolated via an attached local coordinate system and a moving coordinate system which revealed all the kinematic expressions of the element with twelve parameters. Finite rotational transformation between configurations is carried out only between principal axes of cross-sections in vector form with Rodrigues transformation which overcame the difficulties of rotational transformation. Direct equilibrium equations are obtained on the deformed configuration by averaging the stress resultants over the problem domain.

ÖZET

Bu çalışmada, şekil değiştirmeden önceki geometrisi doğru olan üç boyutlu elastik kirişlerin nodal yükleme altında büyük yer değiştirme ve büyük dönmeler dikkate alınarak hesaplanması sunulmuştur. Literatürde geometri bakımından doğrusal olmayan kirişlerin analizi için birçok değişik yöntem mevcuttur. Bu yöntemlerdeki en büyük zorluk varyasyonel büyüklüklere uygulanan sonlu dönme transformasyonunun toplama özelliği olmaması yüzünden ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada kiriş elemanının şekil değiştirmiş (uzay) geometrisi, kiriş düğüm noktalarını takip eden yapışık lokal eksen takımı yardımı ile tanımlanmıştır. Şekil değiştirmemiş (referans) geometri ile uzay geometri arasındaki bağıntılar kiriş kesitlerinin asal eksenleri arasında Rodrigues vector dönüşümü uygulanarak kurulmuştur. Uzay geometride tanımlanan hareketli eksen takımı yardımı ile kiriş elemanına ait kinematik bağıntılar elde edilmiştir. Denge denklemleri uzay geometride varyasyonel büyüklükler kullanılmadan oluşturulmuştur.

¹yilmazmura@itu.edu.tr

1.GİRİŞ

Kirişlerin üç boyutlu büyük yer değiştirme ve sonlu dönme analizi oldukça çalışılmış bir konudur. Bathe [1] Hermitte yaklaşım fonksiyonları ve Euler açılarını kullanarak Total Lagrangian ve Updated Lagrangian formülasyonları sunmuştur. Konuyla ilgili birçok çalışma yanında Reissner'in geometri bakımından kesin sonlu şekil değiştirmeli kiriş teorisi (Geometrically Exact finite-strain beam theory) [2] oldukça ilgi çekmiş ve [3-8] tarafından sonlu dönmelerin ele alınması bakımından çeşitli iyileştirmelerle sunulmuştur. Sonlu dönmelerin toplanamama özelliği gerek varyasyonel büyüklüklerin dönüşümlerinde gerekse bölge değişkenlerinin dönüşümlerinde zorluklara sebep olmaktadır. Ibrahimbegovic [9] sonlu dönme transformasyonları ile ilgili dokuz parametrelili orthogonal tansör dönüşümünden, üç parametrelili dönme vektörüne kadar olası sonlu dönüşümleri incelemiştir. Zupan and Saje [10] üç parametrelili dönme vektörünün büyük dönmeleri ifade etmek için yeterli olduğunu göstermişlerdir. Literatürde sonlu dönmelerin dezavantajını ortadan kaldırmaya yönelik çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmalardan [11,12] dönme bilinmeyenleri yerine eleman nodlarını kaydırmak suretiyle oluşturulan dönme parametresiz (Rotation Free) formülasyon ve kiriş teğetlerini dikkate alan [13,14] mutlak nodal koordinat formülasyonu (Absolute nodal coordinate formulation) dikkate değer çalışmalardır. Jonker ve Meijaard [15] bağımsız ayırık deformasyon modları tanımlayarak yapışık eksen takımı ve klasik kiriş teorilerini birleştiren yeni bir formülasyon elde etmişlerdir.

Bu çalışmada yukarıda belirtilen çalışmalardan farklı olarak uzay geometriyi tanımlayan parametreler dönüştürülmüş asal eksen bileşenleri çinsinden ifade edilmek suretiyle bölge büyüklükleri ile ilgili dönüşümlerden kaçınılmıştır. Ayrıca denge denklemleri ve sonlu eleman formülasyonu direk olarak uzay geometride belirlenen serbest cisim diyagramı ile elde edilmiş, teğet rijitlik matrisi sayısal olarak hesaplanmıştır. Bu bağlamda varyasyonel büyüklükler ve bu büyüklüklerin sonlu dönme dönüşümleri ile ilgili oluşacak karmaşık formülasyonlardan kaçınılmıştır.

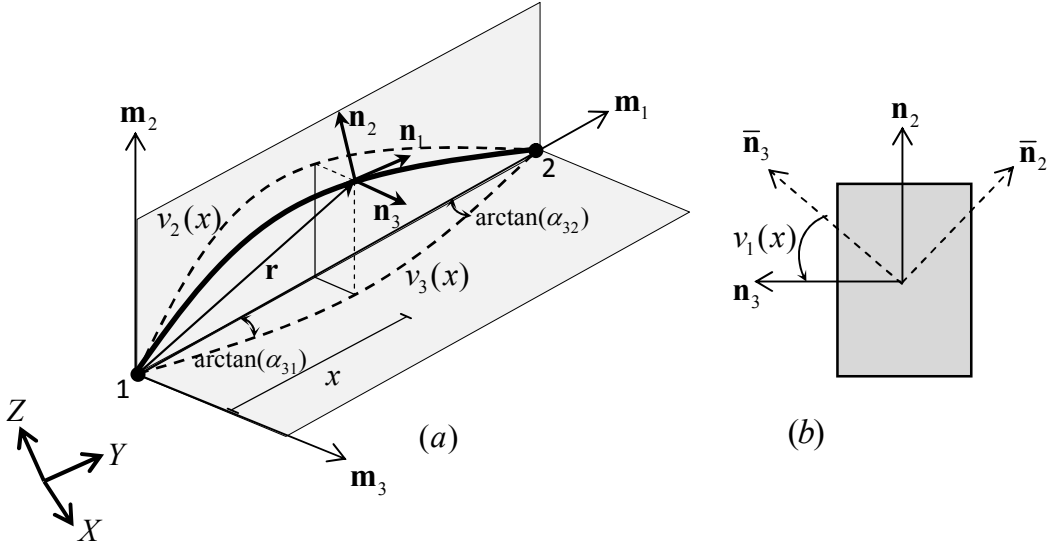
2. KİRİŞ GEOMETRİSİ

Kiriş uzay geometrisi, \mathbf{p}_1 ve \mathbf{p}_2 düğüm noktaları konum vektörleri ve global eksen takımı yardımı ile tanımlanan $\{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3\}$ eksen takımı (1) ve (2) verilmiştir. Bu eksen takımı düzlemlerine izdüşen $v_i(x)$ ($i = 2, 3$) yaklaşım fonksiyonları (3) ile tanımlanmıştır (Şekil 1a). $v_1(x)$ yaklaşım fonksiyonu merkezsiz eksen etrafında dönme serbestliği sağlamaktadır (Şekil 1b). Kiriş kinematik bağıntılarını elde etmek amacı ile hareketli eksen takımı (7) ve (8) bağıntılarıyla verilmiştir.

Yapışık eksen takımının \mathbf{m}_1 bileşeni kiriş düğüm noktalarını tanımlayan \mathbf{p}_1 ve \mathbf{p}_2 vektörleri yardımı ile (1) denklemiyle tanımlanır. Burada L düğüm noktaları arasındaki mesafedir;

$$\begin{aligned} L &= \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\| \\ \mathbf{m}_1 &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) / L \end{aligned} \quad (1)$$

\mathbf{m}_2 ve \mathbf{m}_3 ün seçimi sonsuzdur. Global eksen takımı yardımıyla (2) denklemleri ile sabitlenebilirler. (Deyatlar için Ek A ya bakınız)



Şekil. 1. a) Kiriş uzay geometrisi b) Kesit asal eksen takımı

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_3 &= \mathbf{m}_1 \times \mathbf{k} / \|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{k}\| \\ \mathbf{m}_2 &= \mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{k}^T = \{0, 0, 1\}$ global z yönüdür. İlk önce uzay eğrisinin pozisyon vektörü \mathbf{r} tanımlanmalıdır. Bunun için x parametresi $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ arasında gezinmek üzere eğrinin 1-2 ve 1-3 eksenlerince tanımlanan düzlemlere olan izdüşümleri (3) ile verilen kübik Hermite fonksiyonları ile tanımlanmıştır (Şekil 1a).

$$v_k(x) = (\alpha_{k1} + \alpha_{k2}) \frac{x^3}{L^2} - (2\alpha_{k1} + \alpha_{k2}) \frac{x^2}{L} + \alpha_{k1}x \quad k = 2, 3 \quad (3)$$

α lar projeksiyon tanjantları olarak isimlendirilmiş olup (4) bağıntıları ile tanımlanırlar.

$$\alpha_{k1} = \left. \frac{dv_k}{dx} \right|_{x=0} \quad \alpha_{k2} = \left. \frac{dv_k}{dx} \right|_{x=L} \quad k = 2, 3 \quad (4)$$

Uzay eğrisinin konum vektörü yapışik eksen takımı bileşenleri cinsinden (5) ile verilmiştir;

$$\mathbf{r}(x) = x\mathbf{m}_1 + v_2(x)\mathbf{m}_2 + v_3(x)\mathbf{m}_3 \quad (5)$$

Eğri boyu s ile x arasında (6) bağıntısı yazılabilir.

$$\frac{ds}{dx} = A(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dv_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv_3}{dx} \right)^2} \quad (6)$$

Uzay eğrisinin hareketli eksen takımı ön tanım olarak (7) vektörleri ile tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= A(x)^{-1} \frac{d\mathbf{r}}{dx} \\ \bar{\mathbf{n}}_3 &= \mathbf{n}_1 \times \mathbf{k} / \|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{k}\| \\ \bar{\mathbf{n}}_2 &= \bar{\mathbf{n}}_3 \times \mathbf{n}_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Hareketli eksen takımına \mathbf{n}_1 etrafında kesit dönme serbestliği vermek amacı ile asal eksenler (8) eşitlikleri ile genelleştirilmişlerdir. (Şekil 1b). (Detaylar için Ek B ye bakınız)

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_2 &= \bar{\mathbf{n}}_2 \cos(v_1(x)) + \bar{\mathbf{n}}_3 \sin(v_1(x)) \\ \mathbf{n}_3 &= -\bar{\mathbf{n}}_2 \sin(v_1(x)) + \bar{\mathbf{n}}_3 \cos(v_1(x))\end{aligned}\quad (8)$$

Dönme serbestliği için (9) ile verilen lineer yaklaşım fonksiyonu seçilmiştir.

$$v_1(x) = \phi_1(1 - x/L) + \phi_2 x/L \quad (9)$$

Bu aşamaya kadar uzay eğrisi $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ nodal koordinatları ve $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{22}, \alpha_{32}, \phi_1, \phi_2$ olmak üzere toplam 12 parametre ile ifade edilmiştir. Projeksiyon tanjantları, yapışık eksen takımı ve hareketli eksen takımı nileşenleri cinsinden (10) ifadeleri ile hesaplanabilir.

$$\alpha_{ki} = \frac{\mathbf{n}_{1i} \cdot \mathbf{m}_k}{\mathbf{n}_{1i} \cdot \mathbf{m}_1} \quad i = 1, 2 \quad k = 2, 3 \quad (10)$$

Burada \mathbf{n}_{11} ve \mathbf{n}_{12} kiriş uç noktalarının teğet vektörleri olup (11) ile tanımlanır.

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_{11} &= \mathbf{n}_1(x=0) \\ \mathbf{n}_{12} &= \mathbf{n}_1(x=L)\end{aligned}\quad (11)$$

Hareketli eksen takımının ortogonal olma koşulu kullanılarak kesit dönme açıları (12) ve (13) ifadeleri ile elde edilebilirler.

$$\begin{aligned}\cos(\phi_i) &= \mathbf{n}_{2i} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{2i} \\ \sin(\phi_i) &= \mathbf{n}_{2i} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{3i}\end{aligned}\quad i = 1, 2 \quad (12)$$

$$\phi_i = \arctan 2(\sin(\phi_i), \cos(\phi_i)) \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

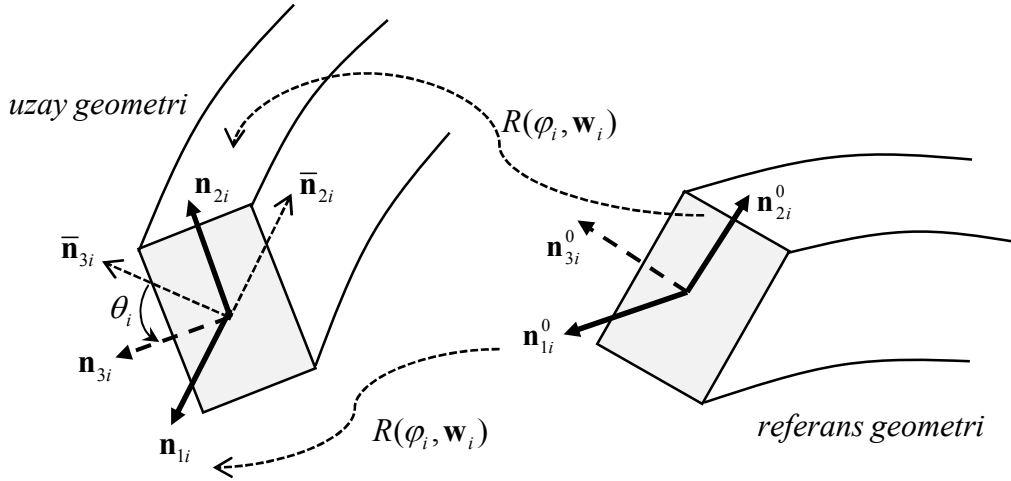
Sonlu eleman formülasyonu için global bilinmeyenlerin tanımlanması gerekir. Öteleme türü bilinmeyenler için nodal koordinatlar seçilmiştir. Dönme serbestlikleri ise (14) ile verilen global eksen etrafında sonlu dönme açıları olarak belirlenmiştir. i indisi düğüm noktasını göstermektedir.

$$\boldsymbol{\theta}_i = \{\theta_{x_i}, \theta_{y_i}, \theta_{z_i}\} \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

İfade (14) ile verilen sonlu dönme vektörü, \mathbf{w}_i birim dönme eksenini ve bu eksen etrafındaki ϕ_i dönme açısı tanımları ile (15) ifadelerine dönüştürülebilir [9].

$$\begin{aligned}\phi_i^2 &= \theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2 + \theta_{z_i}^2 \\ \mathbf{w}_i &= \boldsymbol{\theta}_i / \phi_i\end{aligned}\quad i = 1, 2 \quad (15)$$

$\phi_i = 0$ özel durumu için nodal dönme olmadığı söylenebilir. Asal eksen takımı dönüşümleri Şekil 2. de gösterilmiştir. $R(\phi_i, \mathbf{w}_i)$ Rodrigues dönüşümü olmak üzere;



Şekil 2. Referans geometri asal eksenlerinden uzay geometri asal eksenlerine dönüşüm.

Referans konum için verilen \mathbf{n}_{li}^0 teğet vektöründen uzay konum teğet vektörü \mathbf{n}_{li} ye geçiş Rodrigues dönme formülü [9] kullanılarak sonlu dönme açıları cinsinden (16) ifadesi ile sağlanır.

$$\mathbf{n}_{li} = \mathbf{n}_{li}^0 \cos(\varphi_i) + (\mathbf{w}_i \times \mathbf{n}_{li}^0) \sin(\varphi_i) + \mathbf{w}_i (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_{li}^0) (1 - \cos(\varphi_i)) \quad (16)$$

Referans konum için verilen \mathbf{n}_{2i}^0 vektörü benzer dönüşüme tabi tutularak \mathbf{n}_{2i} vektörü (17) ile elde edilir.

$$\mathbf{n}_{2i} = \mathbf{n}_{2i}^0 \cos(\varphi_i) + (\mathbf{w}_i \times \mathbf{n}_{2i}^0) \sin(\varphi_i) + \mathbf{w}_i (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_{2i}^0) (1 - \cos(\varphi_i)) \quad (17)$$

\mathbf{n}_{2i} (12) ve (13) denklemlerinde kullanılarak kesit burulma dönmeleri elde edilmektedir. Bu denklemlerde $\bar{\mathbf{n}}_{2i}$ ve $\bar{\mathbf{n}}_{3i}$ vektörleri (16), (11) and (7) ile tanımlanmıştır. Kiriş elemanının bilinmeyenlerini içeren nodal bilinmeyenler vektörü (18) ile verilmiştir;

$$\mathbf{u}^T = \{\mathbf{p}_1^T, \boldsymbol{\theta}_1^T, \mathbf{p}_2^T, \boldsymbol{\theta}_2^T\} \quad (18)$$

3. KİNEMATİK BAĞINTILAR

Hareketli eksen takımı yardımı ile uzay konuma ait burulma ve eğilme eğrilikleri (19) ifadeleri ile hesaplanmıştır. (Detaylar için Ek C ye bakınız).

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= A(x)^{-1} \frac{d\mathbf{n}_2}{dx} \cdot \mathbf{n}_3 \\ \kappa_2 &= A(x)^{-1} \frac{d\mathbf{n}_1}{dx} \cdot \mathbf{n}_3 \\ \kappa_3 &= A(x)^{-1} \frac{d\mathbf{n}_1}{dx} \cdot \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (19)$$

4. KESİT TESİRLERİNİN HESABI

Uzay konumda kesit momentleri (19) denklemleri ile verilen eğrilikler ve kesit rijitlikleri kullanılarak (20) denklemleri ile hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} M_1 &= GI_1\kappa_1(x) \\ M_2 &= -EI_2\kappa_2(x) \\ M_3 &= EI_3\kappa_3(x) \end{aligned} \quad (20)$$

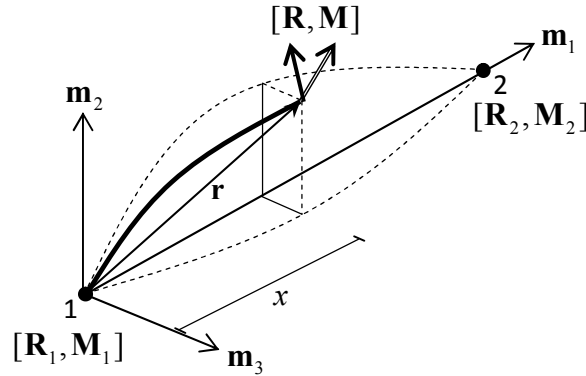
Eksenel kuvvet ve kesme kuvvetleri kesit asal eksenleri doğrultularında (21) ifadeleri ile hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} T_1 &= EA \frac{S - S^0}{S^0} \\ T_2 &= -A(x)^{-1} \frac{dM_3}{dx} \\ T_3 &= A(x)^{-1} \frac{dM_2}{dx} \end{aligned} \quad (21)$$

(21) denklemlerinde. Formülasyonda eksenel kuvvet eleman boyunca sabit kabul edilmiştir.

5. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Sonlu eleman denklemlerini oluşturmak için (20) ve (21) ile verilen kesit tesirleri,



Şekil 3. Eleman sol parçasının serbest cisim diyagramı

(22) denklemleri ile vektör formda ifade edilip Şekil 3. de verilen serbest cisim diyagramına uygun olarak;

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= T_i \mathbf{n}_i \\ \mathbf{M} &= M_i \mathbf{n}_i \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (22)$$

eleman uç kuvvetleri cisim dengesinden (23) ile elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= -\mathbf{R} \\ \mathbf{M}_1 &= -\mathbf{M} - \mathbf{r} \times \mathbf{R} \end{aligned} \quad (23)$$

Uç kuvvetler eleman boyunca integral edilerek sonlu eleman denklemlerinin yarısı (24) ifadesi ile oluşturulmuştur.

$$\mathbf{R}_1 = -\frac{1}{L} \int_{x=0}^L \mathbf{R} dx$$

$$\mathbf{M}_1 = -\frac{1}{L} \int_{x=0}^L (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{R}) dx$$
(24)

Tüm elemanın dengesi yazılarak sonlu eleman denklemlerinin diğer yarısı oluşturulmuştur.

$$\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1$$

$$\mathbf{M}_2 = -\mathbf{M}_1 - L\mathbf{m}_1 \times \mathbf{R}_2$$
(25)

Eleman denge denklemleri vektör formda (26) ile gösterilmiştir;

$$\mathbf{k}^T = \{\mathbf{R}_1^T, \mathbf{M}_1^T, \mathbf{R}_2^T, \mathbf{M}_2^T\}$$
(26)

6. TEĞET RİJİTLİK MATRİSİ

Teğet rijitlik matrisi \mathbf{K} , (26) vektörünün \mathbf{u} vektörüne göre gradyanı alınarak elde edilir. Bu işlem (27) ile verilen merkez farklar sayısal türevleri alınarak gerçekleştirilmiştir.

$$K_{ij} = \frac{k_i(u_k + h\delta_{jk}) - k_i(u_k - h\delta_{jk})}{2h} \quad i, j, k = 1..12$$
(27)

burada δ_{jk} Kronecker deltası olup h (28) ifadelerinde olduğu gibi seçilmiştir;

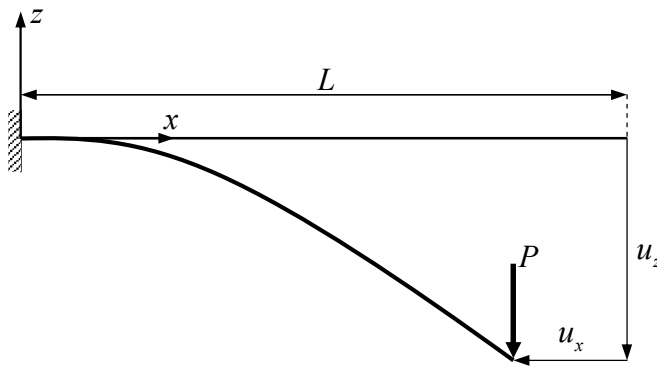
$$h = 0.001u_j \quad \Rightarrow \quad u_j \neq 0$$

$$h = 0.001 \quad \Rightarrow \quad u_j = 0$$
(28)

7. Sayısal Örnekler

7.1 Konsol kiriş ucuna tekil yükleme

Şekil 4. ile verilen konsol kiriş ve yüklemeye ait özellikler; $L=2$, 0.1×0.1 kare kesit, elastisite modülü $E = 207 \times 10^6$ ve yükleme $P = 3EI / L^2 = 1293.75$ dir.



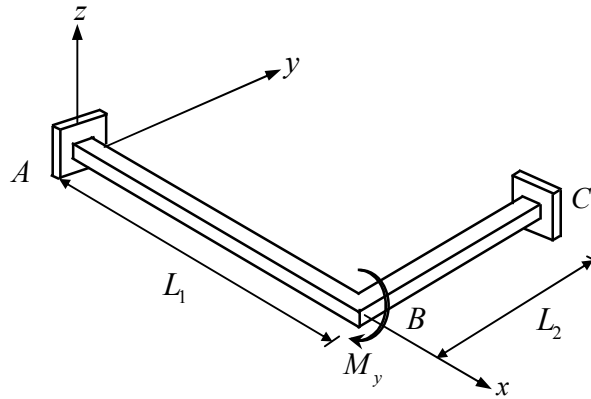
Şekil.4. Konsol kiriş ucuna tekil yükleme

Tablo 1 Konsol kiriş uç deplasmanları u_x ve u_z .

Eleman Sayısı	Bu çalışma		Jonkera and Meijaard [15]		Gerstmayr and Irschik [16]	
	u_x	u_z	u_x	u_z	u_x	u_z
1	0.528667	1.211120	0.901067	1.521304	0.362244	0.994144
4	0.508928	1.208041	0.523295	1.223753	0.507428	1.205533
8	0.508674	1.207391	0.512121	1.211296	0.508509	1.207197
16	0.508659	1.207346	0.509427	1.208249	0.508536	1.207238
32	0.508658	1.207342	0.508759	1.207492	0.508537	1.207239
Teorik [16]	0.508537	1.207239				

7.2 İki ucu ankastre L çerçeve köşesine moment yüklemesi

Şekil 5. ile verilen konsol kiriş ve yüklemeye ait özellikler: $L_1 = 1000$, $L_2 = 500$. B noktası $M_y = 2 \times 10^5$ ile yüklü. Elastisite modülü $E = 20600$ ve atalet momentleri $k_1GI_1 = 2916$, $I_2 = I_3 = 1728$.



Şekil.5. İki ucu ankastre L çerçeve

Tablo 2 L çerçeveye ait B noktası yer değiştirme ve dönmeleri.

Eleman Sayısı	u_x			u_y			u_z		
	SAP2000	ANSYS	Bu çalışma	SAP2000	ANSYS	Bu çalışma	SAP2000	ANSYS	Bu çalışma
1	-18.57	-18.19	-81.21	37.06	36.26	45.26	-188.02	-186.07	-167.65
2	-63.46	-65.76	-88.48	34.46	39.40	39.32	-156.88	-166.34	-150.71
3	-77.63	-82.55	-89.81	35.50	39.90	38.86	-150.10	-156.81	-148.62
8	-87.17	-93.34	-93.71	36.51	40.44	39.88	-145.31	-149.98	-148.29
10	-87.73	-93.97	-94.15	36.58	40.51	40.10	-145.03	-149.65	-148.49

Eleman Sayısı	θ_x			θ_y			θ_z		
	SAP2000	ANSYS	Bu çalışma	SAP2000	ANSYS	Bu çalışma	SAP2000	ANSYS	Bu çalışma
1	0.5752	0.5477	0.5941	1.3108	1.2670	0.9769	0.0203	-0.0761	-0.1544
2	0.5838	0.5241	0.5360	1.2513	1.2580	1.1090	-0.1144	-0.1286	-0.1610
3	0.5819	0.5075	0.5381	1.2394	1.2674	1.1701	-0.1543	-0.1509	-0.1626
8	0.5806	0.5055	0.5546	1.2324	1.2673	1.2273	-0.1843	-0.1668	-0.1708
10	0.5805	0.4972	0.5573	1.2320	1.2719	1.2315	-0.1860	-0.1663	-0.1719

7. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER

Bu çalışmada referans geometrisi düz olan kiriş elemanların üç boyutlu elastik büyük şekil değiştirme ve sonlu dönmeleri incelenmiştir. Referans eksenden uzay eksene dönüşüm eleman uç noktalarının kesit asal eksenleri arasında gerçekleştirilmiştir. Uzay geometriyi tanımlayan parametreler dönüştürülmüş asal eksen bileşenleri çinsinden ifade edilmek suretiyle bölge büyüklükleri ile ilgili dönüşümlerden kaçınılmıştır. Ayrıca denge denklemleri ve sonlu eleman formülasyonu direk olarak uzay geometride belirlenen serbest cisim diyagramı ile elde edilmiş, teget rijitlik matrisi sayısal olarak hesaplanmıştır. Bu bağlamda varyasyonel büyüklükler ve bu büyüklüklerin sonlu dönme dönüşümleri ile ilgili oluşacak karmaşık formülasyonlardan kaçınılmıştır. İncelenen örneklerde tek eleman performanslarının oldukça iyi olduğu söylenebilir. Ayrıca eleman sayısı arttıkça elde edilen yakınsama oranları tatmin edicidir.

Ek A. Yapışık eksen takımı

p_{i1} ve p_{i2} elemanın uç koordinatları olmak üzere;

$$L_i = p_{i2} - p_{i1}$$

$$L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2} \quad (29)$$

$$m_i = L_i / L \quad i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{m}_1^T = \{m_1, m_2, m_3\}$$

$$\mathbf{m}_2^T = \{-m_1 m_3 / B, -m_2 m_3 / B, B\}$$

$$\mathbf{m}_3^T = \{m_2 / B, -m_1 / B, 0\}$$

$$B = \sqrt{1 - m_3^2} \quad (30)$$

Ek B. Hareketli eksen takımı

$$\mathbf{n}_1^T = \frac{1}{BA} \{S_x, S_y, JB\}$$

$$\mathbf{n}_2^T = \frac{1}{BA^2 C} \{sAS_y - cJS_x, -cJS_y - sAS_x, cBA^2 C^2\}$$

$$\mathbf{n}_3^T = \frac{1}{BA^2 C} \{cAS_y + sJS_x, sJS_y - cAS_x, -sBA^2 C^2\} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
C &= A^{-1}[(1+v_3'^2) - m_3^2(1-v_2'^2) - 2Bm_3v_2']^{0.5} \\
S_x &= m_1M + m_2v_3' \\
S_y &= m_2M - m_1v_3' \\
M &= B - m_3v_2' \\
J &= m_3 + Bv_2' \\
s &= \sin(v_1) \\
c &= \cos(v_1)
\end{aligned} \tag{32}$$

Ek C. Burulma ve eğilme eğrilikleri

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= A^{-1}v_1' \\
\kappa_2 &= A^{-4}C^{-1}(cAH - sG) \\
\kappa_3 &= A^{-4}C^{-1}(sAH + cG) \\
H &= m_3D + Bv_3'' \\
G &= B(F + v_2'') - m_3E \\
D &= v_3'v_2'' - v_2'v_3'' \\
E &= v_2'v_2'' + v_3'v_3'' \\
F &= v_3'^2v_2'' - v_2'v_3'v_3''
\end{aligned} \tag{34}$$

REFERANSLAR

- [1] K.J. Bathe, S. Bolourchi, Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 14 (1979) 961–986.
- [2] E. Reissner, On one dimensional finite-strain beam theory: The plane problem, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 23 (1972) 795–804.
- [3] E. Reissner, On finite deformations of space-curved beams, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 32 (1981) 734–744.
- [4] J.C. Simo, A finite strain beam formulation: The three-dimensional dynamic problem. Part I, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49 (1985) 55–70.
- [5] J.C. Simo, L. Vu-Quoc, A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58 (1986) 79–116.
- [6] J.C. Simo, L. Vu-Quoc, On the dynamics in space of rods undergoing large motions—A geometrically exact approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 66 (1988) 125–61
- [7] A. Ibrahimbegovic, On finite element implementation of geometrically non-linear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 122 (1995) 11–26
- [8] A. Cardona, M. Geradin, A beam finite element non-linear theory with finite rotations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1988) 2403–2438.
- [9] A. Ibrahimbegovic, On the choice of finite rotation parameters, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 149 (1997) 49–71.

- [10] D. Zupan, M. Saje, The three-dimensional beam theory: Finite element formulation based on curvature, *Computers & Structures* 81 (2003) 1875–1888.
- [11] Y.X. Zhou, K.Y. Sze, A rotation-free beam element for beam and cable analyses, *Finite Elements in Analysis and Design* 64 (2013) 79–89.
- [12] J.M. Battini, A rotation-free corotational plane beam element for non-linear analyses, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 75 (2008) 672–689.
- [13] A.A. Shabana, R.A. Yakoub, Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory, *ASME Journal of Mechanical Design* 123 (2001) 606–613.
- [14] R.A. Yakoub, A.A. Shabana, Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: implementation and applications, *ASME Journal of Mechanical Design* 123 (2001) 614–621.
- [15] J.B. Jonker, J.P. Meijaard, A geometrically non-linear formulation of a three-dimensional beam element for solving large deflection multibody system problems, *International Journal of Non-Linear Mechanics*. In Press, Corrected Proof, Available online 24 January 2013.