



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

ÖN GERİLMELİ PİEZOELEKTRİK ÖRTÜ TABAKASI VE ÖN GERİLMELİ ELASTİK YARI DÜZLEMENDE OLUŞAN SİSTEMDE GENELLEŞTİRİLMİŞ RAYLEİGH DALGALARININ DİSPERSİYONU

S.D. Akbarov, İ. Kurt, S. Sezer

Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 34349, Beşiktaş, İstanbul

ABSTRACT

In this paper, generalized Rayleigh wave dispersion in a pre-stressed half-plane covered with a pre-stressed piezoelectric layer is studied using linearized wave theory.

ÖZET

Bu çalışmada doğrusallaştırılmış dalga teorisi kullanılarak ön gerilmeli piezoelektrik tabaka ile örtülü ön gerilmeli yarı düzlem ortamında genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının dispersiyonu incelenmiştir.

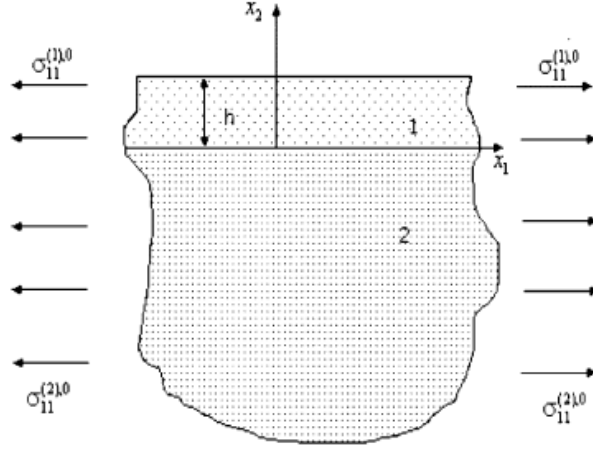
1. GİRİŞ

Ön gerilmeli tabakalı ortamlarda yüzeysel dalgaların yayılmasının incelenmesi teorik ve pratik açıdan çok önemlidir. Bu konuda son yıllarda yapılan araştırmaların özeti [1] makalesinde verilmektedir. Bu makalede aynı zamanda ön gerilmeli tabakalı ortamda ön gerilmelerin yüzeysel dalgalara etkisini inceleyen sonuçlar da verilmektedir. Tabakalı ortamlarda elastodinamik klasik lineer teorisi çerçevesinde yapılan incelemelerden ilkini Tolstoy ve Usdin [2] yapmıştır. [2]'de elde edilen araştırmaların geniş açıklaması ise [3] monografisinde verilmektedir. [4] makalesinde yarı düzlem ve piezoelektrik örtü tabakasından oluşan bir sistemde yüzeysel dalgaların dispersiyonu incelenmiştir. Bu incelemeler klasik elektroelastik denklemler çerçevesinde yapılmıştır.

Bu makalede ise piezoelektrik tabaka ile örtülmüş ön gerilmeli yarı düzlemde yüzeysel dalgaların yayılması incelenmektedir. Bu incelemeler ön gerilmeli ortamlarda doğrusallaştırılmış elastik dalga yayılımı teorisi çerçevesinde yapılmaktadır. Örtü tabakasına ait bağıntılar lineer piezoelektrik teoriyle, yarı düzlem ortamın malzemesinin elastisite bağıntıları ise Murnaghan potansiyeli ile verilmektedir. İncelemeler sonucunda piezoelektrik tabakadaki piezoelektrik sabitlerinin ve aynı zamanda yarı düzlemdeki ön gerilmelerin ve üçüncü mertebeden elastik sabitlerinin dalga yayılım hızına veya dalga dispersiyonuna etkisi incelenmektedir.

2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU

Bu makalede, ön gerilmeli piezoelektrik örtü tabakasından ve ön gerilmeli yarı düzlemden oluşmuş bir sistemde genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının dispersiyonu incelenmiştir. İncelemeler [1] çalışmasında olduğu gibi parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Tabakaya ait büyüklükler üst (1), yarı düzleme ait büyüklükler ise üst (2) indisi ile gösterilmiştir. Örtü tabakası ve yarı düzlem sırasıyla $\{-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq h, -\infty < x_3 < +\infty\}$ ve $\{-\infty < x_1 < +\infty, -\infty \leq x_2 \leq 0, -\infty < x_3 < +\infty\}$ bölgelerini kapsamaktadır (Şekil 1).



Şekil 1. Ön Gerilmeli Piezoelektrik Örtü Tabakası ve Ön Gerilmeli Elastik Yarı Düzlemden Oluşan Sistem

Düzlem şekil değiştirme durumu ele alınarak tabaka ve yarı düzlemde Ox_1 eksenine doğrultusunda etki gösteren homojen yayılı normal ön gerilmeler

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1),0} &= \text{sabit}_1 \neq 0, \quad \sigma_{12}^{(1),0} = \sigma_{22}^{(1),0} = 0 \\ \sigma_{11}^{(2),0} &= \text{sabit}_2 \neq 0, \quad \sigma_{12}^{(2),0} = \sigma_{22}^{(2),0} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

biçiminde verilmektedir.

Problem genelliği için yarı düzlem malzemesinin de piezoelektrik olduğu düşünüldüğünde alan denklemleri aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} &= \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(m)}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} &= \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial D_1^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2^{(m)}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Piezoelektrik malzemenin Ox_2 eksenine doğrultusunda polarize edildiği varsayılırsa bünye denklemleri

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(1)} &= c_{11}u_{1,1}^{(1)} + c_{13}u_{2,2}^{(1)} + e_{31}\phi_{,2} \\
\sigma_{22}^{(1)} &= c_{13}u_{1,1}^{(1)} + c_{33}u_{2,2}^{(1)} + e_{33}\phi_{,2} \\
\sigma_{12}^{(1)} &= c_{44}(u_{1,2}^{(1)} + u_{2,1}^{(1)}) + e_{15}\phi_{,1} \\
D_1 &= e_{15}(u_{1,2}^{(1)} + u_{2,1}^{(1)}) - \varepsilon_{11}\phi_{,1} \\
D_2 &= e_{31}u_{1,1}^{(1)} + e_{33}u_{2,2}^{(1)} - \varepsilon_{33}\phi_{,2}
\end{aligned} \tag{3}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada c, e ve ε katsayıları sırasıyla elastik, piezoelektrik ve dielektrik sabitleri; D_i elektrik yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri; ϕ elektrik potansiyeli; u_i mekanik yerdeğiştirme vektörünün bileşenleridir.

Sayısal incelemeler yalnızca piezoelektrik tabaka ve elastik yarı düzlem için yapıldığından temas koşulları aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$u_1^{(1)}\Big|_{x_2=0} = u_1^{(2)}\Big|_{x_2=0}, \quad u_2^{(1)}\Big|_{x_2=0} = u_2^{(2)}\Big|_{x_2=0}, \quad \sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=0} = \sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=0}, \quad \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=0} \tag{4}$$

$$\phi^{(1)}\Big|_{x_2=0} = 0 \tag{5}$$

Hiçbir dış etkinin olmadığı kabul edilen tabakanın dış yüzeyi üzerindeki sınır koşulları:

$$\sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=h} = 0, \quad \phi\Big|_{x_2=h} = 0 \tag{6}$$

Yarı düzlemde aşağıdaki sönüm koşulları da sağlanmıştır:

$$\sigma_{ij}^{(2)} \xrightarrow{x_2 \rightarrow -\infty} 0, \quad u_i^{(2)} \xrightarrow{x_2 \rightarrow -\infty} 0, \quad i, j = 1, 2 \tag{7}$$

3. PROBLEMİN ÇÖZÜM YÖNTEMİ

3.1 Piezoelektrik Tabakanın Dalga Hareket Denklemlerinin Çözümü

Dalga yayılımının x_1 yönünde olduğu kabul edilirse mekanik yerdeğiştirme ve elektrik potansiyeli

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= Ae^{bkx_2} \sin(kx_1 - \omega t) \\
u_2^{(1)} &= Be^{bkx_2} \cos(kx_1 - \omega t) \\
\phi &= Ce^{bkx_2} \cos(kx_1 - \omega t)
\end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A, B ve C sabitler, k dalga sayısı, ω açısal frekans, b belirlenecek parametredir.

(3)'teki denklemleri (2)'deki denklemlere yazarak mekanik yerdeğiştirmeler ve elektrik potansiyeli cinsinden elektromekanik hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
(c_{11} + \sigma_{11}^{(1,0)})u_{1,11}^{(1)} + c_{44}u_{1,22}^{(1)} + (c_{13} + c_{44})u_{2,12}^{(1)} + (e_{15} + e_{31})\phi_{,12} &= \rho^{(1)}\ddot{u}_1^{(1)} \\
(c_{13} + c_{44})u_{1,12}^{(1)} + (c_{44} + \sigma_{11}^{(1,0)})u_{2,11}^{(1)} + c_{33}u_{2,22}^{(1)} + e_{15}\phi_{,11} + e_{33}\phi_{,22} &= \rho^{(1)}\ddot{u}_2^{(1)} \\
(e_{15} + e_{31})u_{1,12}^{(1)} + e_{15}u_{2,11}^{(1)} + e_{33}u_{2,22}^{(1)} - \varepsilon_{11}\phi_{,11} - \varepsilon_{33}\phi_{,22} &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

(8)'deki ifadeleri (9)'daki denklemlere yazarak b 'nin belirlenmesi için aşağıdaki denklemler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
& \left(c_{11} + \sigma_{11}^{(1),0} - c_{44}b^2 - \rho^{(1)} \frac{\omega^2}{k^2} \right) A + (c_{13} + c_{44})bB + (e_{15} + e_{31})bC = 0 \\
& (c_{13} + c_{44})bA - \left(c_{44} + \sigma_{11}^{(1),0} - c_{33}b^2 - \rho^{(1)} \frac{\omega^2}{k^2} \right) B - (e_{15} - e_{33}b^2)C = 0 \\
& (e_{15} + e_{31})bA - (e_{15} - e_{33}b^2)B - (\varepsilon_{33}b^2 - \varepsilon_{11})C = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

A, B ve C sabitlerinin sıfır olmayan çözümü katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasını gerektirir. Bir $c = \omega/k$ değeri için 6 adet b kökü vardır ve bunlar piezoelektrik örtü tabakasında yayılan dalga bileşenlerini temsil eder.

3.2 Elastik Yarı Düzlemin Dalga Hareket Denklemlerinin Çözümü

Yarı düzlemin bünye denklemleri Murnaghan potansiyeli ile verilmiştir:

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda (A_1)^2 + \mu A_2 + \frac{a}{3} (A_1)^3 + b A_1 A_2 + \frac{c}{3} A_3 \tag{11}$$

Burada, λ ve μ Lamé sabitleri, a, b ve c üçüncü mertebeden elastik sabitler, A_1, A_2 ve A_3 sırasıyla Green şekil değiştirme tansörünün birinci, ikinci ve üçüncü invariyanlarıdır. Bu invariyanlar aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \\
A_2 &= (\varepsilon_{11})^2 + 2(\varepsilon_{12})^2 + (\varepsilon_{22})^2 \\
A_3 &= (\varepsilon_{11})^3 + 3(\varepsilon_{12})^2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\varepsilon_{22})^3
\end{aligned} \tag{12}$$

Burada:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right) \tag{13}$$

Gerilme tansörü bileşenlerinin Φ (11) potansiyeli ve (13) şekildeğiştirmelerle olan

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \Phi \tag{14}$$

ifadesini doğrusallaştırırsak, yarı düzlem için lineerleştirilmiş bünye denklemleri

$$\sigma_{11}^{(2)} = A_{11}\varepsilon_{11}^{(2)} + A_{12}\varepsilon_{22}^{(2)}, \quad \sigma_{22}^{(2)} = A_{12}\varepsilon_{11}^{(2)} + A_{22}\varepsilon_{22}^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(2)} = 2\mu_{12}\varepsilon_{12}^{(2)} \tag{15}$$

şeklinde elde edilir. Burada:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \lambda + 2\mu + \frac{1}{\mu}(2b+c)\sigma_{11}^{(2),0} + \frac{2\sigma_{11}^{(2),0}}{2K_0} \left[(a+b) - (2b+c) \frac{\lambda}{2\mu} \right] \\
A_{22} &= \lambda + 2\mu + \frac{2\sigma_{11}^{(2),0}}{3K_0} \left[(a+b) - (2b+c) \frac{\lambda}{2\mu} \right] \\
A_{12} &= \lambda + \frac{b}{\mu}\sigma_{11}^{(2),0} + \frac{2\sigma_{11}^{(2),0}}{3K_0} \left[(a-b) \frac{\lambda}{\mu} \right] \\
\mu_{12} &= \mu + \frac{b\sigma_{11}^{(2),0}}{3K_0} + \frac{c\sigma_{11}^{(2),0}}{4\mu} + \frac{\lambda + 2\mu}{3K_0}
\end{aligned} \tag{16}$$

Dalga yayılımının x_1 yönünde olduğu kabul edilerek mekanik yerdeğiştirmeler

$$\begin{aligned}
u_1^{(2)} &= \varphi_1^{(2)}(x_2) \sin(kx_1 - \omega t) \\
u_2^{(2)} &= \varphi_2^{(2)}(x_2) \cos(kx_1 - \omega t)
\end{aligned} \tag{17}$$

şeklinde ifade edilmiştir. (1), (2) ve (15)-(17) kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \varphi_1^{(2)}}{d(kx_2)^2} + b_{21} \varphi_1^{(2)} + c_{21} \frac{d \varphi_2^{(2)}}{d(kx_2)} &= 0 \\
\frac{d^2 \varphi_2^{(2)}}{d(kx_2)^2} + b_{22} \varphi_2^{(2)} + c_{22} \frac{d \varphi_1^{(2)}}{d(kx_2)} &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

Burada:

$$\begin{aligned}
b_{21} &= -\frac{A_{11}}{\mu_{12}} - \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{\mu_{12}} + \frac{\rho^{(2)} \omega^2}{\mu_{12} k^2}, \quad c_{21} = \frac{-A_{12} - \mu_{12}}{\mu_{12}} \\
b_{22} &= -\frac{\mu_{12}}{A_{22}} - \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{A_{22}} + \frac{\rho^{(2)} \omega^2}{A_{22} k^2}, \quad c_{22} = \frac{A_{12} + \mu_{12}}{A_{22}}
\end{aligned} \tag{19}$$

Denklemler düzenlendikten sonra $\varphi_1^{(2)}$ ve $\varphi_2^{(2)}$ için aşağıdaki denklemler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \varphi_2^{(2)}}{d(kx_2)^4} + B_2 \frac{d^2 \varphi_2^{(2)}}{d(kx_2)^2} + C_2 \varphi_2^{(2)} &= 0 \\
\frac{d^4 \varphi_1^{(2)}}{d(kx_2)^4} + B_2 \frac{d^2 \varphi_1^{(2)}}{d(kx_2)^2} + C_2 \varphi_1^{(2)} &= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Burada:

$$B_2 = b_{21} + b_{22} - c_{21}c_{22}, \quad C_2 = b_{21}b_{22} \tag{21}$$

(19)'daki denklemlerin çözümleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{(2)}(x_2) &= Y_1 e^{R_1 k x_2} + Y_2 e^{R_2 k x_2} \\
\varphi_2^{(2)}(x_2) &= Z_1 e^{R_1 k x_2} + Z_2 e^{R_2 k x_2}
\end{aligned} \tag{22}$$

Burada:

$$R_1 = \sqrt{-\frac{B_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{B_2}{2}\right)^2 - C_2}}, R_2 = \sqrt{-\frac{B_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{B_2}{2}\right)^2 - C_2}} \quad (23)$$

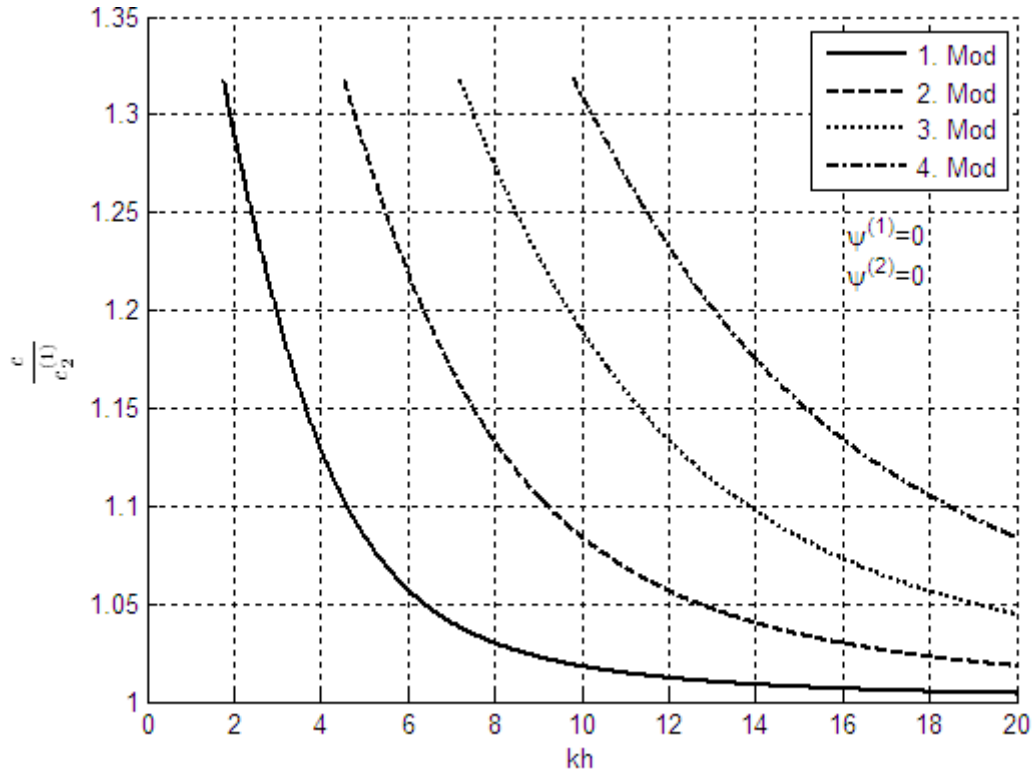
Yukarıdaki çözümleri kullanarak (4)-(7)'den uygun dispersiyon denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemin nümerik çözümü sonucunda dispersiyon eğrileri bulunmuş ve problem parametrelerinin bu eğrilere etkisi incelenmiştir.

4. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Tablo 1. PZT ve alüminyum malzeme özellikleri [4]

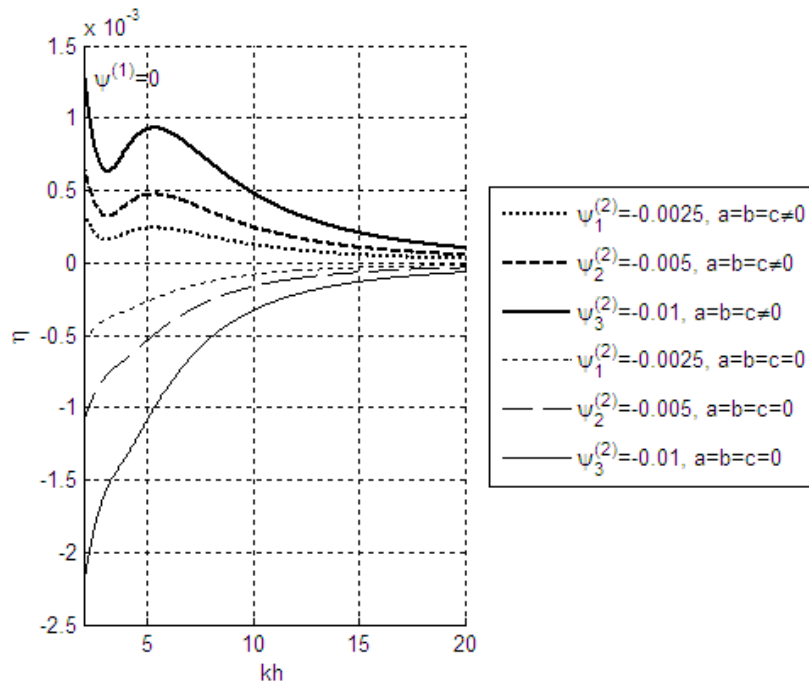
	PZT	Alüminyum
ρ ($\times 10^3$ kg/m ³)	7.5	2.7
c_{11} ($\times 10^{10}$ N/m ²)	13.2	10.2
c_{33} ($\times 10^{10}$ N/m ²)	11.5	10.2
c_{44} ($\times 10^{10}$ N/m ²)	2.6	2.6
c_{13} ($\times 10^{10}$ N/m ²)	7.3	5.0
e_{15} (C/m ²)	10.5	-
e_{33} (C/m ²)	14.1	-
e_{31} (C/m ²)	-4.1	-
ϵ_{11} ($\times 10^{-9}$ F/m)	7.1	-
ϵ_{33} ($\times 10^{-9}$ F/m)	5.8	-
a ($\times 10^5$ Mpa)	-	3.08
b ($\times 10^5$ Mpa)	-	-0.49
c ($\times 10^5$ Mpa)	-	-2.92
λ ($\times 10^4$ Mpa)	-	5.0
μ ($\times 10^4$ Mpa)	-	2.6

Tablo 1'de verilen malzeme özellikleri kullanılarak ön gerilmemiş ve ön gerilmeli durumlarda ilk dört moda ait dispersiyon eğrileri ayrı ayrı bulunmuştur. Bu amaçla piezoelektrik örtü tabakası ile yarı düzlemden oluşan sistemin dispersiyon eğrilerine ait ilk dört mod Şekil 2'de gösterilmekte olup sonuçlar [4] makalesinde elde edilen sonuçlarla çakışmaktadır. Bu çakışma sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanılan program ve algoritmanın doğru olduğunu göstermektedir. Şekil 2'de $c = \omega/k$ olmak üzere dalga yayılım hızını $c_2^{(1)} = \sqrt{(c_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11})/\rho^{(1)}}$ ise piezoelektrik örtü tabakasına ait enine dalga yayılım hızını göstermektedir.



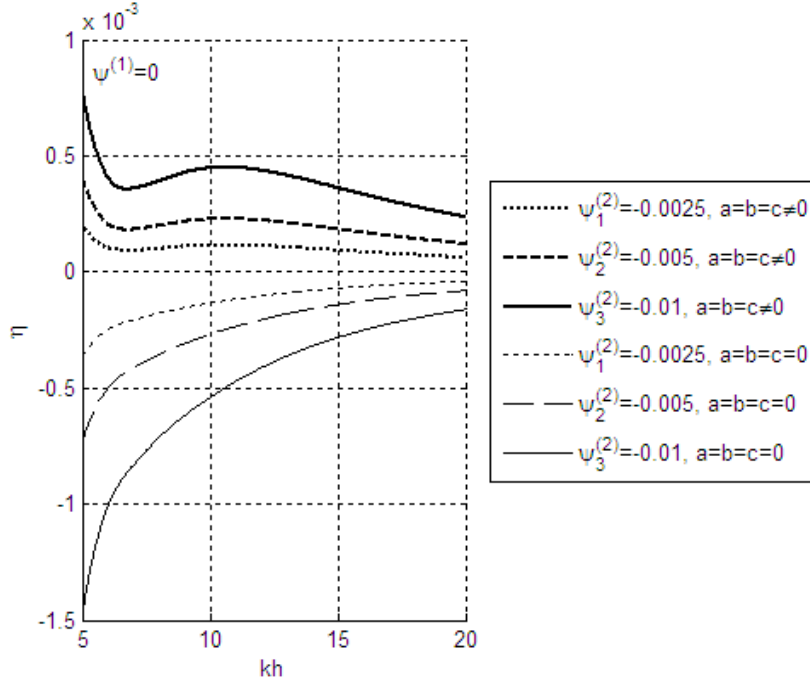
Şekil 2. İlk dört moda ait dispersiyon eğrileri

$\psi^{(1)} = \sigma_{11}^{(1),0}/c_{44}$ ve $\psi^{(2)} = \sigma_{11}^{(2),0}/\mu$ boyutsuz parametreleri ve $\eta = (\bar{c} - c)/c$ notasyonu kullanılmaktadır. Burada c ön gerilmemiş durumdaki dalga yayılım hızını ve \bar{c} ise ön gerilmeli durumdaki dalga yayılım hızını göstermektedir.

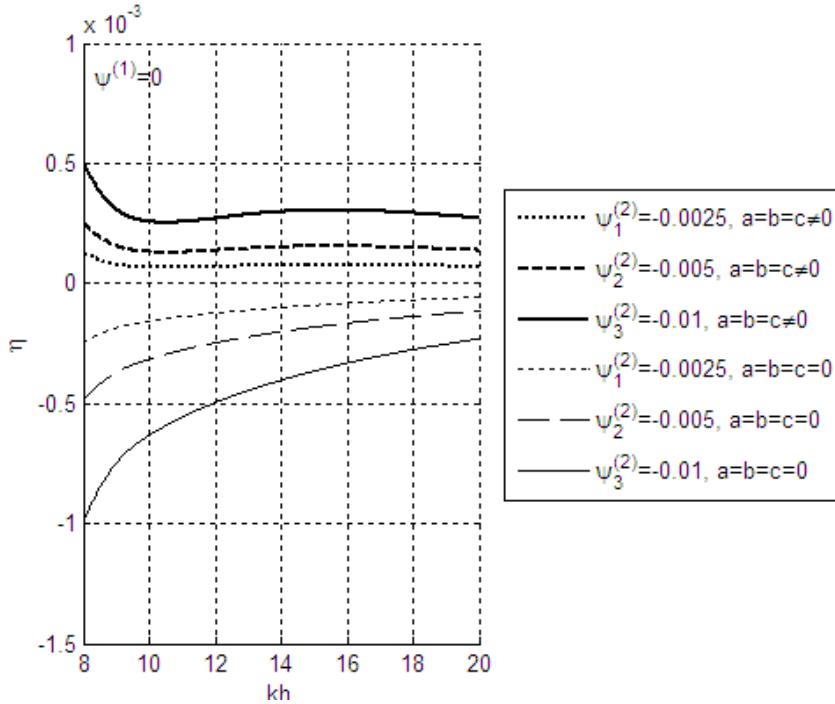


Şekil 3. Yarı düzleme etkileyen basınç ön gerilmesinin 1. Moda ait dispersiyon eğrisine etkisi

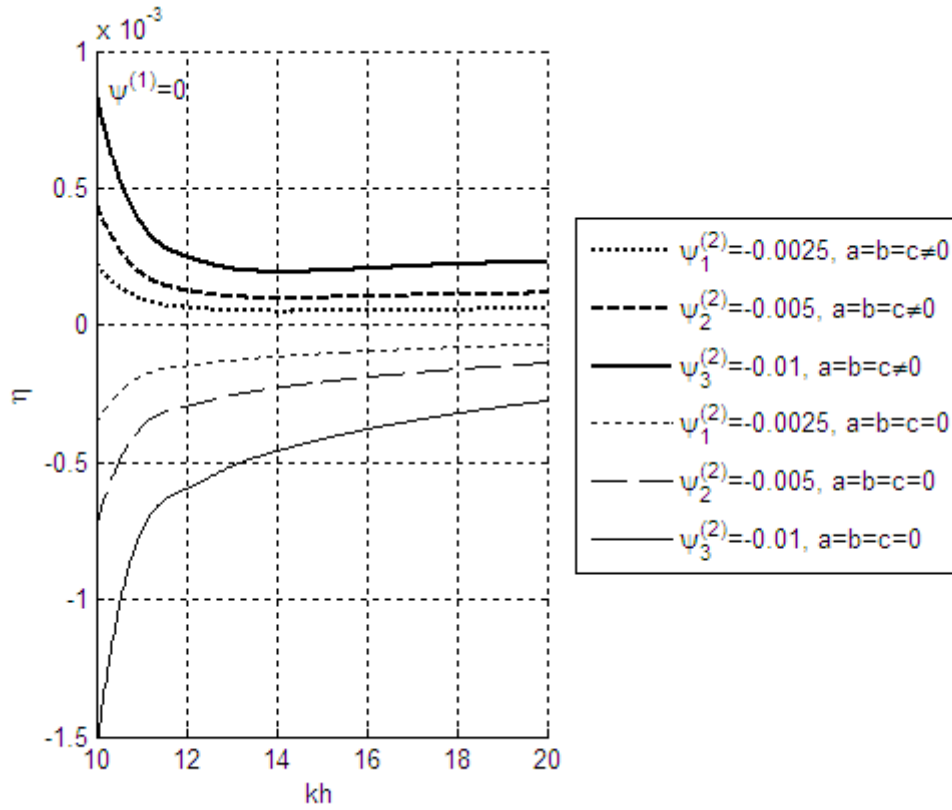
Şekil 3-6 yarı düzlemdeki basınç ön gerilmelerin sistemin ön gerilmemiş durumundaki ilk dört moda ait dalga dispersiyon eğrilerine etkilerini göstermektedir. Bu şekillerde kalın çizgiler yarı düzlem malzemesinin üçüncü mertebeden elastik sabitlerinin göz önüne alındığı duruma karşılık gelmekte olup genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının hızının arttığını, ince çizgiler ise üçüncü mertebeden elastik sabitlerinin göz önüne alınmadığı duruma karşılık gelmekte olup genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının hızının azaldığını göstermektedir.



Şekil 4. Yarı düzleme etkiyen basınç ön gerilmesinin 2. Moda ait dispersiyon eğrisine etkisi



Şekil 5. Yarı düzleme etkiyen basınç ön gerilmesinin 3. Moda ait dispersiyon eğrisine etkisi



Şekil 6. Yarı düzleme etkileyen basınç ön gerilmesinin 4. Moda ait dispersiyon eğrisine etkisi

5. SONUÇ

Yapılan çalışmada, homojen yayılı normal ön gerilmelerin yarı düzlem ve piezoelektrik örtü tabakasından oluşan sisteme ait dispersiyon eğrilerine etkisi incelenmiştir. Sonuç olarak yarı düzlemdeki basınç ön gerilmeleri yarı düzleme ait üçüncü merteye elastik sabitler göz önüne alındığında Rayleigh dalgalarının yayılma hızını artırır, üçüncü merteye elastik sabitler göz önüne alınmadığında ise Rayleigh dalgalarının yayılma hızını azaltır.

KAYNAKLAR

- [1] Akbarov, S.D., Ozisik, M., “The Influence of the Third Order Elastic Constants to the Generalized Rayleigh Wave Dispersion in a Pre-stressed Stratified Half-plane”, International Journal of Engineering Science, 41, 2047-2061, 2003.
- [2] Tolstoy, I., Usdin, E., “Dispersive properties of stratified elastic and liquid media: A ray theory”, Geophysics, 18, 844–870, 1953.
- [3] Eringen, A.C., Suhubi, E.S., “Elastodynamics, Volume II, Linear Theory”, Academic Press, 1975.
- [4] Jin, J., Wang, Q., Quek, S.T., “Lamb Wave Propagation in a metallic Semi-infinite Medium Covered with Piezoelectric Layer”, International Journal of Solids Structures, 39, 2547-2556, 2002.