



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## ANTI-SİMETRİK TABAKALANMIŞ VİSKOELASTİK KALIN PLAKLARIN LAPLACE UZAYINDA DİNAMİK ANALİZİ

Mehmet Fatih Sahan<sup>1\*</sup> ve Beytullah Temel<sup>2†</sup>

<sup>1</sup>Adıyaman Üniversitesi, Adıyaman

<sup>2</sup>Çukurova Üniversitesi, Adana

### ÖZET

Bu çalışmada ortotropik malzemeye sahip anti-simetrik tabakalanmış viskoelastik kalın plakların dinamik davranışları sonlu elemanlar metodu (SEM) yardımıyla Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Anti-simetrik olarak tabakalanmış kalın plakların formülasyonunda, birinci mertbe kayma deformasyon teorisi (BKDT) dikkate alınmıştır. Sistemi idare eden hareket denklemi sonlu elemanlar ile zaman uzayında elde edilmiştir. Ardından, hareket denkleminde Laplace dönüşümü uygulanarak elde edilen lineer cebrik denklem takımı sayısal olarak çözülmüştür. Plak malzemesinin ortotropik, lineer elastik veya viskoelastik olduğu kabul edilmiştir. Viskoelastik malzeme durumunda Kelvin sönüm modeli kullanılmıştır. Elastisite modülü, elastik-viskoelastik analogisi yardımıyla, Laplace uzayında kompleks karşılıkları ile yer değiştirmektedir. Dönüşmüş uzayda elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm metodu kullanılmıştır. Bu çalışmada, SEM ile elde edilen hareket denklemlerine Laplace dönüşümü uygulanması ve ardından Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi uygulanması ile oldukça etkin ve doğru sonuçlar bulunabildiği literatürdeki çeşitli sayısal yöntemler ile karşılaştırılarak gösterilmiştir.

### 1. GİRİŞ

Modern teknolojinin her alanda kullanılması her türlü ihtiyaca cevap verebilecek özellikteki malzemelerin tasarlanması gerekliliğini doğurmuştur. Bunun sonucunda yapılan çalışmalar ile kimyasal bileşenleri farklı iki ya da daha fazla malzemenin makro seviyede birleştirilmesi sayesinde kendisini oluşturan malzemelerin üstün özelliklerine sahip karma yapılar geliştirilmiştir. Kompozit malzemeler mühendislik alanlarının tümünde çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Tabakalı kompozit plakların maruz kaldığı etkilerin büyük çoğunluğunun dinamik etkiler olduğu dikkate alındığında, bu malzemelerin statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesinin hayati önem taşıdığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle araştırmacılar değişik sınır şartları ve çeşitli dinamik yükler etkisi altında oluşacak deplasman ve gerilmelerin zamana bağlı değişimlerini doğru tahmin etmeye çalışmış ve bu alanda pek çok araştırma

\*Yrd. Doç. Dr., İnşaat Mühendisliği Bölümü, E-posta: mfs@adiyaman.edu.tr

† Doç. Dr., İnşaat Mühendisliği Bölümü, E-posta: btemel@cu.edu.tr

yapmışlardır.

Pek çok araştırmacı tabakalı kompozit plakların dinamik yükler etkisi altındaki analizlerine yönelik analitik çözümler geliştirmişlerdir [1-5]. Karmaşık geometri ve yük durumları için problemlerin kapalı çözümlerinin elde edilmesi çoğu durumda imkânsız hale gelmektedir. Tabakalı plakların dinamik analizleri için kullanılabilen pek çok yaklaşık yöntem mevcut olup, bunların değişik geometri ve yüklemelere sahip problemlere uygulanması oldukça fazla zaman almaktadır. Bunun yerine problemi bilgisayar yardımıyla sayısal olarak çözen sonlu farklar, sınır eleman ve sonlu elemanlar metotları gibi çok sayıda metot bulunmaktadır. Bu çalışmada sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. SEM kullanılarak elde edilen sistemi idare eden hareket denklemi çeşitli sayısal yöntemlerle çözülmektedir. Zamana bağlı diferansiyel denklem takımının çözümü genellikle direk integrasyon yöntemleri, modal analiz yöntemi veya sayısal operasyon yöntemleri yardımı ile yapılmaktadır. Literatürde tabakalı plakların dinamik analizlerinde direk integrasyon metodlarının kullanıldığı pek çok çalışma bulunmaktadır [6-10]. Bazı araştırmacılar kompozit plakların zorlanmış titreşimleri için modal analizi kullanmışlardır [11-12]. Literatürde tabakalı kalın plakların dinamik analizlerine yönelik pek çok çalışma bulunurken, bunların çok azında sayısal operasyon yöntemleri kullanılmıştır [13-16].

Literatür araştırmaları neticesinde tabakalı kalın plakların Fourier uzayındaki analizlerine yönelik çalışmaların çok kısıtlı olduğu görülmüştür. Ancak yazarların bilgisine göre, tabakalı kalın plakların sonlu elemanlar metodu kullanılarak Laplace uzayında viskoelastik analizine yönelik çalışmalar yok denecek kadar azdır.

Bu çalışmada tabakalı kalın plakların viskoelastik analizlerine yönelik olarak, çok etkin ve aynı zamanda çok basit bir çözüm metodu önerilecektir. Yapılan çalışmada, viskoelastik malzemeye sahip, ortotropik tabakalı kalın plakların dinamik davranışları birinci mertebeye kayma deformasyon teorisine (BKDT) dikkate alınarak SEM yardımıyla Laplace dönüşüm uzayında araştırılmıştır. Sistemi idare eden hareket denklemi, her düğümde 5 serbestlik derecesine sahip 8 düğümlü sonlu elemanlar kullanılarak zaman uzayında elde edilmiştir. Sonlu elemanlara ait rijitlik ve kütle matrisleri ile yük vektörleri Gauss sayısal integrasyon metodu yardımıyla, rijitlik matrislerinin oluşturulmasında kayma kilitlenmesinin önlenmesi amacıyla eğilme terimleri için (3x3), kayma terimleri için (2x2) Gauss noktası kullanılarak, hesaplanmıştır. Elde edilen sistem hareket denklemi Laplace dönüşümü yardımıyla lineer cebrik takıma dönüştürülmüş ve Gauss eliminasyon metodu ile Laplace uzayında çözülmüştür. Plak malzemesinin lineer elastik veya viskoelastik olduğu kabul edilmiştir. Viskoelastik malzeme durumunda Kelvin sönüm modeli kullanılmaktadır. Kelvin sönüm modelinde elastik sabitler, elastik-viskoelastik analogisi yardımıyla, Laplace dönüşüm uzayında kompleks karşılıkları ile yer değiştirmektedir. Laplace parametresine bağlı çözümlere ters Laplace dönüşüm uygulanarak zamana bağlı çözümler elde edilebilmektedir [17-19]. Elde edilen çözümlerin Laplace uzayından zaman uzayına dönüşümü için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace metodu kullanılmıştır. Bu çalışmada, SEM ile elde edilen hareket denklemlerine Laplace dönüşümü uygulanması ve ardından Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi uygulanması ile oldukça etkin ve doğru sonuçlar bulunabildiği Newmark adım adım integrasyon yöntemi ile karşılaştırılarak gösterilmiştir.

## 2. TEORİ VE FORMÜLASYON

### 2.1. Kinematik

BKDT'ye göre yerdeğiştirme bileşenleri aşağıdaki şekilde tarif edilmektedir.

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) \\
v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) \\
w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
\end{aligned} \tag{1}$$

Burada  $(u, v, w)$ , tabakalı plakta herhangi bir  $(x, y, z)$  noktadaki yer değiştirmelerdir.  $u_0$  ve  $v_0$  orta düzlemin  $x$  ve  $y$  yönlerindeki yer değiştirmeleri,  $w_0$  ise orta düzlemin plak düzlemine dik olan yer değiştirmesidir.  $\phi_x$  ve  $\phi_y$  ise, sırasıyla,  $y$  ve  $x$  eksenleri etrafındaki dönmeleri ifade eder. (1) ifadesinde verilen yer değiştirme ilişkisi ortotropik bir plak için BKDT'ye göre yapılan kabuller ve her noktada  $(w_0, \phi_x, \phi_y)$  serbestlikleri dikkate alınarak elde edilen birim deformasyonlarda yerlerine konursa aşağıdaki ilişkiler elde edilir.

$$\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T, \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_p + \underline{\varepsilon}_f, \quad \underline{\gamma} = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^T \tag{2}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}_p &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^T = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\}^T \\
\underline{\varepsilon}_f &= z \underline{\kappa} = z \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\}^T = z \left\{ \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right\}^T \\
\underline{\gamma} &= \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^T = \left\{ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y, \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right\}^T
\end{aligned} \tag{3}$$

olarak tarif edilmektedir.

## 2.2 Temel Denklemler

Tabakalı kompozit plakta, orta düzlemden “ $z$ ” kadar uzaklıkta herhangi bir tabakadaki gerilmeleri veren denklem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Burada  $\bar{Q}_{ij}$  katsayılar matrisi, plak eksenlerine  $(x, y, z)$  göre dönüşüme uğramış indirgenmiş rijitlik matrisi olarak adlandırılır. Bu matrise ait terimler ayrıntılı olarak ilgili kaynakta verilmektedir [20].

## 2.3. Virtüel Yer Değiştirme

Dinamik yükleme durumunda virtüel yer değiştirme ilkesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\int_0^t ((\delta U + \delta V) - \delta K) dt = 0 \tag{7}$$

Burada  $t$  zamana ait limit olup,  $\delta U$  virtüel şekil değiştirme enerjisini,  $\delta V$  dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işi,  $\delta T$  ise sistemin virtüel kinetik enerjisini ifade eder. Virtüel şekil değiştirme enerjisi, dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş ve virtüel kinetik enerji ifadeleri tabakalı plak için BKDT'ye göre elde edilerek (7) ifadesinde yerlerine yazılırsa, virtüel işi veren ifade aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\int_0^t \left( \int_A \{ N_{xx} \delta \varepsilon_{x0} + N_{yy} \delta \varepsilon_{y0} + N_{xy} \delta \gamma_{xy0} + M_{xx} \delta \kappa_x + M_{yy} \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_{yz} \delta \gamma_{yz} + Q_{xz} \delta \gamma_{xz} - q \delta w_0 - I_0 (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) + I_1 (\ddot{\phi}_x \delta u_0 + \ddot{\phi}_y \delta v_0 + \ddot{u}_0 \delta \phi_x + \ddot{v}_0 \delta \phi_y) - I_2 (\ddot{\phi}_x \delta \phi_x + \ddot{\phi}_y \delta \phi_y) \} dA \right) dt = 0 \quad (8)$$

Burada  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  plak enkesitinin birim genişliğine etkiyen normal kuvvetlerdir.  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$  ve  $Q_{xz}$ ,  $Q_{yz}$  ise sırasıyla, plak enkesitinin birim genişliğine etkiyen momentler ve kesme kuvvetleri olup gerilmelerin plak kalınlığı boyunca integre edilmesiyle elde edilir. BKDT'ye göre birim genişliğe etkiyen iç kuvvetlerin elde edilmesine yönelik ayrıntılı bilgi [20]'de verilmektedir.

#### 2.4. Sonlu Eleman Formülasyonu

BKDT'ye göre elemanın herhangi bir noktasındaki deplasmanlar,  $\{u\} = \{u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y\}^T$ , şekil fonksiyonları yardımı ile aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_0 = \sum_{i=1}^n N_i u_{0i}, \quad v_0 = \sum_{i=1}^n N_i v_{0i}, \quad w_0 = \sum_{i=1}^n N_i w_{0i}, \quad \phi_x = \sum_{i=1}^n N_i \phi_{xi}, \quad \phi_y = \sum_{i=1}^n N_i \phi_{yi} \quad (9)$$

Burada  $n$ , sonlu elemandaki düğüm sayısı olup formülasyonda 8 düğüm kullanılmaktadır. Eleman düğüm noktaları deplasman vektörü ise,  $\{d\}_e = \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \phi_{xi}, \phi_{yi}\}^T$  şeklindedir. Plagın herhangi bir noktasındaki deplasmanlar ve şekil değiştirmeler aşağıdaki şekilde tarif edilir.

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N] \{d\}_{(e)}, & \underline{\varepsilon}_{p(e)} &= [B_p] \{d\}_{(e)} \\ \underline{\varepsilon}_{f(e)} &= [B_f] \{d\}_{(e)}, & \underline{\gamma}_{(e)} &= [B_s] \{d\}_{(e)} \end{aligned} \quad (10)$$

Burada  $\{d\}_e$ , her bir elemanın yer değiştirme vektörü olup,  $[B_p]$ ,  $[B_f]$  ve  $[B_s]$  matrisleri aşağıda tanımlanmıştır.

$$[B_p] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad [B_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

BKDT'ye göre elde edilen deplasmanlar ve şekil değiştirmeler kullanılarak (8) denklemi üzerinde gerekli işlemler yapılırsa, virtüel işi veren denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\int_0^t \left[ \{\delta D\}^T \{ [M] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} - \{F\} \} \right] dt = 0 \quad (12)$$

Bu denklemde  $\{\delta D\}$  deplasman varyasyonunu keyfi olup, aşağıdaki ifade tek başına yazılabilir.

$$[M] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (13)$$

Burada  $[K]$ ,  $[M]$  ve  $\{F\}$  sırası ile sistem rijitlik matrisi, sistem kütle matrisi ve sistem yük

vektörü olup, aşağıdaki integraller yardımı ile hesaplanmaktadır.

$$[K] = \sum_e \int_{A^e} ([B_p]^T [A] [B_p] + [B_p]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_p] + [B_f]^T [D] [B_f] + [B_s]^T [A_s] [B_s]) dA \quad (14)$$

$$[M] = \sum_e \int_{A^e} [N]^T [m^*] [N] dA \quad (15)$$

$$\{F\} = \sum_e \int_{A^e} [N]^T \{q\} dA \quad (16)$$

Burada,  $[m^*]$  ve  $[N]$  matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$[m^*] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad [N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (17)$$

## 2.5. Sistem Hareket Denkleminin Laplace Dönüşümü

Zamana bağlı (13) denklemin Laplace dönüşüm uygulanırsa, aşağıdaki cebrik denklem takımı elde edilir.

$$[\bar{D}]\{\bar{U}\} = \{\bar{F}\} + \{\bar{F}_0\} \quad (18)$$

Burada  $[\bar{D}]$ , dönüşmüş uzayda dinamik rijitlik matrisi,  $\{\bar{U}\}$  ve  $\{\bar{F}\}$  sırasıyla dönüşmüş uzayda sistem düğüm deplasman ve yük vektörleri olup,  $\{\bar{F}_0\}$  ise başlangıç koşulları nedeniyle yük vektörüne gelen katkı olarak tanımlanır.  $[\bar{D}]$  ve  $\{\bar{F}_0\}$  aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[\bar{D}] = [K] + z^2 [M] \quad (19)$$

$$\{\bar{F}_0\} = z [M] \{U(0)\} + [M] \{\dot{U}(0)\} \quad (20)$$

Burada  $z$ , Laplace dönüşüm parametresi olup,  $\{U(0)\}$  ve  $\{\dot{U}(0)\}$  başlangıç deplasman ve hız vektörleridir. Bu çalışmada başlangıç deplasman ve hız vektörleri sıfır alınmıştır.

## 2.6. Sönüm Etkisi

Kelvin tipi sönüm modeli için viskoelastik çözüm, elastik-viskoelastik analogisi yardımıyla, Laplace dönüşüm uzayında elastik sabitlerin kompleks karşılıkları ile yer değiştirmesinden elde edilmektedir [21-22].

$$E_v = E(1 + g z), \quad G_v = G(1 + g z) \quad (21)$$

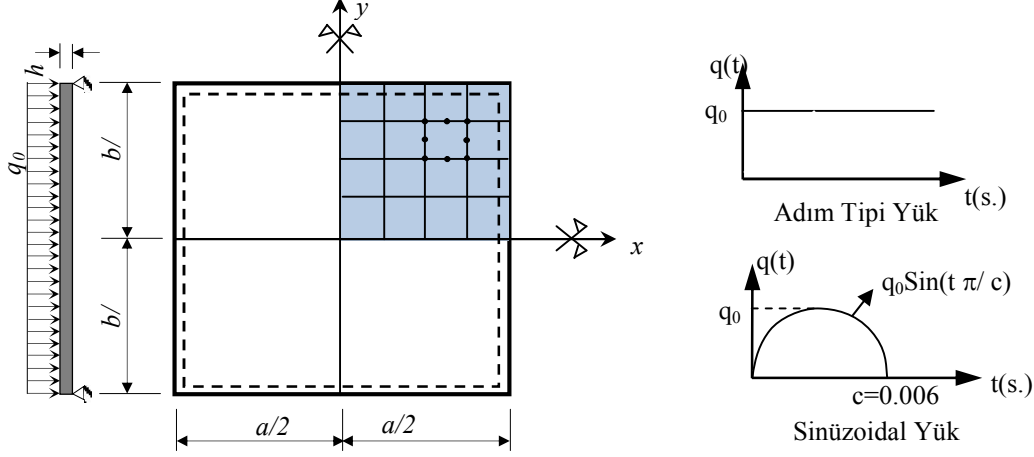
Burada  $E_v$  ve  $G_v$  viskoelastik malzeme sabitleri olup,  $g$  malzemenin viskoz sönüm oranıdır.

## 3. SAYISAL UYGULAMA

Bu bölümde tabakalı kompozit kalın plakların viskoelastik dinamik davranışları incelenecektir. Bu amaçla, zamanla keyfi olarak değişen yükler altındaki ortotropik malzemeye sahip tabakalı kalın plakların, BKDT kullanılarak, SEM ile Laplace uzayında viskoelastik dinamik analizlerini yapan bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan programın doğruluğu literatürde yarı-analitik çözümleri bulunan örnekler üzerinde

gösterilmiştir [23]. İlgili kaynakta anti-simetrik tabakalı plakların BKDT'ye göre Navier yaklaşımı ile hareket denklemleri elde edilmiş; bu denklemlerin sayısal integrasyonları Newmark -adım adım integrasyon- metodu ile yapılmıştır.

Bu uygulamada, kompozit plak aynı malzeme ile eşit kalınlığa sahip tabakalardan oluşturulmuştur. Ele alınan tabakalı plağın sonlu eleman ağı ve dinamik yükleme durumu Şekil 1.'de gösterilmiştir.



(a) Tabakalı kompozit plağın sonlu eleman ağı,

(b) Dinamik Yük

Şekil 1. Düzgün yayılı yüklü plak geometrisi ve yükleme durumu

Geometrik özellikler:  $a=b=1$  m,  $h=0.1$  m ( $a/b=1$ ,  $a/h=10$ ). Malzeme özellikleri:  $E1=25 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>,  $E2=E1/25$ ,  $G12=G13=0.5E2$ ,  $G23=0.2E2$ ,  $\nu=0.25$  ve  $\rho=2000$  kg/m<sup>3</sup>. Düzgün yayılı dinamik yük şiddeti:  $q_0=1000$  N/m<sup>2</sup>. Tabakalı kompozit plağın simetri ve sınır şartları (SS-2) Çizelge 1.'de verilmiştir.

Çizelge 1. Tabakalı kompozit plağın simetri ve sınır şartları

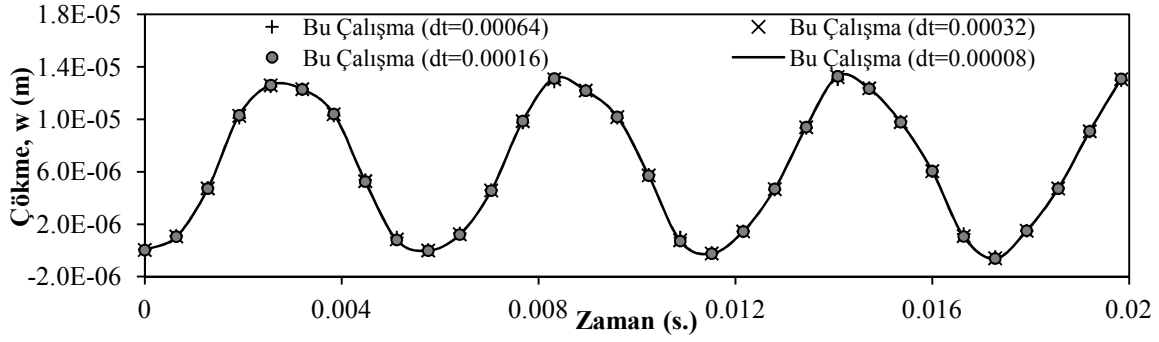
Sınır Şartları	$x=0$	$x=a/2$	$y=0$	$y=b/2$
SS-2	$v_0=0, \phi_x=0$	$u_0=0, w_0=0, \phi_y=0$	$u_0=0, \phi_y=0$	$v_0=0, w_0=0, \phi_x=0$

Uygulamada kenarlarından basit mesnetlenmiş  $(45^\circ/-45^\circ)_4$  şeklinde açılı dört çift tabaka dizilimlerine sahip kompozit plağın dinamik yük etkisi altındaki analizleri, bu çalışmada önerilen metod ve yarı-analitik metod ile yapılmıştır.

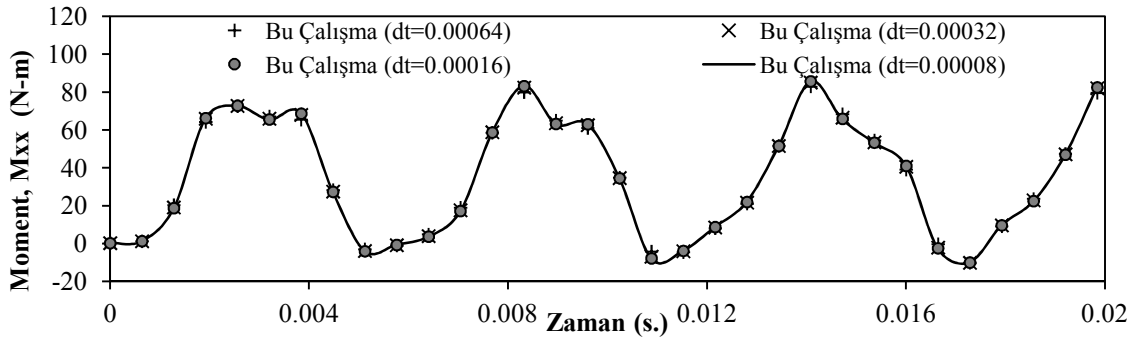
İlk olarak tabakalı plak, adım tipi yük etkisinde çözülecektir. Bu çalışmada önerilen yöntemin doruluğunu test etmek amacıyla, çeşitli zaman artım miktarları için analizler yapılmıştır. Tabakalı plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi Şekil 2'de gösterilmiştir. Tabakalı plak için bu çalışmada önerilen yöntem ile farklı zaman artım miktarları için elde edilen çözümlerin birbiri ile çakıştığı görülmektedir.

Tabakalı plağın orta noktasındaki momentin zamanla değişimi Şekil 3'te gösterilmiştir. Momentlere ait sayısal değerler incelendiğinde, çökmeye benzer şekilde farklı zaman artımları için elde edilen çözümlerin tümünün birbiri ile çakıştığı görülmektedir.

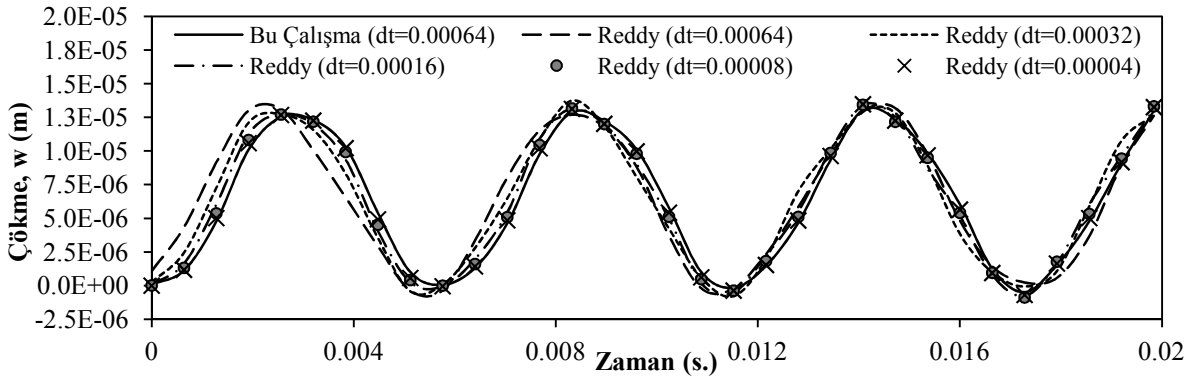
Yarı-analitik yöntem ile farklı zaman artımları için elde edilen değerlerin karşılaştırılması Şekil 4-5'te gösterilmiştir. Şekil 4'te çökme Şekil 5'te ise moment değerleri verilmiştir.



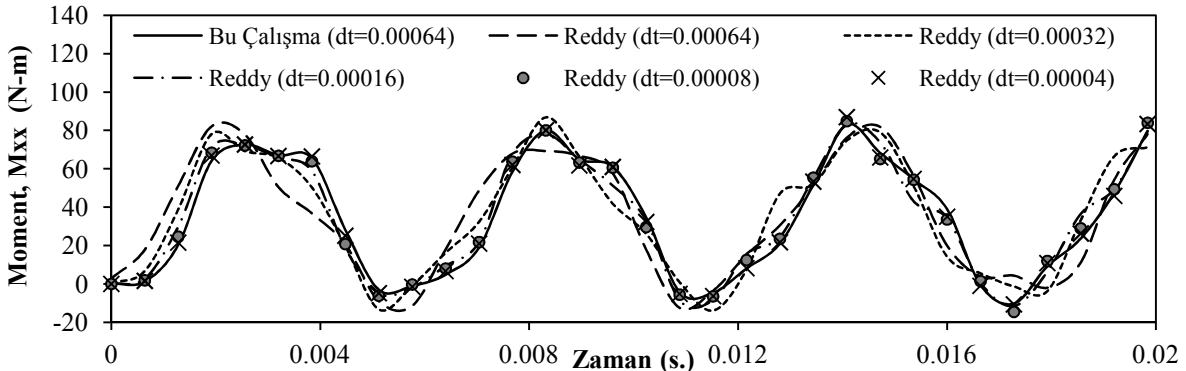
Şekil 2. Tabakalı plak ortasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 3. Tabakalı plak ortasındaki  $M_{xx}$  momentinin zamanla değişimi



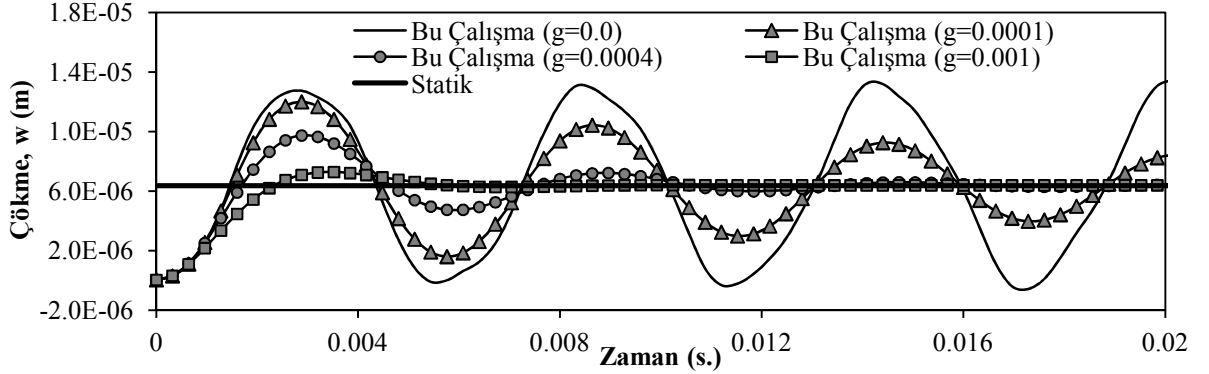
Şekil 4. Tabakalı plak ortasındaki çökmenin zamanla değişimi



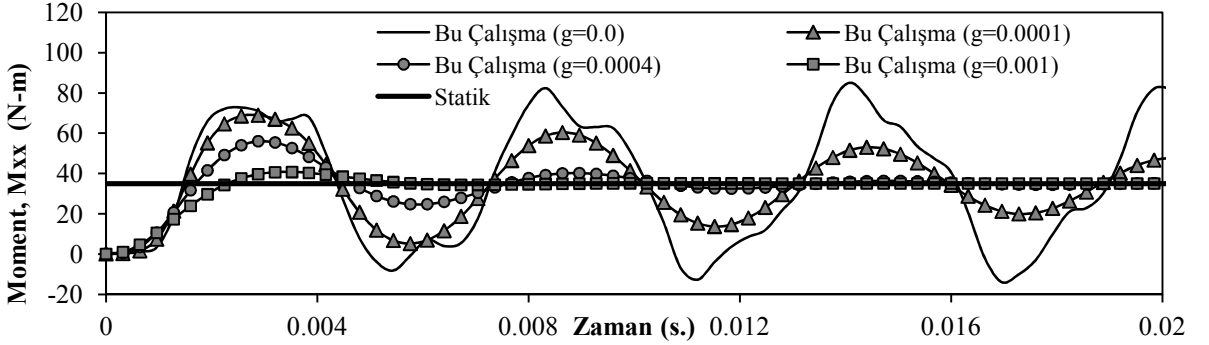
Şekil 5. Tabakalı plak ortasındaki  $M_{xx}$  momentinin zamanla değişimi

Şekil 4-5'in incelenmesinden yarı-analitik yöntem sonuçlarının 0.00004 s. ve daha küçük zaman artım miktarları için tutarlı sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır. Şekillerden görüleceği üzere, Laplace uzayında çok kaba zaman artımı (0.00064 s.) kullanılarak elde edilen değerler ile zaman uzayında yarı-analitik yöntemle çok daha sık zaman artımı (0.00004 s.) kullanılarak elde edilen değerlerin ancak birbiri ile örtüştüğü görülmektedir. Genel olarak bu çalışmada önerilen yöntem ile elde edilen sonuçların, [24-25] çalışmalarına benzer şekilde, yarı-analitik yöntemle elde edilen sonuçlara göre çok daha tutarlı olduğu görülmüştür.

Tabakalı plakların viskoelastik davranışını incelemek amacıyla  $(45^\circ/-45^\circ)_4$  tabaka dizilimi için viskoelastik dinamik analizler yapılmış ve elde edilen çökme ve moment değerlerinin zamanla değişimleri Şekil 6-7'de gösterilmiştir.



Şekil 6. Tabakalı plak ortasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 7. Tabakalı plak ortasındaki  $M_{xx}$  momentinin zamanla değişimi

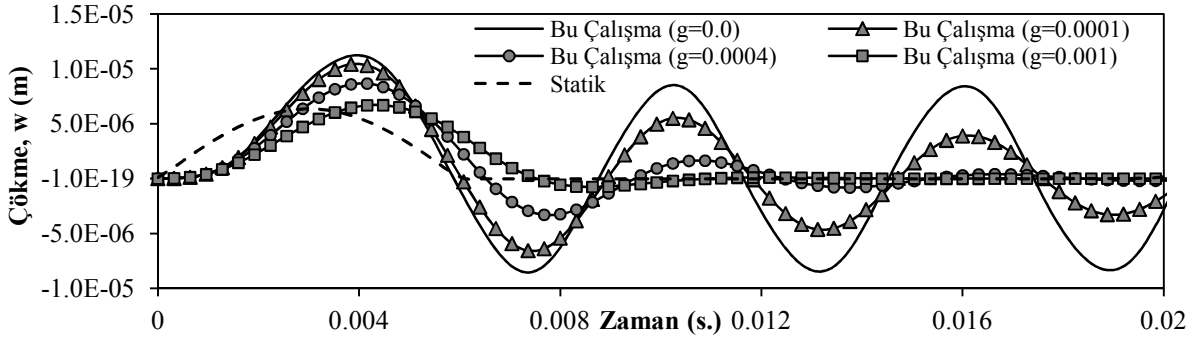
Şekillerde farklı sönüm oranları için viskoelastik çözümler, elastik-dinamik ve statik çözümler de gösterilmiştir. Beklendiği gibi, elastik-dinamik davranışa ait değerler statik değerler etrafında salınımına devam ederken; viskoelastik durumda ise, bu değerlerin salınımı zamanla statik değere yaklaşarak kaybolmaktadır. Şekillerden görüldüğü gibi, sönüm oranının artırılması durumunda titreşim genlikleri statik değere daha çabuk yaklaşmaktadır.

İkinci olarak, sinüzoidal yük etkisindeki tabakalı plakların viskoelastik davranışları incelenmiştir.  $(45^\circ/-45^\circ)_4$  tabaka dizilimleri için sinüzoidal yük etkisindeki plakların viskoelastik dinamik analizleri yapılmış; elde edilen çökme ve moment değerlerinin zamanla değişimleri Şekil 8-9'da gösterilmiştir.

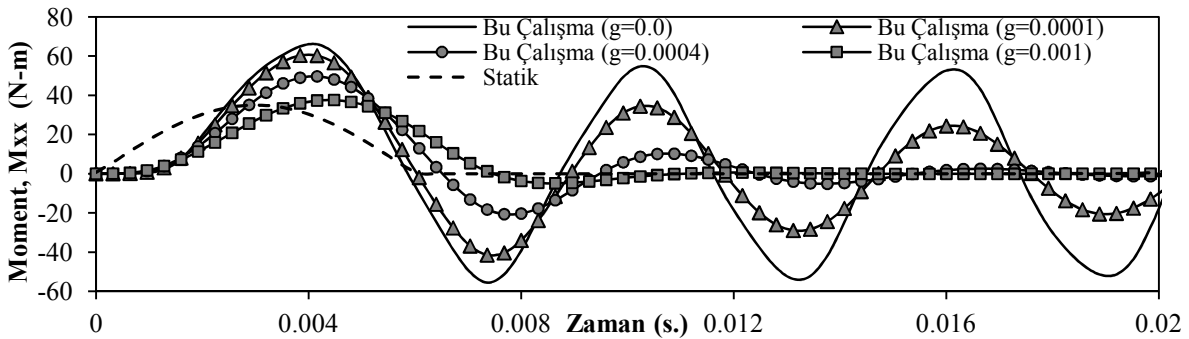
Şekillerde farklı sönüm durumları için viskoelastik çözümler, elastik-dinamik ve statik çözümler gösterilmiştir. Beklendiği gibi, elastik-dinamik davranışa ait çökme ve momentler



statik değerler etrafında salınma devam ederken; viskoelastik durumda ise, titreşim genliği azalarak zamanla statik değere yaklaşmaktadır.



Şekil 8. Tabakalı plak ortasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 9. Tabakalı plak ortasındaki  $M_{xx}$  momentinin zamanla değişimi

#### 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada viskoelastik malzemeye sahip tabakalı ortotropik kalın plakların dinamik davranışları sonlu elemanlar metodu yardımıyla Laplace uzayında araştırılmıştır. Elde edilen çözümler, yarı-analitik metod yardımıyla elde edilen çözümler ile karşılaştırılmıştır. Tabakalı plak malzemesinin ortotropik ve lineer elastic veya viskoelastik olduğu kabulleri yapılmıştır. Sistemi idare eden hareket denklemleri SEM kullanılarak zaman uzayında elde edilmiştir. Ardından, sistem hareket denklemlerine Laplace dönüşümü uygulanarak elde edilen lineer cebrik denklem takımı bir dizi Laplace parametresi için dönüşmüş uzayda çözülmektedir. Bu çalışmada viskoelastik malzeme için Kelvin sönüm modeli uygulanmıştır. Viskoelastik malzeme durumunda elastik sabitler, elastik-viskoelastik analogisi yardımıyla, Laplace uzayında kompleks karşılıkları ile yer değiştirmektedir. Laplace uzayından zaman uzayına geçiş için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm metodu kullanılmıştır. Bu çalışmada önerilen metodun esasları doğrultusunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Laplace dönüşüm uygulanarak, dinamik problem statik hale dönüşmekte ve böylece Laplace uzayında elde edilen lineer denklem takımı sayısal olarak çözülebilmektedir. Dinamik yükleme altındaki problemlerde sönüm etkisi, Laplace uzayında kolay bir şekilde ele alınabilmektedir. Ayrıca, Laplace uzayındaki analizlerde doğal titreşim periyotları ve mod şekillerine de ihtiyaç duyulmamaktadır.

Navier yaklaşımı ile elde edilmiş hareket denklemlerinin Newmark- adım adım integrasyon-yöntemi ile bulunan sonuçların doğruluğu, zaman artım miktarının uygun olarak seçilmesine bağlıdır. Bu nedenle doğru zaman artım miktarının seçilmesi önemlidir. Bu çalışmada

önerilen metod ile kaba zaman artım miktarları kullanılsa bile, istenilen hassasiyete sahip çözümler elde edilebilmektedir. Bu durum, bu çalışmada önerilen yöntemin adım adım integrasyon yöntemlerine göre çok daha etkin olduğunu göstermektedir.

Bu çalışmada, SEM ile elde edilen hareket denklemlerine Laplace dönüşümü uygulanması ve ardından Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi uygulanması ile oldukça etkin ve doğru sonuçlar elde edilebildiği literatürdeki çeşitli sayısal yöntemler ile karşılaştırılarak gösterilmiştir.

### TEŞEKKÜR

Bu çalışma (Proje No: MMF-2009-D8) Çukurova Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenmiştir.

### KAYNAKLAR

- [1] Reddy J.N., "On the solutions to forced motions of rectangular composite plates", ASME J. Appl. Mech. 1982;49:403–408.
- [2] Khdeir A.A., Reddy J.N., "On the forced motions of antisymmetric cross-ply laminated plates", Int. J. Mech. Sci. 1989;31:499–510.
- [3] Barrett D.J., "An anisotropic laminated damped plate theory", J. Sound Vib. 1992;154:453–465.
- [4] Khalili M.R., Malekzadeh K., Mittal R.K., "A new approach to static and dynamic analysis of composite plates with different boundary conditions", Compos. struct. 2005;69:149–155.
- [5] Khdeir A.A., "Forced Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates with Various Boundary Conditions", J. Sound Vib. 1995;188:257–267.
- [6] Reddy J.N., "Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates", Int. J. Numer. Meth. Eng. 1983;19(2):237–255.
- [7] Mohebpour S.R., Malekzadeh P., Ahmadzadeh A.A., "Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to a moving oscillator by FEM", Compos. struct. 2011;93:1574–1583.
- [8] Makhecha D.P., Ganapathi M., Patel B.P., "Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to thermal/mechanical loads using an accurate theory", Compos. struct. 2001;51:221–236.
- [9] Owen D.R.J., Li Z.H., "Elastic-plastic dynamic analysis of anisotropic laminated plates", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1988;70(3):349–365.
- [10] Zabarar N., Pervez T., "Viscous damping approximation of laminated anisotropic composite plates using the finite element method", Methods Appl. Mech. Engrg. 1990;81:291–316.
- [11] Kant T., Arora C.P., Varaiya J.H., "Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and a mode superposition method", Compos. struct. 1992;22(2):109–120.
- [12] Malekzadeh P., Fiouz A.R., Razi H., "Three-dimensional dynamic analysis of laminated composite plates subjected to moving load", Compos. struct. 2009;90:105–114.
- [13] Wang Y.Y., Lam K.Y., Liu G.R., "A strip element method for the transient analysis of symmetric laminated plates", Int J Solids Struct. 2001;38(2):241–259.

- [14] Wang Y.Y., Lam K.Y., Liu G.R., "The effect of rotatory inertia on the dynamic response of laminated composite plate", *Compos. struct.* 2000;48:265–273.
- [15] Liew K.M., He X.Q., Tan M.J., Lim H.K., "Dynamic analysis of laminated composite plates with piezoelectric sensor/actuator patches using the FSDT mesh-free method", *Int. J. Mech. Sci.* 2004;46:411–431.
- [16] Cederbaum G., Aboudi J., "Dynamic response of viscoelastic laminated plates", *J. Sound Vib.* 1989;133(2):225–238.
- [17] Narayanan G.V., "Numerical operational methods in structural dynamics", Ph.D. thesis, Minneapolis: University of Minnesota, 1979.
- [18] Durbin F., "Numerical inversion of Laplace transforms: An Efficient improvement to Dubner and Abate's method", *Comput. J.* 1974;17:371–376.
- [19] Temel B., "Transient analysis of viscoelastic helical rods subject to time-dependent loads", *Int. J. Solids Struct.* 2003;41:1605–1624.
- [20] Şahan M.F., *Viskoelastik kompozit plakların laplace uzayında dinamik analizi*. Doktora Tezi, Adana: Çukurova Üniversitesi, 2012.
- [21] Boley B.A., Weiner J.H., "Theory of thermal stresses", New York: John Wiley and Sons, 1960.
- [22] Temel B., Çalım F.F., Tütüncü N., "Quasi-static and dynamic response of viscoelastic helical rods", *J. Sound Vib.* 2004;271:921–935.
- [23] Reddy J.N., "Mechanics of laminated composite plate and shells: theory and analysis", Second ed. Boca Raton: CRC Press, 2004.
- [24] Temel B., Şahan M.F., "Transient analysis of orthotropic viscoelastic thick plates in the Laplace domain", *Eur. J. Mech. A-Solid.* 2013;37:96–105.
- [25] Temel B., Şahan M.F., "An alternative solution method for the damped response of laminated Mindlin plates", *Composite: Part B.* 2013;47:107–117.